

# O dardo no computador

JOÃO PAIVA e CARLOS FIOLEAIS

Departamento de Física da Universidade de Coimbra - 3000 COIMBRA

Não fosse uma mudança de legislação da Federação Internacional de Atletismo Amador (FIRA) em 1991, estabelecendo um dardo com novas características, e teríamos hoje valores impressionantes de recordes mundiais de lançamento do dardo. E, com um pouco de imaginação, não fosse essa intervenção da FIAA, poderíamos imaginar um dardo a sair para além dos limites do estádio olímpico de Atlanta em 1996, caindo na cabeça de um qualquer espectador inocente...

O finlandês Seppo Raty, fazendo jus à fama do seu país nesta disciplina do atletismo, alcançou em 2 de Julho de 1991 a marca de 96,96 m. Acrescentou «só» cerca de 5 m ao seu anterior recorde estabelecido em Shizvoka dois meses antes. Numa crónica desportiva do jornal «Público», em 4 de Julho de 1991, lê-se a elucidativa manchete a propósito do lançamento do dardo: «Avançar vinte anos num só mês»...

Uwe Hohn tinha chegado a 104,8 m em 1984 mas usando um modelo de dardo, o «planador», entretanto proibido pela FIAA. O facto do dardo planar, inclusivamente contra o vento, permitia alcances excepcionais no lançamento. Em 1986 a FIAA impôs aos atletas o modelo «picador». Depois de atingida a altura máxima, o dardo « picador» cairia mais «a pique», percorrendo uma menor distância horizontal.

O modelo «picador» foi aperfeiçoado pelos técnicos da modalidade; as suas modificações «laterais», sem contrariar as especificações do engenho impostas pela Federação, permitiram que estes, afinal, planassem. O modelo usado por Raty, por exemplo, introduz uma pequena tira de tecido com cerca de um milímetro de espessura, que facilitava uma certa turbulência à volta do dardo e o fazia planar melhor.

Estes modelos de dardo conhecidos por «picadores modificados» acabaram por ser proibidos pela intervenção da FIAA em 1991. O recorde de Raty não foi homologado, apenas sendo aceites os valores obtidos com o modelo estrito, liso, aprovado inicialmente.

O actual recorde mundial pertence ao checo Zelezny e cifra-se se em 94,74 m, alcançados no «meeting» de Oslo em 4 de Julho de 1992. A sua marca nos recentes Jogos Olímpicos de Barcelona, que venceu, ficou bem aquém desse valor: 89,66 m. Dizem os entendidos que na origem desta diferença de marcas estão os chamados anabolizantes... Nos jogos olímpicos, os grandes lançadores não ousam tomá-los!

Nenhuma outra disciplina de atletismo se viu confrontada com tão incríveis melhoramentos nos resultados dos atletas. Foi este facto que levou a Federação Internacional de Atletismo a colocar um autêntico travão na série de recordes. A tabela 1 apresenta uma síntese das marcas mais significativas obtidas nos últimos tempos na modalidade do dardo.

TABELA 1

Alcance (m)	Ano	Lançador	Tipo de dardo	Observações
90,98	1964	Joma Kinnuinen	tradicional	recorde mundial
91,72	1970	Pedersen	tradicional	recorde mundial
96,72	1983	Ferenc Paragi	tradicional	recorde mundial
99,72	1983	Petranoff	planador	não homologado
104,80	1983	Uwe Hohn	planador	não homologado
81,72	1986	Seppo Raty	picador	
83,94	1990	Seppo Raty	picador	
89,58	1990	Steve Backley	picador	recorde mundial
96,96	1991	Seppo Raty	picador modificado	não homologado
94,74	1992	Zelezny picador		recorde mundial

O rigor dos actuais regulamentos incide essencialmente na forma e na massa do dardo, pois estes factores estavam na base das recentes marcas espectaculares, mais do que a condição física dos atletas.

A fig. 1 evidencia esse rigor: desde a ponta aguçada do dardo até ao extremo oposto, um conjunto enorme de medidas são apresentadas com tolerâncias dadas com uma precisão de milímetros (ref. (1)). Acresce ainda idêntico cuidado no que toca às massas das diversas partes do engenho.

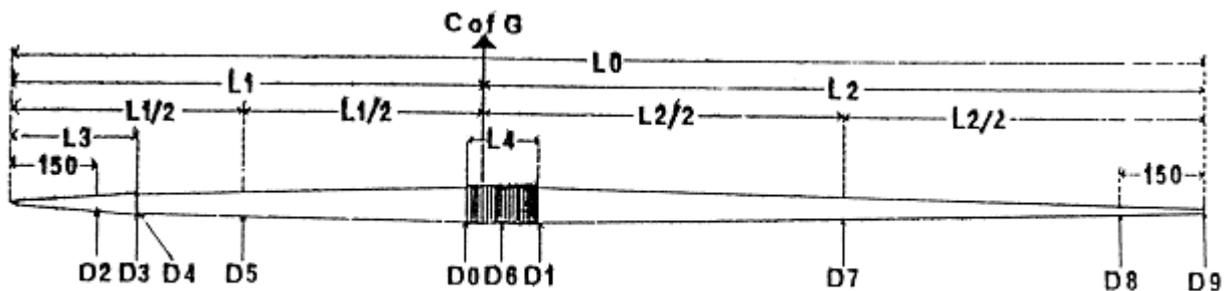


Fig. 1 --- Forma e medidas do dardo exigidas pela FIAA v. Tabela 2

Note-se que o centro de massa do dardo não se situa no centro geométrico (para confirmar este facto, basta pendurar um dardo oficial pelo seu centro geométrico e verificar que ele não fica horizontal...). O estudo do lançamento de um dardo considerando a dinâmica de um corpo rígido justifica essa opção.

O dardo é pois um objecto físico complicado. A nossa reflexão, porém, irá incidir na consideração cinemática do problema, entendendo o dardo como um projectil simples que se lança, procurando o maior alcance possível, duma altura inicial diferente de zero e enfrentando a resistência do ar. Em vez de uma descrição muito realista preferimos concentrar a atenção nesses dois aspectos essenciais para o alcance de um projectil, muito frequentemente ignorados nos manuais escolares de física.

O estudo do lançamento do dardo nesta perspectiva pode revelar-se de grande interesse para o ensino da Física. Por exemplo, a opção de desporto das nossas escolas secundárias revela uma enorme taxa de insucesso na disciplina de Física. Talvez fosse motivador introduzir a esses alunos o lançamento de projecteis à volta da problemática dos lançamentos no atletismo, mostrando a ligação da física ao desporto. Os novos currículos para o ensino secundário e o trabalho de projecto que os alunos irão desenvolver no âmbito da Área-Escola vêm de encontro a este tipo de abordagem.

Para tal, entendemos que é eficaz uma ferramenta que leve os alunos a visualizar o problema, e a conceber e executar numa sala de aula experiências difíceis de levar a cabo doutro modo. Essa ferramenta é o computador pessoal.

A trajectória de um projectil lançado do solo, num campo gravítico uniforme e sem resistência do ar, é uma parábola de altura  $\frac{v^2 \sin^2(\theta)}{2g}$  e alcance  $\frac{v^2 \sin(2\theta)}{g}$  (com  $v$  o módulo da velocidade inicial,  $\theta$  o ângulo de tiro e  $g$  a aceleração da gravidade). O projectil demora exactamente o mesmo tempo a subir e a descer. O ângulo que corresponde ao alcance máximo é  $45^\circ$ .

Mas na realidade o lançamento não é efectuado do nível do solo e a resistência do ar deve ser considerada. O que acontece então quando o projectil é lançado de uma outra altura inicial e existe essa resistência? Será, por exemplo, que o ângulo óptimo de tiro é menor? Reparar que se trata de dois problemas distintos e para estudar um efeito é preciso manter constante a variável de que depende o outro.

Um programa de computador muito simples, com meia dúzia de linhas em linguagem BASIC, pode produzir um écran semelhante ao da figura 3 e responder à questão acima formulada. Outros programas mais sofisticados podem ser usados com as vantagens de serem

mais completos e produzirem melhores resultados mas com a desvantagem de esconderem do aluno a formulação físico-matemática do problema. Pelo contrário, o programa em BASIC na sua versão não compilada permite ao aluno verificar facilmente os algoritmos e mudar de forma muito simples os parâmetros adequados. Edward Redish, no seu artigo «Using Computers in Teaching Physics» (2), evidencia a excelente qualidade pedagógica deste tipo de computação no ensino, graças ao elevado nível interactivo que se estabelece entre o aluno e o programa.

Para um objecto esférico, a força de resistência,  $\vec{F}_r$ , cujo sentido é oposto ao da velocidade, tem uma grandeza proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F}_r = -Bv\vec{v} \quad (1)$$

com  $v$  a velocidade do projectil e  $B$  uma constante tal que  $B = (1/4) \cdot \rho_{ar} \cdot \pi r^2$ , sendo  $\rho_{ar}$  a densidade do ar e  $r$  o raio do objecto. Embora não seja correcto tratar o dardo como uma esfera (já no lançamento do peso o projectil é uma esfera), a modelação da força resistente pela fórmula (1) permite uma primeira aproximação ao problema da resistência do ar.

A fig. 2 representa três trajectórias possíveis de um dardo lançado de 2 m de altura, com uma velocidade inicial de 30 m/s e sujeito a uma certa força de atrito «empírica»  $B/m = 0,00145 \text{ N}/(\text{m}^2 \text{ s}^{-2})$  com  $m$  a massa do objecto.

A trajetória do projétil não é agora uma parábola. O ângulo que corresponde ao alcance máximo pode ser procurado por tentativas. Conclui-se que, para as condições dadas, é aproximadamente 44,5°. É curioso notar que os bons atletas efectuam os seus lançamentos com um ângulo muito próximo de 45° (pode verificar-se esse facto no registo vídeo de um prova, se a câmara estiver estrategicamente colocada). Eles adquiriram hábitos de lançamento adequados à obtenção do máximo compatível com as leis da mecânica, que são simuladas no computador.

Lançamento 1	Lançamento 2	Lançamento 3
Gravidade (Terra=1)1	Gravidade (Terra=1)1	Gravidade (Terra=1)1
Resistência (Terra =1)1	Resistência (Terra=1)1	Resistência (Terra=1)1
Altura inicial = 2	Altura inicial = 2	Altura inicial = 2
Ângulo de tiro = 43	Ângulo de tiro = 44.5	Ângulo de tiro=45
x = 85.00	x = 85.02	x = 84.86



Fig. 2 - Trajetórias e alcances respectivos para três lançamentos a 2 m de altura, tendo em conta a resistência do ar. Notar que o ângulo óptimo (para maior alcance) é 44,5° e não 45°, como aconteceria sem altura inicial e sem resistência do ar.

Vejamos em separado o efeito da altura inicial e da resistência do ar:

i) Considerando a resistência do ar inexistente, é fácil verificar que num lançamento acima do solo o ângulo de tiro óptimo é ligeiramente inferior a 45°, uma vez que o problema é analiticamente solúvel. Tem-se a seguinte relação entre o alcance máximo  $R$  e o ângulo óptimo  $\theta_{max}$ :  $R = h \operatorname{tg}(2\theta_{max})$ . O alcance máximo é ainda dado em função da velocidade inicial e da altura  $h$  por  $R = v^2(1+2g h/v^2)^{1/2}/g$ . (ver refs. 3 e 4). A fig. 3, obtida por simulação, elucida este facto, corroborando o resultado analítico.

Com efeito a previsão analítica e  $\theta_{max} = 44,4^\circ$  ao passo que o resultado da simulação é 44,5°; a pequena discrepância deve-se a erros da técnica numérica.

Lançamento 1	Lançamento 2	Lançamento 3
Gravidade (Terra = 1)1	Gravidade (Terra = 1)1	Gravidade (Terra = 1)1
Resistência (Terra = 1)0	Resistência (Terra = 1)0	Resistência (Terra = 1)0
Altura inicial = 2	Altura inicial = 2	Altura inicial = 2
Ângulo de tiro = 43	Ângulo de tiro = 44.5	Ângulo de tiro = 45
$z = 93.46$	$x = 93.72$	$z = 93.55$



Fig. 3 - Trajectórias e alcances respectivos para três lançamentos a 2 m de altura e sem resistência do ar. Notar que o ângulo óptimo (para maior alcance) é 44,5° e não 45°, como aconteceria sem altura inicial.

ii) A presença da resistência do ar diminui drasticamente o alcance do projétil. Já o efeito da resistência do ar no que toca ao ângulo óptimo é negligenciável (ver refs. 3 e 4). A fig. 2, quando comparada com a fig. 3, evidencia o que acaba de ser dito, uma vez que o ângulo óptimo continua a ser 44,5° (a ref. 7 contém um erro na p. 177).

Ao leitor deixamos o desafio de programar o lançamento de um dardo, usando, por exemplo, o algoritmo de Euler (ver refs. 5, 6 e 7) e resolver, entre outros, os seguintes problemas:

**A** - Qual é a velocidade inicial necessária a um atleta masculino cuja mão lança o dardo a 2,20 m de altura para obter o recorde mundial de 94,76 m registado por Jan Zelezny no último «meeting» de Oslo? A resistência do ar pode descrever-se por uma força proporcional ao quadrado da velocidade, com o coeficiente de proporcionalidade atrás indicado e o lançador utiliza o ângulo óptimo para a sua situação.

Este é o exemplo de um «problema inverso» em Física: sabem-se as condições finais e procuram-se as condições iniciais, que têm de ser encontradas por tentativas.

**B** - Qual seria o recorde que o mesmo atleta. obteria em jogos olímpicos realizados na Lua (onde não há atmosfera), se lançasse o dardo com a mesma velocidade inicial e o

mesmo ângulo de **A** ? E qual seria o recorde em Marte ? (Nota: pode averiguar qual é a densidade da atmosfera de Marte e adaptar o coeficiente empírico para a força resistente).

O leitor é ainda convidado a ficar atento à leitura dos jornais para investigar qual é a melhoria da velocidade inicial quando se estabelecer o próximo recorde do mundo. Um «super-leitor» poderá usar a **Tabela 2** e considerar o dardo como um corpo rígido.

**DARDO INTERNACIONAL PADRÃO**  
**Comprimentos (dimensões em mm)**

índice	Detalhe	Homens		Mulheres	
		Máx.	Mín.	Máx.	Mín.
L0	comprimento	2700	2600	2300	2200
L1	da ponta até ao centro de gravidade	1060	900	950	800
L1/2	metade de L1	530	450	475	400
L2	da cauda até ao centro de gravidade	1800	1540	1500	1250
L2/2	metade de L2	900	770	750	625
L3	comprimento da ponta de metal	330	250	330	250
L4	corda	160	150	150	140

**Diâmetros (dimensões em mm)**

índice	Detalhe	Homens		Mulheres	
		Máx.	Mín.	Máx.	Mín.
D0	na frente da corda	30	25	25	20
D1	atrás da corda	-	DO-0.25	-	DO-0.25
D2	150mm depois da ponta	0.8 DO	-	0.8 DO	-
D3	na cauda da ponta de metal	-	-	-	-
D4	imediatamente atrás da ponta de metal	-	D3-0.25	-	D3-0.25
D5	metade da distância entre a ponta e o centro de gravidade	0.9 DO	-	0.9 DO	-
D6	em cima da corda	D0+8	-	D0+8	-
D7	metade da distância entre a cauda e o centro de gravidade	-	0.9 DO	-	0.9 DO
D8	150mm antes da cauda	-	0.4 DO	-	0.4 DO
D9	na cauda	-	3.5	-	3.5

**Tabela 2**

Este tipo de problemas ilustra algumas das possibilidades que o computador abriu para o ensino e aprendizagem da Física. Já que certas experiências reais são difíceis de concretizar (pode ter-se um estádio de atletismo, ou uma

câmara de vídeo, mas já não uma nave espacial para ir à Lua...), utiliza-se um computador para «realizar» essas experiências. No «software» incorporam-se as leis da física e condições iniciais ou finais mais ou menos realistas. As técnicas de exploração

computacional deveriam, na nossa opinião, ser ensinadas e aplicadas na escola paralelamente aos cálculos analíticos e à experimentação directa.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1] Documento da Associação Internacional de Atletismo, com a regulamentação sobre o lançamento do dardo, cedido pela FPA (Federação Portuguesa de Atletismo).

[2] E. REDISH, «Using Computers in Teaching Physics», *Physics Today*, Jan, p. 34 (1989).

[3] R. BROWN, «Maximizing the Range of a Projectile», *The Physics Teacher*, vol. 30, p. 344 (1992).

[4] D. LICHTENBERG e J. G. LEIBERMAN, «Maximizing the range of a shot put», *Am. J. Phys.* 46, 546 (1978).

[5] C. FIALHIS e J. PAIVA, «Galileu, Aristóteles e a queda dos graves», *Gazeta da Física*, vol. 15, p. 28 (1992).

[6] H. GOULD e J. TOBOCHNIK, «An introduction to computer simulation methods-applications to physical systems», vol. 1, Addison Wesley, 1988.

[7] C. FIALHIS, «Física Divertida», Gradiva, Lisboa, 3.ª edição, 1992.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos as informações sobre o dardo fornecidas pela Federação Portuguesa de Atletismo e pelo Sr. João Mata, da delegação de Coimbra da Direcção Geral de Desportos. Agradece-se ainda a colaboração do Dr. Moreira Gonçalves numa versão preliminar deste artigo.