

Soluções analíticas para a propagação do som em espaços bidimensionais e tridimensionais

António Tadeu, Julieta António e Luis Godinho

*Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil
Pinhal de Marrocos, 3000 Coimbra, Portugal*

RESUMO

Um problema de propagação de ondas de pressão pode ser resolvido com a ajuda de expressões denominadas funções de Green. Estas funções definem a relação entre variáveis (pressões e velocidades) em determinado ponto no espaço resultante de variações harmónicas de pressão (forças) posicionadas algures no meio de propagação. Estas funções são frequentemente definidas para variações de pressão tridimensionais (forças pontuais) em espaços infinitos e variações lineares harmónicas de pressão actuando em espaços bidimensionais. Estas escolhas devem-se à possibilidade da definição analítica deste tipo de funções. Considerando que a propagação do som se processa na presença de barreiras perfeitamente reflectoras poderá considerar-se a existência de fontes virtuais posicionadas de modo a verificarem as condições fronteiras necessárias. Este artigo resume um conjunto destas soluções para espaços tridimensionais e bidimensionais. Além destas expressões este artigo apresenta soluções para fontes harmónicas lineares cuja amplitude varia de forma sinusoidal na terceira dimensão. Este tipo de solução é frequentemente referido como problema $2\frac{1}{2}D$, útil no cálculo de soluções tridimensionais através do Método dos Elementos Fronteira.

1. INTRODUÇÃO

As frequências envolvidas no estudo acústico de espaços abertos ou confinados limitam o uso da maior parte das técnicas do estudo da propagação de ondas, tais como os métodos de elementos finitos e as diferenças finitas, dado o esforço de cálculo necessário. O estudo da propagação do som em espaços fechados recorre com frequência a técnicas denominadas de “ray tracing” e “image model” (Allen 1979, Hammad 1988, Kulowski 1985).

No caso do “ray tracing” apenas um número finito de raios sonoros são traçados entre a fonte emissora e o receptor. Deste modo, o resultado da simulação pode ser obtido com razoável tempo de cálculo, mesmo na presença de geometrias mais elaboradas. Contudo, revela-se difícil determinar qual o número de raios a estudar, pelo que diferentes resultados podem ser obtidos para o mesmo modelo geométrico. Acrescente-se que alguns dos raios com interesse para a resposta final podem, à partida, não ser incluídos na análise (Kulowski 1982).

Na técnica de “image model”, o campo sonoro pode ser calculado para todas as combinações de paredes reflectoras, pelo que a incerteza envolvida na técnica de “ray tracing” não se encontra presente. Contudo, o estudo para modelos de geometrias complexas revela-se complicado e com cálculo demorado caso reflexões de ordem superior sejam consideradas.

No presente trabalho, a técnica de “image model” é utilizada para determinar soluções analíticas para a propagação do som em espaços tridimensionais e bidimensionais na presença de fontes sonoras pontuais e lineares. O caso em que as fontes harmónicas lineares variam de forma sinusoidal na terceira dimensão é também considerado. Estas últimas soluções permitem resolver problemas tridimensionais na presença de espaços bidimensionais através do cálculo de um somatório de soluções bidimensionais. Estas equações são de extrema utilidade no cálculo de soluções numéricas através do Método dos Elementos Fronteira (Tadeu et al.).

As soluções são apresentadas no domínio da frequência, sendo os sinais sonoros no tempo calculados através da aplicação da Transformada Inversa de Fourier. Frequências complexas ($\omega_c = \omega - i\eta$) são utilizadas na determinação dos sinais acústicos permitindo minimizar a influência de fontes sonoras virtuais necessárias à determinação das respostas através da técnica de “image model”. O efeito da presença da parte complexa da frequência é tida em consideração no domínio do tempo através da mudança de escalas com o auxílio da aplicação de uma função exponencial $e^{\eta t}$.

Este artigo apresenta soluções analíticas de fontes tridimensionais na presença de barreiras que permitem modelar desde um espaço semi - infinito até à situação da existência de um compartimento paralelepédico. Apresenta-se para estes mesmos modelos, a resposta acústica na presença de uma pressão linear com variação sinusoidal em z. Descreve-se de forma breve o tipo de pulso acústico modelado no domínio do tempo e em frequência. O artigo termina apresentando um conjunto de exemplos ilustrativos do tipo de soluções desenvolvidas.

2. CAMPO INCIDENTE GERADO POR UMA FONTE PONTUAL

Considere-se um espaço infinito homogéneo, sujeito no ponto (x_0, y_0, z_0) a uma variação de pressão $p(\omega, x, y, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)e^{i\omega t}$. Nesta expressão, $\delta(x)$, $\delta(y)$ and $\delta(z)$ são funções Delta de Dirac. A pressão sonora irradiada por esta fonte pode ser descrita pela equação

$$p(\omega, x, y, z, t) = \frac{Ae^{i\omega\left(\alpha - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (1)$$

em que A é a amplitude da onda, α é a velocidade de propagação, e $i = \sqrt{-1}$.

Considerando que esta fonte acústica é colocada na presença de barreiras perfeitamente reflectoras, poderão utilizar-se fontes virtuais colocadas em posições que permitam verificar as condições fronteira (fluxos de pressão nulos), e calcular a resposta através do somatório dos campos acústicos gerados por cada uma das fontes. As expressões seguintes traduzem a solução resultante num conjunto de cenários, cujo número de barreiras vai aumentando até permitir a simulação da propagação do campo de pressões gerado no interior de um compartimento paralelepédico de dimensões d_1, d_2 e d_3 . Nestas equações é

usada a relação $r_{ijk} = \sqrt{\left(\underline{x}_i\right)^2 + \left(\underline{y}_j\right)^2 + \left(\underline{z}_k\right)^2}$, função de i, j, k, l, m e n, definida no Apêndice.

2.1. Barreira horizontal na posição $y = 0$ (Figura 1a).

$$p(\omega, x, y, z) = A \sum_{j=0}^1 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \quad (i = 0, k = 0, n = 0) \quad (2)$$

2.2. Canto criado por uma barreira vertical posicionada em $x = d_l$ e outra horizontal em $y = 0$ (Figura 1b).

$$p(\omega, x, y, z) = A \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \quad (k = 0, n = 0, m = -1) \quad (3)$$

2.3. Camada limitada por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ (Figura 1c).

$$p(\omega, x, y, z) = A \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{000}}}{r_{000}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right\} \quad (i = 0, k = 0) \quad (4)$$

O número de fontes usado (NSV) é determinado de modo a permitir que todos os sinais necessários para definir a resposta no intervalo de tempo fixado pelo incremento de frequência ($T = 1/\Delta f$) são tidos em consideração.

2.4. Camada limitada por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ e outra vertical na posição $x = d_l$ (Figura 1d).

$$p(\omega, x, y, z) = A \sum_{i=0}^l \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{i00}}}{r_{i00}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right\} \quad (k = 0, m = -1) \quad (5)$$

2.5. Túnel criado por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ e verticais nas posições $x = 0$ e $x = d_l$ (Figura 1e).

$$p(\omega, x, y, z) = A \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{000}}}{r_{000}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{0jk}}}{r_{0jk}} \right] + \sum_{m=1}^{NSH} \left\{ \sum_{i=0}^4 \left[\frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{i00}}}{r_{i00}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right] \right\} \right\} \quad (k = 0) \quad (6)$$

Do mesmo modo que anteriormente, NSH, representa o número de fontes utilizadas na direcção horizontal, permitindo que todos os sinais necessários para definir a resposta no intervalo de tempo fixado pelo incremento de frequência são considerados.

2.6. Túnel criado por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ e verticais nas posições $x = 0$ e $x = d_l$, e limitado em z por barreira posicionada em $z = d_3$ (Figura 1f).

$$p(\omega, x, y, z) = A \sum_{k=0}^1 \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{00k}}}{r_{00k}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{0jk}}}{r_{0jk}} \right] + \sum_{m=1}^{NSH} \left\{ \sum_{i=0}^4 \left[\frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{i00}}}{r_{i00}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right] \right\} \right\} \quad (l = -1) \quad (7)$$

2.7. Compartimento limitado por barreiras horizontais posicionados em $y=0$ e $y=d_2$ e verticais nas posições $x=0$, $x=d_1$, $z=0$ e $z=d_3$ (Figura 1g).

$$p(\omega, x, y, z) = A \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{000}}}{r_{000}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{0jk}}}{r_{0jk}} \right] + \sum_{m=1}^{NSH} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{i00}}}{r_{000}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right\} \right\} + A \sum_{l=0}^{NSZ} \left\{ \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{00k}}}{r_{00k}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{0jk}}}{r_{0jk}} \right] + \sum_{m=1}^{NSH} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{i0k}}}{r_{00k}} + \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r_{ijk}}}{r_{ijk}} \right] \right\} \right\} \right\} \quad (8)$$

NSZ representa o número de fontes utilizadas na direcção z necessárias à correcta definição do sinal acústico.

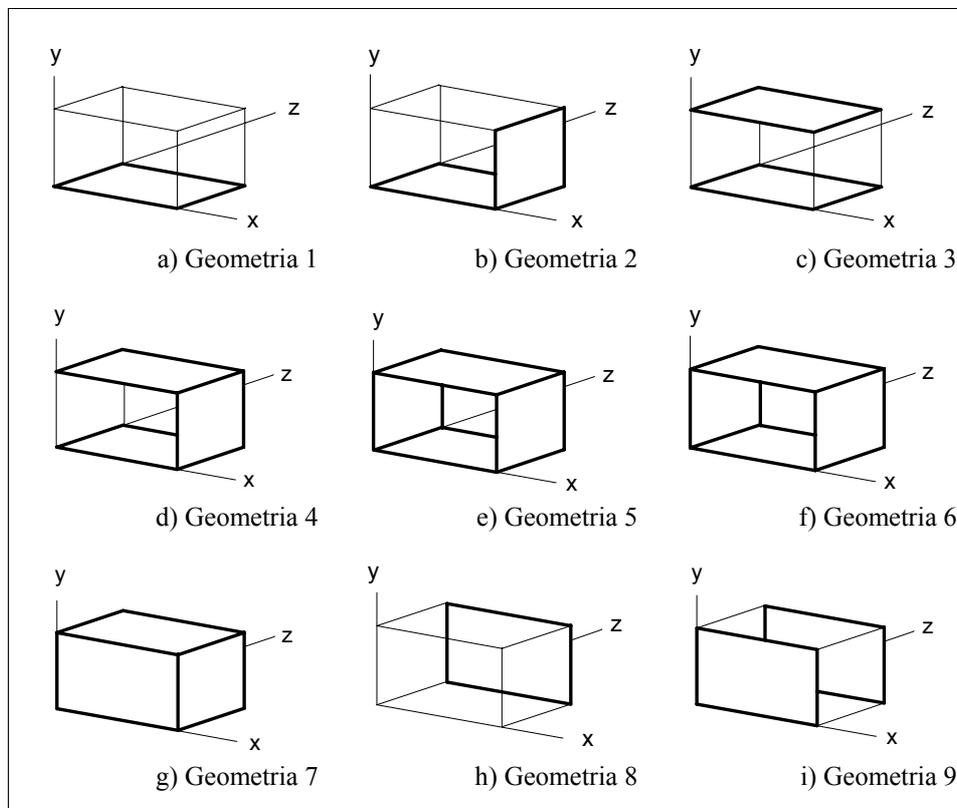


Figura 1 - Modelos Estudados.

3. CAMPO INCIDENTE GERADO POR UMA FONTE LINEAR COM VARIAÇÃO ESPACIAL EM Z.

Considere-se um espaço infinito homogéneo sujeito a uma pressão linear com variação espacial em z, $p(\omega, x, y, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)e^{i(\omega t - k_z(z - z_0))}$, em que k_z é o comprimento de onda em z. Esta carga actua no ponto (x_0, y_0) e varia de forma sinusoidal na direcção z (Figura 2). A resposta a esta carga pode ser obtida através da aplicação da transformada de Fourier na direcção z.

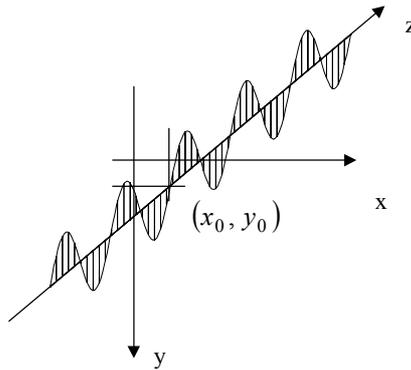


Figura 2 - Fonte linear com variação espacial em z.

Definindo o comprimento de onda efectivo

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_z^2}, \quad \text{Im } k_\alpha < 0 \quad (9)$$

através do comprimento de onda axial k_z , e aplicando a transformada de Fourier à equação 1 na direcção z, obtém-se

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B H_0 \left(k_\alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) \quad (10)$$

em que $H_n(\dots)$ são segundas funções de Hankel de ordem n, e $B = -iA/2$.

Após obtenção da pressão $\hat{p}(\omega, x, y, k_z)$, $p(\omega, x, y, z)$ pode ser obtido através da transformada inversa de Fourier,

$$p(\omega, x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega, x, y, k_z) e^{-i(z-z_0)k_z} dk_z \quad (11)$$

Caso se considere a existência de um conjunto de fontes periódicas posicionadas ao longo da direcção z, igualmente espaçadas de L, a equação anterior transforma-se em

$$p(\omega, x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega, x, y, k_z) e^{-i(z-z_0)k_z} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{ik_z mL} dk_z \quad (12)$$

Usando os resultados da teoria da distribuição (e. g. Schwartz (1966)), esta equação pode ser escrita na forma

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \hat{p}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{ik_{zm}(z-z_0)} \quad (13)$$

em que $k_{zm} = \frac{2\pi}{L} m$. Esta equação converge e pode ser aproximada por um somatório finito,

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-M}^{m=M} \hat{p}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{ik_{zm}(z-z_0)} \quad (14)$$

Deste modo, em espaços em que não existem variações de propriedades ao longo da direcção z , a solução tridimensional pode ser obtida através da sobreposição de soluções bidimensionais caracterizadas por valores específicos de comprimento de onda axial k_z ($k_\alpha = \sqrt{\omega^2/\alpha^2 - k_z^2}$). Verifique-se que $k_z = 0$ corresponde ao caso bidimensional (fonte linear).

Conforme atrás descrito as transformadas de Fourier são obtidas através de somas discretas de soluções com diferentes comprimentos de onda e frequências, matematicamente equivalente ao resultado da adição de fontes periódicas no espaço $L = 2\pi/\Delta k_z$ (ao longo do eixo z), e no tempo $T = 2\pi/\Delta\omega$, com Δk_z e $\Delta\omega$ sendo os intervalos de comprimento de onda e frequência, respectivamente (Bouchon and Aki, 1977). A separação espacial L deve ser suficientemente grande para evitar a contaminação da resposta pelas fontes periódicas. Noutras palavras, a contribuição para a resposta das fontes fictícias deve ser garantida nula para tempos inferiores a T . Este objectivo pode beneficiar da utilização de frequências complexas, na forma $\omega_c = \omega - i\eta$ (com $\eta = 0.7\Delta\omega$). Esta técnica permite uma atenuação substancial ou mesmo eliminação virtual das fontes periódicas. No domínio do tempo, a existência deste amortecimento é tida em consideração através da aplicação de uma função exponencial no tempo $e^{\eta t}$ (Kausel, 1992).

Como no caso anterior, na situação em que existam barreiras perfeitamente reflectoras podem obter-se respostas para espaços limitados por barreiras acústicas posicionadas ao longo de z .

3.1. Num espaço limitado por uma barreira vertical colocada á distância $z = d_3$ (Figura 1h).

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-M}^{m=M} \hat{p}(\omega, x, y, k_{zm}) E \quad (l = -l) \quad (15)$$

em que $E = e^{ik_{zm}(z_0)} + e^{ik_{zm}(z_l)}$

3.2. Numa camada limitada por duas barreiras posicionadas em $z = 0$ e $z = d_3$ (Figura 1i).

$$p(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-M}^{m=M} \hat{p}(\omega, x, y, k_{zm}) E \quad (16)$$

em que $E = e^{ik_{zm}(z-z_0)} + \sum_{l=0}^{NSZ} \left[\sum_{k=l}^4 e^{ik_{zm}z_k} \right]$ sendo z_k calculado conforme definição presente no Apêndice.

4. SOLUÇÕES PARA GEOMETRIAS $2^{1/2}D$ NA PRESENÇA DE FONTES LINEARES COM VARIAÇÃO ESPACIAL EM Z

Apresentam-se de seguida as soluções analíticas para um conjunto de geometrias $2^{1/2}D$, quando sobre estas actua uma pressão linear com variação sinusoidal na direcção z (ver Figura 2). As soluções resultam da combinação de fontes virtuais dispostas no plano x, y , conforme método descrito anteriormente.

4.1. Barreira horizontal na posição $y = 0$

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B \sum_{j=0}^l H_0(k_\alpha r_{0j}) \quad (n = 0) \quad (17)$$

4.2. Canto criado por uma barreira vertical posicionado em $x = d_1$ e outra horizontal em $y = 0$.

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l H_0(k_\alpha r_{ij}) \quad (n = 0, m = -1) \quad (18)$$

4.3. Camada limitada por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$.

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B [H_0(k_\alpha r_{00})] + B \left\{ \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 H_0(k_\alpha r_{0j}) \right] \right\} \quad (19)$$

4.4. Camada limitada por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ e outra vertical na posição $x = d_1$

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B \sum_{i=0}^l \left\{ [H_0(k_\alpha r_{i0})] + \left\{ \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 H_0(k_\alpha r_{ij}) \right] \right\} \right\} \quad (m = -1) \quad (20)$$

4.5. Túnel criado por barreiras horizontais à distância $y = 0$ e $y = d_2$ e verticais nas posições $x = 0$ e $x = d_1$.

$$\hat{p}(\omega, x, y, k_z) = B \left\{ [H_0(k_\alpha r_{00})] + \left\{ \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 H_0(k_\alpha r_{0j}) \right] \right\} + \sum_{m=1}^{NSH} \left\{ \sum_{i=1}^4 \left\{ [H_0(k_\alpha r_{i0})] + \left\{ \sum_{n=0}^{NSV} \left[\sum_{j=1}^4 H_0(k_\alpha r_{ij}) \right] \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (21)$$

Nestas equações $B = -iA/2$, e $r_{ij} = \sqrt{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y_j}{\alpha}\right)^2}$ encontra-se definida no Apêndice.

5. SINAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO

As pressões no domínio do espaço e do tempo podem ser obtidas através das transformadas numéricas de Fourier em k_z e em frequência, considerando que a variação temporal é dada pela função de Ricker definida pela equação 22. Este tipo de pulso é o escolhido, pois decai rapidamente no tempo e no espaço, permitindo reduzir o esforço de cálculo utilizado, e simultaneamente tornar fácil a interpretação dos sinais numéricos gerados.

A função de Ricker é definida pela expressão:

$$u(\tau) = A(1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2} \quad (22)$$

em que A é a amplitude, $T = (t - t_s)/t_o$ e t referem-se a tempo, t_s é o tempo onde o máximo do pulso ocorre, enquanto que πt_o é a período característico do pulso. A sua transformada de Fourier é

$$U(\omega) = A[2\sqrt{\pi}t_o e^{-i\omega t_s}] \Omega^2 e^{-\Omega^2} \quad (23)$$

em que $\Omega = \omega t_o / 2$.

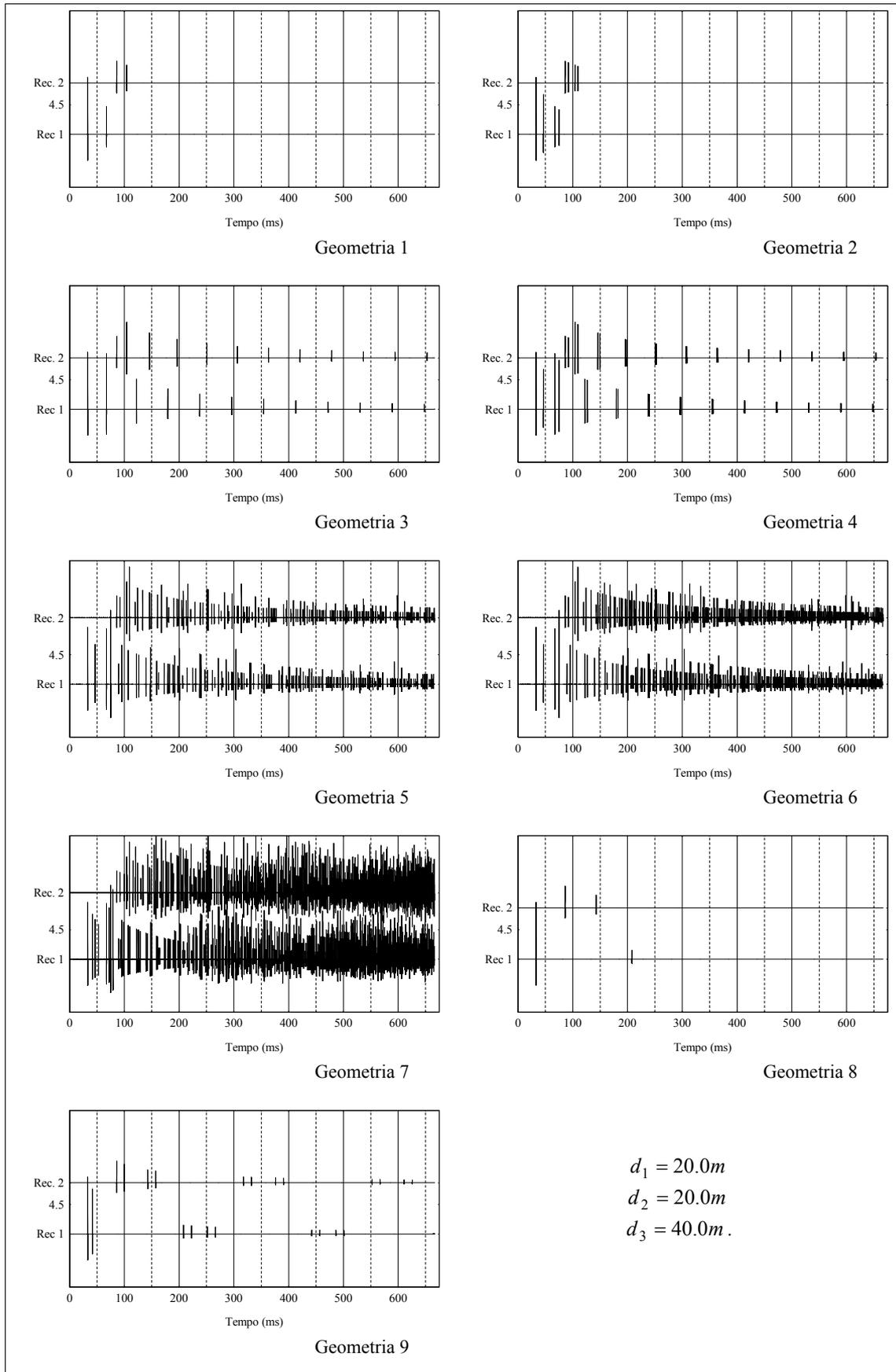


Figura 3 - Sinais obtidos no domínio do tempo.

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Considere-se uma fonte sonora no interior de um ambiente acústico homogéneo que permite velocidades de propagação de ondas de pressão de $340.0m/s$. No instante $t=0$, na posição O ($x_0 = 7.5m, y_0 = 10.0m, z_0 = 2.5m$) é emitido um pulso sonoro pontual, que se propaga em todas as direcções, na presença de diferentes combinações de barreiras perfeitamente reflectoras, modelando os cenários ilustrados nas Figuras 1a-i. Os cálculos são efectuados no domínio da frequência $[1.5, 12288Hz]$ com um incremento de frequência de $1.5Hz$ ($T = 666.6ms$). A variação gerada consiste num pulso de Ricker com uma frequência característica de $4500Hz$. Os sinais resultantes são calculados no Receptor 1 ($x_1 = 17.5m, y_1 = 10.0m, z_1 = 7.5m$) e no Receptor 2, estando este afastado do primeiro $22.5m$ na direcção z, ($x_2 = 17.5m, y_2 = 10.0m, z_2 = 30.0m$). As variáveis NSV, NSH e NSZ nas equações 4 - 8 adquirem, no presente exemplo, os valores de 40, 40 e 20 respectivamente. A Figura 3 ilustra os resultados obtidos. Cada sinal no tempo consiste num conjunto de pulsos que se posicionam no tempo de acordo com as reflexões nas barreiras existentes. Verifique-se que o sinal se complica com o aumento do número de barreiras. A resposta acústica na presença de um compartimento fechado (Geometria 7) revela-se a mais complexa, como seria de esperar, devido ao aumento do número de reflexões que o impulso sonoro vai sofrendo ao longo do seu movimento. Na geração dos sinais obtidos não foi considerada a presença de amortecimento nem de transmissão ou absorção sonora através das barreiras. O tratamento matemático e a obtenção destes resultados serão objecto de um futuro artigo.

7. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta um conjunto de equações analíticas, solução de problemas de propagação de ondas sonoras, na presença de meios semi-infinitos e confinados, geradas por variações de pressão tridimensionais e lineares cuja amplitude varia de forma sinusoidal numa das direcções. Estas equações foram formuladas no domínio da frequência, sendo os resultados obtidos no domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier. Os exemplos apresentados ilustram a aplicabilidade das equações desenvolvidas.

8. BIBLIOGRAFIA

Allen, J. B., Berkley, D. A., Image method for efficiently simulating small room acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.*, 65, pp. 943-950 (1979).

Bouchon, M. and K. Aki, Discrete wave-number representation of seismic-source wave field, *Bull. Seism. Soc. Am.* 67, 259-277 (1977).

Hammad, R. N. S., Simulation of noise distribution in rectangular rooms by means of Computer modeling techniques, *Applied Acoustics*, 24, pp. 211-228 (1988).

Hammad, R. N. S., An efficient algorithm for the image model technique, *Applied Acoustics*, 24, pp. 87-115 (1988).

Kausel, E., Roesset, J. M., Frequency domain analysis of undamped systems, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 4, pp. 721-734 (1992).

Kulowski, A., Error investigation for the ray tracing technique, *Applied Acoustics*, 15, pp. 263-274 (1982).

Kulowski, A., Algorithmic representation of the ray tracing technique, *Applied Acoustics*, 18, pp. 449-469 (1985).

Schwartz, L., *Theorie des distributions*, Hermann, Paris (1966).

Tadeu, A. J. B., António, J. M. P. - "Use of Constant, Linear and Quadratic Boundary Elements in 3D wave Diffraction Analysis" aceite para publicação na revista *Engineering Analysis with Boundary Elements*.

Tadeu, A.; Godinho, L. - "3D Wave Scattering by a Fixed Cylindrical Inclusion Submerged in a Fluid Medium", em publicação na revista *EABE -Engineering Analysis with Boundary Elements*.

9. APÊNDICE

Neste Apêndice encontram-se definidas as expressões $\underline{x}_i, \underline{y}_j$ e \underline{z}_k que permitem calcular as expressões $r_{ijk} = \sqrt{(\underline{x}_i)^2 + (\underline{y}_j)^2 + (\underline{z}_k)^2}$ e $r_{ij} = \sqrt{(\underline{x}_i)^2 + (\underline{y}_j)^2}$ usadas ao longo do texto

$$\begin{array}{lll}
 \underline{x}_0 = (x - x_0), & \underline{y}_0 = (y - y_0), & \underline{z}_0 = (z - z_0) \\
 \underline{x}_1 = (x + x_0 + 2d_1m) & \underline{y}_1 = (y + y_0 + 2d_2n) & \underline{z}_1 = (z + z_0 + 2d_3l) \\
 \underline{x}_2 = (x - 2d_1 - x_0 - 2d_1m) & \underline{y}_2 = (y - 2d_2 - y_0 - 2d_2n) & \underline{z}_2 = (z - 2d_3 - z_0 - 2d_3l) \\
 \underline{x}_3 = (x + 2d_1 - x_0 + 2d_1m) & \underline{y}_3 = (y + 2d_2 - y_0 + 2d_2n) & \underline{z}_3 = (z + 2d_3 - z_0 + 2d_3l) \\
 \underline{x}_4 = (x - 2d_1 + x_0 - 2d_1m) & \underline{y}_4 = (y - 2d_2 + y_0 - 2d_2n) & \underline{z}_4 = (z - 2d_3 + z_0 - 2d_3l) \quad (1A)
 \end{array}$$