Ana Isabel Gonçalves Mendes

Geração Semi-Clássica de Sucessões de Polinómios Ortogonais

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2001

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática, especialidade em Matemática Pura, ramo da Teoria de Aproximação, na Universidade de Coimbra.

ÍNDICE GERAL

Introdução

Motivação

Percurso. Este trabalho de dissertação de mestrado surge quando durante a parte lectiva do mestrado me foi proposto estudar a teoria geral das sucessões de polinómios ortogonais. O estudo para este trabalho baseou-se inicialmente nos dois primeiros capítulos do livro de T.S. Chihara (cf. [**12**]) até ter adquirido determinadas noções que até então, me eram desconhecidas. Assim, comecei a embrenhar-me no"mundo" dos polinómios ortogonais e a estar cada vez mais familiarizada com a teoria a estes subjacente. Surgiram assim, naturalmente, os dois primeiros capítulos deste trabalho, como o reflexo de um ano de estudo de diversas obras e como uma nova abordagem ao estudo da teoria dos polinómios ortogonais. Após o estudo da teoria geral, avancei para a classificação de sucessões de polinómios em clássicos, semi-clássicos e de Laguerre-Hahn, de onde surge o terceiro capítulo. Posteriormente, o professor Amilcar Branquinho falou-me de um trabalho de Vicente Gonçalves, onde este, caracterizou todas as sucessões clássicas ortogonais. Assim, este trabalho motivou aquilo que se realizou no quarto capítulo onde se pretendeu caracterizar todas as sucessões semi-clássicas ortogonais por um método inovador, no qual focámos todo o nosso interesse.

Problemas Estudados

Começamos por estudar como é que a partir da função geradora dos polinómios podiamos provar a ortogonalidade da sucessão desses polinómios. O que motivou, a formalização da noção de família ortogonal e a formalização da noção de ortogonalidade relativamente a uma funcional linear. Conhecida uma funcional demos resposta ao problema de quando é que esta funcional tem uma sucessão de polinómios associada, e se tiver, como a podemos determinar. Enunciamos também propriedades que caracterizam completamente as sucessões de polinómios ortogonais, entre elas podemos encontrar o teorema de Favard, um seu recíproco e o teorema de Darboux-Christoffel. A quando da prova do teorema de Darboux-Christoffel provámos que esta não nos dava apenas uma condição necessária, mas também uma condição suficiente para que uma sucessão de polinómios fosse ortogonal. Introduzimos ainda algumas propriedades satisfeitas pelos zeros de sucessões de polinómios ortogonais associados a funcionais lineares definidas positivas, o que nos permitiu tratar mais um problema: como representar a funcional linear à custa destes zeros.

O segundo capítulo vem motivado pelas noções de funcional e de função geradora. Quando falamos em função geradora falamos numa série. Assim, começamos por dar uma pequena introdução ao espaço das séries formais, de onde iremos retirar informação complementar para este estudo. Nesta altura, e porque os resultados que damos funcionam como apoio, introduzimos o teorema de Borel que nos dará resposta a um problema de momentos, que será introduzido neste capítulo. Como foi referido anteriormente, uma das nossas motivações para este capítulo foi a noção de funcional linear, aqui observaremos, as propriedades do espaço a que esta pertence, bem como a correspodência que existe entre este espaço e o espaço das séries formais. É ainda de referir, que aqui é dada outra representação desta funcional, mas agora à custa das sucessões delta de Dirac. Para terminar este capítulo ainda introduzimos a noção da função de Stieltjes como medida de ortogonalidade, sucessão de polinómios associados e o teorema de Markov que farão a ligação com o terceiro capítulo.

No terceiro capítulo, começamos por fazer uma introdução histórica, sobre as sucessões de polinómios ortogonais clássicos e semi-clássicos. Uma das principais características destas sucessões é que a funcional que lhes está associada satisfaz uma equação funcional conhecida como equação de Pearson. Damos uma nova caracterização das sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicas (ver teorema de equivalência), bem como uma caracterização de sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn, em termos de uma equação diferencial de segunda ordem, com coeficientes que são matrizes de polinómios.

No quarto capítulo damos condições necessárias e suficiente para que uma dada sucessão de polinómios mónicos que satisfaça

$$\phi P_n' + \psi P_n = A_n P_n + B_n P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

seja ortogonal. Neste caso, esta sucessão será semi-clássica. Pelo que, resolvemos o problema de determinar as soluções regulares de uma equação de Pearson, bem como caracterizar as sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicas.

Notação e Numenclatura

O sistema por nós utilizado de numeração é a de indo-árabe para os capítulos e para as secções. Quando nos referimos a equações escrevemos sempre a sua referência entre parentesis curvos e para numeração referente a Definições, Teoremas, Corolários e Lemas apresentaremos a sua referência tal e qual ela aparece no enunciado. Assim, se nos desejarmos referir ao teorema 3.1. significa que se pode encontrar na secção 1, do capítulo 3. Se, por outro lado, nos referirmos ao teorema de Borel, este não se encontra numerado e chamamos a atenção para a existência de um Índice Remissivo, onde poderão determinar a página onde este se encontra. Mais ainda, neste índice poderão encontrar todos os conceitos e resultados fundamentais.

Regra geral usaremos o símbolo $\{P_n\}$ para sucessão de polinómios mónicos, o símbolo $\{p_n\}$ para sucessão de polinómios ortonormais, os símbolo $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ para os espaços dos polinómios e séries formais, respectivamente. Representaremos quase sempre funcional linear por u, a função de Stiletjes por S e a função geradora de momentos por F. Observe-se que denotaremos as sucessões numéricas por $(.)$ e as sucessões de funções por $\{.\}$.

Vamos representar o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$, o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$.

Agradecimentos

Ao Professor Amilcar Branquinho, não só pela excelente orientação neste trabalho, mas principalmente pela infinita paciência que teve comigo.

Ao Hugo, por ter estado sempre presente nos meus altos e baixos de humor.

Aos meus pais, pelo apoio em variadíssimos momentos durante este período e ao longo da minha vida.

A todos aqueles, que não ficaram esquecidos e sabem que de uma forma ou de outra, foram muito importantes durante este processo.

CAPÍTULO 1

Teoria Geral de Polinómios Ortogonais

Dedicamos este capítulo ao estudo de sucessões de polinómios ortogonais e às suas caracterizações. Estes polinómios são de grande importância e podemos encontrá-los em diversas aplicações da análise à teoria das equações diferenciais e à aproximação de funções.

1. Introdução

Neste primeiro capítulo introduzimos como motivação ao estudo das sucessões de polinómios ortogonais a noção de função geradora de polinómios e como, caso os polinómios gerados sejam ortogonais, se obtem a relação de recorrência a três termos que estas sucessões verificam. Posteriormente, introduz-se a noção de família de polinómios ortogonais e como esta noção se encontra relacionada com a noção de funcional linear, ilustrando-a com exemplos. Mostramos também quais as condições para que uma funcional tenha sucessão de polinómios associada e se esta existir como pode ser determinada. No presente capítulo fala-se também de algumas caracterizações já conhecidas das sucessões de polinómios ortogonais mónicas, dando particular relevância ao teorema de Favard e a um seu recíproco.

É aqui mostrado também, que a Identidade de Darboux-Christoffel nos dá duas condições necessárias e suficientes para que uma sucessão de polinómios seja ortogonal.

Para finalizar este capítulo fala-se em algumas propriedades verificadas pelos zeros de sucessões de polinómios ortogonais caso a funcional que lhe está associada seja definida positiva e como esta funcional pode ser representada à custa destes zeros. Observe-se ainda que este capítulo não é mais do que uma introdução ao estudo das sucessões de polinómios ortogonais e que nele encontramos os conceitos base para prosseguir o nosso estudo.

Não podemos deixar de dizer que a referência usada neste capítulo foi o livro de T.S.Chihara [**12**] e que nele se podem encontrar as provas de alguns dos resultados apresentados.

2. Função geradora

Um forma interessante de começar a abordar o estudo de sucessões de polinómios ortogonais é conhecer a sua função geradora.

Definição 2.1. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios designamos por *função geradora* da sucessão $\{P_n\}$ a função

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \,.$$

Determinada a região de convergência uniforme da série $\sum P_n z^n$ para a função, podemos obter, a partir do *integral de Cauchy*, todos os elementos da sucessão, i.e.,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G(x,z)}{z^{n+1}} dz = \frac{P_n(x)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde Γ é uma curva fechada contendo zero no seu interior e que se encontra contida na região de convergência. Assim, se conhecermos a função geradora de uma dada sucessão de polinómios conhecemos todos os polinómios desta mesma sucessão.

Vejamos algumas condições suficientes de convergência uniforme.

TEOREMA (Cauchy-Hadamard). *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *é absolutamente convergente em cada ponto* z *da bola de centro zero e raio* r, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, *sendo*

$$r = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

E converge uniformemente na bola. Nos pontos exteriores à bola a série é divergente.

COROLÁRIO 1.1. *O raio de convergência da série* $\sum a_n z^n$ *é igual ao limite de* $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, *sempre que este limite exista.*

TEOREMA 2.1. *Para a função geradora de uma sucessão* $\{P_n\}$ *uma condição suficiente de convergência uniforme vem dada por:*

$$(x,z) \in \mathbb{C}^2, \quad |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|}}$$

ou

$$(x,z) \in \mathbb{C}^2, \quad |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \right| < 1\,,$$

caso existam os limites $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|}$ *e* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\right|$.

DEMONSTRAÇÃO. De facto, nestas condições existe um $0 < c < 1$ tal que,

$$|z| \left| \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \right| \le c < 1, \quad n \ge n_0\,.$$

E, portanto,

$$|z^{n+1} P_{n+1}(x)| \le c|z^n P_n(x)| \le c^{n-n_0+1} |z^{n_0} P_{n_0}(x)|, \quad n > n_0\,.$$

Logo,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z^n P_n(x)| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z^{n_0} P_{n_0}(x)| c^{n-n_0+1} < M\,.$$

Claramente, pelo teorema de M-Weierstrass a série $\sum P_n(x) z^n$ converge uniformemente na região considerada. ∎

Vemos assim, que na determinação da região de convergência uniforme da série assumem particular importância as assimptóticas dos polinómios $\{P_n\}$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|}$ e $\lim_{n\to\infty} |\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}|$.

Para finalizar esta secção enunciaremos um resultado que está relacionado com estas assimptóticas, caso estes polinómios verifiquem uma *equação de recorrência* do tipo

$$\sum_{k=0}^{m} c_k(n) u_{n-k} = 0 \tag{2.1}$$

com $c_i(n)$ para $i = 0, ..., n$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} c_i(n) = c_i, \quad i = 0, ..., m.$$

TEOREMA (Poincaré). *Seja (u_n) uma solução duma equação de recorrência de ordem m, tipo (2.1). Sejam ξ_k os zeros do polinómio característico associado a (2.1), i.e., ξ_k são zeros do polinómio $\sum_{k=0}^{m} c_k z^k =$* 0.

E suponhamos $|\xi_i| \neq |\xi_j|$ para $i \neq j$. Então, existe ξ_k tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = \xi_k\,.$$

3. Ortogonalidade a partir da função geradora

Nesta secção veremos exemplos de sucessões de polinómios ortogonais obtidas através da sua função geradora.

3.1. Polinómios de Charlier. Seja $G(x, w) = e^{-aw}(1+w)^x$, com a constante real, a *função geradora dos polinómios de Charlier.*

Sabemos que e^{-aw} tem a seguinte representação em série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!}$$

válida para todo $w \in \mathbb{R}$ e que $(1+w)^x$, também se representa na forma:

$$(1 + w)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} w^n$$

onde

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}\,,$$

para todo o $w \in]-1,1[$. Logo, usando a *fórmula de Cauchy* para o produto de séries absolutamente convergentes temos que,

$$\begin{aligned} G(x,w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}\right)w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)w^n\,. \end{aligned}$$

Identificamos assim, os *polinómios de Charlier* dados por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

Vamos ver então que estes polinómios são ortogonais. De facto,

$$\begin{aligned} a^xG(x,v)G(x,w) &= a^xe^{-av}(1+v)^xe^{-aw}(1+w)^x \\ &= e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^x\,. \end{aligned}$$

Podemos então considerar a seguinte soma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kG(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^k}{k!} \\ &= e^{-a(v+w)}e^{a(1+v)(1+w)} = e^{a(1+vw)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a a^n(vw)^n}{n!}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kG(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{m,n=0}^{\infty}P_m(k)P_n(k)v^mw^n \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}P_m(k)P_n(k))v^mw^n\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Comparando (3.1) com (3.2) temos que,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}P_m(k)P_n(k) = 0$$

pois não existem potências mistas para $m \neq n$. No caso em que $m = n$ temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} P_n^2(k) = \frac{e^a a^n}{n!} \, .$$

3.2. Polinómios de Hermite. Consideremos outro exemplo de uma função geradora, seja ela

$$G(x, w) = e^{2xw - w^2}$$

Comecemos por analisar a função $F(x, w) = e^{-(x-w)^2}$ e observe-se que a n-ésima derivada da função F em ordem a w no ponto $(0, 0)$, toma a forma:

$$(-1)^n D^n e^{-x^2}, \quad \text{onde} \quad D = \frac{d}{dx} \, .$$

Observe-se também que $F(x, w) = e^{-x^2} G(x, w)$, pelo que, temos

$$\left. \frac{\partial^n F(x, w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = \left. \frac{\partial^n G(x, w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} e^{-x^2} \, .$$

Seja agora $G(x, w)$ escrito na forma:

$$G(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!} \, .$$

Assim temos que

$$\left. \frac{\partial^n G(x, w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = H_n(x),$$

e portanto, $G(x, w)$ é a função geradora dos polinómios $H_n(x)$, dados por:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$$

chamados *polinómios de Hermite* de grau n.

Provemos de seguida que estes polinómios são ortogonais. Comecemos por calcular o integral,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xv-v^2}e^{2xw-w^2}e^{-x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-(v+w))^2}e^{2vw}dx\,.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x-(v+w)$ no integral temos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}dx = e^{2vw}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\,.$$

Mas como,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}\,.$$

Temos, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}e^{2vw} \tag{3.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}dx \\ &\quad= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_n H_n(x)\frac{v^n}{n!}\sum_m H_m(x)\frac{w^m}{m!}e^{-x^2}dx \\ &\quad= \sum_{n,m}(\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx)\frac{v^nw^m}{n!m!}\,. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Comparando (3.3) com (3.4), temos que, para $m \neq n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0\,.$$

No entanto, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \frac{2^n\sqrt{\pi}}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Pelo o que os polinómios de Hermite são ortogonais relativamente à função e^{-x^2} em $\mathbb{R}$.

4. Funcionais lineares e polinómios ortogonais

Iniciaremos esta secção introduzindo alguns conceitos elementares, de grande importância para o desenvolvimento da teoria dos polinómios ortogonais, nomeadamente *funcional linear*, *espaço dual*, *espaço das séries formais*, *momentos* e outros são aqui dados a conhecer.

Definição 4.1. Seja X um espaço linear definido sobre um corpo. Considerando $\mathbb{K}$ como espaço vectorial definido sobre ele próprio, chama-se *funcional linear* u, a uma transformação linear de X em $\mathbb{K}$, i.e., u, é tal que:

i) $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $x, y \in X$

ii) $u(\alpha x) = \alpha u(x)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$.

Seja $\mathcal{P}$, o espaço vectorial de todos os polinómios de variável real x com coeficientes em $\mathbb{C}$. Como qualquer $p \in \mathcal{P}$ pode escrever-se da forma,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad \text{com} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

e ao fazer actuar u sobre p, temos que

$$\langle u, p \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle u, x^k \rangle$$

onde denotaremos $\langle u, x^k \rangle$ por u_k, chamados os *momentos de ordem* k associados a u. Como observamos, se conhecermos os momentos conhecemos u. Daí que, se denomine muitas vezes, u por *funcional de momentos*.

Estabeleceremos de seguida a noção de ortogonalidade relativamente a uma funcional linear.

Definição 4.2. Seja $\{P_n\}$ uma *sucessão de polinómios* com grau de $\{P_n\}$ igual a n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $\{P_n\}$ é uma *família* *ortogonal* relativamente a u se

$$\langle u, P_n P_m \rangle = K_m \delta_{nm}\,, \quad K_m \neq 0 \tag{4.1}$$

e $K_n = \langle u, {P_n}^2 \rangle$ onde δ_{nm} é o *símbolo de Kronecker*, i.e.,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = m \\ 0, & \text{se} \quad n \neq m \end{cases} \,.$$

Dizemos então, que uma família ortogonal é *mónica* se todos os seus elementos, tiverem o coeficiente do termo de maior ordem, igual a um.

O próximo passo será ilustrar através de exemplos a noção de ortogonalidade relativamente a uma funcional.

4.1. Exemplos. Como um exemplo elementar, consideremos os *polinómios de Chebichev de primeira espécie*, que são definidos por

$$T_n(x) = \cos(n\theta), n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{onde} \quad \theta = \arccos(x)\,.$$

Trata-se então de um exercício elementar de cálculo usar a identidade trigonométrica

$$2\cos(m\theta)\cos(n\theta) = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta$$

para obter a seguinte relação

$$\int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.2}$$

Observe-se ainda que quando $m = n$ temos

$$\int_0^\pi (\cos n\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Assim concluimos que $\cos(m\theta)$ e $\cos(n\theta)$ são ortogonais no intervalo $]0, \pi[$, para $m \neq n$, relativamente à funcional

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q(x) & \longmapsto & \int_{-1}^1 q(x)(1-x^2)^{-1/2}dx \end{array}\,.$$

Basta observamos, que com uma mudança de variável $x = \cos(\theta)$ a expressão (4.2), passa a ser dada por:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = 0 \text{ para } \ m \neq n\,.$$

Logo os $\{T_n\}$ são ortogonais relativamente à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, ou seja, um caso particular da noção de ortogonalidade relativamente a uma funcional, que é expressa por um integral.

Recorde-se também os polinómios de Charlier apresentados na secção anterior, como um exemplo. Ora, neste caso a funcional é expressa por uma soma, ou seja, os polinómios são ortogonais relativamente à funcional u dada por:

$$\begin{array}{cccc} u: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q(x) & \longmapsto & \langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\delta_k, q(x)\rangle \end{array},$$

onde $\delta_k(P(x)) = \langle \delta_k, P(x)\rangle = P(k)$. Na secção anterior vimos como determinar sucessões de polinómios ortogonais através da função geradora, vejamos agora como determinar a função geradora, se já conhecermos a sucessão de polinómios ortogonais.

Tomemos como exemplo os polinómios de Chebichev de primeira espécie, neste caso a sua função geradora pode ser determinada da seguinte forma: calculemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)z^k$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\theta)z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2} z^k \\ &= 1/2\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta}z^k + 1/2\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik\theta}z^k \\ &= 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\theta}z)^k + 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-i\theta}z)^k. \end{aligned}$$

Tratam-se de séries convergentes para os valores de z tais que $|ze^{i\theta}| < 1$ e $|ze^{-i\theta}| < 1$, ou seja, $|z| < 1$. E, portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) z^k &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{i\theta}z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-i\theta}z}\\ &= 1/2\frac{2-z(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{1-z(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+z^2}\\ &= \frac{1-z\cos\theta}{1-2z\cos\theta+z^2}\,.\end{aligned}$$

Como $x = \cos\theta$, então temos a seguinte função geradora

$$G(x,z) = \frac{1-zx}{1-2xz+z^2}\,.$$

Veremos posteriormente, como se pode determinar a função geradora destes polinómios de uma outra forma relativamente mais simples. Observe-se então que da função geradora obtivemos a ortogonalidade e que da sucessão de polinómios ortogonais obtivemos agora a função geradora.

De seguida daremos algumas caracterizações de ortogonalidade, que julgamos serem úteis no decorrer deste trabalho.

TEOREMA 4.1. *Seja u uma funcional de momentos e $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios. São equivalentes as seguintes proposições:*

(a) *$\{P_n\}$ é sucessão de polinómios ortogonais associada a u.*

(b) *$\langle u, \pi(x)P_n(x)\rangle = 0$ para qualquer $\pi \in \mathcal{P}$ de grau $m < n$, enquanto que $\langle u, \pi(x)P_n(x)\rangle \neq 0$ se $m = n$.*

(c) *$\langle u, x^m P_n(x)\rangle = K_n\delta_{nm}$, $\quad K_n \neq 0 \quad$ para $m = 0, 1, ..., n$*

TEOREMA 4.2. *Seja P_n uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u e π um polinómio qualquer de grau n. Então,*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} P_k(x)$$

com

$$c_{n,k} = \frac{\langle u, \pi(x) P_k(x) \rangle}{\langle u, P_k(x)^2 \rangle}, \quad k = 0, 1, ..., n\,.$$

Teorema 4.3. *Se Q_n e P_n são sucessões de polinómios ortogonais relativamente a u. Então, existe c_n tal que $Q_n(x) = c_n P_n(x)$.*

Questões novas começam a surgir:

(1) Será que podemos dizer que toda a funcional de momentos tem associada uma sucessão de polinómios ortogonais?

(2) Dada uma sucessão de momentos (u_k), existem sempre sucessões de polinómios ortogonais que lhes estão associadas?

A resposta a estas perguntas é negativa. Veja-se o seguinte exemplo: se os momentos de ordem zero, um e dois forem iguais a um, i.e., $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ teremos $P_0(x) = a \neq 0$ e $P_1(x) = bx + c, \quad b \neq 0$. Por (b) do teorema 4.1 temos que

$$\langle u, P_0 P_1 \rangle = a(bu_1 + cu_0) = a(b + c) = 0\,.$$

Então deveremos ter $b = -c$ e isto leva-nos a que

$$\langle u, P_1^2 \rangle = b^2(u_2 - 2u_1 + u_0) = 0$$

o que não pode acontecer para que exista uma sucessão de polinómios ortogonais.

Concluimos assim, que nem toda a funcional u, tem sucessão de polinómios ortogonais associada. Então, o passo seguinte será fornecer condições para que tal aconteça. A condição que iremos apresentar é muito útil sob o ponto de vista teórico, mas sob o aspecto da aplicabilidade não apresenta grande eficácia.

A fim de discutirmos questões sobre a existência de sucessões de polinómios ortogonais, introduzimos os seguintes *determinantes de Hankel*

$$\Delta_n = \det\left(u_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N}.$$

TEOREMA 4.4. *Seja u uma funcional de momentos com sucessão de momentos associada (u_k). Então existe uma sucessão de polinómios ortogonais para u se, e somente se $\Delta_n \neq 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$.*

DEMONSTRAÇÃO. Digamos que existe uma sucessão de polinómios ortogonais, $\{P_n\}$, relativamente a u. Escrevamos P_n na forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k .$$

A condição,

$$\langle u, x^m P_n(x)\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m < n \\ K_n & \text{se} \quad m = n \end{cases} \quad , \quad K_n \neq 0$$

pode escrever-se na forma

$$\langle u, \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^{m+k}\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} u_{m+k} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m < n \\ K_n \neq 0 & \text{se} \quad m = n \end{cases}$$

obtemos então o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} c_{n0}u_0 + c_{n1}u_1 + \dots + c_{nn}u_n = 0 \\ c_{n0}u_1 + c_{n1}u_2 + \dots + c_{nn}u_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ c_{n0}u_n + c_{n1}u_{n+1} + \dots + c_{nn}u_{2n} = K_n \neq 0 \end{cases} .$$

Este sistema é possível e determinado quando e só quando $\Delta_n \neq 0$ e a sua solução vem dada em termos de K_n. ■

Caso as condições do teorema se verifiquem, i.e., $\Delta_n \neq 0$, podemos definir a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma sucessão de momentos (u_k) e os seus elementos vem dados por:

$$(4.3)\qquad P_n = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \qquad n = 1, 2, ...$$

$$(4.4)\qquad P_0(x) = 1\,.$$

e u diz-se *regular* ou *quasi-definida.*

Após termos falado da noção de ortogonalidade relativa a uma funcional de momentos ilustrando-a através de exemplos e darmos condições de existência de sucessões ortogonais relativamente a essa funcional, na próxima secção daremos caracterizações importantes destas sucessões de polinómios ortogonais.

5. Algumas caracterizações das sucessões de polinómios ortogonais

Uma das caracterizações mais importantes das sucessões de polinómios ortogonais mónicos é que estas satisfazem relações de recorrência, como veremos em seguida.

TEOREMA 5.1. *Seja u uma funcional de momentos regular e seja $\{P_n\}$ a correspondente sucessão de polinómios ortogonais mónica. Então existem constantes complexas c_n e $\lambda_n \neq 0$ tais que,*

$$(5.1)\qquad P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

onde definimos $P_{-1}(x) = 0$. Mais ainda, se u é definida positiva, i.e., $\Delta_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então c_n é real e $\lambda_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$ (com λ_1 arbitrário).

DEMONSTRAÇÃO. Prova-se este resultado fazendo $\pi(x) = xP_n(x)$ no teorema 4.2. ∎

Observação . Se no teorema anterior a sucessão $\{P_n\}$ não é mónica, então $\{P_n\}$ verifica uma relação de recorrência da forma :

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \quad A_n,\, B_n \neq 0\,, n \geq 0\,. \tag{5.2}$$

Por exemplo, os polinómios de Chebichev de primeira espécie satisfazem a seguinte relação de recorrência,

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \quad n \geq 1\,. \tag{5.3}$$

Assinala-se, então, que a função geradora de polinómios ortogonais pode ser obtida da relação de recorrência. Ora vejamos, ao multiplicarmos ambos os membros de (5.3) por z^{n+1} e aplicarmos a ambos os membros a soma de um a infinito, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} z^{n+1} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} T_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} z^{n+1}\,.$$

Tomando $G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n$ temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} T_n z^n = 2xz \sum_{n=1}^{\infty} T_n z^n - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n\,.$$

Resolvendo esta equação determinamos a função geradora destes polinómios sendo esta dada por

$$G(x,z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}\,.$$

Constata-se então, que todos os conceitos dados anteriormente, se encontram interligados.

De seguida obteremos um recíproco do teorema anterior, que irá estabelecer que qualquer sucessão de polinómios que satisfaça a fórmula de recorrência (5.1) é uma sucessão de polinómios ortogonais. Este resultado, foi pela primeira vez enunciado, por Favard, [**14**] em 1935, no caso definido-positivo. Pode encontrar-se no livro de T.S.Chihara [**12**], o resultado geral para funcionais.

Teorema (Favard, 1935). *Sejam* (c_n) *e* (λ_n) *sucessões arbitrárias de números complexos e seja* $\{P_n\}$ *definida pela fórmula de recorrência*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{5.4}$$

$$P_{-1}(x) = 0 \quad e \quad P_0(x) = 1 . \tag{5.5}$$

Então, existe uma única funcional de momentos u *tal que:*

(i) $\langle u, 1 \rangle = \lambda_1$ *e*
$\langle u, P_m(x)P_n(x) \rangle = 0$ *para* $m \neq n,\ m, n = 0, 1, 2, \dots$.

(ii) u *é regular e* $\{P_n\}$ *é a correspondente sucessão de polinómios ortogonais mónica se e somente se* $\lambda_n \neq 0$.

(iii) u *é positiva-definida se e somente se* c_n *é real e* $\lambda_n > 0$ *para* $n \geq 1$.

O próximo teorema dá-nos uma outra caracterização das sucessões de polinómios ortogonais.

Teorema (Darboux-Christoffel). *Seja* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios mónicos. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\{P_n\}$ *é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos.*

(b) $\{P_n\}$ *satisfaz*

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y) , \tag{5.6}$$

onde $r_k = \prod_{i=1}^{k+1} \lambda_i$.

(c) $\{P_n\}$ *satisfaz*

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} {P_k}^2(x) , \tag{5.7}$$

onde $r_k = \prod_{i=1}^{k+1} \lambda_i$.

Demonstração. Vamos provar que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Note-se que o teorema de Favard dá-nos uma condição necessária e suficiente para que exista uma sucessão de polinómios ortogonais.

Temos para $n \geq 0$ as identidades:

$$xP_n(x)P_n(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) + c_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y)$$

$$yP_n(y)P_n(x) = P_{n+1}(y)P_n(x) + c_{n+1}P_n(y)P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(y)P_n(x)$$

Subtraindo a segunda equação à primeira temos que,

$$\begin{aligned}(x-y)P_n(x)P_n(y) = {} & P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) \\ & - \lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)]\,.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $\lambda_1 ... \lambda_{n+1}$ e por $x - y$, vem:

$$\frac{P_n(x)P_n(y)}{\lambda_1 ... \lambda_{n+1}} = F_n(x,y) - F_{n-1}(x,y)\,,$$

onde

$$F_n(x,y) = \frac{1}{\lambda_1 ... \lambda_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}\,.$$

Aplicando a soma de 0 a n a ambos os membros temos que,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\lambda_1 ... \lambda_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}[F_k(x,y) - F_{k-1}(x,y)] \\ &= F_n - F_{-1} = F_n\,.\end{aligned}$$

Note-se que $F_{-1} = 0$ pelo o que se tem (5.6), i.e., (a) $\Rightarrow$ (b).

Vejamos agora que se tem (b) $\Rightarrow$ (c). De facto,

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y} &= \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y} \\ &\quad + \frac{P_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(x)}{x-y} \\ &= -P_{n+1}(x)\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} + P_n(x)\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)}{x-y}\,.\end{aligned}$$

Assim (5.7) vem de (5.6) aplicando a regra de L'Hopital quando y tende para x.

Vejamos que (c) $\Rightarrow$ (a). De facto,

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = P_n^2(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r_{n-1}}{r_k}{P_k}^2(x)$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} P_n(x)P'_{n+1}(x) &- P'_n(x)P_{n+1}(x) \\ &= P_n^2(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}\left(P_{n-1}(x)P'_n(x) - P'_{n-1}(x)P_n(x)\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$P_n(P'_{n+1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}P'_{n-1}) - P'_n(P_{n+1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}P_{n-1}) = P_n^2$$

ou seja,

$$\left(\frac{P_{n+1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}P_{n-1}}{P_n}\right)' = 1\,.$$

E primitivando em ordem a x, obtemos que existe β_n tal que

$$P_{n+1} + \lambda_{n+1}P_{n-1} = (x - c_{n+1})P_n$$

Ora pelo teorema de Favard temos o pretendido. ■

Corolário 1.2. *Para u funcional linear definida-positiva temos que,*

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Demonstração. De facto, pelo teorema anterior temos que

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{r_n}{r_k}P_n^2(x)$$

e como $\lambda_j > 0$ temos o pretendido. ■

6. Zeros de polinómios ortogonais

Para falarmos na localização dos zeros dos polinómios ortogonais recorde-se a noção de funcional linear definida positiva introduzida no teorema (5.1).

Retoma-se esta noção pois sabemos que os zeros dos polinómios ortogonais associados a funcionais definidas positivas exibem uma certa regularidade. Assim, apresentamos o seguinte teorema.

TEOREMA 6.1. *Seja $E \subset]-\infty,\infty[$. A funcional de momentos u é dita definida positiva em E se e somente se $\langle u, \pi(x)\rangle > 0$ para qualquer polinómio real $\pi(x)$ que é não negativo em E e não é identicamente nulo em E. O conjunto E é assim chamado conjunto suporte para u.*

Observe-se que a funcional de momentos para os polinómios de Chebichev de primeira espécie é definida positiva em $[-1,1]$ enquanto que as funcionais de momentos para os polinómios de Charlier e Hermite são definidas positivas em $\{0,1,2,...\}$ e $]-\infty,\infty[$, respectivamente.

TEOREMA 6.2. *Seja u definida positiva sobre um conjunto infinito E. Então:*

(i) *u é definida positiva em qualquer conjunto contendo E.*

(ii) *u é definida positiva em qualquer subconjunto denso de E.*

Depois de apresentados estes conceitos podemos passar a algumas caracterizações para os zeros de sucessões de polinómios ortogonais mónicos. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a u.

TEOREMA 6.3. *Seja I um intervalo que é um conjunto suporte para u. Os zeros de P_n são todos reais, simples e estão localizados no interior de I.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\langle u, P_n(x)\rangle = 0$, P_n deve mudar de sinal pelo menos uma vez no interior de I. Isto é, P_n tem no mínimo um zero de multiplicidade ímpar no interior de I.

Seja $0 \leq k \leq n-1$ e considere-se Q definido da seguinte forma,

$$Q(x) = P_n(x) \prod_{j=1}^{k} (x - x_j)\,,$$

onde x_j são os zeros distintos de multiplicidade ímpar de P_n que estão localizados no interior de I. Como u é funcional linear definida positiva temos que,

$$\langle u, Q(x) \rangle > 0\,,$$

o que contradiz a ortogonalidade de P_n. ■

Observemos agora o comportamento dos zeros da sucessão dos polinómios de Chebichev, $\{T_n\}$:

De facto,

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1, \quad T_3 = 4x^3 - 3x, ...$$

Vê-se facilmente, que os zeros destes polinómios se encontram entrelaçados. Com este exemplo motivamos o que se vai provar de seguida, ou seja, que todos os zeros de sucessões de polinómios ortogonais se encontram entrelaçados.

De agora em diante, denotaremos os zeros de P_n por $x_{n,i}$ com $i = 1, 2, ..., n$, ordenados por ordem crescente:

$$x_{n,1} < x_{n,2} < x_{n,3} < ... < x_{n,n}, \quad n \geq 1\,. \tag{6.1}$$

Como P_n tem coeficiente principal positivo, conclui-se que,

$$P_n(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_{n,n}$$

$$\text{sign}\ P_n(x) = (-1)^n \quad \text{para} \quad x < x_{n,1}$$

onde sign denota a função sinal definida por

$$\text{sign}\ x = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}\,.$$

Assim, P_n' tem pelo menos um, logo exactamente um zero em cada um dos intervalos $]x_{n,k-1}, x_{n,k}[$. Constata-se, então, que $P_n'(x_{n,k})$ alterna de sinal, enquanto k varia de 1 até n. Como $P_n'(x_{n,k})$ também tem coeficiente principal positivo, podemos concluir:

$$\text{sign } P_n'(x_{n,k}) = (-1)^{n-k}, \quad k = 1, 2, ..., n\,. \tag{6.2}$$

Teorema 6.4. *Os zeros de P_n e P_{n+1} verificam a propriedade do entrelaçamento, ou seja, $x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}$ com $i = 1, 2, ..., n$*

Demonstração. Do corolário do teorema de Darboux-Christoffel, temos a desigualdade:

$$P_{n+1}'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_{n+1}(x) > 0\,.$$

Em particular, para $x = x_{n+1,k}$ temos

$$P_{n+1}'(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0, \quad k = 1, 2, ..., n+1\,. \tag{6.3}$$

Referindo (6.2), temos sign $P_{n+1}'(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$. Concluimos então que sign $P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$. Logo, $P_n(x)$ tem pelo menos um, logo exactamente um zero, em cada um dos intervalos da forma $]x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1}[$ com $k = 1, 2, ..., n$. ■

Corolário 1.3. *Para $k \geq 1$, $(x_{n,k})$ é uma sucessão decrescente e $(x_{n,n-k+1})$ é uma sucessão crescente. Em particular, os limites $\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}$ e $\eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}$, com $i, j = 1, 2, 3, ...$ existem pelo menos no sistema de números reais.*

Estamos agora aptos a enunciar a próxima definição.

Definição 6.1. O intervalo fechado $\Delta = [\xi_1, \eta_1]$ é chamado o *verdadeiro intervalo de ortogonalidade* da sucessão de polinómios ortogonais associada a u.

Note-se que o verdadeiro intervalo de ortogonalidade é o mais pequeno intervalo fechado que contém todos os zeros de $\{P_n\}$.

Depois de dada, alguma informação acerca dos zeros de sucessões de polinómios ortogonais, podemos então passar à fase seguinte, isto é, ver como se pode representar a funcional u à custa destes zeros.

7. Representação da funcional

Iniciaremos esta secção recordando a *fórmula interpoladora de Lagrange*, que será indispensável para a representação da funcional.

Dados n pontos diferentes no plano (t_i, y_i) o problema de interpolação de Lagrange consiste em determinar o polinómio de menor grau, cujo gráfico passa por estes pontos.

Faça-se

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - t_i)$$

e

$$l_k(x) = \frac{F(x)}{(x - t_k)F'(t_k)} \, .$$

Então a função l_k é de grau $n-1$ e verifica a seguinte propriedade:

$$l_k(t_j) = \delta_{jk} \, .$$

O polinómio de Lagrange é então de grau $n-1$ e é definido por

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x) \, ,$$

com

$$L_n(t_j) = y_j, \quad j = 1, 2, ..., n \, .$$

Este, é então, o único polinómio que passa pelos pontos dados e será agora utilizado para obter a *fórmula de quadratura de Gauss*.

Esta fórmula é de grande interesse na análise numérica para a aproximação de integrais, mas no entanto o nosso interesse primário nela é que esta é uma importante ferramenta para o estudo da funcional u, no caso definido positivo.

TEOREMA (Fórmula da Quadratura de Gauss). *Seja u uma funcional linear definida positiva. Existem números A_{n1}, A_{n2}, ..., A_{nn} tais que para qualquer polinómio π de grau no máximo $2n-1$,*

$$\langle u, \pi(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\pi(x_{n,k}) \tag{7.1}$$

onde os $x_{n,k}$ são os zeros dos polinómios ortogonais associados a u.

Os números A_{nk} são todos positivos e satisfazem a condição

$$A_{n1} + A_{n2} + ... + A_{nn} = u_0\,. \tag{7.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja π um polinómio arbitrário cujo grau não excede $2n-1$ e construa-se o polinómio interpolador de Lagrange correspondendo aos zeros dos polinómios ortogonais $x_{n,k}$ e às ordenadas $\pi(x_{n,k})$ com $1 \le k \le n$.

Consideremos,

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi(x_{n,k}) l_k(x)\,,$$

onde

$$l_k(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P'_n(x_{n,k})}\,.$$

Assim, $Q(x) = \pi(x) - L_n(x)$ é um polinómio de grau no máximo $2n-1$, que se anula em $x_{n,k}$. Ou seja,

$$Q(x) = R(x)P_n(x)$$

onde $R(x)$ é um polinómio de grau no máximo $n-1$.

Da ortogonalidade relativamente a uma funcional temos que,

$$\begin{aligned}\langle u, \pi(x)\rangle &= \langle u, L_n(x)\rangle + \langle u, R(x)P_n(x)\rangle \\ &= \langle u, L_n(x)\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \pi(x_{n,k})\langle u, l_k(x)\rangle\,.\end{aligned}$$

Isto leva-nos a (7.1) com $A_{nk} = \langle u, l_k(x)\rangle$. Se fizermos a escolha particular de $\pi(x) = l_m^2(x)$ em (7.1), o resultado é,

$$0 < \langle u, l_m^2(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} l_m^2(x_{n,k}) = A_{nm}\,.$$

Portanto os A_{nk} são todos positivos. Finalmente, (7.2) obtem-se, se escolhermos $\pi(x) = 1$ em (7.1)

$$u_0 = \langle u, 1\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} \Leftrightarrow u_0 = A_{n1} + A_{n2} + ... + A_{nn}\,,$$

como queriamos demonstrar ■

Vimos então como se representar a funcional à custa dos zeros dos polinómios ortogonais. Voltaremos a este assunto mais tarde, quando falarmos da medida espectral associada a uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

O teorema anterior ainda pode ser usado para fornecer informação adicional acerca das propriedades de separação dos zeros de polinómios ortogonais.

Teorema 7.1. *Entre quaisquer dois zeros de P_N existe pelo o menos um zero de P_n para qualquer $n > N \geq 2$.*

Demonstração. Assuma-se então que para um $n > N$, P_n não tem nenhum zero entre $x_{N,p}$ e $x_{N,p+1}$, com $1 \leq p \leq N$.

Agora

$$\rho(x) = \frac{P_N(x)}{(x - x_{N,p})(x - x_{N,p+1})}$$

é um polinómio de grau $N-2$ e $\rho(x)P_N(x) \geq 0$ para x não pertencente ao intervalo $]x_{N,p}, x_{N,p+1}[$.

Usando (7.1) temos que

$$\langle u, \rho(x)P_N(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\rho(x_{n,k})P_N(x_{n,k})\,.$$

Como $\rho(x)P_N(x)$ não se pode anular para todo o $x_{n,k}$, temos que $\langle u, \rho(x)P_N(x)\rangle > 0$, o que contradiz a noção de ortogonalidade relativa a uma funcional. ■

Neste capítulo demos uma variedade de conceitos e propriedades das sucessões de polinómios ortogonais, como a noção de ortogonalidade relativamente a uma funcional linear. O passo seguinte será conhecer um pouco melhor estas funcionais e para isso vamos tratar do espaços definidos por dualidade.

CAPÍTULO 2

Teoria da Representação

1. Introdução

Vimos no anterior capítulo que por diversas vezes se falou em representações em séries, como por exemplo o caso da função geradora, assim motiva-se o aparecimento da primeira secção deste capítulo, em que fazemos uma breve introdução ao estudo do espaço das séries formais salientando algumas das suas propriedades. Ao falarmos em funcional linear no anterior capítulo, surge a necessidade de focar algumas das suas propriedades e falar um pouco mais do seu espaço. Observamos assim, que existe mais que uma base para este espaço e como se pode representar esta funcional à custa de uma base particular. Apresentamos um primeiro problema de momentos cuja solução resulta da interligação de resultados apresentados. Ainda neste capítulo, falamos do que se entende por medida de Stieltjes associada, por sucessão de polinómios associados de primeira ordem e focamos a importância do teorema de Markov.

2. Espaço das séries formais. Teorema de Borel.

Nesta secção introduziremos algumas noções sobre a álgebra das séries formais e alguns resultados que terão utilidade posteriormente.

Considerando as noções de polinómio e espaço vectorial dos polinómios dadas no anterior capítulo, estamos então, aptos a falar em série formal e no espaço das séries formais. Para esta introdução tomamos como referência principal o livro de H. Cartan [**11**].

Comecemos por definir *polinómio formal* como uma combinação linear finita de elementos do espaço vectorial dos polinómios, e escrevêmo-lo da forma seguinte,

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n\,, \quad \text{com} \quad a_n \in \mathbb{C}\,,$$

onde se entende que só um número finito de coeficientes a_n são não nulos na sucessão infinita destes coefientes.

Uma *série formal* de potências em x é a expressão formal $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, onde não é requerido, que apenas um conjunto finito de coeficientes a_n, seja diferente de zero.

Definimos a *soma de séries formais* por:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n \quad \text{com} \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}$$

onde

$$c_n = a_n + b_n\,, n \geq 0$$

e o *produto da série formal por um escalar*, da seguinte forma,

$$\lambda \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n x^n\,, \quad \text{com} \quad a_n, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Com essas operações o conjunto $\mathcal{F}$, das séries formais, forma um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. O elemento neutro da adição é denotado por 0 e a sua série formal é aquela em que todos os coeficientes são iguais a zero.

O *produto de séries formais* é definido por:

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p \sum_{q\geq 0} b_q x^q = \sum_{n\geq 0} c_n x^n \tag{2.1}$$

onde

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q \, .$$

Observe-se que esta multiplicação é comutativa, associativa e bilinear.

Assim, $\mathcal{F}$, é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com elemento unidade, denotado por 1, que é a série formal onde $a_0 = 1$ e $a_n = 0$ para $n > 0$.

Definição 2.1. Chama-se *ordem* de uma série formal ao mais pequeno n tal que $a_n \neq 0$, denotando-se por $w(S)$, para uma série formal $S \not\equiv 0$.

Consideremos agora a *composição de séries formais*,

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{e} \quad T(y) = \sum_{p \geq 0} b_p y^p \, .$$

É essencial assumir-se que $b_0 = 0$, em outras palavras que $w(T) \geq 1$. A cada monómio $a_n x^n$ associamos a série formal $a_n(T(y))^n$, que tem significado, pois as séries formais em y formam uma álgebra. Como $b_0 = 0$, a ordem de $a_n(T(y))^n$ é maior ou igual a n, logo a família dos $a_n(T(y))^n$ é somável e podemos considerar a série formal:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (T(y))^n \tag{2.2}$$

na qual, reagrupamos as potências de y. Esta série formal em y é dita obtida por composição e denotamo-la por $S(T(y))$ ou $S \circ T$. Poder-se-á constatar, que se verificam as seguintes relações:

$$(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T \tag{2.3}$$

$$(S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T) \tag{2.4}$$

$$1 \circ T = 1 \, . \tag{2.5}$$

Note-se ainda que $S \circ (T_1 + T_2)$, não é em geral, igual a $S \circ T_1 + S \circ T_2$.

Lema 2.1. *A relação* $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$ *verifica-se sempre que* $w(T) \geq 1$ *e* $w(U) \geq 1$.

De seguida, falaremos em *inverso algébrico* de uma série formal. Ora, considere-se no anel, $\mathcal{F}$, a identidade formal

$$(1-y)(1+y+...+y^n+...)=1 \tag{2.6}$$

que é facilmente verificada. Logo, a série $1-y$ tem inverso em $\mathcal{F}$.

Lema 2.2. *Para que* $S(x) = \sum a_n x^n$ *tenha um elemento inverso para a multiplicação em* $\mathcal{F}$*, é necessário e suficiente que* $a_0 \neq 0$*, ou seja,* $S(0) \neq 0$.

Observação . Considerando a álgebra dos polinómios $\mathcal{P}$ contida na álgebra das séries formais, $\mathcal{F}$, observa-se que qualquer polinómio $Q(x)$, tal que, $Q(0) \neq 0$, tem inverso no anel $\mathcal{F}$. Este anel, contém então, todos os quocientes $P(x)/Q(x)$ onde P e Q são polinómios e $Q(0) \neq 0$.

Podemos também falar em *derivada formal* de uma série. A série derivada, $S'(x)$, por definição, é dada pela fórmula,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \, .$$

A aplicação $S \longmapsto S'$ é uma aplicação linear de $\mathcal{F}$ nele próprio. Mais, a derivada do produto de duas séries formais é dada pela fórmula,

$$\frac{d}{dx}(ST) = \frac{dS}{dx}T + S\frac{dT}{dx} \, .$$

Por sua vez, as derivadas de ordem superior das séries formais são obtidas por indução. Então, a derivada de ordem n é dada por

$$S^{(n)}(x) = n! a_n + \text{termos de ordem maior ou igual a um.}$$

Logo,

$$S^{(n)}(0) = n!a_n\,. \tag{2.7}$$

A série $I(x)$ definida por $I(x) = x$ é o *elemento neutro* da composição de séries formais, i.e.,

$$S \circ I = I \circ S = S\,.$$

LEMA 2.3. *Dada uma série formal S, uma condição necessária e suficiente para que exista uma série formal T, tal que*

$$T(0) = 0, \quad S \circ T = I$$

é que

$$S(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0\,.$$

Neste caso T é único e $T \circ S = I$. Por outras palavras, T é o inverso de S para a lei da composição.

OBSERVAÇÃO . Como $S(T(y)) = y$ e $T(S(x)) = x$, podemos dizer que as transformações formais

$$y = S(x) \quad \text{e} \quad x = T(y)$$

são o inverso uma da outra. Logo, diremos que T é a *série formal inversa* da série formal S. Mais ainda o lema 2.3 é o teorema da função implícita para funções definidas formalmente por uma série de potências.

TEOREMA (Borel). *Dada uma sucessão (a_j) de números complexos existe uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

$$f^{(j)}(0) = a_j, \quad j = 0, 1, 2, ...$$

DEMONSTRAÇÃO. Procederemos da seguinte forma:

A)

Seja

$$\varphi \in \mathcal{D}(]-2,2[) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \ \subset]-2,2[\text{ é compacto}\}$$

e tal que $\varphi = 1$ para $|x| < 1$. Prove-se que, podemos encontrar a sucessão (λ_n) de números reais tal que, se definirmos

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x) \tag{2.8}$$

então

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n^{(j)}(x) \right| \leq 2^{-n}, \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n-1\,. \tag{2.9}$$

B)

Prove-se que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

define uma função $f(x)$ que é $\mathcal{C}^\infty$ e que resolve o nosso problema original.

No que segue, usaremos $g^{(k)} = (\frac{d}{dx})^k g$ e a *fórmula de Leibniz*

$$(uv)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} u^{(p)} v^{(k-p)} \tag{2.10}$$

Vejamos primeiro que se tem A). Se $0 \leq k \leq n-1$ temos, usando (2.10):

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} n(n-1)...(n-p+1) x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)\,.$$

Como supp $\varphi \subset]-2,2[$, $\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x) = 0$, $|x| > \frac{2}{|\lambda_n|}$, então

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{|a_n|}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} (\frac{2}{|\lambda_n|})^{n-p} |\lambda_n|^{k-p} \sup_{y\, \in\,]-2,2[} |\varphi^{(k-p)}(y)|\,.$$

Façamos

$$M_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{y\, \in\,]-2,2[} |\varphi^{(j)}(y)|\,.$$

Temos então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq |a_n| \frac{M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{2^{(n-p)}}{(n-p)!} .$$

Como $0 \leq k \leq n-1$ temos as seguintes estimativas

$$\binom{k}{p} \leq k! \leq (n-1)!, \qquad \frac{2^{(n-p)}}{(n-p)!} \leq 2^n , \qquad \frac{1}{|\lambda_n|^{n-k}} \leq 2^n \frac{1}{|\lambda_n|}, \quad \text{se} \quad |\lambda_n| \geq 1$$

Logo,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{|a_n| M_n 2^n n!}{|\lambda_n|} .$$

Se tomarmos $|\lambda_n| \geq \max(1, |a_n| M_n 4^n n!)$ obtemos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq 2^{-n}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

como pretendiamos demonstrar.

Vejamos que se tem B). Por A) a série $\sum f_n(x)$ é uniformemente convergente e por isso define uma função contínua,

$$f(x) = \sum f_n(x) .$$

Mais ainda, se $k \in \mathbb{R}$ a série $\sum f_n^{(k)}$ é uniformemente convergente pois,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n^{(k)}(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

e na segunda soma, no segundo membro, temos $k \leq n-1$. Logo,

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n} .$$

Assim prova-se que $f \in \mathcal{C}^k$ e que $f^{(k)}(x) = \sum f_n^{(k)}(x)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, e consequentemente, $f \in \mathcal{C}^{\infty}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) = &\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} (x^n \varphi(\lambda_n x))^{(k)} \\ &+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \binom{k}{p} (x^n)^{(p)} \lambda_n^{k-p} \varphi^{(k-p)}(\lambda_n x) \end{aligned}$$

A segunda soma, no segundo membro, anula-se em $x = 0$, porque cada um dos seus termos contém x como factor, desde que, $n \geq k$ e $p \leq k$. Então, temos

$$f^{(k)}(x) = (\frac{d}{dx})^k[a_0\varphi(\lambda_0 x) + ... \\ + \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\varphi(\lambda_{k-1}x)] + (\frac{d}{dx})^k[\frac{a_k x^k}{k!}\varphi(\lambda_k x)] + R(x)$$

onde $R(0) = 0$.

O primeiro termo no segundo membro anula-se em $x = 0$ porque temos $\varphi^{(j)}(0) = 0$ para todo o $j \geq 1$, desde que $\varphi = 1$ para $|x| \leq 1$. Por sua vez, o segundo termo é igual a

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{a_k}{k!}(x^k)^{(p)}\lambda_k^{k-p}\varphi^{(k-p)}(\lambda_k x)\,.$$

Se $k - p > 0$ então $\varphi^{(k-p)}(0) = 0$. E, portanto, o único termo que não se anula, corresponde a $p = k$ e

$$\binom{k}{k}\frac{a_k}{k!}(x^k)^{(k)} = \frac{a_k}{k!}k! = a_k\,.$$

Logo, $f^{(k)}(0) = a_k$ e portanto encontrámos f. ■

3. Espaço das funcionais lineares. Biortogonalidade.

Aqui vamos dar significado ao *produto de uma funcional por um polinómio* e à *derivada de uma funcional.*

Se tivermos uma funcional linear u e um polinómio ϕ podemos definir ϕu como sendo a funcional linear tal que

$$\langle \phi u, p\rangle = \langle u, \phi p\rangle$$

onde

$$\langle \phi u, x^n\rangle = \sum_{i=0}^{m} a_i\langle u, x^{n+i}\rangle, \quad n \in \mathbb{N}$$

para

$$\phi = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \,.$$

Se tivermos uma funcional linear u, podemos definir a *derivada de* u, da seguinte forma:

$$\langle Du, p \rangle = -\langle u, p' \rangle$$

e p' é a derivada do polinómio p. Em particular,

$$\langle Du, x^n \rangle = -n \langle u, x^{n-1} \rangle \,, \quad n = 1, 2, \ldots \,.$$

Se $\{P_n\}$ for uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, temos que $\{P_n\}$ é uma base para $\mathcal{P}$. Assim, questões como a de encontrar uma base para $\mathcal{P}'$, espaço linear das funcionais definidas em $\mathcal{P}$, surgem naturalmente. Seja α_n tal que

$$\langle \alpha_n, P_m \rangle = \delta_{nm} \,. \tag{3.1}$$

Diz-se então que α_n satisfazendo (3.1) é *biortogonal* a $\{P_n\}$. Note-se que α_n é uma *base* para $\mathcal{P}'$.

Pela expressão (4.1) do capítulo 1, pela noção do produto de uma funcional por um polinómio e usando a linearidade das funcionais, temos que

$$\langle \frac{P_n u}{\langle u, {P_n}^2 \rangle}, P_m \rangle = \delta_{nm} \,.$$

Logo, pela biortogonalidade, obtemos que uma base de $\mathcal{P}'$ é $\{\frac{P_n u}{\langle u, {P_n}^2 \rangle}\}$.

Uma pergunta surge: Será esta a única base associada a $\mathcal{P}'$? A resposta é não! Existem outras bases conhecidas como a do exemplo que se segue:

EXEMPLO 3.1. A sucessão *delta de Dirac* , $\{{\delta_0}^{(k)}\}$

Ora pela noção derivada de uma funcional, temos que

$$\langle {\delta_0}^{(k)}, x^n \rangle = (-1)^k n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \langle \delta_0, x^{n-k} \rangle \,.$$

Como $\langle \delta_0, x^{n-1}\rangle$ é o valor da função no ponto zero, i.e., $\langle \delta_0, p\rangle = p(0)$ temos que

$$\langle {\delta_0}^{(k)}, x^n\rangle = \begin{cases} 0 \text{ , se } n > k \\ (-1)^n n! \text{ , se } n = k \\ 0 \text{ , se } n < k \end{cases} ;$$

Concluímos então que

$$\langle (-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!}, x^n\rangle = \delta_{nk} \, . \tag{3.2}$$

Logo $\{(-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!}\}$ é biortogonal a $\{x^n\}$.

Da mesma forma que, conhecendo uma base do espaço vectorial dos polinómios podemos escrever qualquer polinómio à custa dos elementos da base, vamos ver como descrever os elementos de $\mathcal{P}'$ em termos dos elementos da base $\{(-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!}\}$.

4. Representação da funcional linear à custa da sucessão das delta de Dirac. Problema de Momentos

Considere-se a expressão formal para $u \in \mathcal{P}'$,

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!} \tag{4.1}$$

à custa dos elementos da base $\{(-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!}\}$.

Perguntamos agora, quais são as constantes complexas u_k? Sendo que

$$\begin{aligned} \langle u, x^m\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \langle (-1)^k \frac{{\delta_0}^{(k)}}{k!}, x^m\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta_{km} \\ &= u_m \end{aligned}$$

concluímos

$$u_m = \langle u, x^m\rangle \, . \tag{4.2}$$

Que são os já nossos conhecidos momentos. Como consequência do que acabámos de observar temos os seguintes resultados.

Teorema 4.1. *Seja u uma funcional linear e $\{(-1)^n \frac{\delta_0{}^{(n)}}{n!}\}$ a sucessão de funcionais lineares definida por* (3.2). *Então,*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, x^n \rangle (-1)^n \frac{\delta_0{}^{(n)}}{n!} .$$

Do concluído em (4.2) começa-se a antever uma relação estreita entre o espaço dual, $\mathcal{P}'$, e o espaço das séries formais, que passamos a explicar.

Seja $(a_n) \subset \mathbb{C}$ qualquer. O *problema de momentos* consiste em determinar quando existe uma funcional linear regular u tal que $\langle u, x^n \rangle = a_n$. E caso exista, verificar se é única.

Consideremos então $(a_n) \subset \mathbb{C}$, pelo teorema de Borel temos que existe $f \in \mathcal{C}^\infty$, com $\operatorname{supp} f$ compacto e tal que

$$f^{(n)}(0) = \frac{a_n}{n!}$$

e $f(x) = \sum a_n x^n$ formalmente. Note que, uma condição necessária de convergência uniforme da série para f é dada por

$$|x| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

O teorema 4.1 diz-nos que um candidato a funcional regular associada a (a_n) vem dada por,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{\delta_0^{(n)}}{n!}.$$

Caso f, solução do problema de Borel, seja analítica então, há unicidade, da funcional associada a (a_n).

5. Função de Stieltjes como Medida Complexa de Ortogonalidade

Definição 5.1. Chama-se *função de Stieltjes* à função definida por

$$S(z) = \frac{1}{z}F(\frac{1}{z}), \tag{5.1}$$

onde F é a *função geradora de momentos*, (u_n), i.e.,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \,.$$

Logo, a função de Stieltjes toma a seguinte forma:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} \,. \tag{5.2}$$

Se considerarmos a expressão de S e usarmos a definição de $u_n = \langle u, x^n \rangle$, temos que:

$$S(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \langle u_x, (\frac{x}{z})^n \rangle \,.$$

Pela linearidade de u, temos:

$$S(z) = \frac{1}{z}\langle u_x, \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{z})^n \rangle$$

Sabemos também que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{z})^n = \frac{1}{1-\frac{x}{z}}, \quad |z| > |x| \,.$$

Logo temos que:

$$S(z) = \langle u_x, \frac{\frac{1}{z}}{\frac{z-x}{z}} \rangle = \langle u_x, \frac{1}{z-x} \rangle,$$

onde u_x designa que u actua sobre x.

Veremos de seguida que $S(z)$ é medida de ortogonalidade $\{P_n\}$ associada a u:

Consideremos γ uma região circular contendo a origem, então

$$\begin{aligned}\int_\gamma P_n(z)P_m(z)S(z)dz &= \int_\gamma P_n(z)P_m(z)\langle u_x, \frac{1}{z-x}\rangle dz \\ &= \langle u_x, \int_\gamma \frac{P_m(z)P_n(z)}{z-x}dz\rangle\,.\end{aligned}$$

Como P_m e P_n são polinómios, logo funções analíticas, temos da fórmula integral de Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{P_m(z)P_n(z)}{z-x}dz = 2\pi i P_n(x)P_m(x)$$

e, portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma P_n(z)P_m(z)S(z)dz &= 2\pi i\langle u_x, P_n(x)P_m(x)\rangle \\ &= 2\pi i K_n\delta_{nm}\,.\end{aligned}$$

Concluímos assim que, se $\{P_n\}$ for uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a u, também o é, relativamente a S, definido anteriormente.

Observe-se ainda que S é uma função e u uma funcional linear.

6. Sucessão de Polinómios Associados e Teorema de Markov

Iniciaremos esta secção introduzindo a noção de sucessão de polinómios associados e dando algumas das suas caracterizações.

Definição 6.1. Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear u. À sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{{P_n}^{(1)}\}$ de termo geral

$$P_n{}^{(1)}(z) = \frac{1}{u_0}\langle u_x, \frac{P_{n+1}(z)-P_{n+1}(x)}{z-x}\rangle \tag{6.1}$$

onde u_x representa a acção de u na variável x, chamamos *sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada de primeira ordem.*

Esta sucessão satisfaz a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$, i.e.,

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x)\,. \tag{6.2}$$

Se subtrairmos esta mesma equação escrita na variável z de (6.2) e dividirmos o resultado por $(z-x)u_0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{zP_n(z) - xP_n(x)}{(z-x)u_0} = {} & \frac{P_{n+1}(z) - P_{n+1}(x)}{(z-x)u_0} \\ & + c_n \frac{P_n(z) - P_n(x)}{(z-x)u_0} + \lambda_n \frac{P_{n-1}(z) - P_{n-1}(x)}{(z-x)u_0}\,.\end{aligned}$$

Ao fazermos actuar u_x em ambos os membros, temos:

$$\frac{1}{u_0}\langle u_x, \frac{zP_n(z) - xP_n(x)}{z-x}\rangle = {P_n}^{(1)}(z) + c_n {P_{n-1}}^{(1)}(z) + \lambda_n {P_{n-2}}^{(1)}(z)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{1}{u_0}\langle u_x, \frac{zP_n(z) - zP_n(x)}{z-x}\rangle + \frac{1}{u_0}\langle u_x, \frac{zP_n(x) - xP_n(x)}{z-x}\rangle & \\ = {P_n}^{(1)}(z) + c_n {P_{n-1}}^{(1)}(z) + \lambda_n {P_{n-2}}^{(1)}(z) &\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z{P_{n-1}}^{(1)}(z) = {P_n}^{(1)}(z) + c_n {P_{n-1}}^{(1)}(z) + \lambda_n {P_{n-2}}^{(1)}(z)$$

$${P_n}^{(1)}(z) = (z - c_n){P_{n-1}}^{(1)}(z) - \lambda_n {P_{n-2}}^{(1)}(z) \tag{6.3}$$

com condições iniciais

$${P_{-1}}^{(1)}(z) = 0 \quad \text{e} \quad {P_0}^{(1)}(z) = 1\,.$$

Pode-se ainda provar que a sucessão $\{P_n\}$ de polinómios ortogonais e a dos seus associados verificam a seguinte relação

$$P_{n+1}(x){P_{n-1}}^{(1)}(z) - P_n(x){P_n}^{(1)}(z) = -r_n \quad \text{onde} \quad r_k = \prod_{i=1}^{k+1} \lambda_i \tag{6.4}$$

ou, equivalentemente,

$$P_{n+1}(z)q_n(z) - P_n(z)q_{n+1}(z) = r_n \quad \text{onde} \quad q_n(z) = \langle u_x, \frac{P_n(x)}{z-x}\rangle\,. \tag{6.5}$$

Observe-se ainda que para $n = 0$,

$$q_0(z) = \langle u_x, \frac{1}{z-x}\rangle \quad \text{onde} \quad P_0(x) = 1\,.$$

Obtemos então que $q_0(z) = S(z)$, ou seja, a medida complexa de ortogonalidade vista na seção anterior.

De seguida enunciaremos um teorema que nos permitirá obter a medida de Stieltjes, no caso definido positivo.

TEOREMA (Markov). *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida complexa $S(z)$. Então,*

$$\frac{{P_{n-1}}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \rightrightarrows S(z), \quad \textit{quando} \quad n \to \infty,$$

sobre compactos que não intersectam o intervalo de ortogonalidade.

DEMONSTRAÇÃO. Observe-se que, $\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}$ se pode escrever na forma,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{z - z_{nk}}, \quad \text{onde} \quad z_{nk} \quad \text{são os zeros de} \quad P_n.$$

Usando o teorema da fórmula da quadratura de Gauss do primeiro capítulo e usando o facto de os zeros de P_n se encontrarem no verdadeiro intervalo de ortogonalidade, Δ, temos que,

$$\left| \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{z - z_{nk}} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{|z - z_{nk}|}.$$

Considerando K um subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ e seja $\eta := dist(K, \Delta) := \min\{|z - z_k| : z \in K, z_k \in \Delta\} > 0$, temos que

$$\left| \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right| \leq \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} = \frac{u_0}{\eta},$$

onde u_0 é o momento de ordem zero. Portanto, pelo princípio de compacidade do Montel, temos que $\{\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}\}$ é uma família compacta em K, isto é existe uma subsucessão $\{n_k\}$ tal que,

$$\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n(z)} \rightrightarrows g(z), \quad k \to \infty, \quad z \in K.$$

Pelo teorema de Weierstrass para a convergência de fuções analíticas temos que g é analítica.

Sabemos também que se tivermos $u^n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\delta_{z_{nk}}$ então $\widehat{u^n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{du^n(x)}{x-z}$ pois ao escrevermos $\frac{1}{x-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-z_{nk})^j}{(z-z_{nk})^{j+1}}$, então

$$\widehat{u^n}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{nk}}{z-z_{nk}} = \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}.$$

Como sabemos que para $k = 0, 1, 2..., 2n-1$, $u_k = \int x^k du(x) = \int x^k du^n(x)$, temos que $\widehat{u^n}$ converge fracamente para $\widehat{u}$. Logo, temos o pretendido, ou seja, $g(z) \equiv S(z)$, pela unicidade das funções analíticas.

∎

Recordando os conceitos dados anteriormente, concluímos que

$$P_n(z)S(z) = {P_{n-1}}^{(1)}(z) + q_n(z)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{{P_{n-1}}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = S(z) - \frac{q_n(z)}{P_n(z)}\,. \tag{6.6}$$

Utilizando o teorema de Markov, temos que $\frac{q_n}{P_n}$ converge uniformemente para zero. Mostrou-se então, uma aplicação deste teorema, que nos irá ser útil no capítulo que se segue.

CAPÍTULO 3

Sucessões de Polinómios de Laguerre-Hahn

1. Introdução histórica

1.1. Os clássicos. Normalmente, quando nos referimos a *sucessões de polinómios ortogonais clássicos* referimo-nos às sucessões dos polinómios de Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel. Estes polinómios possuem uma série de propriedades comuns a menos de uma transformação afim na variável, nomeadamente:

a) São as únicas soluções polinomiais ortogonais para o problema dos valores próprios correspondentes a um operador diferencial da forma,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{1.1}$$

onde $a_i(x)$ é um polinómio de grau no máximo i, para $i = 0, 1, 2$. A equação (1.1) é conhecida como *equação diferencial linear de segunda ordem* do tipo *Sturm-Liouville*[**3**].

b) São as únicas famílias de polinómios ortogonais cujas derivadas, são elas próprias, polinómios ortogonais.

c) Todas elas possuem uma *fórmula tipo Rodrigues*,

$$P_n(x) = \frac{K_n}{w(x)} D^n(w(x)a_2^n(x)), \quad K_n \neq 0\,, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

onde $w(x)$ é uma função não negativa num certo intervalo e $gra_2 \leq 2$ onde a_2 é um polinómio em x e independente de n (ver [**17**]).

d) Os únicos polinómios ortogonais que satisfazem uma equação diferencial de diferenças,

$$a_2(x)P'_n(x) = a_nP_{n+1} + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x),$$
$$n \geq 1 \quad \text{e} \quad c_n \neq 0\,,$$

onde a_2 é um polinómios de grau no máximo dois são, salvo transformações afins da variável, os citados polinómios clássicos (ver [**12**]).

e) Se considerarmos uma funcional u regular que sastisfaz *equação diferencial de Pearson*

$$(a_2u)' + a_1u = 0$$

onde $gra_2 \leq 2$ e $gra_1 = 1$ aparecem como únicas soluções as funcionais clássicas (ver [**10**]).

f) Todas elas satisfazem uma equação não linear da forma,

$$\sigma(x)\frac{d}{dx}(P_n(x)P_{n-1}(x)) = (\alpha_nx + \beta_n)P_n(x)P_{n-1}(x) + \gamma_nP_n^2(x) + \delta_nP_{n-1}^2(x)$$

onde α_n, β_n, γ_n e δ_n são independentes de x (ver [**25**]).

Observe-se que cada uma das propriedades acima têm um recíproco, ou seja, qualquer sucessão de polinómios ortogonais que satisfaça qualquer uma das propriedades tem de ser necessariamente uma das sucessões de polinómios ortogonais clássicos (ver [**10**]).

Incluimos o caso Bessel na classificação de sucessões de polinómios ortogonais clássicos pois em 1949, H.L.Krall e O. Frink, em [**20**], mediante técnicas de separação de variáveis na equação de ondas em coordenadas esféricas, obtêm esta nova família de polinómios ortogonais. Estes, verificam também, as propriedades acima e passam a fazer parte da família dos polinómios ortogonais clássicos.

1.2. Os trabalhos do Shohat. Numerosos autores tentaram generalizar as propriedades das sucessões de polinómios ortogonais clássicos. Polinómios estes, cuja função peso w associada à medida de ortogonalidade verifica uma equação diferencial linear de primeira ordem, com coeficientes polinomiais, denominada por *equação de Pearson* e representada por

$$(\phi w)' = \psi w \tag{1.2}$$

com

$$gr\phi \quad \text{e} \quad gr\psi \geq 1 \quad \text{fixos.}$$

Face a estes trabalhos e à acumulação dos seus resultados houve necessidade de estruturar e classificar o que era imposto naturalmente.

Destas tentativas, o trabalho que mais se salientou foi o de J. Shohat [**28**] dando origem às *sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicas*, cuja função peso verifica (1.2), mas onde ϕ e ψ são polinómios de qualquer grau.

Assim, Shohat, ficou conhecido como o inventor dos *polinómios semi-clássicos*.

Shohat provou que se w satisfizesse (1.2) então a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada verificava uma relação diferencial em diferenças dita de primeira ordem.

$$\psi P_n + \phi P_n' = \sum_{k=n-s}^{n+s} a_{n,k} P_k, \quad n \geq s. \tag{1.3}$$

Mais ainda, $\{P_n\}$ verificava as seguintes equações diferenciais de segunda ordem,

$$\phi P_n'' + \psi P_n' = \sum_{k=n-s-1}^{n+s-1} b_{n,k} P_k, \quad n \geq s. \tag{1.4}$$

$$A_n P_n'' + B_n P_n' + C_n P_n = 0 \tag{1.5}$$

onde A_n, B_n e C_n são polinómios cujos coeficientes dependem de n e os graus são limitados por número independente de n.

1.3. O Problema de Karlin-Szegö. Posteriormente, em 1960, G. Szegö e D. Karlin, em [**19**], propuseram o problema de caracterizar as funções pesos associadas a sucessões de polinómios ortogonais mónicos, bem como a sua determinação, se estes verificarem uma equação do tipo (1.3). A resposta foi então dada independentemente por Bonan, Lubinsky e Nevai, numa série de trabalhos [**4, 5, 27, 26**] e também por Maroni em [**23**]. Enquanto, os primeiros, estiveram mais interessados em determinar explicitamente a medida, P. Maroni por sua vez, provou que estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos são aquelas cujas sucessões de polinómios mónicos derivadas é quase-ortogonal de uma dada ordem e que se $\{P_n\}$ verifica (1.3) então qualquer função peso que lhe está associada verifica (1.2).

Antes de P. Maroni, já W. Al. Salam e T. S. Chihara, em [**1**] tinham estudado o problema para o caso clássico, isto é, quando $s = 0$ no caso semi-clássico.

Em [**6**] prova-se também que se $\{P_n\}$ verificar uma equação do tipo (1.3) tomando em vez de ϕ, um polinómio que dependa de n, então, a medida de ortogonalidade verifica uma equação do tipo Pearson.

É com base nestes resultados e outros que assentaremos o nosso trabalho neste capítulo. Para finalizar, podemos encontrar uma boa resenha destes resultados em [**22, 24**].

1.4. Sucessão de Laguerre-Hahn. Comecemos por dizer que para que uma funcional linear u seja *semi-clássica* é necessário e suficiente que a sua função de Stieltjes associada verifique uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes polinomiais

$$\phi(z)S'(z) = C(z)S(z) + D(z).$$

A esta equação chama-se equação de *Laguerre-Hahn afim.*

Dizemos então que a funcional linear u é *Laguerre-Hahn* sempre que a sua função de Stieltjes associada verifica uma *equação de Riccati* com coeficientes polinomiais, ou seja, verifica

$$A(z)S'(z) = B(z)S^2(z) + C(z)S(z) + D(z) \quad B \neq 0\,.$$

Assim, permite-se a consideração de uma família mais ampla de funcionais de momentos, cuja caracterização é dada pela anterior condição. Relativamente esta *família*, denominada *Laguerre-Hahn* alguns resultados foram obtidos em [**13**]. Em todo o caso a utilização das técnicas apresentadas nos trabalhos de P.Maroni revela-se frutífera e permite uma representação coerente da teoria.

Os polinómios associados a esta funcional denominam-se de *polinómios de Laguerre-Hahn.* Uma das suas principais características é que estes satisfazem uma equação diferencial ordinária de quarta ordem.

2. Equação funcional de Pearson

Comecemos por definir a *equação generalizada de Pearson*, como a equação diferencial funcional de primeira ordem definida por

$$D(\phi u) = \psi u \tag{2.1}$$

onde u é uma funcional linear, com $gr(\psi) \geq 1$ e $\phi \not\equiv 0$.

O que pretendemos nesta secção é dar uma interpretação da equação de Pearson em termos da funcional de momentos, ou melhor, em termos dos momentos.

Comecemos por dizer que se u funcional linear é tal que verifica a equação funcional de Pearson então u é tal que

$$\langle D(\phi u), x^n \rangle = \langle \psi u, x^n \rangle, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, ...$$

Se conhecermos ϕ e ψ, ou seja, se conhecermos ϕ_j's e ψ_j's tais que,

$$\phi = \sum_{j=0}^{s+2} \phi_j x^j \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=0}^{s+1} \psi_j x^j$$

onde $s \in \mathbb{N}_0$ então,

$$\langle (\phi u)', x^n \rangle = \langle \psi u, x^n \rangle \Leftrightarrow -n \langle u, \phi x^{n-1} \rangle = \langle u, \psi x \rangle$$

$$\Leftrightarrow -n \langle u, \sum_{j=0}^{s+2} \phi_j x^{n+j-1} \rangle = \langle u, \sum_{j=0}^{s+1} \psi_j x^{n+j} \rangle$$

$$\Leftrightarrow -n \sum_{j=0}^{s+2} \phi_j u_{n+j-1} = \sum_{j=0}^{s+1} \psi_j u_{n+j}$$

$$\Leftrightarrow n\phi_0 u_{n-1} + \sum_{j=0}^{s+1} (\psi_j + n\phi_{j+1}) u_{n+j} = 0 \,. \tag{2.2}$$

Assim, a equação de Pearson para u tem uma interpretação em termos dos momentos da funcional linear u. Obtemos desta forma uma equação de recorrência para os momentos. Se a soubermos resolver passamos a conhecê-los e como vimos no primeiro capítulo podemos saber qual é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada(cf. (1.4.3)).

Observe-se ainda que, esta não é uma equação de coeficientes constantes, como tal usar este tipo de processo não será o mais indicado.

Teorema 2.1. *Se a funcional linear u verifica uma equação funcional de Pearson então é equivalente dizer que a sucessão de momentos associada a u verifica a relação de recorrência,* (2.2).

Façamos de seguida uma nova interpretação da equação de Pearson agora à custa da função de Stieltjes, S.

Recordemos que a função de Stieltjes associada a uma funcional linear u é definida por:

$$S(z) = \langle u_x, \frac{1}{z-x} \rangle, \quad |z| > |x|\,;$$

ou, equivalentemente, por

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}}\,;$$

e a sua derivada dada por:

$$S'(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)u_n}{z^{n+2}}\,.$$

Note-se ainda que a equação de Pearson é equivalente à expressão para os momentos dada por (2.2). Primeiro tomemos o caso particular em que $s = 1$, i.e., ϕ e ψ são dados por:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_3 z^3 + \phi_2 z^2 + \phi_1 z + \phi_0 \\ \psi &= \psi_2 z^2 + \psi_1 z + \psi_0 \end{aligned}$$

Como $s = 1$, temos a equação de recorrência para os momentos dada por:

$$\begin{aligned} & n\phi_0 u_{n-1} + \sum_{j=0}^{2} (\psi_j + n\phi_{j+1}) u_{n+j} = 0 \\ & \Leftrightarrow n\phi_0 u_{n+1} + (\psi_0 + n\phi_1) u_n + (\psi_1 + n\phi_2) u_{n+1} + (\psi_2 + n\phi_3) u_{n+2} = 0 \\ & \Leftrightarrow n\phi_0 u_{n+1} + \psi_0 u_n + \psi_1 u_{n+1} + \psi_2 u_{n+2} + n\phi_1 u_n + n\phi_2 u_{n+1} + n\phi_3 u_{n+2} = 0 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por z^{n+1} e somando sobre n de zero a infinito, obtemos:

$$\phi_0\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_{n-1}}{z^{n+1}}+\psi_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{z^{n+1}}+\psi_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{z^{n+1}}+\psi_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+2}}{z^{n+1}}$$
$$+\phi_1\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_n}{z^{n+1}}+\phi_2\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_{n+1}}{z^{n+1}}+\phi_3\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_{n+2}}{z^{n+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \phi_0\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(n+1)u_n}{z^{n+2}}+\psi_0 S(z)+z\psi_1[S(z)-\frac{u_0}{z}]+z^2\psi_2[S(z)-\frac{u_0}{z}-\frac{u_1}{z^2}]$$
$$+\phi_1 z\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_n}{z^{n+2}}+\phi_2 z^2\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_{n+1}}{z^{n+3}}+\phi_3 z^3\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{u_{n+2}}{z^{n+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow -\phi_0 S'(z)+[\psi_0+z\psi_1+z^2\psi_2]S(z)-u_0-u_0 z-u_1$$
$$+\phi_1 z[-S'(z)-\frac{1}{z}S(z)]+\phi_2 z^2[-S'(z)-\frac{2}{z}S(z)+\frac{u_0}{z^2}]$$
$$+\phi_3 z^3[-S'(z)-\frac{3}{z}S(z)+2\frac{u_0}{z^2}+\frac{u_1}{z^3}]=0$$

$$\Leftrightarrow -\phi_0 S'(z)+[\psi_0+z\psi_1+z^2\psi_2]S(z)-u_0-u_0 z-u_1$$
$$-S'(z)[\phi_1 z+\phi_2 z^2+\phi_3 z^3]-S(z)[\phi_1+2\phi_2 z+3\phi_3 z^2]$$
$$+\phi_2 u_0+2\phi_3 u_0 z+\phi_3 u_1=0$$

$$\Leftrightarrow -S'(z)[\phi_0+\phi_1 z+\phi_2 z^2+\phi_3 z^3]$$
$$+S(z)[\psi_0+z\psi_1+z^2\psi_2-\phi_1-2z\phi_2-3z^2\phi_3]$$
$$+\phi_2 u_0+2\phi_3 u_0 z+\phi_3 u_1-u_0-u_0 z-u_1=0\,.$$

Ou equivalentemente,

$$S'(z)\phi(z)=S(z)B(z)+C(z)\,.$$

com

$$B(z)=\psi(z)-\phi'(z)\quad \text{e}\quad C(z)=-(u\theta\circ\phi)'(z)+(u\theta\circ\psi)(z)$$

onde

$$\theta \circ p = \frac{p(z) - p(0)}{z}$$

e uq é o polinómio definido pela multiplicação à direita por uma funcional.

O mesmo método, pode aplicar-se para estudar o caso geral. Obtemos assim, uma equação diferencial para a função de Stieltjes da seguinte forma:

$$S'(z)\phi(z) = S(z)B(z) + C(z) \tag{2.3}$$

onde ϕ é o mesmo da equação de Pearson e $B(z)$ é escrito à custa de ϕ e ψ de (2.1), bem como $C(z)$.

Teorema 2.2. *u funcional linear é tal que $D(\phi u) = \psi u$ se e somente se a função de Stieltjes S é tal que, existem B e C tais que*

$$\phi S' = BS + C\,.$$

Observação . A vantagem deste resultado é que S é uma função em z e como tal sabemos resolver esta equação diferencial de primeira ordem, o que não acontecia no caso anterior. Já que esta se trata de uma equação diferencial ordinária e a anterior de uma equação funcional.

Vamos destacar os dois resultados fundamentais obtidos nesta secção

Teorema 2.3. *Seja (P_n) uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi-clássica relativamente a u e S a função de Stieltjes associada. Então as seguintes equações são equivalentes:*

(i) *u é tal que $D(\phi u) = \psi u$, com $gr(\psi) \geq 1$.*

(ii) *u é tal que $n\phi_0 u_{n-1} + \sum_{j=0}^{s+1}(\psi_j + n\phi_{j+1})u_{n+j} = 0$*

(iii) *S é tal que $S'(z)\phi(z) = S(z)B(z) + C(z)$ onde $S(z) = \langle u_x, \frac{1}{z-x}\rangle$.*

3. Caracterizações das sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicos

3.1. Discussão da classe.

DEFINIÇÃO 3.1. Uma funcional de momentos u diz-se *semi-clássica* de classe s se:

1. u é regular
2. u verifica a equação de Pearson.
3. $s = \min_{(\phi,\psi)\in\mathcal{A}_u} h(\phi,\psi)$ onde

$$\mathcal{A}_u = \{(\phi,\psi) \in \mathbb{P}\times\mathbb{P} : D(\phi u) = \psi u,\ \mathrm{gr}(\psi) \geq 1 \quad \text{e} \\ n\frac{\phi^{(s+2)}}{(s+2)!}(0) + \frac{\psi^{(s+1)}}{(s+1)!}(0) \neq 0, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

DEFINIÇÃO 3.2. Uma família de polinómios $\{P_n\}$ é dita *quase ortogonal de ordem s* relativamente a (funcional de momentos não necessariamente regular), u, se

$$\langle u, P_m P_n\rangle = 0, \quad |n-m| \geq s+1$$
$$\exists\ r \geq s : \langle u, P_{r-s}P_r\rangle \neq 0\,.$$

TEOREMA (Maroni, 1987). *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional de momentos u. $\{P_n\}$ é semi clássica de classe s se e somente se $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ for uma sucessão de polinómios mónicos quase-ortogonal de ordem s relativamente a uma determinada funcional de momentos, $\tilde{u}$.*

Observe-se que as definições dadas, são essenciais para a compreensão deste capítulo.

3.2. Teorema de Magnus. Comecemos por demonstrar um resultado que terá um papel fundamental nesta secção (cf. [**21**]).

Teorema (Magnus, 1984). *Seja* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, i.e., existem duas sucessões de números reais* (β_n) *e* (γ_n) *com* $\gamma_n \neq 0$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$*, tais que:*

$$\begin{cases} xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \quad e \quad P_1(x) = x - \beta_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Suponhamos que $f_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ *verifica*

$$a_n(x) f_n'(x) = b_n(x) f_n^2(x) + c_n(x) f_n(x) + d_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

onde a_n, b_n, c_n *e* d_n *são polinómios de graus limitados. Então,*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\ c_{n+1} = -c_n - 2(x - \beta_{n+1}) \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\ d_{n+1} = a_n + \gamma_{n+1} b_n + (x - \beta_{n+1}) c_n + (x - \beta_{n+1})^2 \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} \end{cases} \tag{3.3}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Dividindo ambos os membros de (3.1) por P_n obtemos a seguinte equação:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = (x - \beta_n) - \gamma_n \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

ou seja,

$$f_n = (x - \beta_n) - \gamma_n \frac{1}{f_{n-1}} \quad \text{para} \quad n \geq 1\,. \tag{3.4}$$

Derivando a expressão que resulta desta por substituição de n por $n+1$ vem

$$f_{n+1}' = 1 + \gamma_{n+1} \frac{f_n'}{f_n^2}\ ,$$

que multiplicada por a_n e aplicando (3.2) origina,

$$a_n f_{n+1}' = a_n + \gamma_{n+1} \frac{b_n f_n^2 + c_n f_n + d_n}{f_n^2}$$

ou seja,

$$a_n f_{n+1}' = (a_n + \gamma_{n+1} b_n) + \gamma_{n+1} \frac{c_n}{f_n} + \gamma_{n+1} \frac{d_n}{f_n^2}\,.$$

De (3.4) obtemos,

$$
\begin{aligned}
a_n f'_{n+1} = (a_n + \gamma_{n+1} b_n) + c_n(x - \beta_{n+1} - f_{n+1}) \\
+ \frac{d_n}{\gamma_{n+1}}[(x-\beta_{n+1})^2 + f_{n+1}^2 - 2(x-\beta_{n+1})f_{n+1}]
\end{aligned}
$$

e, então,

$$
\begin{aligned}
a_n f'_{n+1} &= \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} f_{n+1}^2 + (-c_n - 2(x-\beta_{n+1})\frac{d_n}{\gamma_{n+1}}) f_{n+1} \\
&\quad + [a_n + \gamma_{n+1} b_n + (x-\beta_{n+1})c_n + (x-\beta_{n+1})^2 \frac{d_n}{\gamma_{n+1}}] \,.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Comparando (3.5) e (3.2), com $n+1$ no lugar de n, obtemos (3.3). ■

3.3. Teorema de equivalência.

TEOREMA 3.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi-clássica relativamente a uma funcional de momentos u e seja S a função de Stieltjes associada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $D(\phi u) = \psi u$

(b) $\phi(z)S'(z) = B(z)S(z) + C(z)$

(c) *Existem polinómios A_n e B_n tais que* $\phi(z)P'_n(z) + \psi(z)P_n(z) = A_n P_n(z) + B_n P_{n-1}(z)$

(d) *Existem polinómios C_n, D_n e E_n tais que* $\phi(z)(P'_{n+1}P_n - P_{n+1}P'_n) = C_n P_{n+1}^2 + D_n P_n^2 + E_n P_{n+1} P_n$

(e) *Existem polinómios A_n, B_n e C_n tais que* $A_n P''_n + B_n P'_n + C_n P_n = 0$

(f) *Existem polinómios A_n, B_n e E_n tais que* $E_n P'_n = A_n P_n + B_n P_{n-1}$ *onde E_n é para cada n um polinómio cujos coeficientes dependem de n.*

Demonstração. Vimos anteriormente que (a) $\Leftrightarrow$ (b). Shohat, provou nos seus trabalhos que (a) $\Rightarrow$ (c) e (a) $\Rightarrow$ (e). Maroni, mostrou também, que (c) $\Rightarrow$ (a). Assim, as equivalências (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) estão já provadas. Usando a ortogonalidade de $\{P_n\}$ e (c) obtem-se facilmente (d), e desta, juntamente com o facto de dois polinómios consecutivos de uma sucessão de polinómios ortogonais não terem zeros em comum, obtemos (c). Hahn mostrou também que (e) $\Rightarrow$ (a).

Iremos então realizar o processo de Hahn [**18**] e mostrar que (e) $\Rightarrow$ (f). E por uma aplicação do lema de Magnus justificar que (f) $\Rightarrow$ (c)

Provemos então que, (e) $\Rightarrow$ (f). Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos satisfazendo

$$A_n P_n'' + B_n P_n' + C_n P_n = 0$$

onde $A_n = d_n \phi$. As únicas singularidades fixas são os zeros de ϕ, sendo os zeros de d_n, evitáveis. Nestas condições tomamos $Y_n = [\ P_n \quad P_n'\ ]^t$. Podemos então escrever,

$$Y_n' = X_n Y_n \quad \text{com} \quad X_n = \begin{pmatrix} 0 & A_n \\ -C_n & -B_n \end{pmatrix} / A_n \,.$$

Da hipotese tiramos que Y_n e Y_{n-1} têm as mesmas singularidades, pelo o que existe uma matriz de funções racionais, tal que,

$$Y_n = R_n Y_{n-1} \quad \text{onde} \quad R_n = \begin{pmatrix} r_{1,n} & r_{2,n} \\ r_{3,n} & r_{4,n} \end{pmatrix} / A_n.$$

Logo,

$$P_n = r_{1,n} P_{n-1} + r_{2,n} P_{n-1}' \,.$$

Como $r_{1,n}$ e $r_{2,n}$ se podem escrever da forma, $\frac{p_{1,n}}{q_{1,n}}$ e $\frac{p_{2,n}}{q_{2,n}}$, respectivamente. Temos que $\exists E_n$, tal que:

$$E_n P_{n-1}' = A_n P_n + B_n P_{n-1}$$

onde E_n não depende de n.

Para finalizar provemos que (f) $\Longrightarrow$ (c). Temos então de (f) e da relação de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n, que existe E_n tal que,

$$\begin{cases} E_n P_n' = \theta_n P_n + \Lambda_n P_{n-1} \\ E_n P_{n-1}' = \Gamma_n P_n + \Delta_n P_{n-1} \end{cases} \tag{3.6}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.6) por $\frac{1}{P_{n-1}}$ e subtraindo o resultado de multiplicarmos a segunda equação por $\frac{P_n}{P_{n-1}^2}$, obtemos,

$$E_n\left(\frac{P_n'}{P_{n-1}} - \frac{P_{n-1}'P_n}{P_{n-1}^2}\right) = \theta_n \frac{P_n}{P_{n-1}} + \Lambda_n - \Gamma_n\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)^2 - \Delta_n \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

ou seja,

$$E_n f_{n-1}' = (\theta_n - \Delta_n) f_{n-1} - \Gamma_n f_{n-1}^2 + \Lambda_n. \tag{3.7}$$

Pelo teorema de Magnus, temos:

$$\begin{cases} E_{n+1} = E_n \\ -\Gamma_{n+1} = \frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}} \\ \theta_{n+1} - \Delta_{n+1} = -\theta_n + \Delta_n - 2(x - \beta_{n+1})\frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}} \\ \Lambda_{n+1} = E_n - \gamma_{n+1}\Gamma_n + (x - \beta_{n+1})(\theta_n - \Delta_n) + (x - \beta_{n+1})^2 \frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}} \end{cases}$$

E, portanto, E_n é um polinómio cujos coeficientes não dependem de n, i.e., $\phi \in \mathcal{P}$. Podemos então, reescrever (3.7) na forma,

$$\begin{aligned} \phi(P_n' P_{n-1} - P_{n-1}' P_n) = (\theta_n - \Delta_n) P_n P_{n-1} \\ - \Gamma_n P_n^2 + \Lambda_n P_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Isolando P_n e P_{n-1} em cada um dos membros, vem,

$$(\phi P_n' - (\theta_n - \Delta_n) P_n - \Lambda_n P_{n-1}) P_{n-1} = (\phi P_{n-1}' - \Gamma_n P_n) P_n.$$

Então, como P_n e P_{n-1} não têm zeros em comum, temos que existe $A_n \in \mathcal{P}$, tal que,

$$\begin{cases} \phi P_n' - (\theta_n - \Delta_n) P_n - \Lambda_n P_{n-1} = A_n P_n \\ \phi P_{n-1}' - \Gamma_n P_n = A_n P_{n-1} \end{cases} \tag{3.9}$$

Logo, pela primeira equação de (3.9), temos que,

$$\phi P_n' + \psi P_n = A_n P_n + B_n P_{n-1}$$

onde

$$\psi = -(\theta_n - \Delta_n) \quad \text{e} \quad B_n = \Lambda_n .$$

como queriamos demonstrar. ■

4. Sucessão de Laguerre-Hahn

Consideremos a funcional linear u de Laguerre-Hahn, ou seja, a sua função de Stieltjes associada verifica

$$(4.1) \quad A(z)S'(z) = B(z)S^2(z) + C(z)S(z) + D(z) \quad B \neq 0\,.$$

No capítulo anterior tinhamos observado (cf. fórmula (6.6)) que

$$(4.2) \qquad S(z) = \frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n} + \frac{q_n}{P_n}\,,$$

$$\begin{aligned} S'(z) &= \frac{(P_{n-1}^{(1)})'P_n - P_n'P_{n-1}^{(1)}}{P_n^2} + \frac{q_n'P_n - P_n'q_n}{P_n^2} \\ &= \frac{(P_{n-1}^{(1)})'}{P_n} + \frac{q_n'}{P_n} - \frac{(P_{n-1}^{(1)} + q_n)P_n'}{P_n^2}\,. \end{aligned}$$

Assim, substituindo as expressões de S e S' aqui encontradas obtemos que (4.1) toma a forma,

$$\begin{aligned} &A[\frac{(P_{n-1}^{(1)})'}{P_n} + \frac{q_n'}{P_n} - \frac{(P_{n-1}^{(1)} + q_n)P_n'}{P_n^2}] \\ &\qquad = B[\frac{(P_{n-1}^{(1)})^2}{P_n^2} + 2\frac{P_{n-1}^{(1)}q_n}{P_n^2} + \frac{q_n^2}{P_n^2}] + C[\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n} + \frac{q_n}{P_n}] + D\,. \end{aligned}$$

Multiplicando tudo por P_n^2, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} &A[(P_{n-1}^{(1)})'P_n + q_n'P_n - (P_{n-1}^{(1)} + q_n)P_n'] \\ &\qquad = B[(P_{n-1}^{(1)})^2 + 2P_{n-1}^{(1)}q_n + q_n^2] + C[P_{n-1}^{(1)} + q_n]P_n + DP_n^2 \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad A[(P_{n-1}^{(1)})'P_n - P_{n-1}^{(1)}P_n'] - B[P_{n-1}^{(1)}]^2 - C[P_{n-1}^{(1)}P_n] - DP_n^2 = \Theta_n$$

onde

$$\Theta_n = -P_n^2\{A(\frac{q_n}{P_n})' - B[2\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}\frac{q_n}{P_n} + (\frac{q_n}{P_n})^2] - C\frac{q_n}{P_n}\}\,. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como se verificou no capítulo 2, Θ_n pode escrever-se da seguinte forma,

$$\Theta_n = -\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}[P_nP_{n-2}^{(1)} - P_{n-1}P_{n-1}^{(1)}]\,. \tag{4.5}$$

Comparando (4.3) com (4.5) e isolando $P_{n-1}^{(1)}$ no primeiro membro e P_n no segundo, obtemos:

$$\begin{aligned}\{\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-1} + AP_n' + BP_{n-1}^{(1)} + CP_n\}P_{n-1}^{(1)}&\\ = \{\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-2}^{(1)} + A(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n\}P_n&\end{aligned}$$

Como os polinómios P_n e $P_{n-1}^{(1)}$ não têm zeros em comum, temos que, existe um polinómios Ω_n, tal que:

(i) $\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-1} + AP_n' + BP_{n-1}^{(1)} + CP_n = \Omega_nP_n$

(ii) $\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-2}^{(1)} + A(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n = \Omega_nP_{n-1}^{(1)}$

Observação .

- Quando $B = 0$ na alínea (i) temos a caracterização das (b)⇔(c) do teorema 3.1.
- Os polinómios associados de uma sucessão de polinómios ortogonais semi-clássicos na alínea (ii) são de Laguerre-Hahn.

Se multiplicarmos (ii) por $\frac{1}{P_n}$ e a esta equação subtrairmos (i) multiplicado por $\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n^2}$ obtemos

$$A(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n})' = B(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n})^2 + C(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}) + D + \frac{\Theta_n}{P_n^2}. \tag{4.6}$$

Quando $n \to \infty$, no caso definido-positivo, a expressão (4.6) converge uniformemente para

$$AS' = BS^2 + CS + D, \tag{4.7}$$

pois $\frac{\Theta_n}{P_n^2} \rightrightarrows 0$. Observe-se ainda, que no caso geral, isto permanece válido.

TEOREMA 4.1. *Seja u a funcional regular associada a $\{P_n\}$. Então u é Laguerre-Hahn se e somente se verifica*

$$\frac{\Theta_n}{r_{n-1}} P_{n-1} + AP_n' + BP_{n-1}^{(1)} + CP_n = \Omega_n P_n$$

e

$$\frac{\Theta_n}{r_{n-1}} P_{n-2}^{(1)} + A(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n = \Omega_n P_{n-1}^{(1)}$$

Reescrevamos (i) e (ii) sob a forma matricial. Temos então,

$$AIY_n' = A_n Y_n + B_n Y_{n-1} \tag{4.8}$$

onde

$$Y_n = [\ P_n \quad P_{n-1}^{(1)}\ ]^t, \quad A_n = \begin{pmatrix} \Omega_n - C & -B \\ D & \Omega_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_n = -\frac{\Theta_n}{r_{n-1}} I.$$

Se derivarmos ambos os membros de (4.8) obtemos

$$AIY_n'' = (A_n - (AI)')Y_n' + B_n Y_{n-1}' + A_n' Y_n + B_n' Y_{n-1}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (AI)^2 Y_n'' = {} & [A_n^2 - (AI)' A_n + AA_n'] Y_n \\ & + [A_n B_n - (AI)' B_n + AB_n' + B_n A_{n-1}] Y_{n-1} + B_n B_{n-1} Y_{n-2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, sabemos também que P_n e $P_{n-1}^{(1)}$ satisfazem a mesma relação de recorrência. Assim, temos a seguinte relação matricial,

$$Y_{n+1} - (x - \beta_n) I Y_n + \gamma_n I Y_{n-1} = 0_{2\times 1} \tag{4.10}$$

Se usarmos a relação matricial em (4.9), obtemos que

$$(AI)^2 Y_n'' = C_n Y_n + D_n Y_{n-1} \tag{4.11}$$

onde

$$C_n = AA_n' + A_n^2 - (AI)' A_n - B_n B_{n-1} (\gamma_{n-1} I)^{-1}$$

e

$$D_n = AB_n' + A_nB_n - (AI)'B_n + B_nA_{n-1} + B_nB_{n-1}(\gamma_{n-1}I)^{-1}(x-\beta_{n-1})I.$$

De (4.8) e (4.11) temos que

$$MX = b \tag{4.12}$$

onde

$M = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$, $\quad X = [\ Y_n \quad Y_{n-1}\ ]^t \quad$ e $\quad b = [\ AIY_n' \quad A^2IY_n''\ ]^t$.

Usando a regra de Cramer para determinarmos Y_n obtemos

$$A^2B_nY_n'' - AD_nY_n' + (A_nD_n - B_nC_n)Y_n = 0. \tag{4.13}$$

Constatamos assim, que Y_n verifica uma equação diferencial de segunda ordem.

TEOREMA 4.2. *Uma sucessão de polinómios de Laguerre-Hahn* $\{P_n\}$ *verifica*

$$A^2B_nY_n'' - AD_nY_n' - (A_nD_n - B_nC_n)Y_n = 0$$

onde $Y_n = [\ P_n \quad P_{n-1}^{(1)}\ ]^t$.

OBSERVAÇÃO . De (4.13) facilmente se obtem uma equação diferencial de quarta ordem para P_n.

CAPÍTULO 4

Geração de Sucessões Semi-Clássicas

1. Introdução

Vimos no capítulo anterior que se a sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ verificar

$$\phi P_n' + \psi P_n = A_n P_n + B_n P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

então $\{P_n\}$ é semi-clássica, e portanto, existe u funcional linear tal que

$$D(\phi u) = \psi u\,. \tag{1.2}$$

A ideia a explorar neste capítulo será, determinar de entre todas as sucessões que verificam (1.1), aquelas que são ortogonais. Assim, daremos uma condição necessária e suficiente em termos de ϕ e ψ para que a funcional u solução de (1.2) tenha uma sucessão de polinómios ortogonais associada, i.e., u seja regular.

Quando na equação de Pearson ϕ e ψ são tais que $\mathrm{gr}\phi \leq 2$ e $\mathrm{gr}\psi = 1$ com $\phi \not\equiv 0$ temos que os candidatos naturais a sucessões de polinómios ortogonais são as que verificam a equação diferencial

$$\phi P_n'' + \psi P_n' = \lambda_n P_n\,. \tag{1.3}$$

Vicente Gonçalves, em [**16**], mostra que as soluções polinomiais de (1.3) verificam uma relação de recorrência a três termos ,

$$x P_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}, \quad n = 1, 2, ...$$
$$P_0 = 1 \quad \text{e} \quad P_1 = x - \beta_0.$$

Por aplicação directa do teorema de Favard conclui-se que $\{P_n\}$, sucessão de polinómios mónicos, solução de (1.3) é ortogonal quando e só quando $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Note-se também que γ_n e β_n estão determinados pelos coeficientes de ϕ e ψ. Assim, a condição $\gamma_n \neq 0$ é necessária e suficiente para que uma funcional u, solução de $D(\phi u) = \psi u$ seja regular.

Em [**16**], Vicente Gonçalves mostrou também, que se P_n está definida por (1.3), então existe β_n tal que

$$2\phi P_n' + \psi P_n = (2a_0 n + b)(x - \beta_n)P_n + K_n P_{n-1}. \tag{1.4}$$

Observe-se também que (1.4) coincide com (1.1) onde

$$A_n = (2a_0 n + b)(x - \beta_n) \quad \text{e} \quad B_n = K_n\,.$$

O estudo que vamos realizar permite-nos, em particular, responder a esta questão.

Provou-se ainda em [**10**] que se $\{P_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais mónicos verificar

$$P_{n+1} = \frac{P_{n+2}'}{n+2} + a_n \frac{P_{n+1}'}{n+1} + b_n \frac{P_n'}{n},\ n = 0, , 1, ...,\ P_0 = 1\,, \tag{1.5}$$

ela só poderia ser clássica. Obtendo-se assim, mais uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais clássicas.

Um dos problemas estudados por A. Branquinho em [**8**] foi o de estender este resultado para o caso semi-clássico. Branquinho em [**9**] provou que as sucessões de polinómios mónicos que verificam

$$P_{n+s+1} = \sum_{j=0}^{s+2} a_j^n \frac{P_{n+j}'}{n+j} \tag{1.6}$$

só poderiam ser semi-clássicas. No entanto, não existe sucessão de polinómios ortogonais mónicos verificando (1.6), além das clássicas, i.e., quando $s = 0$. Constatando assim que (1.5) não tem um análogo para o caso semi-clássico. Tudo isto justifica o estudo que vamos realizar. Apresentaremos inicialmente o método, que nos dá duas condições necessárias e suficientes para a ortogonalidade de uma sucessão $\{P_n\}$ verificando (1.1). Posteriormente aplicamos este método no caso clássico, no caso Belmedhi e no caso Nevai.

2. Condição de Ortogonalidade

Vamos iniciar esta secção dando condições suficientes para que os elementos das sucessões de polinómios mónicos verificando (1.1) não tenham zeros em comum. Visto que, nesse caso o teorema de Darboux-Christoffel dá-nos uma condição necessária e suficiente para a ortogonalidade.

TEOREMA 2.1. *Seja x^* um zero de P_n. Se x^* não é zero de ϕ nem zero de P_n' então não é zero simultaneamente de P_n e P_{n-1}.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que se x^* for zero de P_n e P_{n-1} temos que x^* é zero de ϕ ou de P_n'. ∎

TEOREMA (Wendroff, [**29**]). *Dados dois polinómios de graus n, $n-1$, P_n e P_{n-1} sem zeros em comum, existem β_n e γ_n tais que P_{n+1} é definido por*

$$P_{n+1} = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1}\,, \gamma_n \neq 0\,.$$

E, portanto, podemos construir uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

Note-se porém que uma condição necessária e suficiente para que cada par (P_n, P_{n-1}) que verifique (1.1) tenha zeros entrelaçados, somente nos dá ortogonalidade no caso definido positivo. Este caso corresponde às soluções da *equação diferencial de Pearson*

$$(\phi w)' = \psi w\,,$$

com w função peso.

TEOREMA 2.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos verificando (1.1) cujos dois polinómios consecutivos não tem zeros em comum. Uma condição necessária e suficiente para a ortogonalidade de $\{P_n\}$ é que existam (β_n) e (γ_n) tais que*

$$(A_{n+1}-A_n)(x-\beta_n)=\phi+\gamma_n\left[\frac{B_{n-1}}{\gamma_{n-1}}-\frac{B_{n+1}}{\gamma_n}\right] \tag{2.1}$$

$$(x-\beta_n)B_n=-(A_{n+1}+A_n-A_0)\gamma_n \tag{2.2}$$

com condições iniciais $A_0=\psi$, $B_0=1$.

OBSERVAÇÃO . Estas duas condições determinam-nos as sucessões (β_n) e (γ_n) bem como os coeficientes A_n e B_n.

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se agora, uma sucessão de polinómios mónicos que verifique a relação (1.1) para alguns polinómios ϕ, ψ, A_n e B_n e tais que P_n e P_{n-1} não tenham zeros em comum. Então temos,

$$\phi P'_{n+1}+\psi P_{n+1}=A_{n+1}P_{n+1}+B_{n+1}P_n\,. \tag{2.3}$$

Multiplicando a equação (2.3) por $1/P_n$ e subtraindo o resultado da multiplicação de (1.1) por $\frac{P_{n+1}}{P_n^2}$ obtemos:

$$\begin{aligned}\phi(P'_{n+1}P_n-P'_nP_{n+1})\\ &=(A_{n+1}-A_n)P_{n+1}P_n+B_{n+1}P_n^2-B_nP_{n-1}P_{n+1}\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Do teorema de Darboux-Christoffel temos,

$$\begin{aligned}\phi P_n^2+\phi\gamma_n[P'_nP_{n-1}-P_nP'_{n-1}]\\ &=(A_{n+1}-A_n)P_{n+1}P_n+B_{n+1}P_n^2-B_nP_{n-1}P_{n+1}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\phi P_n^2 + \gamma_n[(A_n - A_{n-1})P_nP_{n-1} + B_nP_{n-1}^2 - B_{n-1}P_{n-2}P_n]& \\ = (A_{n+1} - A_n)P_{n+1}P_n + B_{n+1}P_n^2 - B_nP_{n-1}P_{n+1}&\end{aligned}$$

ou ainda que,

$$\begin{aligned}[(A_n - A_{n-1})\gamma_nP_n + B_nP_{n-1}\gamma_n + B_nP_{n+1}]P_{n-1}& \\ = [\gamma_nB_{n-1}P_{n-2} + (A_{n+1} - A_n)P_{n+1} + B_{n+1}P_n - \phi P_n]P_n\,.&\end{aligned}$$

Como P_n e P_{n-1} não têm zeros em comum, existe um polinómio Ω_n tal que

$$(A_n - A_{n-1})\gamma_nP_n + B_n\gamma_nP_{n-1} + B_nP_{n+1} = \Omega_nP_n \tag{2.5}$$

$$\gamma_nB_{n-1}P_{n-2} + (A_{n+1} - A_n)P_{n+1} + (B_{n+1} - \phi)P_n = \Omega_nP_{n-1}\,. \tag{2.6}$$

Se em (2.5) substituirmos n por $n-1$, obtemos:

$$(\Omega_{n-1} - (A_{n-1} - A_{n-2})\gamma_{n-1})P_{n-1} - B_{n-1}P_n = \gamma_{n-1}P_{n-2}B_{n-1}\,. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.6), vem:

$$\begin{aligned}(A_{n+1} - A_n)P_{n+1} + (B_{n+1} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}B_{n-1} - \phi)P_n& \\ + [(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\Omega_{n-1} - \Omega_n) - (A_{n-1} - A_{n-2})\gamma_n]P_{n-1} = 0\,.&\end{aligned} \tag{2.8}$$

Temos então que $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos quando e só quando se verifica:

$$\begin{cases} B_n(P_{n+1} + \gamma_nP_{n-1}) - [\Omega_n - (A_n - A_{n-1})\gamma_n]P_n = 0 \\ (A_{n+1} - A_n)P_{n+1} + (B_{n+1} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}B_{n-1} - \phi)P_n \\ +[(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\Omega_{n-1} - \Omega_n) - (A_{n-1} - A_{n-2})\gamma_n]P_{n-1} = 0 \\ P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n + \gamma_nP_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

isto é, existem (β_n) e (γ_n) com $\gamma_n \neq 0$ tais que,

$$B_n = \frac{\Omega_n - (A_n - A_{n-1})\gamma_n}{x - \beta_n}$$

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= \frac{\phi + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} B_{n-1} - B_{n+1}}{x - \beta_n} \\
&= \frac{\Omega_{n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{\Omega_n}{\gamma_n} - (A_{n-1} - A_{n-2})
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\Omega_n = (x - \beta_n) B_n + (A_n - A_{n-1}) \gamma_n \tag{2.10}$$

$$A_{n+1} - A_n = \frac{\Omega_{n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{\Omega_n}{\gamma_n} - (A_{n-1} - A_{n-2}) \tag{2.11}$$

$$(A_{n+1} - A_n)(x - \beta_n) = \phi + \gamma_n \left[\frac{B_{n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{B_{n+1}}{\gamma_n} \right].$$

Obtendo assim (2.1). Aplicando a propriedade telescópica a (2.11), obtemos:

$$A_{n+1} - A_0 = \frac{\Omega_{-1}}{\gamma_{-1}} - \frac{\Omega_n}{\gamma_n} - (A_{n-1} - A_{-2})$$

$$\Omega_n = -\gamma_n [A_{n-1} - A_{n+1} - A_0]. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.12) em (2.10), obtemos (2.2). Assim, as expressões (2.1) e (2.2) dão-nos duas relações de recorrência para os A_n e B_n. ■

Voltemos então ao problema que pretendemos resolver, i.e., saber quando é que uma sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$ que satisfaça

$$\phi P_n' + \psi P_n = A_n P_n + B_n P_{n-1}, \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.13}$$

onde A_n e B_n são polinómios e ϕ e ψ são polinómios cujos graus são $s+2$ e $s+1$, respectivamente, é ortogonal.

Sabemos então que, $\mathrm{gr}\{\phi P_n' + \psi P_n\}$ é $n+s+1$ e os graus de A_n e B_n não excedem $s+1$ e $s+2$, respectivamente.

Iniciaremos o nosso estudo pelo caso clássico, i.e., caso $s = 0$. Note-se que este caso está incluido no estudo realizado em [**7**].

3. Caso Clássico

Estando a trabalhar com o caso $s = 0$, comecemos por discutir o grau de A_n e B_n;

O grau de A_n é um, sendo este obtido da análise da relação (2.13) e conhecendo o grau de A_n, da relação (2.2), obtemos que o grau de B_n é igual a zero. Então suponhamos que A_n, B_n, ψ e ϕ, se escrevem da seguinte forma:

$$A_n = a_{0,n}x + a_{1,n} \qquad \phi = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$B_n = b_{0,n} \qquad \psi = b_0x + b_1$$

com condições iniciais $A_0 = \psi$ e $B_0 = 1$. Tendo em atenção estes dados obtemos de (2.2),

$$(3.1) \quad (x - \beta_n)b_{0,n} + (a_{0,n}x + a_{1,n})\gamma_n = -[(a_{0,n+1}x + a_{1,n+1}) - b_0x - b_1]\gamma_n$$

e, de (2.1),

$$(3.2) \quad (a_{0,n+1}x + a_{1,n+1} - a_{0,n}x - a_{1,n})(x - \beta_n) = a_0x^2 + a_1x + a_2 + \gamma_n\left(\frac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{b_{0,n+1}}{\gamma_n}\right).$$

Observe-se que ϕ e ψ são dados e o que pretendemos de seguida é determinar quem são γ_n, β_n, $a_{0,n}$, $a_{1,n}$ e $b_{0,n}$. Este vai ser o objectivo do nosso trabalho, pois se os identificarmos, ficamos a conhecer quem são os polinómios que são ortogonais.

Usando o método dos coeficientes indeterminados nas últimas relações, obtemos:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} b_{0,n} = -(a_{0,n} + a_{0,n+1} - b_0)\gamma_n & [x^1] \\ -\beta_n b_{0,n} = -(a_{1,n} + a_{1,n+1} - b_1)\gamma_n & [x^0] \\ a_{0,n+1} - a_{0,n} = a_0 & [x^2] \\ a_{1,n+1} - a_{1,n} - (a_{0,n+1} - a_{0,n})\beta_n = a_1 & [x^1] \\ -(a_{1,n+1} - a_{1,n})\beta_n = a_2 + \gamma_n(\dfrac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \dfrac{b_{0,n+1}}{\gamma_n}) & [x^0] \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$(3.4)\qquad \begin{cases} b_{0,n} = -(a_{0,n} + a_{0,n+1} - b_0)\gamma_n \\ -\beta_n b_{0,n} = -(a_{1,n} + a_{1,n+1} - b_1)\gamma_n \\ a_{0,n+1} - a_{0,n} = a_0 \\ a_{1,n+1} - a_{1,n} = a_1 + a_0\beta_n \\ -(a_1 + a_0\beta_n)\beta_n = a_2 + \gamma_n \dfrac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \gamma_{n+1}\dfrac{b_{0,n+1}}{\gamma_{n+1}} \end{cases} .$$

Aplicando a propriedade telescópica à terceira equação de (3.4), obtemos

$$a_{0,n+1} - a_{0,0} = (n+1)a_0$$

Pela condição inicial $A_0 = \psi$, temos que $a_{0,0} = b_0$, logo

$$a_{0,n+1} = (n+1)a_0 + b_0 .$$

determinando assim uma das nossas incógnitas.

Conhecendo $a_{0,n+1}$ vamos usá-lo na primeira equação de (3.4), obtendo assim:

$$b_{0,n} = -((2n+1)a_0 + b_0)\gamma_n .$$

Desta relação observamos que a_0 e b_0 não podem ser simultaneamente nulos, i.e., $a_0 b_0 \neq 0$.

Ao substituir $b_{0,n}$ na segunda equação de (3.4), obtemos

$$(3.5)\qquad \beta_n((2n+1)a_0 + b_0) = -(a_{1,n} + a_{1,n+1} - b_1) .$$

Somando algebricamente (3.5) com a quarta equação de (3.4), temos que:

$$2a_{1,n} = -\beta_n[2(n+1)a_0 + b_0] - a_1 + b_1 \,. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) na quarta equação do sistema (3.4) e multiplicando o resultado por $2(n+1)a_0+b_0$, podemos aplicar a propriedade telescópica e obtemos

$$\beta_n = \frac{-2a_1 n[(n+1)a_0 + b_0] - b_0\beta_0(2a_0 + b_0)}{[2na_0 + b_0][2(n+1)a_0 + b_0]} \,. \tag{3.7}$$

Por outro lado, aplicando a propriedade telescópica à quarta equação do sistema temos que

$$a_{1,n+1} = a_0 \sum_{k=0}^{n} \beta_k + (n+1)a_1 + b_1 \,. \tag{3.8}$$

Se substituirmos (3.6) em (3.8), temos que

$$2a_0 \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -\beta_{n+1}(2(n+2)a_0 + b_0) - (2n+3)a_1 \,. \tag{3.9}$$

Observemos agora que, das equações

$$a_{1,n+1} - a_{1,n} = a_0\beta_n + a_1$$

$$(a_{1,n+1} + a_{1,n}) = b_1 - \beta_n((2n+1)a_0 + b_0) \,,$$

obtemos

$$\begin{aligned} a_{1,n+1}^2 - a_{1,n}^2 = &-((2n+1)a_0 + b_0)\phi(\beta_n) \\ &+ a_2(2(n+1)a_0 + b_0) + a_1b_1 + a_0b_1\beta_n \,. \end{aligned}$$

Aplicando a esta relação, a propriedade telescópica temos,

$$\begin{aligned} a_{1,n+1}^2 = &-\sum_{k=0}^{n}((2k+1)a_0 + b_0)\phi(\beta_k) \\ &+ a_2a_0(n+1)^2 + (a_2b_0 + a_1b_1) + b_1a_0 \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(a_0 \sum_{k=0}^{n} +(n+1)a_0+b_1)^2 = -\sum_{k=0}^{n} \phi(\beta_k)[(2k+1)a_0+b_0]+ \\ a_2 a_0 (n+1)^2 + (a_2 b_0 + a_1 b_1) \\ - \frac{\beta_{n+1}(2(n+2)a_0+b_0)+(2n+3)a_1}{2}\,.\end{aligned}$$

Desta relação obtemos uma expressão para $-\sum((2k+1)a_0+b_0)$. Multiplicando a última equação do sistema (3.4) e a esta aplicando a propriedade telescópica, temos

$$\begin{aligned}-\sum_{k=0}^{n} \phi(\beta_k)[(2k+1)a_0+b_0] = \\ \gamma_{n+1}[(2n+1)a_0+b_0][(2n+3)a_0+b_0] - [b_0^2-a_0^2]\,.\end{aligned}$$

Assim, determinamos γ_n e termos de β_n, que será dado pela fórmula

$$\gamma_{n+1} = \frac{-\sum \phi(\beta_k)[(2k+1)a_0+b_0]+(b_0^2-a_0^2)}{[(2n+1)a_0+b_0][(2n+3)a_0+b_0]}$$

Note-se que os γ_n estão perfeitamente determinados pois sabemos quem são os β_k. Observe-se ainda que, multiplicando a quarta equação do sistema por dois, usando (3.6) e usando (3.9), temos que

$$\beta_0 = \frac{-a_1}{2a_0+b_0}\,.$$

Do que acabámos de observar, resulta o seguinte teorema.

TEOREMA 3.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos verificando (1.1). Uma condição necessária e suficiente para a ortogonalidade no caso clássico é que β_n e γ_n, venham dados por,*

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{-2a_1 n[(n+1)a_0+b_0]+a_1 b_0}{[2na_0+b_0][2(n+1)a_0+b_0]} \\ \gamma_{n+1} &= \frac{-\sum \phi(\beta_k)[(2k+1)a_0+b_0]+(b_0^2-a_0^2)}{[(2n+1)a_0+b_0][(2n+3)a_0+b_0]}\,.\end{aligned}$$

Mais ainda, A_n e B_n são determinados por,

$$\begin{aligned} a_{0,n+1} &= (n+1)a_0 + b_0 \\ a_{1,n} &= \tfrac{1}{2}[-\beta_n[2(n+1)a_0 + b_0] - a_1 + b_1] \\ b_{0,n} &= -((2n+1)a_0 + b_0)\gamma_n \,. \end{aligned}$$

4. Caso Belmedhi

Tomemos agora o caso $s = 1$ e consideremos que A_n, B_n, ψ e ϕ se escrevem da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_n &= a_{0,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{2,n} & \qquad \phi &= 1 \\ B_n &= b_{0,n}x + b_{1,n} & \qquad \psi &= b_0x^2 + b_1x + b_2 \end{aligned}$$

com condições iniciais $A_0 = \psi$ e $B_0 = 1$. Belmehdi em [**2**] estudou as sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi-clássicas de classe um.

Observe-se ainda que o grau de A_n é dois e o grau de B_n é um, pelas mesmas razões que indicámos no caso $s = 0$.

Aplicando os dados às relações (2.1) e (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned} &(a_{0,n+1} - a_{0,n})x^3 + [(a_{1,n+1} - a_{1,n}) - (a_{0,n+1} - a_{0,n})\beta_n]x^2 \\ &\quad + [(a_{2,n+1} - a_{2,n}) - (a_{1,n+1} - a_{1,n})\beta_n]x - (a_{2,n+1} - a_{2,n})\beta_n \\ &\qquad = [\gamma_n(\frac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{b_{0,n+1}}{\gamma_n})]x + \gamma_n[\frac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \frac{b_{1,n+1}}{\gamma_n}] + 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned} &(b_{0,n} + a_{0,n}\gamma_n)x^2 \\ &\quad + (b_{1,n} - b_{0,n}\beta_n + a_{1,n}\gamma_n)x + (a_{2,n}\gamma_n - b_{1,n}\beta_n) = \\ &\qquad - [(a_{0,n+1} - b_0)x^2 + (a_{1,n+1} - b_1)x + (a_{2,n+1} - b_2)]\gamma_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como anteriormente, obtemos então o seguinte sistema de sete equações a sete incógnitas,

$$
(4.3)\qquad \begin{cases}
a_{0,n+1}-a_{0,n}=0\\
(a_{1,n+1}-a_{1,n})-(a_{0,n+1}-a_{0,n})\beta_n=0\\
(a_{2,n+1}-a_{2,n})-(a_{1,n+1}-a_{1,n})\beta_n=\gamma_n(\dfrac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}}-\dfrac{b_{0,n+1}}{\gamma_n})\\
-(a_{2,n+1}-a_{2,n})\beta_n=1+\gamma_n(\dfrac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}}-\dfrac{b_{1,n+1}}{\gamma_n})\\
b_{0,n}=-(a_{0,n+1}+a_{0,n}-b_0)\gamma_n\\
b_{1,n}-b_{0,n}\beta_n=-(a_{1,n+1}+a_{1,n}-b_1)\gamma_n\\
-b_{1,n}\beta_n=-(a_{2,n+1}+a_{2,n}-b_2)\gamma_n
\end{cases}
$$

Verificamos então que $a_{0,n+1}=a_{0,n}$ e $a_{1,n+1}=a_{1,n}$ e obviamente pelo facto de que $\psi=A_0$ temos que

$$
(4.4)\qquad a_{0,n}=b_0 \quad \text{e} \quad a_{1,n}=b_1.
$$

Logo temos o seguinte sistema:

$$
(4.5)\qquad \begin{cases}
a_{0,n}=b_0\\
a_{1,n}=b_1\\
a_{2,n+1}-a_{2,n}=\gamma_n(\dfrac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}}-\dfrac{b_{0,n+1}}{\gamma_n})\\
-(a_{2,n+1}-a_{2,n})\beta_n=1+\gamma_n(\dfrac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}}-\dfrac{b_{1,n+1}}{\gamma_n})\\
b_{0,n}=-b_0\gamma_n\\
b_{1,n}=-(b_1+\beta_n b_0)\gamma_n\\
-b_{1,n}\beta_n=-(a_{2,n+1}+a_{2,n}-b_2)\gamma_n
\end{cases}
$$

Sustituindo o valor de $b_{0,n}$ dado pela quinta equação de 4.5 na sua terceira equação e se a esta aplicarmos a propriedade telescópica, temos que

$$
(4.6)\qquad a_{2,n}=b_0\gamma_n+b_2-b_0\,.
$$

Da sexta equação do sistema temos que $\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}$, vem dado por:

$$
\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}=-(b_0\beta_n+b_1)\,.
$$

Usando a expressão para $a_{2,n}$ na última equação do sistema temos,

$$b_0\beta_n^2 + b_1\beta_n - [b_0(\gamma_{n+1} + \gamma_n) + (b_2 + 2b_0)] = 0\,.$$

Assim, os β_n vem dados em função dos γ_n, da forma seguinte,

$$\beta_n = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_0(b_0(\gamma_{n+1}\gamma_n) + b_2 + 2b_0)}}{2b_0}\,.$$

Mais uma vez usando a expressão para $a_{2,n}$ na quarta equação do sistema e multiplicando o resultado por $\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}$, temos:

$$-\,b_0(\gamma_{n+1} - \gamma_n)[-\beta_n\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}] = \frac{b_{1,n}}{\gamma_n} + \gamma_{n+1}\frac{b_{1,n+1}}{\gamma_{n+1}}\frac{b_{1,n}}{\gamma_n} - \gamma_n\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}\frac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}}\,.$$

Por outro lado, usando o facto de $-\beta_n\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}$ ser dado pela última equação do sistema e conhecermos uma expressão para $a_{2,n}$, temos que a última expressão aparece na forma,

$$\begin{aligned} &-\,b_0^2(\gamma_{n+1}^2 - \gamma_n^2) - b_0(b_2 + 2b_0)(\gamma_{n+1} - \gamma_n) = \\ &\qquad\qquad \frac{b_{1,n}}{\gamma_n} + \gamma_{n+1}\frac{b_{1,n+1}}{\gamma_{n+1}}\frac{b_{1,n}}{\gamma_n} - \gamma_n\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}\frac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a propriedade telescópica a esta equação obtemos,

$$\begin{aligned} &-\,b_0^2(\gamma_{n+1}^2 - 1) - b_0(b_2 - 2b_0)(\gamma_{n+1} - 1) \\ &\qquad\qquad = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_{1,n}}{\gamma_n} + \gamma_{n+1}\frac{b_{1,n+1}}{\gamma_{n+1}}\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}\,. \end{aligned}$$

De onde, conhecendo a expressão para $\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}$, temos

$$\begin{aligned} &-\,b_0^2\gamma_{n+1}^2 - b_0(b_2 - 2b_0)\gamma_{n+1} + (b_0^2 + b_0b_2 - 2b_0^2) = \\ &\qquad\qquad -\sum_{k=0}^{n}\psi(\beta_k) + \gamma_{n+1}\psi(\beta_{n+1})\psi(\beta_n)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Teorema 4.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos verificando (1.1) com $\phi = 1$ e $\psi = b_0x^2 + b_1x + b_2$ então $\{P_n\}$ é sucessão de polinómios ortogonais mónicos quando e só quando existem (β_n) e*

(γ_n) tais que $\gamma_n \neq 0$ verifica (4.7) e

$$\beta_n = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_0(b_0(\gamma_{n+1}\gamma_n) + b_2 + 2b_0)}}{2b_0}$$

$$a_{0,n} = b_0$$

$$a_{1,n} = b_1$$

$$a_{2,n} = b_0\gamma_n + b_2 - b_0$$

$$b_{0,n} = -b_0\gamma_n$$

$$b_{1,n} = -(b_0\beta_n + b_1)\gamma_n\,.$$

Observação . Se $\beta_n = 0$ então temos $b_0(\gamma_{n+1} + \gamma_n) = -(b_2 + 2b_0)$ e também que $\gamma_n = \frac{n}{b_1} + 1$, donde obtemos que $b_0 = 0$ e logo estamos no caso clássico.

5. Caso Nevai

O que se pretende nesta seção é apresentar os trabalhos [**5**] e [**26**], devidos a Nevai e Bonan, para as funcionais que são soluções de $Du = \psi_3 u$ [Generalização do caso Nevai].

Observação . É importante notar que as funcionais que vamos obter não serão forçosamente definidas-positivas. É de realçar que os autores dizem que este estudo completo ainda não foi feito.

Antes de iniciar este estudo é necessário fazer algumas observações. A primeira é que os autores não trabalham com sucesões de polinómios mónicos nem com funcionais, mas sim com pesos.

Se consideremos a sucessão de *polinómios ortonormais* $\{p_n\}$, verificando a relação

$$xp_n = a_{n+1}p_{n+1} + b_np_n + a_np_{n-1}, \quad n \geq 1$$

onde $p_n = \Gamma_n P_n$ e P_n é um polinómio mónico de grau n.

Determinemos a relação de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n à custa de a_n e b_n:

$$xP_n = \frac{a_{n+1}\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n}P_{n+1} + b_nP_n + \frac{a_n\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n}P_{n-1}\,.$$

Por comparação dos termos de maior ordem

$$a_{n+1}\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$xP_n = P_{n+1} + b_nP_n + a_n^2P_{n-1}$$

com $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Temos o seguinte resultado devido a Freud, em [**15**].

TEOREMA 5.1. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada e^{-x^4}. Então γ_n é tal que verifica*

$$(5.1)(n+1) = 4\gamma_{n+1}(\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n)\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad e \quad \gamma_0 = 1\,.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\,.$$

DEMONSTRAÇÃO. De (5.1) obtemos facilmente que

$$n+1 \geq 4\gamma_{n+1}^2\,,$$

i.e.,

$$\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Portanto, a sucessão $(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}})$ é limitada. Seja agora,

$$l = \liminf_n \tfrac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad L = \limsup_n \tfrac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\,.$$

E reescrevamos (5.1) na forma

$$1 = 4\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\gamma_{n+2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Então

$$4\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}(\frac{\gamma_{n+2}}{n+2}+\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{\gamma_n}{\sqrt{n+1}}) \leq 1 \leq$$
$$4\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}(\frac{\gamma_{n+2}}{\sqrt{n+1}}+\frac{\gamma_{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}),$$

e considere-se (n_k) dependente de n tal que $\lim \frac{\gamma_n}{\sqrt{n_k}} = l$. Então

$$\frac{L}{e} \leq \frac{3l}{2L+l} \leq 1,$$

pois por definição $L \geq l$. Assim, concluimos que $l = L$. Logo, temos

$$12l^2 = 1 \quad \text{i.e.} \quad l = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Como pretendiamos demonstrar. ■

Vê-se facilmente que e^{-x^4} verifica a equação de Pearson

$$(e^{-x^4})' = -4x^3e^{-x^4},$$

Assim, motiva-se o estudo do caso $s = 1$ e consideremos que A_n, B_n, ψ e ϕ se escrevem da seguinte forma:

$$A_n = a_{0,n}x^3 + a_{1,n}x^2 + a_{2,n}x + a_{3,n} \qquad \phi = 1$$
$$B_n = b_{0,n}x^2 + b_{1,n}x + b_{2,n} \qquad \psi = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$$

com condições iniciais $A_0 = \psi$ e $B_0 = 1$.

Utilizando o mesmo método que nos casos anteriores, temos o seguinte sistema de nove equações a nove incógnitas:

$$
(5.2)\quad \begin{cases}
a_{0,n+1} - a_{0,n} = 0\\
a_{1,n+1} - a_{1,n} - \beta_n(a_{0,n+1} - a_{0,n}) = 0\\
a_{2,n+1} - a_{2,n} - \beta_n(a_{1,n+1} - a_{1,n}) = \gamma_n\dfrac{b_{0,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \gamma_{n+1}\dfrac{b_{0,n+1}}{\gamma_{n+1}}\\
a_{3,n+1} - a_{3,n} - \beta_n(a_{2,n+1} - a_{2,n}) = \gamma_n\dfrac{b_{1,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \gamma_{n+1}\dfrac{b_{1,n+1}}{\gamma_{n+1}}\\
-\beta_n(a_{3,n+1} - a_{3,n}) = 1 + \gamma_n\dfrac{b_{2,n-1}}{\gamma_{n-1}} - \gamma_{n+1}\dfrac{b_{2,n+1}}{\gamma_{n+1}}\\
\dfrac{b_{0,n}}{\gamma_n} = -(a_{0,n+1} + a_{0,n} - b_0)\\
\dfrac{b_{1,n}}{\gamma_n} - \beta_n\dfrac{b_{0,n}}{\gamma_n} = -(a_{1,n+1} + a_{1,n} - b_1)\\
\dfrac{b_{2,n}}{\gamma_n} - \beta_n\dfrac{b_{1,n}}{\gamma_n} = -(a_{2,n+1} + a_{2,n} - b_2)\\
-\beta_n\dfrac{b_{2,n}}{\gamma_n} = -(a_{3,n+1} + a_{3,n} - b_3)
\end{cases}.
$$

Temos imediatamente que,

$$
\begin{aligned}
a_{0,n} &= b_0\\
a_{1,n} &= b_1\\
\tfrac{b_{0,n}}{\gamma_n} &= -b_0\,.
\end{aligned}
$$

Logo usando o último resultado na terceira equação do sistema (5.2), temos que

$$a_{2,n+1} - a_{2,n} = \gamma_{n+1}b_0 - \gamma_n b_0\,,$$

de onde, aplicando a propriedade telescópica, temos

$$a_{2,n+1} = \gamma_{n+1}b_0 - b_0 + b_2\,.$$

Substituindo, o obtido anteriormente, na sexta equação do sistema (5.2), temos

$$\frac{b_{1,n}}{\gamma_n} = -(b_1 + b_0\beta_n)\,.$$

Novamente, usando os resultados anteriores na sétima equação do sistems temos:

$$\frac{b_{2,n}}{\gamma_n} = -[\gamma_{n+1}b_0 + \gamma_n b_0 - 2b_0 + b_2 + \beta_n(b_1 + b_0\beta_n)]\,. \tag{5.3}$$

Usando a informação acerca de $a_{2,n}$ e $\frac{b_{1,n}}{\gamma_n}$, que obtivemos na quarta equação do sistema temos que:

$$a_{3,n+1} - a_{3,n} = \gamma_{n+1}[b_0(\beta_{n+1} + \beta_n) + b_1] - \gamma_n[b_0(\beta_n + \beta_{n-1}) + b_1]\,. \tag{5.4}$$

Se a esta relação aplicarmos a propriedade telescópica obtemos que

$$a_{3,n} = \gamma_{n+1}[b_0(\beta_{n+1} + \beta_n) + b_1] - b_0\beta_0 - b_1 + b_3\,.$$

Usando (5.4) na quinta equação do sistema temos a relação:

$$\begin{aligned} &-\beta_n[\gamma_{n+1}[b_0(\beta_{n+1} + \beta_n) + b_1] - \gamma_n[b_0(\beta_n + \beta_{n-1}) + b_1]] = \\ &\quad 1 + \gamma_n[\gamma_n b_0 + \gamma_{n-1}b_0 - 2b_0 + b_2 + \beta_{n-1}(b_1 + b_0\beta_{n-1})] - \\ &\qquad \gamma_{n+1}[\gamma_{n+2}b_0 + \gamma_{n+1}b_0 - 2b_0 + b_2 + \beta_{n-1}(b_1 + b_0\beta_{n-1})]\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Utilizando os dados, até agora encontrados, na última equação do sistema, temos

$$\begin{aligned} &\beta_n[(\gamma_{n+1} + \gamma_n)b_0 - 2b_0 + b_2 + \beta_n(b_1 + b_0\beta_n)] \\ &\quad = -\gamma_{n+1}[b_0(\beta_{n+1} + \beta_n) + b_1] - \gamma_n[b_0(\beta_n + \beta_{n-1}) + b_1] \\ &\qquad + 2b_0\beta_0 + 2b_1 - b_3\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Assim, as relações (5.5) e (5.6) determinam perfeitamente quem são os γ_n e β_n.

TEOREMA 5.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos verificando (1.1) com $\phi = 1$ e $\psi = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ então $\{P_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais mónicos quando e só quando existem (β_n) e*

(γ_n) com $\gamma_n \neq 0$ que verificam (5.5) e (5.6) e A_n e B_n são dados por

$$a_{0,n} = b_0$$

$$a_{1,n} = b_1$$

$$a_{2,n} = b_0\gamma_n + b_2 - b_0$$

$$a_{3,n} = \gamma_{n+1}[b_0(\beta_{n+1} + \beta_n) + b_1] - b_0\beta_0 + b_3 - b_1$$

$$b_{0,n} = -b_0\gamma_n$$

$$b_{1,n} = -(b_0\beta_n + b_1)\gamma_n\,.$$

$$b_{2,n} = \gamma_n\left[-[\gamma_{n+1}b_0 + \gamma_n b_0 - 2b_0 + b_2 + \beta_n(b_1 + b_0\beta_n)]\right]\,.$$

BIBLIOGRAFIA

1. W. Al-Salam e T.S. Chihara, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), no. 1, 65–70.
2. S. Belmehdi, *Formes Linéaires et Polynômes Orthogonaux Semi-Classiques de Class s=1. Description et Classification*, Indag. Math.
3. S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme*, Math. Zeit. **29** (1929), 730–736.
4. S. Bonan, D. Lubinsky e P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives II*, SIAM Journ. Math. Anal. **18** (1987), 1163–1176.
5. S. Bonan e P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives*, J. Aprox. Theory **40** (1984), 134–147.
6. A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos*, Master's thesis, Coimbra Univ., Dept. de Matemática. Coimbra. Portugal, May 1993.
7. A. Branquinho, *Inverse Problems in the Orthogonal Polynomial Theory*, Ph.D. thesis, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1996.
8. A. Branquinho, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, Bull. Belg. Math. Soc. **3** (1996), 1–12.
9. A. Branquinho e F. Marcellán, *Some inverse problems for second order structure relations*, In Approximation and Optimization (J. Guddat, ed.), Peter Lang, European Science Publishers, Frankfurt, 1995, pp. 129–146.
10. A. Branquinho, F. Marcellán e J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), no. 3, 283–303.
11. H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one and several variables*, Dover, 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, 1995.
12. T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
13. J. Dini, *Sur les Formes Linéaires et les Polynômes Orthogonaux de Laguerre-Hahn*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.
14. J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebicheff*, C.R. Acad. Sci. Paris **200** (1935), 2052–2053.
15. G. Freud, *On the coefficients in recursion formulae of orthogonal polynomials*, Proc. Irish Acad, 76 (1976) (1976), 1–6.
16. J.V. Gonçalves, *Sur une formule de recurrence*, Portugaliæ Math. **3** (1942), no. 3, 222–233.
17. ______, *Sur la formule de Rodrigues*, Portugaliæ Math. **4** (1943), no. 1, 52–64.
18. W. Hahn, *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome*, Monat. Math. **95** (1983), 269–274.
19. D. Karlin e G. Szegő, *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*, J. Anal. Math. **8** (1961), 1–157.

20. H.L. Krall e O. Frink, *A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1968), 467–490.
21. A.P. Magnus, *Riccati acceleration of the Jacobi continued fractions and Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*, In Padé Approximation and its Applications Bad Honnef 1983 (H.J. Bünger, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1071, Springer Verlag, Berlin, 1984, pp. 213–230.
22. F. Marcellán, *Polinomios ortogonales semiclásicos: Una aproximacion constructiva*, In Actas *V* Simposium Polinomios Ortogonales (Vigo) (A.CACHAFEIRO and E.GODOY, eds.), 1988, pp. 100–123.
23. P. Maroni, *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann. Math. Pura ed App. **149** (1987), no. 4, 165–184.
24. ———, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux: Application aux polynômes orthogonaux semiclassiques*, In Orthogonal Polynomials and their Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), vol. 9, J.C.Baltzer AG. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, no. (1-4), 1991, pp. 95–130.
25. P.J. McCarthy, *Characterizations of classical polynomials*, Port. Math. **20** (1961), no. 1, 47–52.
26. P. Nevai, *Orthogonal polynomials associated with* $\exp(-x^4)$, Second Edmonton Conference on Approximation Theory, Can. Math. Soc. Conf. Proc., vol. 3, 1983, pp. 263–285.
27. ———, *Asymptotics for orthogonal polynomials associated with* $\exp(-x^4)$, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), no. 6, 1177–1187.
28. J.A. Shohat, *A differential equation for orthogonal polynomials*, Duke. Math. J. **5** (1939), 401–417.
29. B. Wendroff, *On orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 554–555.

ÍNDICE REMISSIVO