

# Um melhor limite inferior para o problema do caixeiro viajante assimétrico baseado no problema da afectação

Ana Ramires <sup>‡</sup>

João Soares<sup>\*†</sup>

<sup>‡</sup> Departamento de Matemática  
Universidade Portucalense  
4200 Porto, Portugal.  
amr@uportu.pt

<sup>†</sup> Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra  
3000 Coimbra, Portugal.  
and Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.  
jsoares@mat.uc.pt

---

## Abstract

In this article we describe how to compute a lower bound for the asymmetric traveling salesman problem that dominates the bound that comes from the assignment relaxation, through the solving of a sequence of assignment problems. The algorithm that we propose is a first-order method based on the exponential penalty function. Directions of movement are derived from a disjunctive relaxation that we proposed as being one of two possible classes, one based on cycles, the other based on cliques.

## Resumo

Neste artigo explicamos como obter um limite inferior para o valor óptimo do problema do caixeiro viajante assimétrico melhor do que o que advém do problema de afectação através da resolução sucessiva de problemas de afectação. O algoritmo que propomos é um método de primeira ordem baseado na função de penalidade exponencial cujas direcções de deslocamento são definidas com base numa relaxação disjuntiva que propomos ser de dois tipos, uma baseada em ciclos e a outra baseada em cliques.

**Keywords:** Optimization, Combinatorial Optimization, Lower Bounds, Asymmetric Traveling Salesman, Disjunctive Programming

---

\*João Soares acknowledges partial financial support from Fundação para a Ciência e Tecnologia (Projecto POCTI/MAT/14243/1998).

**Title:** An improved lower bound for the asymmetric traveling salesman problem based on the assignment problem

---

## 1 O Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico

Seja  $G[c] = (V, E)$  um grafo dirigido simples (i.e., sem laços e arcos múltiplos) com  $n$  vértices e  $m$  arcos, tal que a cada arco  $(i, j) \in E$  está associado um escalar real  $c_{ij}$  designado por *custo* do arco  $(i, j)$ . O problema do caixeiro viajante assimétrico consiste em determinar em  $G[c]$  um ciclo Hamiltoniano de custo mínimo. Num grafo dirigido, um ciclo Hamiltoniano é um ciclo com todos os arcos orientados na mesma direcção e que passa por todos os vértices uma única vez. Este problema (que em inglês é chamado *Asymmetric Traveling Salesman Problem*, e por isso denotado ATSP) tem vindo a servir de plataforma de teste para diversas metodologias de resolução em optimização combinatoria e, por isso, também foi a classe de problemas escolhida para testar a nossa metodologia.

O livro [27] sumaria a investigação no ATSP em todos os seus aspectos até 1985, enquanto que o livro [19] é uma referência mais actual. Em língua portuguesa e do nosso conhecimento, os trabalhos de síntese sobre o ATSP incluem os artigos de Coelho e Cerdeira [25, 26], a dissertação de Pires [30] e o artigo didáctico de Constantino [10].

De acordo com [12], os códigos mais eficazes para a resolução do ATSP são: o código CDT [7, 6] - método *branch-and-bound* onde todas as relaxações lineares são problemas da afectação; o código FT-ADD - coincide com CDT mas após a resolução de cada problema da afectação o limite inferior é melhorado através da resolução de arborescências de custo mínimo, tal como é explicado em [13]; o código FT-B&C [14] - um método *branch-and-cut* que usa diversas desigualdades válidas para o ATSP e onde todas as relaxações lineares são problemas lineares gerais; o código CONCORDE, disponível em <http://www.tsp.gatech.edu/> — um método *branch-and-cut* pensado para o STSP, a versão simétrica do ATSP, do mesmo modo que FT-B&C foi pensado para o ATSP. Como qualquer ATSP pode ser reformulado como um STSP, o código CONCORDE também permite resolver o ATSP.

Portanto, as implementações FT-B&C e CONCORDE usam relaxações lineares muito mais *apertadas* do que CDT e FT-ADD. Consequentemente, os limites inferiores gerados são muito mais eficazes na eliminação de nós na árvore do *branch-and-bound*. Contudo, esses códigos dependem do *interface* com um código eficiente para programação linear. Hoje em dia, um tal código é sinónimo de um código altamente sofisticado como é o CPLEX.

A questão específica de obter bons limites inferiores para o ATSP resolvendo uma sucessão de problemas com resolução muito eficiente é abordada em [3], em [13] e em [24]. Bons limites inferiores podem vir a tornar um código como o CDT (e FT-ADD) mais competitivo. A primeira referência procura generalizar o limite Held-Karp (proposto para o caso simétrico em [23, 22]) para o ATSP enquanto que a segunda referência explora as diversas subestruturas particulares na formulação tradicional do ATSP (afectação, arborescência) e que possuem métodos de resolução específicos muito eficientes. A terceira referência usa a reformulação do ATSP como um STSP, aplica a abordagem Lagrangeana de Held e Karp, e depois retoma o ATSP original.

Limites inferiores servem também para avaliar o desempenho de heurísticas em problemas que não possuem o valor óptimo conhecido ou é moroso obtê-lo. Foi aliás, para esse contexto que foi pensado o limite inferior sugerido em [24].

Motivados pela importância de descobrir bons limites inferiores para o ATSP apresentamos, neste trabalho, uma estratégia de obter um limite inferior para o valor óptimo do ATSP melhor do que o que advém do problema de afectação. O algoritmo que propomos é do tipo Lagrangeano mas, ao contrário da abordagem clássica, não requer a actualização de variáveis duais e obriga apenas à resolução sucessiva de problemas de afectação como subproblemas.

No entanto, o algoritmo que propomos neste trabalho requer um estudo computacional mais aprofundado pois as experiências computacionais preliminares que efectuámos permitiram identificar diversas limitações. As limitações são estruturais e não parecem ser simples ajustamentos na implementação. Por isso, não pretendemos neste trabalho demonstrar a viabilidade numérica do nosso algoritmo nem mesmo compará-lo com as abordagens clássicas de relaxação Lagrangeana. Pretendemos tão simplesmente demonstrar que o nosso algoritmo conceptualmente tira grande partido da estrutura específica do ATSP embora ainda não o seja verificado experimentalmente.

Na próxima secção, recordamos a formulação clássica para o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico. Na Secções 3 e 4 explicamos como se pode fortalecer uma relaxação linear através relaxações lineares disjuntivas, que usam o facto de que um dado ponto extremo não satisfaz uma restrição de ciclo ou de clique. Explicaremos como otimizar adequadamente uma função linear nessas relaxações lineares disjuntivas. Na Secção 5, propomos um algoritmo que permite obter um limite inferior melhorado para o valor óptimo do ATSP e ilustramos algumas iterações desse algoritmo com um exemplo. Na Secção 6, referimos as conclusões possíveis do trabalho e identificamos novas questões científicas.

## 2 A formulação clássica

A formulação clássica do ATSP utiliza uma variável  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  por cada arco  $(i, j) \in E$ , que indica se o arco  $(i, j)$  pertence ou não ao ciclo Hamiltoniano procurado, e é a seguinte:

$$z = \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad (i \in V), \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad (j \in V), \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ((i, j) \in E), \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subseteq V, S \neq \emptyset, V), \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad ((i, j) \in E), \quad (5)$$

onde  $\delta^+(i)$  denota o conjunto dos arcos de  $G$  que “saem” do vértice  $i$ , e  $\delta^-(i)$  denota o conjunto dos arcos de  $G$  que “entram” no vértice  $i$ .

As restrições (1)-(3) definem um poliedro que denotaremos por  $P^{\text{ASS}}$  (ASS de “Assignment”). Os pontos extremos de  $P^{\text{ASS}}$  satisfazem as restrições (5) e são os vectores característicos de ciclos Hamiltonianos e *subpercurso*s de  $G$ . O valor de  $\min\{cx: x \in P^{\text{ASS}}\}$  é um limite inferior para  $z$ , que pode ser obtido em  $\mathcal{O}(n^3)$  operações aritméticas e comparações através do método Húngaro ([27], por exemplo) mesmo que a função objectivo seja definida por números reais. Os vectores característicos de ciclos Hamiltonianos em  $G$  são os pontos extremos de  $P^{\text{ASS}}$  que satisfazem as restrições (4) - normalmente designadas por *restrições de eliminação de subpercurso*s - no caso particular apresentado, esta classe de restrições também é designada por *restrições de clique*. Denotaremos por  $P^{\text{ATSP}}$  o invólucro convexo das soluções admissíveis de (1)-(5).

O problema  $\min\{cx: x \in P^{\text{ATSP}}\}$  é  $\mathcal{NP}$ -difícil ([27], por exemplo). No entanto, a sua relaxação linear pode ser resolvida em tempo polinomial através do método elipsóide [20], conforme explicado em [18] - aqui já se torna necessário que  $c$  seja racional. Essencialmente, isso deve-se ao facto de que dado  $\bar{x}$  satisfazendo as restrições (1)-(3), averiguar se  $\bar{x}$  satisfaz as restrições (4) consiste na resolução de um problema de corte mínimo global em  $G[\bar{x}]$  porque, para todo o  $x$  que satisfaça as restrições (1), tem-se

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} = \sum_{i \in S} \left( \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E: j \notin S} x_{ij} \right) = |S| - \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} x_{ij} \quad (6)$$

e, portanto, cada uma das restrições (4) pode ser substituída por

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq 1 \quad (S \subset V, S \neq \emptyset) \quad (7)$$

sem que a relaxação linear de (1)-(5) fique diferente. As restrições (7) são normalmente designadas por *restrições de corte*. Uma formulação alternativa a (1)-(5) consiste em substituir as restrições (4) por

$$\sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1 \quad (C \text{ ciclo não Hamiltoniano de } G). \quad (8)$$

Não é difícil mostrar que a relaxação linear deste novo problema é de qualidade inferior à relaxação linear de (1)-(5). A sua resolução é também polinomial porque cada uma das restrições (8) pode ser reescrita como

$$\sum_{(i,j) \in E(C)} (1 - x_{ij}) \geq 1 \quad (C \text{ ciclo não Hamiltoniano de } G)$$

que são normalmente designadas por *restrições de ciclo*. Por isso, averiguar se um vector  $\bar{x}$ , que satisfaça (1)-(3), também satisfaz as restrições (8) consiste em determinar em  $G[1 - \bar{x}]$  o ciclo não Hamiltoniano de custo mínimo. Este problema pode ser resolvido em  $\mathcal{O}(n^4)$  operações aritméticas e comparações através de uma adaptação do algoritmo de Floyd-Warshall [15, 33].

### 3 Uma relaxação linear disjuntiva baseada em ciclos

Seja  $C$  um ciclo não Hamiltoniano de  $G$  tal que  $E(C) = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_K, i_1)\} \subseteq E$  e seja  $P$  um conjunto poliédrico satisfazendo  $P^{\text{ATSP}} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}$ . Defina-se a seguinte relaxação

linear disjuntiva de  $P^{\text{ATSP}}$ , inspirada em [31] e também usada em [8],

$$P_{C,i_1} \equiv \text{conv} \left( \bigcup_{k=1}^K P_k \right), \quad (9)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} P_1 &\equiv P \cap \{x: x_{i_1 i_2} = 0\}, \\ P_2 &\equiv P \cap \{x: x_{i_1 i_2} = 1, x_{i_2 i_3} = 0\}, \\ P_3 &\equiv P \cap \{x: x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = 1, x_{i_3 i_4} = 0\}, \\ &\dots \\ P_K &\equiv P \cap \{x: x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = \dots = x_{i_{K-1} i_K} = 1, x_{i_K i_1} = 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Não é difícil verificar que  $P_{C,i_1}$  é um poliedro que satisfaz

$$P^{\text{ATSP}} \subseteq P_{C,i_1} \subseteq P \cap \left\{ x: \sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1 \right\} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}.$$

Mais, os poliedros  $P_1, P_2, \dots, P_K$  são faces de  $P$  (e de  $P^{\text{ATSP}}$ ). Basta reparar que, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $P_k = P \cap \{x: \alpha^k x = \beta_k\}$ , com  $\beta_k = -(k-1)$  e  $\alpha^k \in \mathbb{R}^m$  um vector linha definido componente a componente por

$$\alpha_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } (i, j) = (i_k, i_{k+1}), \\ -1 & \text{se } (i, j) \in \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)\}, \\ 0 & \text{noutros casos,} \end{array} \right\}, \quad (i, j) \in E.$$

e que  $\alpha^k x \geq \beta_k$  para todo o  $x \in P^{\text{ASS}} \supseteq P$ . Não é verdade que, em geral,  $P_{C,i_1}$  seja uma face de  $P$ .

**Lema 1** *Seja  $C$  um ciclo não Hamiltoniano de  $G$  e  $P$  um conjunto poliédrico satisfazendo  $P^{\text{ATSP}} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}$ . Se os pontos extremos de  $P$  são pontos extremos de  $P^{\text{ASS}}$ , então  $P_{C,v} \equiv P_C$  é independente de  $v \in V(C)$ , e os pontos extremos de  $P_C$  são os pontos extremos de  $P$  que satisfazem*

$$\sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1. \quad (11)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $E(C) = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_K, i_1)\}$ . Basta provar que  $P_{C,i_1} \equiv \text{conv}(\cup_{k=1}^K P_k)$ , definido em (9), coincide com  $P_{C,i_2} \equiv \text{conv}(\cup_{k=1}^K P'_k)$ , definido por

$$P'_k \equiv P \cap \{x: x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_4} = \dots = x_{i_k i_{k+1}} = 1, x_{i_{k+1} i_{k+2}} = 0\},$$

admitindo que  $i_{K+1} \equiv i_1$  e  $i_{K+2} \equiv i_2$ . Seja  $\bar{x}$  um ponto extremo de  $P_{C,i_1}$ ; então  $\bar{x} \in P_k$  para algum  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ . Se  $k \geq 2$ , então  $\bar{x} \in P'_{k-1}$ . Se  $k = 1$ , então existe  $l \in \{1, 2, \dots, K\}$  tal que

$$\bar{x}_{i_2 i_3} = \bar{x}_{i_3 i_4} = \dots = \bar{x}_{i_l i_{l+1}} = 1, \bar{x}_{i_{l+1} i_{l+2}} = 0,$$

e, neste caso,  $\bar{x} \in P'_l$ . Em qualquer dos casos,  $\bar{x} \in P_{C,i_2}$ . Reciprocamente, seja  $\bar{x}$  um ponto extremo de  $P_{C,i_2}$  tal que  $\bar{x} \in P'_k$ . Se  $\bar{x}_{i_1 i_2} = 1$ , então  $k \leq K-1$  e  $\bar{x} \in P_{k+1}$ ; caso contrário,  $\bar{x} \in P_1$ . Em qualquer dos casos,  $\bar{x} \in P_{C,i_1}$ .

Os pontos extremos de  $P_C$  são os pontos extremos de cada um dos conjuntos  $P_k, k = 1, 2, \dots, K$  que, como é fácil verificar, satisfazem (11). Reciprocamente, para o todo o ponto extremo  $x$  de  $P$  que satisfaça (11) existe um conjunto  $P_k$  tal que  $x \in P_k$ . Então,  $x$  terá que ser ponto extremo de  $P_C$  porque  $P_k \subseteq P$ .  $\square$

Em geral,  $P_{C,v} \subseteq P \cap \{x: \sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1\}$ , para todo  $v \in V(C)$ . No caso particular do lema acima,

$$P_C = \text{conv} \left( P \cap \left\{ x: \sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1 \right\} \cap \mathbb{Z}^m \right).$$

Uma consequência imediata do Lema 1 é a seguinte generalização do procedimento de convecificação sequencial de Balas.

**Proposição 1** *Seja  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$  o conjunto de todos os ciclos não Hamiltonianos do grafo  $G = (V, E)$ . Então,*

$$P^{ATSP} = \left( \dots \left( (P_{C_1}^{ASS})_{C_2} \right) \dots \right)_{C_l}. \quad (12)$$

*Demonstração.* Pelo Lema 1, os pontos extremos do conjunto do lado direito de (12) são os pontos extremos de  $P^{ASS}$  que satisfazem as desigualdades (8).  $\square$

Abordamos agora a questão da existência de um hiperplano separador entre  $P_{C,i_1}$ , para algum ciclo não Hamiltoniano  $C$ , e um ponto extremo de  $P$ .

**Lema 2** *Seja  $\bar{x}$  um ponto extremo de um poliedro  $P$  tal que  $P^{ATSP} \subseteq P \subseteq P^{ASS}$ . Então,*

1. *se existe um ciclo não Hamiltoniano  $C$  tal que  $\sum_{(i,j) \in E(C)} (1 - \bar{x}_{ij}) < 1$ , então  $\bar{x} \notin P_{C,v}$  para todo  $v \in V(C)$ ;*
2. *se  $\bar{x}_{ij} \in (0, 1)$  para algum  $(i, j) \in E$ , então  $\bar{x} \notin P_{C,i}$  para todo o ciclo não Hamiltoniano  $C$  que contenha o arco  $(i, j)$ .*

*Demonstração.* Para a primeira parte, por hipótese,  $\sum_{(i,j) \in E(C)} \bar{x}_{ij} > |E(C)| - 1$ , mas para todo  $v \in V(C)$  e para todo  $x \in P_{C,v}$ ,  $\sum_{(i,j) \in E(C)} x_{ij} \leq |E(C)| - 1$ . Concluimos que  $\bar{x} \notin P_{C,v}$ . Para a segunda parte, se  $\bar{x}$  pertencesse a  $P_{C,i}$ , então também seria um ponto extremo de  $P_{C,i}$ , o que é absurdo pois todos os pontos extremos de  $P_{C,i}$  possuem zero ou um na componente da posição  $(i, j)$ .  $\square$

Pelo Lema 2, qualquer ciclo não Hamiltoniano que contenha o arco  $(i, j)$  associado a uma componente fraccionária de  $\bar{x}$  serve o propósito de identificar um hiperplano separador. Poderemos, por exemplo, escolher o caminho mais curto de  $j$  para  $i$  no conjunto dos grafos  $G[1 - \bar{x}] - \{k\}$  ( $k \in V \setminus \{i, j\}$ ) que conjuntamente com o arco  $(i, j)$  define um ciclo pretendido. Em alternativa, podemos resolver o problema do ciclo não Hamiltoniano mais curto em  $G[1 - \bar{x}]$  da maneira que explicamos a seguir.

Seja  $G[d] = (V, E)$  um grafo dirigido, tal que a cada arco  $(i, j) \in E$  está associado um escalar  $d_{ij} \geq 0$  que designamos por *distância* do arco  $(i, j)$ . O mais curto ciclo não Hamiltoniano em

$G[d]$  possui distância total igual

$$\min_{k \in V} \left\{ \min \left\{ \pi_{ji}^k + d_{ij} : (i, j) \in E, i, j \in V \setminus \{k\} \right\} \right\}, \quad (13)$$

onde  $\pi_{ji}^k$  denota o comprimento do caminho mais curto em  $G[d]$  do vértice  $j$  para o vértice  $i$  sem passar pelo vértice  $k$ . Para cada  $k \in K$  fixo, todos aqueles valores podem ser calculados através do algoritmo de Floyd-Warshall [15, 33], que pode funcionar em tempo proporcional a  $\mathcal{O}(n^3)$  [1, Secção 5.6], aplicado ao grafo  $G[d] - \{k\}$ . Portanto, o mais curto ciclo não Hamiltoniano em  $G[d]$  pode ser identificado em  $\mathcal{O}(n^4)$  operações (este número pode ser reduzido para  $\mathcal{O}(n^3)$ ). Se (13) for inferior a um, então a respectiva solução óptima  $C$  é tal que  $\bar{x} \notin P_{C,v}$  para todo  $v \in V(C)$ . Se (13) for superior ou igual a um e  $\bar{x}_{ij} \in (0, 1)$ , então o ciclo não Hamiltoniano  $C$  de comprimento

$$\min \left\{ \pi_{ji}^k + d_{ij} : k \in V \setminus \{i, j\} \right\}, \quad (14)$$

é tal que  $\bar{x} \notin P_{C,i}$ . Em ambos os casos, é possível identificar um hiperplano separador que é ótimo nalgum aspecto.

Quando  $P = P^{\text{ASS}}$ , o problema de optimização linear sobre  $P_C$  pode ser resolvido em  $\mathcal{O}(n^3)$  operações aritméticas e comparações, portanto, comparável ao tempo de resolução de apenas um problema de afectação. De facto, a resolução do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a} \quad & x \in P_C \end{aligned} = \min_{k=1,2,\dots,K} \left( \begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a} \quad & x \in P_k \end{aligned} \right) \quad (15)$$

pode fazer-se parametricamente através de uma optimização (envolvendo  $\mathcal{O}(n^3)$  operações) e  $K - 1$  reoptimizações (cada uma envolvendo  $\mathcal{O}(n)$  operações) da maneira que explicamos a seguir.

Suponhamos que se pretende obter um par de soluções primal-dual óptimas para  $z_{k+1} = \min\{cx : x \in P_{k+1}\}$ , sendo conhecida essa informação para  $z_k = \min\{cx : x \in P_k\}$ . Seja  $\bar{x} \in \{0, 1\}^m$  uma solução primal óptima de

$$z_k = \left\{ \begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a} \quad & x \in P \\ & x_{ij} = 1 \quad ((i, j) \in E(C_k) \equiv \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)\}), \\ & x_{ij} = 0 \quad ((i, j) = (i_k, i_{k+1})), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

que é vector característico de um emparelhamento perfeito  $M$  do grafo bipartido  $G = (V \times V, E)$ , e seja  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$  uma solução óptima para o correspondente problema dual

$$z_k = \sum_{(i,j) \in E(C_k)} c_{ij} + \left\{ \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}} u_i + \sum_{j \notin \{i_2, i_3, \dots, i_k\}} v_j \\ \text{s.a} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad ((i, j) \in E \setminus E(C_{k+1})). \end{aligned} \right\}$$

Relativamente a (16), o novo problema  $z_{k+1} = \min\{cx : x \in P_{k+1}\}$  possui a restrição " $x_{i_k i_{k+1}} = 1$ " no lugar da restrição " $x_{i_k i_{k+1}} = 0$ " e uma nova restrição " $x_{i_{k+1} i_{k+2}} = 0$ ". Consequentemente, no novo problema dual aparece mais uma parcela constante " $c_{i_k i_{k+1}}$ " e desaparecem as variáveis  $u_{i_k}$  e  $v_{i_{k+1}}$  da função objectivo, e desaparece a restrição " $u_{i_{k+1}} + v_{i_{k+2}} \leq c_{i_{k+1} i_{k+2}}$ ". Por isso, o vector  $\bar{x}$  já não é primal admissível, mas o vector  $(\bar{u}, \bar{v})$  permanece dual admissível no novo

problema, e “ $z_k + c_{i_k i_{k+1}} - \bar{u}_{i_k} - \bar{v}_{i_{k+1}}$ ” surge como primeiro limite inferior ao valor de  $z_{k+1}$ . Podemos iniciar o método Húngaro com a solução dual admissível  $(\bar{u}, \bar{v})$  e o vector característico do emparelhamento

$$M' \equiv M \setminus \{(i, i_{k+1}), (i_{k+1}, j), (i_{k+1}, i_{k+2})\} \cup \{(i_k, i_{k+1})\}$$

para algum  $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k\}$  e  $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k\}$ . O novo emparelhamento  $M'$  possui menos dois arcos se  $(i_{k+1}, i_{k+2})$  pertencia ao emparelhamento anterior  $M$  ou menos um arco se não pertencia. A solução óptima do novo problema pode ser então obtida em  $\mathcal{O}(n)$  operações aritméticas e comparações. Como existem, no máximo,  $K - 1$  re-otimizacões a fazer e  $K < n$ , concluímos que o esforço computacional global na resolução do problema (15) é  $\mathcal{O}(n^3)$ .

## 4 Uma relaxação linear disjuntiva baseada em cliques

Nesta secção, vamos construir uma relaxação disjuntiva de  $P^{\text{ATSP}}$  que usa cliques do mesmo modo que a relaxação anterior usava ciclos. A nova relaxação requer um número muito mais elevado de disjunções mas, tal como no caso anterior, a optimização nesse poliedro pode ser feita de modo paramétrico.

Seja  $S \subseteq V$  um conjunto de cardinalidade  $K < n$ . O número de caminhos simples em  $G[S]$ , o subgrafo de  $G$  induzido por  $S$ , a partir de um determinado vértice de  $S$  é, no máximo, igual a

$$p_K = \sum_{k=1}^K \frac{(K-1)!}{(K-k)!} \quad (= 1 + (K-1)p_{K-1}). \quad (17)$$

Por exemplo, se  $S = \{i_1, i_2, i_3\}$  e  $i_1$  é o vértice designado, cada um desses caminhos corresponde a um arco da subárvore da esquerda da árvore enumerativa ilustrada na Figura 1. Por exemplo, o arco 1 está associado ao caminho constituído pelo vértice  $i_1$  e nenhum arco, o arco 2 está associado ao caminho  $i_1(i_1, i_2)i_2$ , etc.

Para um conjunto poliédrico  $P$  satisfazendo  $P^{\text{ATSP}} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}$ , defina-se a seguinte relaxação linear disjuntiva de  $P^{\text{ATSP}}$ ,

$$P_S \equiv \text{conv} \left( \bigcup_{(j_1, j_2, \dots, j_k) : \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq S, k \geq 1} P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)} \right), \quad (18)$$

onde cada conjunto  $P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)}$  é definido pelos pontos  $x \in P$  tais que

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1, & (i, j) &\in E(C_k), \\ x_{ij} &= 0, & (i, j) &\in E(S) \setminus E(C_k), j \in V(C_k), \end{aligned}$$

sendo  $C_k \equiv \{j_1, (j_1, j_2), j_2, (j_2, j_3), j_3, \dots, j_{k-1}, (j_{k-1}, j_k), j_k\}$ . Portanto, o conjunto  $P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)} \cap \mathbb{Z}^m$  é o subconjunto de  $P^{\text{ASS}} \cap \mathbb{Z}^m$  dos vectores que pertencem a  $P$  e são característicos de conjuntos de arcos que usam o caminho  $j_0(j_0, j_1)j_1(j_1, j_2)j_2(j_2, j_3)j_3 \dots j_k(j_k, j_{k+1})j_{k+1}$  para alguns  $j_0, j_{k+1} \in V \setminus S$  - veja-se a Figura 2. No caso do exemplo da Figura 1, existem 15



poliedros na definição (18), que apresentamos pela ordem de numeração dos arcos:

$$\begin{aligned}
 P_{(i_1)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_1} = x_{i_1 i_3} = x_{i_3 i_1} = 0\}, \\
 P_{(i_2)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_2 i_1} = x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_2} = 0\}, \\
 P_{(i_3)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_3 i_1} = x_{i_1 i_3} = x_{i_3 i_2} = x_{i_2 i_3} = 0\}, \\
 P_{(i_1, i_2)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_1 i_2} = 1, x_{i_2 i_1} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_1} = 0\}, \\
 P_{(i_1, i_2, i_3)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = 1, x_{i_3 i_1} = 0\}, \\
 P_{(i_1, i_3)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_1 i_3} = 1, x_{i_3 i_1} = x_{i_3 i_2} = x_{i_2 i_1} = 0\}, \\
 P_{(i_1, i_3, i_2)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_1 i_3} = x_{i_3 i_2} = 1, x_{i_2 i_1} = 0\}, \\
 P_{(i_2, i_1)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_2 i_1} = 1, x_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_3} = x_{i_3 i_2} = 0\}, \\
 P_{(i_2, i_1, i_3)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_2 i_1} = x_{i_1 i_3} = 1, x_{i_3 i_2} = 0\}, \\
 P_{(i_2, i_3)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_2 i_3} = 1, x_{i_3 i_1} = x_{i_3 i_2} = x_{i_1 i_2} = 0\}, \\
 P_{(i_2, i_3, i_1)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_1} = 1, x_{i_1 i_2} = 0\}, \\
 P_{(i_3, i_1)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_3 i_1} = 1, x_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_3} = x_{i_2 i_3} = 0\}, \\
 P_{(i_3, i_1, i_2)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_3 i_1} = x_{i_1 i_2} = 1, x_{i_2 i_3} = 0\}, \\
 P_{(i_3, i_2)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_3 i_2} = 1, x_{i_2 i_1} = x_{i_2 i_3} = x_{i_1 i_3} = 0\}, \\
 P_{(i_3, i_2, i_1)} &\equiv P \cap \{x : x_{i_3 i_2} = x_{i_2 i_1} = 1, x_{i_1 i_3} = 0\},
 \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que  $P_S$  é um poliedro que satisfaz

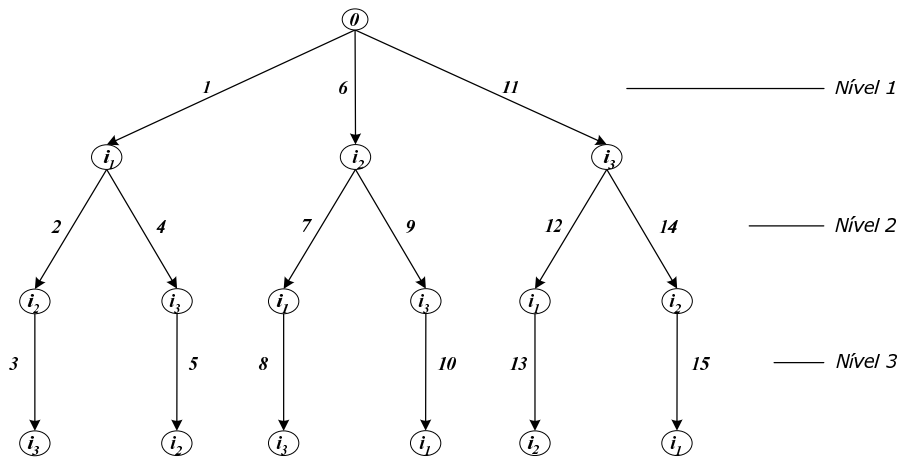


Figura 1: Árvore de enumeração dos caminhos simples em  $S = \{i_1, i_2, i_3\}$ .

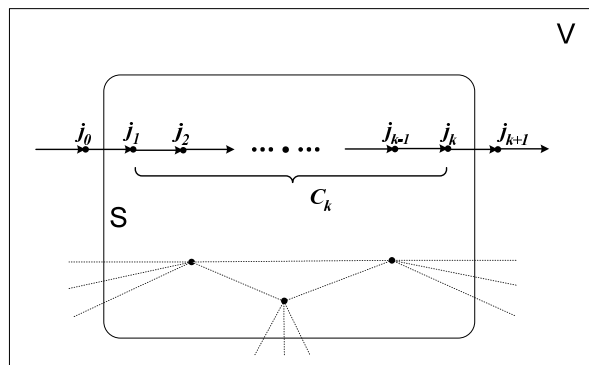


Figura 2:  $P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)}$ .

$$P^{\text{ATSP}} \subseteq P_S \subseteq P \cap \left\{ x : \sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \right\} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}.$$

O poliedro  $P_S$  é o invólucro convexo de, no máximo,  $p = Kp_K$  poliedros em (18). Cada um dos poliedros  $P_l \equiv P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)}$ , com  $l = 1, 2, \dots, p$ , é uma face de  $P$ . Mais, se os pontos extremos de  $P$  são pontos extremos de  $P^{\text{ASS}}$ , então os pontos extremos de  $P_S$  são os pontos extremos de  $P$  que satisfazem

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1. \quad (19)$$

De facto, os pontos extremos de  $P_S$  são os pontos extremos de cada um dos conjuntos  $P_l$  para  $l = 1, 2, \dots, p$  que satisfazem (19). Além disso, se  $x \in P_l$  então, para algum  $k \in S$ ,

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} = \sum_{i \in S \setminus \{k\}} \left( \sum_{j \in S: (i,j) \in E} x_{ij} \right) \leq |S| - 1.$$

Reciprocamente, para o todo o ponto extremo  $x$  de  $P$  que seja vector característico e satisfaça (19), existe um conjunto  $P_l$  tal que  $x \in P_l$ . Então,  $x$  terá que ser ponto extremo de  $P_S$  porque  $P_l \subseteq P$ . Uma consequência imediata é a seguinte generalização do procedimento de convexificação sequencial de Balas. A sua demonstração é idêntica à da Proposição 1.

**Proposição 2** *Seja  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$  a família de todos os subconjuntos próprios de  $V$ . Então*

$$P^{\text{ATSP}} = \left( \dots \left( (P_{S_1}^{\text{ASS}})_{S_2} \right) \dots \right)_{S_l}. \quad (20)$$

Abordamos agora a questão da existência de um hiperplano separador entre  $P^{\text{ATSP}}$  e um ponto extremo de uma relaxação linear de  $P^{\text{ATSP}}$  do tipo descrito.

**Lema 3** *Seja  $P$  tal que  $P^{\text{ATSP}} \subseteq P \subseteq P^{\text{ASS}}$ , e seja  $\bar{x}$  um ponto extremo de  $P$  tal que  $\bar{x}_{uv_1}, \bar{x}_{uv_2} \in (0, 1)$  para alguns  $(u, v_1), (u, v_2) \in E$ . Então,*

1. *se existe um conjunto  $S \subset V$  tal que  $\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{x}_{ij} < 1$ , então  $\bar{x} \notin P_S$ ;*
2. *para todo o conjunto  $S$  tal que  $\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{x}_{ij} = 1$ ,  $u, v_1 \in S$  e  $v_2 \notin S$ , tem-se  $\bar{x} \notin P_S$ .*

*Demonstração.* Para a primeira parte, atendendo a (6), por hipótese,  $\sum_{(i,j) \in E(S)} \bar{x}_{ij} > |S| - 1$ . Mas para todo  $x \in P_S$ , tem-se  $\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1$ . Concluimos que  $\bar{x} \notin P_S$ . Para a segunda parte, se  $\bar{x}$  pertencesse a  $P_S$ , então também seria um ponto extremo de um dos conjuntos  $P_l, l = 1, 2, \dots, p$ . Por isso, existe um vértice  $k \in S$  tal que

$$1 = \sum_{w \notin S: (k,w) \in E} \bar{x}_{kw} \leq \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{x}_{ij} = 1. \quad (21)$$

Se  $k = u$  chegamos a um absurdo porque  $\bar{x}_{uv_1} > 0$  e  $v_1 \in S$ , o que implica  $\sum_{w \notin S: (u,w) \in E} \bar{x}_{uw} < 1$ . Se  $k \neq u$  também chegamos a um absurdo porque, de (21),

$$0 = \sum_{w \notin S: (u,w) \in E} \bar{x}_{uw} \geq \bar{x}_{uv_2} > 0.$$

□

Pelo lema anterior, conhecido um ponto extremo  $\bar{x}$  de uma relaxação linear  $P$  de  $P^{\text{ATSP}}$  com uma componente  $\bar{x}_{ij}$  fraccionária podemos identificar um conjunto  $S \subset V$  tal que  $\bar{x} \notin P_S$  através da resolução do problema do corte global de capacidade mínima no grafo  $G[\bar{x}]$  da maneira que explicamos a seguir.

Seja  $G[u] = (V, E)$  um grafo dirigido simples com  $n$  vértices e  $m$  arcos tal que a cada arco  $(i, j) \in E$  está associado um escalar real  $u_{ij} \geq 0$  designado por *capacidade* do arco  $(i, j)$ . O problema de determinar o corte global de capacidade mínima em  $G$  pode escrever-se como

$$\min \left\{ \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} u_{ij} : S \subset V, S \neq \emptyset \right\}. \quad (22)$$

Se englobássemos as restrições  $s \in S$  e  $t \in V \setminus S$  para dois vértices designados, então o problema (22) seria dual do problema de determinar o fluxo máximo de  $s$  para  $t$  [16]. Não estando especificados os vértices origem  $s$  e terminal  $t$ , o problema (22) é dual do problema de determinar o maior valor de fluxo que é possível enviar entre qualquer par de vértices de  $G$ . Consequentemente, o problema (22) pode ser resolvido após a resolução de  $n(n-1)/2$  problemas de fluxo máximo com vértices origem e terminal designados. Hao e Orlin [21] propuseram um algoritmo específico que usa apenas uma sequência de  $2n-2$  problemas de fluxo máximo. A abordagem, que é inspirada no algoritmo *preflow-push* de Golberg e Tarjan [17] (para o problema do fluxo máximo entre dois vértices designados) e na abordagem de Padberg e Rinaldi [29], resulta num algoritmo que requer  $\mathcal{O}(nm \log(n^2/m))$  operações aritméticas e comparações, se  $u$  for um vector de números racionais. Portanto, o esforço computacional é comparável à resolução de  $n$  problemas de fluxo máximo entre dois vértices designados.

Se o valor óptimo de (22), para  $u = \bar{x}$ , for inferior a um, então a solução óptima  $S$  é tal que  $\bar{x} \notin P_S$  pelo Lema 3. Se o valor óptimo de (22) é igual a um, então um conjunto  $S$ , nas condições do Lema 3, pode ser encontrado do seguinte modo. Se  $f_2 = \bar{x}_{uv_2} \in (0, 1)$ , então determine-se o fluxo máximo de  $u$  para  $v_2$  no grafo  $G[\bar{x}] - \{(u, v_2)\}$ , que sabemos saber ser igual a  $1 - f_2$ . Pelo Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo, existe um conjunto de vértices  $S$ , contendo  $u$  e todos os vértices  $v \neq v_2$  tais que  $\bar{x}_{uv} \in (0, 1)$ , tal que, relativamente ao grafo  $G - \{(u, v_2)\}$ ,

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{x}_{ij} = 1 - f_2.$$

Por isso, relativamente ao grafo  $G$  original,  $\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{x}_{ij} = 1 - f_2 + f_2 = 1$ . Pelo Lema 3,  $\bar{x} \notin P_S$ . Concluímos que a determinação de  $S$  pode ser, em qualquer dos casos, efectuada em tempo polinomial. Este conjunto  $S$ , assim determinado, é óptimo em algum aspecto.

Quando  $P = P^{\text{ASS}}$ , o problema de optimização linear sobre  $P_S$  pode ser resolvido em  $\mathcal{O}(n^3 + (p-1)n)$  operações aritméticas e comparações. De facto, a resolução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.a} & x \in P_S \end{array} = \min_{(j_1, j_2, \dots, j_k) : \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq S, k \geq 1} \left( \begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.a} & x \in P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)} \end{array} \right) \quad (23)$$

pode fazer-se parametricamente através de uma optimização (envolvendo  $\mathcal{O}(n^3)$  operações) e  $K-1$  reoptimizações (cada uma envolvendo  $\mathcal{O}(n)$  operações) da maneira que explicamos a seguir.

Sejam  $P_k$  e  $P_{k+1}$  poliedros associados a um arco do nível  $k$  e a um arco do nível  $k+1$ , sucessivos, na árvore de enumeração dos caminhos, conforme ilustrado na Figura 1. Vamos explicar como obter um par de soluções primal-dual óptimas para  $z_{k+1} = \min\{cx : x \in P_{k+1}\}$ , sendo conhecida essa informação para  $z_k = \min\{cx : x \in P_k\}$ . Seja  $\bar{x} \in \{0, 1\}^m$  uma solução primal óptima de

$$z_k = \left\{ \begin{array}{l} \min \quad cx \\ \text{s.a} \quad x \in P \\ \quad x_{ij} = 1, \quad (i, j) \in E(C_k) \equiv \{(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{k-1}, j_k)\}, \\ \quad x_{ij} = 0, \quad (i, j) \in E(S) \setminus E(C_k), j \in V(C_k), \end{array} \right\} \quad (24)$$

que é vector característico de um emparelhamento perfeito  $M$  do grafo bipartido  $G = (V \times V, E)$ , e seja  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$  uma solução óptima para o correspondente problema dual

$$z_k = \sum_{(i,j) \in E(C_k)} c_{ij} + \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}} u_i + \sum_{j \notin \{i_2, i_3, \dots, i_k\}} v_j \\ \text{s.a} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in E \setminus E(S), \\ \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in E(S) \setminus E(C_k), j \notin V(C_k). \end{array} \right\}$$

Relativamente a (24), o novo problema  $z_{k+1} = \min\{cx : x \in P_{k+1}\}$  possui a restrição “ $x_{j_k j_{k+1}} = 1$ ” no lugar da restrição “ $x_{j_k j_{k+1}} = 0$ ” e novas restrições “ $x_{j_{k+1} j} = 0, j \in S \setminus V(C_{k+1})$ ” e “ $x_{ij_{k+1}} = 0, i \in S \setminus V(C_{k+1})$ ”. No novo problema dual, aparece mais uma parcela constante “ $c_{j_k j_{k+1}}$ ” e desaparecem as variáveis  $u_{j_k}$  e  $v_{j_{k+1}}$  da função objectivo, e desaparecem as restrições “ $u_{j_{k+1}} + v_j \leq c_{j_{k+1} j}, j \in S \setminus V(C_k)$ ”. Por isso, o vector  $\bar{x}$  já não é primal admissível, mas o vector  $(\bar{u}, \bar{v})$  permanece dual admissível no novo problema e “ $z_k + c_{j_k j_{k+1}} - \bar{u}_{j_k} - \bar{v}_{j_{k+1}}$ ” surge como limite inferior ao valor óptimo do novo problema. Podemos inicializar o método Húngaro com a solução dual admissível  $(\bar{u}, \bar{v})$  e o vector característico do emparelhamento

$$M' \equiv M \setminus \{(s, j_{k+1}), (j_k, t), (j_{k+1}, w)\} \cup \{(j_k, j_{k+1})\},$$

para algum  $t \notin S$  e  $s, w \in V$  - não é necessário excluir  $(j_{k+1}, w)$  se  $w \notin S$ . A solução óptima do novo problema pode ser então obtida em  $\mathcal{O}(n)$  operações aritméticas e comparações. Como existem, no máximo,  $p-1$  re-otimizadas a fazer, concluímos que o esforço computacional global na resolução de (23) é  $\mathcal{O}(n^3 + (p-1)n)$ . Realçamos que se a árvore for percorrida por *breath-first-search* então as soluções iniciais estarão prontamente disponíveis se forem armazenadas uma por cada nível. Portanto, não é necessário armazenar mais do que um par primal-dual óptimo por nível.

## 5 Determinação de um limite inferior melhorado

Nesta secção, propomos uma abordagem Lagrangeana para obter um limite inferior melhorado para o valor de  $z = \min\{cx : x \in P^{\text{ATSP}}\}$  que usa apenas a resolução de problemas de afectação como subproblemas. O algoritmo proposto, que é formalmente descrito na Figura 3, é essencialmente um método descendente de primeira ordem para a minimização da função de penalidade

$$f(x) \equiv cx + \rho \sum_{i=1}^K \left( e^{(a_i x - b_i)/\rho} - 1 \right), \quad (25)$$

onde “ $a_i x \leq b_i$ ” para  $i = 1, 2, \dots, K$  são desigualdades válidas para  $P^{\text{ATSP}}$ . Este conjunto de desigualdades vai sendo expandido à medida que o algoritmo decorre.

Em cada iteração genérica- $k$  do algoritmo proposto, começa-se por identificar uma direcção de descida, usando informação de primeira ordem. Observe-se que

$$\nabla f(x) = c + y(x)A, \quad \nabla^2 f(x) = A^T Y(x)A/\rho,$$

onde  $A$  é uma matriz  $K \times n$ , contendo as colunas  $a_i^T$  para  $i = 1, 2, \dots, K$ , e  $Y(x)$  é uma matriz diagonal  $K \times K$  cujos elementos diagonais coincidem com o vector  $y(x)$  definido componente a componente por

$$y_i(x) = e^{(a_i x - b_i)/\rho} \quad (i = 1, 2, \dots, K).$$

Enquanto não é identificada uma direcção de descida, o parâmetro de penalidade é reduzido. Depois de identificada uma direcção de descida  $d_k = q_k - x_k$  para  $f$  a partir de  $x_k$  e para algum  $q_k \in \arg \min\{\nabla f(x_k)q : q \in P^{\text{ASS}}\} \cap \mathbb{Z}^m$ , decide-se o tamanho do passo  $\lambda_k$  ao longo dessa direcção para obter a nova aproximação  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ . O escalar  $\lambda_k$  é solução óptima para  $\min\{g(\lambda) \equiv f(x + \lambda d) : \lambda \in (0, 1]\}$ . Se  $g'(1) \leq 0$ , então  $\lambda_k = 1$  é a solução óptima porque  $g$  é convexa. Caso contrário, o escalar  $\lambda_k$  deve ser aproximado através do método de Newton. Algumas simplificações ocorrem na correspondente fórmula recursiva. Para  $x$  e  $d$  fixos, temos

$$g(\lambda) = c(x + \lambda d) + \rho \sum_{i=1}^K \left( e^{(a_i(x + \lambda d) - b_i)/\rho} - 1 \right) = z_0 + \lambda w_0 + \rho \sum_{i=1}^K (y_i(\lambda) - 1),$$

onde  $z_0 = cx$ ,  $w_0 = cd$ ,  $z = Ax - b$ ,  $w = Ad$  e  $y(\lambda) \equiv y(x + \lambda d) = e^{(z_i + \lambda w_i)/\rho}$ . Por isso,

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= (c + y(\lambda)A) d = w_0 + \sum_{i=1}^K w_i y_i(\lambda), \\ g''(\lambda) &= d^T A^T Y(\lambda) A d / \rho = \sum_{i=1}^K w_i^2 y_i(\lambda) / \rho, \end{aligned}$$

pelo que o método de Newton consiste na aplicação da seguinte fórmula recursiva a partir de  $\lambda^{(0)} = 0$ ,

$$\lambda^{(j+1)} = \lambda^{(j)} - \frac{g'(\lambda^{(j)})}{g''(\lambda^{(j)})} = \lambda^{(j)} - \rho \left[ \frac{w_0 + \sum_{i=1}^K y_i(\lambda^{(j)}) w_i}{\sum_{i=1}^K y_i(\lambda^{(j)}) w_i^2} \right] \quad (j = 0, 1, \dots).$$

O último passo da iteração genérica- $k$  consiste na identificação do corte global  $\delta^+(S)$  de capacidade mínima em  $G[q_k]$ . Note-se que  $q_k$  é um vector de zeros e uns e, por isso, a identificação de  $\delta^+(S)$  pode ser efectuada por um método *standard* de averiguação de conexidade num grafo.

Segue-se a determinação da desigualdade válida para  $P_S^{\text{ASS}}$  *mais profunda* entre  $q_k$  e  $P_S^{\text{ASS}}$ . A determinação desse corte obriga à resolução do seguinte par de problemas para  $\bar{x} = q_k$  e  $S \subset V$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x - \bar{x}\| \\ \text{s.a.} \quad & x \in P_S^{\text{ASS}} \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} \max \quad & \alpha \bar{x} - \beta \\ \text{s.a.} \quad & (\alpha, \beta) \in \text{polar}(P_S^{\text{ASS}}), \quad \|\alpha\|_* \leq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Usando o algoritmo modificado de Ph. Wolfe, conforme descrito em [32], obtém-se a solução do problema (26), resolvendo uma sequência de problemas lineares do tipo:

$$\min_{\text{s.a.}} \quad ax \quad x \in P_S^{\text{ASS}} = \min_{(j_1, j_2, \dots, j_k): \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq S, k \geq 1} \left( \min_{\text{s.a.}} \quad ax \quad x \in P_{(j_1, j_2, \dots, j_k)}^{\text{ASS}} \right), \quad (27)$$

com  $a$  modificado ao longo do algoritmo. Tal como foi explicado na Secção 4, esta resolução pode ser feita parametricamente.

Finalmente, a inclusão do corte “ $a_{K+1}x \leq b_{K+1}$ ” assim obtido na função penalidade só é efectivada se o ângulo entre a sua normal e a normal de cada corte previamente adicionado for suficientemente não nulo. Em [2, 4], Balas, Ceria e Cornuéjols propuseram que se definisse um parâmetro  $\theta < 1$ , 0.9999 por exemplo, e que só fossem aceites cortes cujos co-senos dos ângulos formados com cada dos cortes já adicionados fossem pelo menos  $\theta$ . Quando isso acontecer, o corte é inserido na função (25).

Resta agora explicar como calcular o limite inferior. A função  $f$  goza das seguintes propriedades. Como  $f(x) \leq cx$  para todo  $x \in P^{\text{ASS}}$  tal que  $a_i x \leq b_i$  para  $i = 1, 2, \dots, K$ , então

$$\begin{aligned} z \equiv \min\{cx : x \in P^{\text{ATSP}}\} &\geq \min\{cx : x \in P^{\text{ASS}}, a_i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, K\} \\ &\geq \min\{f(x) : x \in P^{\text{ASS}}, a_i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, K\} \\ &\geq \min\{f(x) : x \in P^{\text{ASS}}\}. \end{aligned}$$

Além disso,  $f$  é convexa e continuamente diferenciável. Por isso,  $f(x_k) + \nabla f(x_k)d_k$  constitui um limite inferior ao valor de  $z$ , uma vez que

$$\min\{f(x) : x \in P^{\text{ASS}}\} \geq \min\{f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) : x \in P^{\text{ASS}}\} = f(x_k) + \nabla f(x_k)d_k.$$

## 5.1 Ilustração com um pequeno exemplo

Consideremos a instância do problema caixeiro viajante assimétrico, observada na página 381 de [5], cujo custo do arco genérico  $(i, j)$  corresponde à entrada  $(i, j)$  da matriz da Tabela 1. Esta instância tem valor óptimo 26, que corresponde ao ciclo Hamiltoniano identificado na Figura 4(a) através de  $G[x^*]$ .

Vamos ilustrar seis iterações do algoritmo da Figura 3, utilizando a regra de redução do parâmetro de penalidade  $\rho := \min\{\rho/10, \rho^{1.5}\}$ , inspirada em [9, 11, 28], e a norma  $l_\infty$  em (26). Como veremos, o primeiro limite inferior é 17 e, após a introdução de três cortes, aumenta para 21.5184.

No Passo de Inicialização, o valor óptimo de  $\min\{cx : x \in P^{\text{ASS}}\}$  é 17 e a solução óptima é  $x_0$ , ilustrada na Figura 4(b) através de  $G[x_0]$ . O corte global de capacidade mínima em  $G[x_0]$  é caracterizado por  $S = \{7, 8\}$ , por exemplo. O corte mais profundo entre  $x_0$  e  $P_S^{\text{ASS}}$  é o corte

$$x_{78} + x_{87} \leq 1,$$

obtido pelo algoritmo modificado de Ph. Wolfe. Termina o Passo de Inicialização com a correspondente inserção do corte na função penalidade.

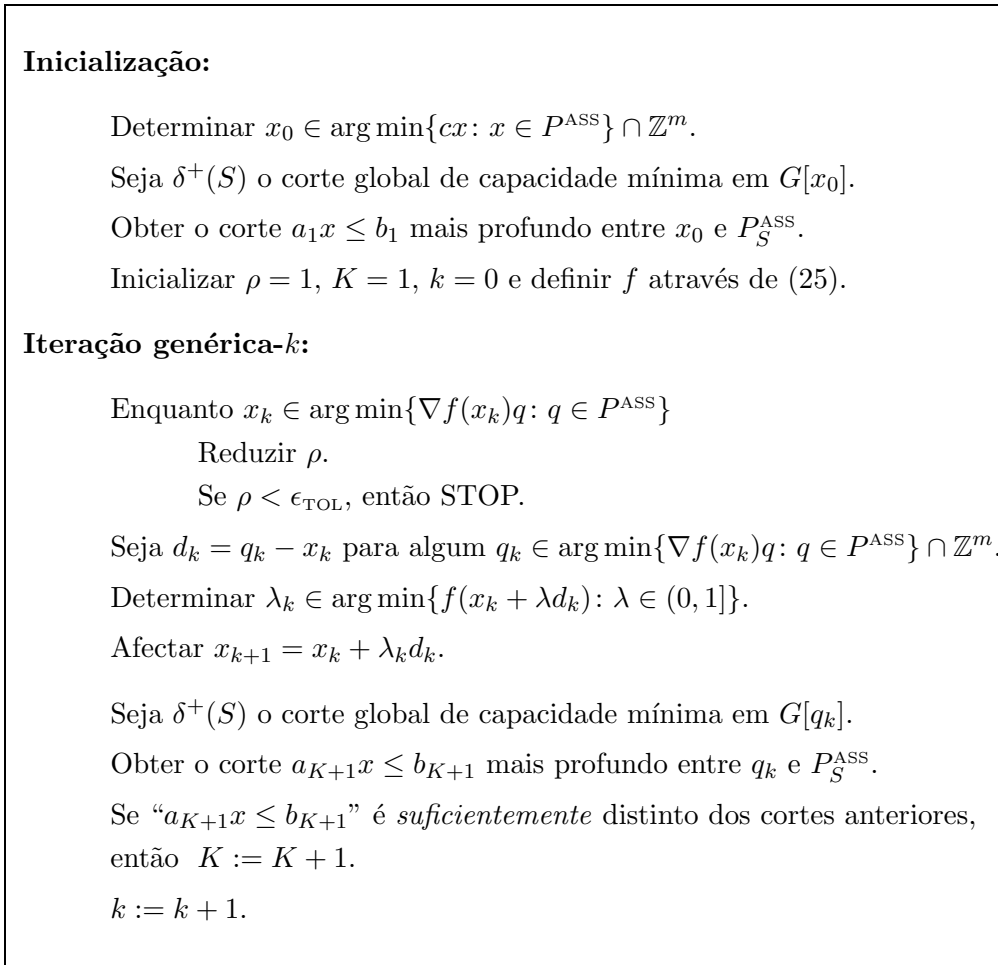


Figura 3: Algoritmo para determinar um limite inferior melhorado para o ATSP.

Tabela 1: Matriz de custos de uma instância do ATSP com 8 vértices.

-	2	11	10	8	7	6	5
6	-	1	8	8	4	6	7
5	12	-	11	8	12	3	11
11	9	10	-	1	9	8	10
11	11	9	4	-	2	10	9
12	8	5	2	11	-	11	9
10	11	12	10	9	12	-	3
7	10	10	10	6	3	1	-

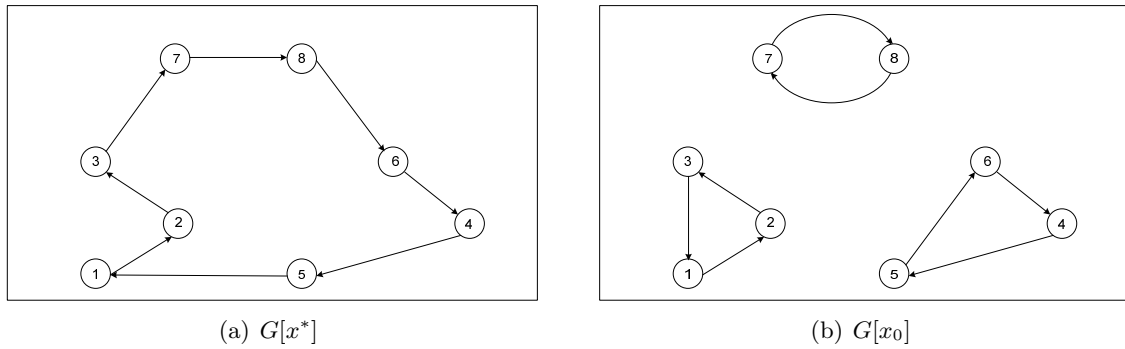


Figura 4: Soluções óptimas inteiras sobre  $P^{ATSP}$  e  $P^{ASS}$ , respectivamente.

Na iteração 0, o primeiro ciclo é interrompido com  $\rho = 0.1$ . A solução óptima do problema  $\min\{\nabla f(x_0)q : q \in P^{ASS}\}$  é  $q_0$ , ilustrada na Figura 5(a). Não se obtém melhoria no limite inferior pois  $f(x_0) + \nabla f(x_0)(q_0 - x_0) = -102.6718$ . Com a aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_0 = 0.2361$  ao que corresponde  $x_1 = x_0 + \lambda_0(q_0 - x_0)$ , ilustrada na Figura 5(b). O corte global de capacidade mínima em  $G[q_0]$  é caracterizado por  $S = \{4, 5, 6, 8\}$ , por exemplo. O corte mais profundo entre  $q_0$  e  $P_S^{ASS}$  é o corte

$$x_{12} + x_{23} + x_{37} + x_{71} \leq 3,$$

que é acrescentado à função penalidade.

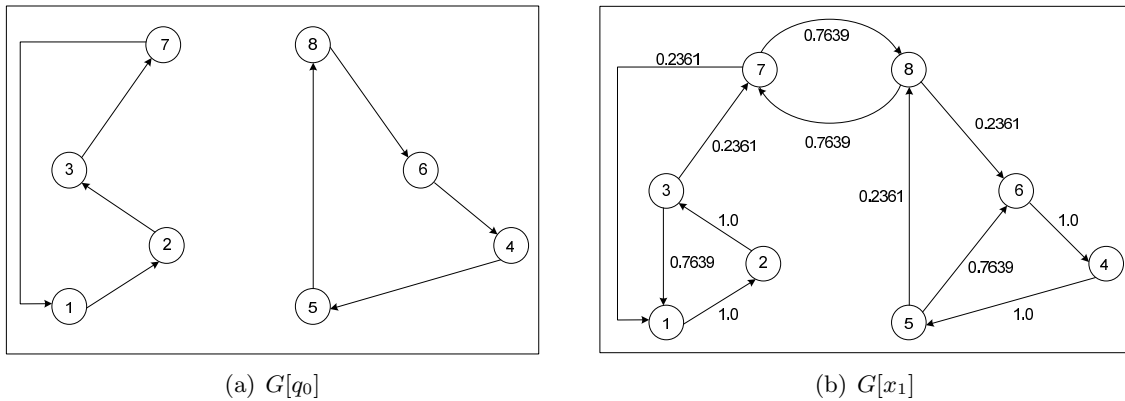


Figura 5: Iteração 0.

Na iteração 1, a solução óptima de  $\min\{\nabla f(x_1)q : q \in P^{ASS}\}$  é  $q_1$ , ilustrada na Figura 6(a). Obtém-se uma melhoria no limite inferior pois  $f(x_1) + \nabla f(x_1)(q_1 - x_1) = 18.5673$ . Com a aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_1 = 0.5933$  ao que corresponde  $x_2 = x_1 + \lambda_1(q_1 - x_1)$ , ilustrada na Figura 6(b). O corte global de capacidade mínima em  $G[q_1]$  é caracterizado por  $S = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ , por exemplo. O corte mais profundo entre  $q_1$  e  $P_S^{ASS}$  é o corte

$$x_{45} + x_{56} + x_{64} \leq 2,$$

que é acrescentado à função penalidade.

Na iteração 2, a solução óptima de  $\min\{\nabla f(x_2)q : q \in P^{ASS}\}$  é  $q_2$ , ilustrada na Figura 7(a). Não se obtém uma melhoria no limite inferior pois  $f(x_2) + \nabla f(x_2)(q_2 - x_2) = 15.0568$ . Com a



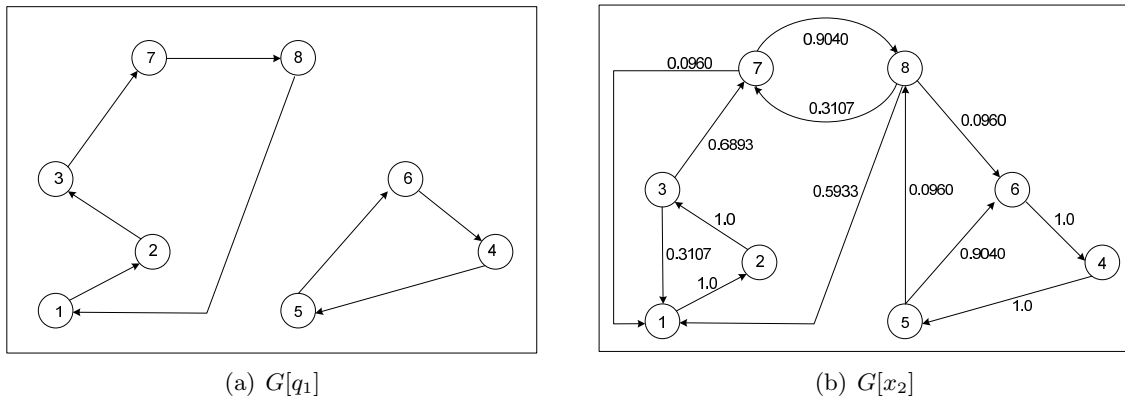


Figura 6: Iteração 1.

aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_2 = 0.1213$  ao que corresponde  $x_3 = x_2 + \lambda_2(q_2 - x_2)$ , ilustrada na Figura 7(b). O corte global de capacidade mínima em  $G[q_2]$  é caracterizado por  $S = \{7, 8\}$ , por exemplo. O corte mais profundo entre  $q_2$  e  $P_S^{ASS}$  é o mesmo que foi obtido no Passo de Inicialização e, por isso, não é acrescentado à função penalidade.

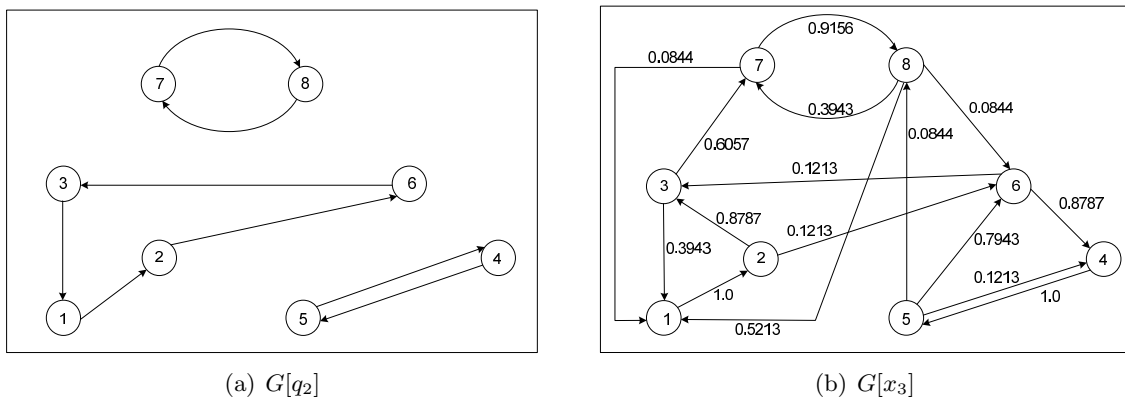


Figura 7: Iteração 2.

Na iteração 3, a solução óptima de  $\min\{\nabla f(x_3)q : q \in P^{ASS}\}$  é  $q_3$ , ilustrada na Figura 8(a). Obtém-se uma melhoria no limite inferior pois  $f(x_3) + \nabla f(x_3)(q_3 - x_3) = 20.7516$ . Com a aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_3 = 0.1801$  ao que corresponde  $x_4 = x_3 + \lambda_3(q_3 - x_3)$ , ilustrada na Figura 8(b). O corte global de capacidade mínima em  $G[q_3]$  é caracterizado por  $S = \{7, 8\}$ . O corte mais profundo entre  $q_3$  e  $P_S^{ASS}$  é o mesmo que foi obtido no Passo de Inicialização.

Na iteração 4, a solução óptima de  $\min\{\nabla f(x_4)q : q \in P^{ASS}\}$  é  $q_4$ , ilustrada na Figura 9(a). Não se obtém uma melhoria no limite inferior pois  $f(x_4) + \nabla f(x_4)(q_4 - x_4) = 20.1955$ . Com a aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_4 = 0.0554$  ao que corresponde  $x_5 = x_4 + \lambda_4(q_4 - x_4)$ , ilustrada na Figura 9(b). O corte global de capacidade mínima em  $G[q_4]$  é caracterizado por  $S = \{3, 6, 7, 8\}$ . O corte mais profundo entre  $q_4$  e  $P_S^{ASS}$  é o corte

$$x_{12} + x_{21} + x_{45} + x_{54} \leq 3,$$

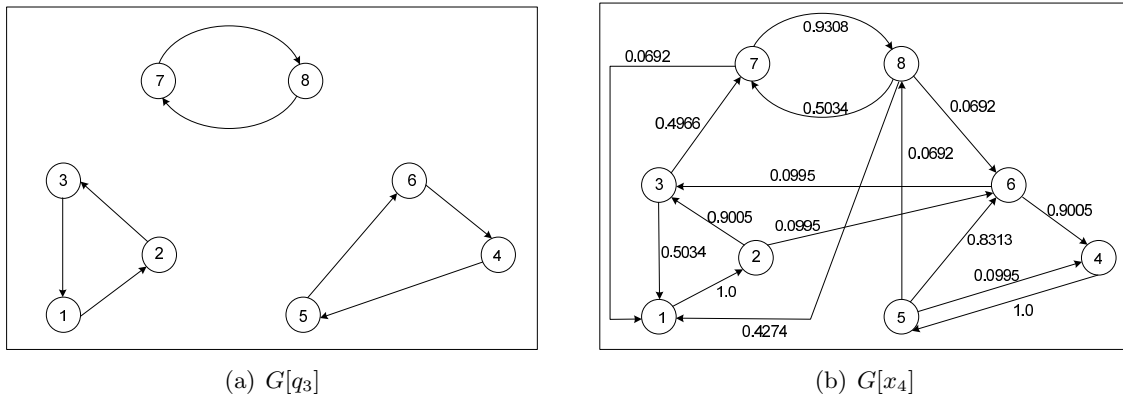


Figura 8: Iteração 3.

que é acrescentado à função penalidade.

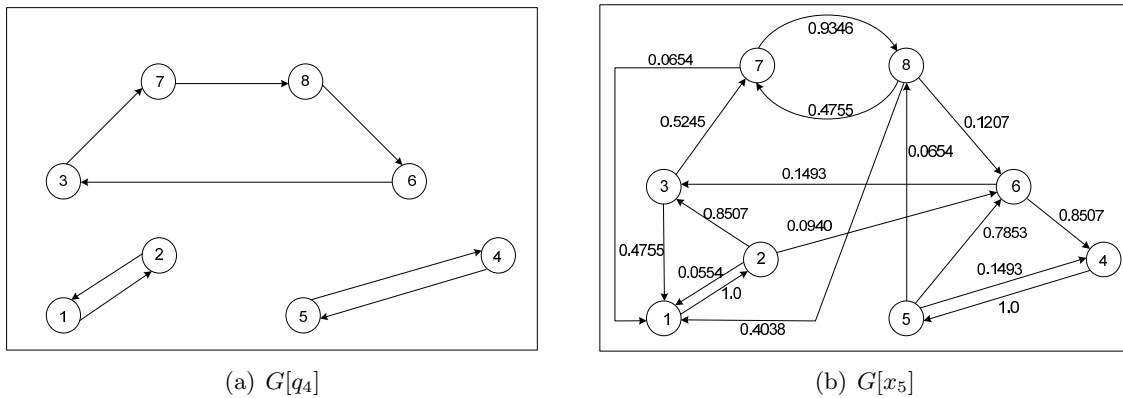
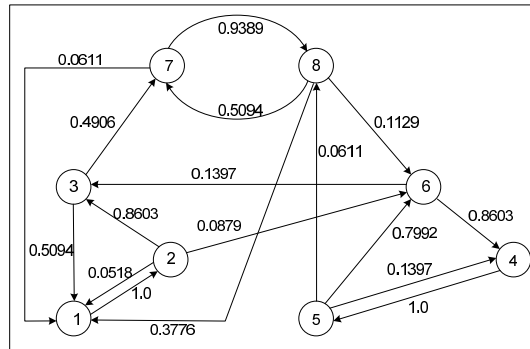


Figura 9: Iteração 4.

Na iteração 5, a solução óptima de  $\min\{\nabla f(x_5)q : q \in P^{\text{ASS}}\}$  é  $q_5$ , que coincide com  $q_3$ . Obtém-se nova melhoria no limite inferior pois  $f(x_5) + \nabla f(x_5)(q_5 - x_5) = 21.5184$ . Com a aplicação do método de Newton, obtém-se  $\lambda_5 = 0.0647$  ao que corresponde  $x_6 = x_5 + \lambda_5(q_5 - x_5)$ , ilustrada na Figura 10. O corte global de capacidade mínima em  $G[q_5]$  é caracterizado por  $S = \{7, 8\}$ . Uma vez mais, o corte mais profundo entre  $q_2$  e  $P_S^{\text{ASS}}$  é o mesmo que foi obtido no Passo de Inicialização.

## 6 Conclusões

O algoritmo que propomos neste trabalho requer um estudo computacional mais aprofundado. O exemplo pequeno que acompanhámos serviu para testar uma primeira implementação que fizemos em MATLAB com chamadas das rotinas INDUS3 e APPMIX disponíveis na Netlib na biblioteca de algoritmos da ACM, em <http://www.netlib.org/toms/750>. Experiências computacionais preliminares permitiram identificar diversas limitações. Em primeiro lugar, observámos que o algoritmo de primeira ordem pode tornar-se lento, progredindo com  $\lambda$ 's

Figura 10: Iteração 5:  $G[x_6]$ .

demasiado pequenos.

Em segundo lugar e algo inesperadamente, observámos que, em geral, o corte mais profundo entre  $q_k$  e  $P_S^{\text{ASS}}$  é uma desigualdade de ciclo - portanto, até menos profunda que a correspondente desigualdade de clique em  $S$ . Num próximo artigo identificaremos para que normas  $\|\cdot\|$  essa desigualdade será sempre o corte mais profundo em (26) quando  $\bar{x}$  é o vector característico de um subpercurso.

Analisámos também o comportamento do algoritmo se, no último passo da iteração genérica  $k$  do algoritmo da Figura 3, substituirmos o vector  $q_k$  por  $x_k$ . Neste caso, obtivemos algumas desigualdades que não são de circuito mas também ainda não são desigualdades de clique. Fica também em aberto a questão de saber que tipo de desigualdades conseguiremos gerar se  $x^k$  satisfizer todas as restrições de clique e for ponto extremo de uma relaxação linear de  $P^{\text{ATSP}}$ .

## Referências

- [1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network flows*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993. Theory, algorithms, and applications.
- [2] Egon Balas, Sebastián Ceria, and Gérard Cornuéjols. A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs. *Math. Programming*, 58(3, Ser. A):295–324, 1993.
- [3] Egon Balas and Nicos Christofides. A restricted Lagrangian approach to the traveling salesman problem. *Math. Programming*, 21(1):19–46, 1981.
- [4] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuejols. Mixed 0-1 programming by lift-and-project in a branch-and-cut framework. *Management Science*, 42(9):1229–1246, Sep 1996.
- [5] E. Balas and P. Toth. Branch and bound methods. In *The traveling salesman problem*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math., pages 361–401. Wiley, Chichester, 1985.
- [6] G. Carpaneto, M. Dell’Amico, and P. Toth. Algorithm 750: CDT: a subroutine for the exact solution of large-scale, asymmetric traveling salesman problems. *ACM Trans. Math. Software*, 21(4):410–415, 1995.
- [7] G. Carpaneto, M. Dell’Amico, and P. Toth. Exact solution of large-scale, asymmetric traveling salesman problems. *ACM Trans. Math. Software*, 21(4):394–409, 1995.
- [8] G. Carpaneto and P. Toth. Some new branching rules and bounding criteria for the asymmetric traveling salesman problem. *Management Science*, 26:736–743, 1980.

- [9] R. Cominetti and J.-P. Dussault. Stable exponential-penalty algorithm with superlinear convergence. *J. Optim. Theory Appl.*, 83(2):285–309, 1994.
- [10] M. Constantino. O problema do caixeiro viajante. In M. Ramos J. N. Silva and Luís Trabucho, editors, *2000 Matemática Radical*, volume 16 of *Textos de Matemática*, pages 337–350. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2002.
- [11] Jean-Pierre Dussault. Augmented penalty algorithms. *IMA J. Numer. Anal.*, 18(3):355–372, 1998.
- [12] Matteo Fischetti, Andrea Lodi, and Paolo Toth. Exact methods for the asymmetric traveling salesman problem. In *The traveling salesman problem and its variations*, volume 12 of *Comb. Optim.*, pages 169–205. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [13] Matteo Fischetti and Paolo Toth. An additive bounding procedure for the asymmetric travelling salesman problem. *Math. Programming*, 53(2, Ser. A):173–197, 1992.
- [14] Matteo Fischetti and Paolo Toth. A polyhedral approach to the asymmetric traveling salesman problem. *Management Science*, 43(11):1520–1536, 1997.
- [15] R. W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 5:345, 1962.
- [16] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.*, 8:399–404, 1956.
- [17] Andrew V. Goldberg and Robert E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35(4):921–940, 1988.
- [18] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993.
- [19] Gregory Gutin and Abraham P. Punnen, editors. *The traveling salesman problem and its variations*, volume 12 of *Combinatorial Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [20] L. G. Hačijan. A polynomial algorithm in linear programming. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 244(5):1093–1096, 1979.
- [21] J. Hao and J. Orlin. A faster algorithm for finding the minimum cut in a directed graph. *Journal of Algorithms*, 17:424–446, 1994.
- [22] M. Held and R. Karp. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18:1138–1162, 1970.
- [23] M. Held and R. Karp. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II. *Mathematical Programming*, 1:6–25, 1971.
- [24] David S. Johnson, Gregory Gutin, Lyle A. McGeoch, Anders Yeo, Weixiong Zhang, and Alexei Zverovitch. Experimental analysis of heuristics for the ATSP. In *The traveling salesman problem and its variations*, volume 12 of *Comb. Optim.*, pages 445–487. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [25] J.D. Coelho J. O. Cerdeira. Optimização de percursos de distribuição (parte i). *Economia*, XI:170–214, 1987.
- [26] J.D. Coelho J. O. Cerdeira. Optimização de percursos de distribuição (parte ii). *Economia*, XII:69–96, 1988.
- [27] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys, editors. *The traveling salesman problem*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990. A guided tour of combinatorial optimization, Reprint of the 1985 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [28] M. Mongeau and A. Sartenaer. Automatic decrease of the penalty parameter in exact penalty function methods. *European Journal of Operational Research*, 83:686–699, 1995.

- [29] M. Padberg and G. Rinaldi. An efficient algorithm for the minimum capacity cut problem. *Mathematical Programming*, 47:19–36, 1990.
- [30] J. M. O. Pires. *Formulações para o problema do caixeiro viajante assimétrico e sua aplicação a um problema de desenho de redes com topologia em forma de anel*. PhD thesis, Universidade de Lisboa, Setembro 2001.
- [31] T. Smith, V. Srinivasan, and G. Thompson. Computational performance of three subtour elimination algorithms for solving asymmetric traveling salesman problems. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:495–506, 1977.
- [32] J. Soares and A.R. Santos. Uma abordagem primal para a geração de planos cortantes disjuntivos mais separadores. Maio 2004.
- [33] Stephen Warshall. A theorem on boolean matrices. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 9:11–12, 1962.