



**Universidade de Coimbra**  
**Faculdade de Ciências e Tecnologia**  
*Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores*

# **PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS**

Paulo José Gameiro Pereirinha

Coimbra – Portugal  
Defendida em 22 de Julho de 2005

**Versão .pdf**

(cf. Errata)





**Universidade de Coimbra**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

*Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores*

# **PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS**

Paulo José Gameiro Pereirinha

Coimbra – Portugal

2004





**Universidade de Coimbra**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

*Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores*

# **PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS**

*Dissertação submetida para obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Electrotécnica, na especialidade de  
Concepção Assistida por Computador*

*Orientador:*

*Carlos Fernando Ramos Lemos Antunes*

*Professor Catedrático do DEEC, FCTUC*

**Paulo José Gameiro Pereirinha**

**Coimbra – Portugal**

**2004**



*Aos meus filhos João, Pedro e Sara,  
nascida durante a realização deste trabalho,  
e à minha mulher, Inês*



Trabalho realizado com o co-financiamento do Fundo Social Europeu (FSE):

Medida 5/Ação 5.3 – Formação Avançada de Docentes no Ensino Superior, Concurso  
Público nº 4/5.3/PRODEP/2000 – Doutoramentos





## AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, não quero deixar de exprimir os meus agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que ele se concretizasse.

Em primeiro lugar, ao Orientador, Professor Doutor Carlos Lemos Antunes, por toda a orientação, disponibilidade e apoio manifestados no decorrer deste trabalho. Agradeço também a forma, que transmitiu, de encarar a engenharia e a investigação científica, bem como o incentivo permanente a dar a nossa pequena contribuição à comunidade científica internacional.

Ao Professor Doutor António Paulo Coimbra, pelo apoio, sugestões e esclarecimentos prestados, bem como pela ajuda nos melhoramentos ao código do *software* CADdyMAG.

Ao Eng. Tony Richard de Oliveira de Almeida, pelo apoio e incentivo à conclusão deste trabalho nas muitas horas em que partilhámos o Laboratório.

Ao Professor Doutor Johan Gyselinck, da *Université Libre de Bruxelles* (anteriormente na *Université de Liège*), Bélgica, pelas longas discussões das quais resultou uma parte importante do trabalho apresentado, e ao Eng. Alfredo de Blas da *Universidad Politécnica de Cataluña*, Barcelona, Espanha, com quem iniciámos colaboração na investigação dos fenómenos de histerese.

Ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da FCTUC e ao Instituto de Sistemas e Robótica (ISR), em cujo Laboratório de CAD/CAE foi desenvolvido o trabalho apresentado.

Aos colegas do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, especialmente aos do Departamento de Engenharia Electrotécnica, pelo interesse e incentivo manifestados, e em particular ao Professor Doutor José Américo Dias Pinto, pela disponibilidade para esclarecer assuntos relacionados com os fenómenos térmicos.

Ao Instituto Superior de Engenharia de Coimbra e ao Instituto Politécnico de Coimbra pela confiança depositada e pelos apoios prestados.

Agradeço, ainda, o financiamento concedido pelo programa PRODEP III no âmbito do concurso nº 4/5.3/PRODEP/2000 (Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior).

Finalmente, mas não em último lugar, aos amigos, à família e aos meus filhos João, Pedro e Sara, pelo tempo que lhes furtei a minha companhia, e à minha mulher, Inês, pelo apoio, incentivo e paciência durante todo este tempo, e também Àquele de quem todo o conhecimento provém.



## RESUMO

Nesta dissertação, é abordado principalmente o tema das perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas e a sua quantificação sob a forma de fontes de calor, resultando no aquecimento dos dispositivos. A metodologia numérica utilizada para a análise e simulação dos fenómenos electromagnéticos e térmicos foi o método dos elementos finitos.

Nos dispositivos sobre os quais se debruça a engenharia electrotécnica, e, em particular, nas máquinas eléctricas, existem diversos tipos de perdas, resultando, em última análise, na conversão de energia electromagnética em calor. Nos materiais ferromagnéticos, fundamentais na grande maioria das máquinas eléctricas, o cálculo de perdas por correntes induzidas é particularmente importante para dispositivos funcionando com frequências superiores aos 50 Hz ou com alimentações não sinusoidais, resultantes da utilização de electrónica de potência. Nestes casos, o efeito pelicular nas chapas ferromagnéticas pode ser muito significativo, colocando problemas adicionais. A temática é pois de enorme importância para o desenvolvimento de dispositivos electromagnéticos de elevada eficiência.

No início, são expostos os conceitos e a formulação para o problema do cálculo das perdas, em particular por correntes induzidas. São comparadas diferentes formulações a 1D, com ou sem efeito pelicular. É apresentada a formulação para a modelação por elementos finitos, sendo estudado detalhadamente o problema de chapas estreitas (problema 2D) com efeito pelicular, tendo-se obtido um gráfico e um modelo matemático genéricos para qualquer chapa ferromagnética em funcionamento na zona linear. A tentativa de expansão deste gráfico para a zona não linear levou ao teste e utilização de curvas  $B-H$  eficazes equivalentes, à utilização do método do balanço harmónico e ao início do estudo para inclusão do efeito das chapas estreitas na formulação por elementos finitos. Para poder realizar estes trabalhos, foi necessário proceder a grandes alterações ao *software* CADdyMAG, para funcionar com mais nodos e elementos finitos e também em modo automático (“*batch*”), bem como alterar diversos processadores e ainda convertê-lo de DOS para ambiente *Windows*.

É também exposta a formulação térmica por elementos finitos para poder estudar os fenómenos térmicos resultantes das perdas, foi feita a migração do nosso processador térmico de elementos finitos do ambiente VAX/VMS para PC/*Windows*, tendo sido também

desenvolvido um método de homogeneização térmica através do cálculo de condutividades térmicas equivalentes.

## ABSTRACT

The main subject of this work is the eddy current losses calculation in magnetic steel laminations and the resulting heating of the devices. The numerical methodology used was the finite element method.

In electromagnetic devices, specially in electrical machines, different kinds of losses exist leading to electromagnetic energy conversion into heat. In ferromagnetic materials, essential to most electrical machines, the eddy current losses calculation is particularly important either for devices working at frequencies higher than 50 Hz or for non sinusoidal supplies used in power electronics. In these cases, the skin effect in the magnetic sheets can be very important, which poses additional problems. This is a subject of great importance in the high efficiency electromagnetic devices development.

First, the concepts and formulation for the iron losses problem are presented, particularly for the eddy current losses. Different formulations for 1D are compared with and without skin effect. The formulation for the finite element modeling is presented and the problem of narrow laminations (2D problem) with skin effect is studied in detail, resulting in a generic chart and a mathematic model valid for any magnetic steel lamination working in the linear behavior zone. The attempt to extend the chart and model to non linear zone leaded to the use and test of effective magnetization curves, which originate from the non linear  $B-H$  curves, to the use of the magnetic balance method and also to start studying the possibility of including the narrow laminations effect (2D problem) in the finite element formulation.

To perform the aforementioned works, it was necessary to do main changes to our finite element software CADDyMAG in order to be able to work with more nodes and elements, in *batch* mode, as well as to modify several processors and to convert it from DOS to Windows.

To study the thermal effects resulting from the losses, it is also presented the thermal finite element formulation. It was also done the migration of our thermal finite element processor from VAX/VMS to PC/Windows, and a thermal homogenization method was developed using equivalent thermal conductivities.



## ÍNDICE RESUMIDO

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>VII</b>
<b>RESUMO</b>	<b>IX</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>XI</b>
<b>ÍNDICE RESUMIDO</b>	<b>XIII</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>XV</b>
<b>SIMBOLOGIA, NOTAÇÃO E UNIDADES UTILIZADAS</b>	<b>XXI</b>
<b>1 MOTIVAÇÃO, ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS</b>	<b>1</b>
<b>2 INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS MAGNÉTICOS E ÀS PERDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS</b>	<b>13</b>
<b>3 CÁLCULO DE PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, CONSIDERANDO EFEITO PELICULAR E INFLUÊNCIA DA LARGURA DA CHAPA</b>	<b>45</b>
<b>4 CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>73</b>
<b>5 EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA <math>d/\delta</math> DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>107</b>
<b>6 GRÁFICO GENÉRICO E MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDOS DOS RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>129</b>
<b>7 TENTATIVA DE EXTENSÃO DO GRÁFICO E MODELO PARA ZONA NÃO LINEAR</b>	<b>143</b>
<b>8 INÍCIO DA APLICAÇÃO A TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO</b>	<b>195</b>

<b>9</b>	<b>TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MODELAÇÃO TÉRMICA POR ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>215</b>
<b>10</b>	<b>CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/<i>WINDOWS</i></b>	<b>229</b>
<b>11</b>	<b>MÉTODO PARA CÁLCULO DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE DE BARRA DE ALTERNADOR: HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA</b>	<b>265</b>
<b>12</b>	<b>OUTROS DESENVOLVIMENTOS: MELHORIAS AO <i>SOFTWARE</i> DE ELEMENTOS FINITOS, CADdyMAG</b>	<b>299</b>
<b>13</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>325</b>
<b>14</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>329</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>343</b>
	<b>ANEXO 1 – ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>345</b>
	<b>ANEXO 2 - ÍNDICE DE TABELAS</b>	<b>355</b>
	<b>ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES</b>	<b>359</b>
	<b>ANEXO 4 - CORRESPONDÊNCIAS ENTRE DESIGNAÇÕES DE CHAPA FERROMAGNÉTICA PARA DIVERSAS NORMAS INTERNACIONAIS (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS)</b>	<b>365</b>

# ÍNDICE

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>VII</b>
<b>RESUMO</b>	<b>IX</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>XI</b>
<b>ÍNDICE RESUMIDO</b>	<b>XIII</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>XV</b>
<b>SIMBOLOGIA, NOTAÇÃO E UNIDADES UTILIZADAS</b>	<b>XXI</b>
Abreviaturas	XXI
Expressões	XXII
Letras e símbolos	XXIII
Com letras gregas	XXIX
Operadores matemáticos	XXXI
Programas de elementos finitos	XXXI
Ficheiros de dados com nomes próprios e extensões de ficheiros	XXXIII
Variáveis e estruturas de dados do pacote de programa de elementos finitos	XXXVI
<b>1 MOTIVAÇÃO, ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação	1
1.2 Estrutura	3
1.3 Contribuições originais	8
<b>2 INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS MAGNÉTICOS E ÀS PERDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS</b>	<b>13</b>
2.1 Materiais magnéticos	13
2.1.1 O dipolo magnético	14
2.1.2 Um modelo das propriedades magnéticas dos materiais: Magnetização	15
2.2 Comportamento dos materiais magnéticos	21
2.2.1 Materiais diamagnéticos e paramagnéticos	22
	XV

2.2.2	Materiais ferromagnéticos	25
2.2.3	Outros materiais magnéticos	35
2.3	Mecanismo físico das perdas nos materiais ferromagnéticos	37
2.4	Algumas formas comuns de cálculo das perdas nos materiais ferromagnéticos	41
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DE PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, CONSIDERANDO EFEITO PELICULAR E INFLUÊNCIA DA LARGURA DA CHAPA</b>	<b>45</b>
3.1	Definição do problema	45
3.2	Formulação matemática do problema	49
3.2.1	Equações de Maxwell	49
3.2.2	Definição do modelo matemático de correntes induzidas e das perdas	51
3.3	Expressões analíticas a 1D para o cálculo das perdas por correntes induzidas	55
3.3.1	Expressões em função de $B$	56
3.3.2	Expressões em função de $H$	58
3.3.3	Comparação de expressões analíticas para o cálculo de perdas por correntes induzidas	59
3.4	Metodologia para a modelação por elementos finitos	67
3.4.1	Utilização de processador de EF para equação de difusão em $A$ para o cálculo de $H$	67
3.4.2	Processador em $H$ : problema de descontinuidades	69
3.4.3	Procedimento de cálculo das perdas por correntes induzidas por elementos finitos a partir da solução de $H$	71
<b>4</b>	<b>CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>73</b>
4.1	Visão geral da solução do campo e correntes induzidas	78
4.2	Resultados numéricos do problema 1D	85
4.3	Análise dos resultados 1D	89
4.3.1	Significado físico dos resultados para as frequências mais elevadas	89
4.3.2	Dificuldades na obtenção de dados experimentais. Experimentação numérica	91
4.3.3	Comparação com valores do fabricante e experimentais de outros autores	92

4.3.4	Comparação das perdas por correntes induzidas, calculadas numericamente a 1D, com os valores da expressão analítica exacta	95
4.3.5	Conclusões dos resultados numéricos do problema 1D	97
4.4	Resultados numéricos do problema 2D	98
4.5	Conclusão de que os factores determinantes são $d/\delta$ e $w/d$	105
<b>5</b>	<b>EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA <math>d/\delta</math> DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>107</b>
5.1	Aproximação polinomial de 3 <sup>a</sup> ordem a $P_j/P_{BI} = f(d/\delta)$ para $w/d$ constante	112
5.2	Expressões para a determinação analítica dos coeficientes polinomiais	114
5.3	Resultados do modelo analítico aproximado e conclusões	116
5.4	Efeito de sobreposição	118
5.5	Conclusões e discussão dos resultados anteriores	127
<b>6</b>	<b>GRÁFICO GENÉRICO E MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDOS DOS RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>129</b>
6.1	Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para o problema 1D com as novas malhas	131
6.2	Comparação entre os resultados numéricos para o problema 2D com os de $P_{BI}$	131
6.3	Será lícito modelar apenas $1/4$ da chapa para resolver o problema 2D?	134
6.4	Modelo analítico derivado de resultados numéricos	137
6.4.1	Modelo de linhas rectas	137
6.4.2	Expressões analíticas para a determinação dos coeficientes da equação da recta, $m$ e $b$	137
6.4.3	Resultados do modelo analítico proposto	140
6.4.4	Conclusões	142
<b>7</b>	<b>TENTATIVA DE EXTENSÃO DO GRÁFICO E MODELO PARA ZONA NÃO LINEAR</b>	<b>143</b>
7.1	Introdução (objectivos, problema e explicação da ideia)	143
7.2	Curvas $B-H$ efectivas e procedimento para a sua obtenção	149
7.2.1	Formulações para curvas $B-H$ efectivas	149

7.2.2	Metodologia e exemplo de construção da curva $B-H$ efectiva com relatividade média no tempo	153
7.2.3	Número de intervalos a utilizar na rotina de integração numérica	160
7.2.4	Curva $B-H$ efectiva com relatividade média no tempo, para a chapa TTJG13	162
7.3	Alterações ao EDDyNLIN para utilização de $\tilde{H}$ e ao CADyPOS para cálculo das perdas por correntes induzidas em regime não linear	164
7.3.1	Primeira possibilidade	166
7.3.2	Estrutura do processador não linear EDDyNLIN	169
7.3.3	Segunda possibilidade	170
7.4	Cálculo das perdas por correntes induzidas com curva $B-H$ efectiva TTJG13EqRtav e comparação com <i>time-stepping</i>	172
7.5	Implementação e resultados das outras formulações para curvas $B-H$ efectivas	181
7.6	Resultados das perdas por correntes induzidas com curvas $B-H$ efectivas e comparação com <i>time-stepping</i>	187
7.7	Conclusões	192
7.8	Método do Balanço Harmónico	193
<b>8</b>	<b>INÍCIO DA APLICAÇÃO A TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO</b>	<b>195</b>
8.1	Introdução	195
8.2	Formulação	198
8.3	Exemplo de aplicação	202
8.3.1	Para $B_{\max}^a$ constante	203
8.3.2	Para $H_s$ constante	208
8.4	Conclusões	213
<b>9</b>	<b>TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MODELAÇÃO TÉRMICA POR ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>215</b>
9.1	Introdução	215
9.2	Fenómenos de Transferência de Calor	216
9.2.1	Condução	217
9.2.2	Radiação	218
9.2.3	Convecção	219
9.3	Modelação Térmica por Elementos Finitos	221

9.3.1	Modelos matemáticos para o problema térmico	221
9.3.2	Sistemas globais de equações algébricas em notação matricial	224
<b>10</b>	<b>CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/<i>WINDOWS</i></b>	<b>229</b>
10.1	Formulação e fluxograma do processador térmico original (“TP21GN_ALFAS.exe”)	229
10.2	Problema de referência para verificação do novo processador	234
10.3	Importação do código para PC, recompilação e testes de novos “ <i>solvers</i> ”	240
10.3.1	Primeira fase: processador CADyTER (com criação da matriz global de coeficientes, [S])	240
10.3.2	Segunda fase: processador CARTyTERB (com criação directa de vector de coeficientes, [SV], sem criar a matriz de coeficientes, [S])	244
<b>11</b>	<b>MÉTODO PARA CÁLCULO DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE DE BARRA DE ALTERNADOR: HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA</b>	<b>265</b>
11.1	Introdução	265
11.2	Caso estudado e metodologia	266
11.2.1	Dados e resultados para o problema original	266
11.2.2	Verificação da solução de elementos finitos: cálculo do fluxo de calor	269
11.2.3	Substituição da barra original por barras equivalentes	272
11.3	Resultados	274
11.4	Considerações adicionais acerca do cálculo do fluxo de calor	279
11.4.1	Linearização do vector fluxo de calor	283
11.4.2	Passagem do percurso de integração pelo meio da camada de elementos finitos	288
11.5	Conclusões e novas questões	296
<b>12</b>	<b>OUTROS DESENVOLVIMENTOS: MELHORIAS AO <i>SOFTWARE</i> DE ELEMENTOS FINITOS, CADdyMAG</b>	<b>299</b>
12.1	Constituição, estrutura e estado iniciais do CADdyMAG e do CADdyTERM	300
12.2	Estrutura e estado actuais do CADdyMAG	304

12.3	Pré-processador, CADyPRE	307
12.4	CADyEXE	313
12.5	Processadores	316
12.6	Pós-processador, CADyPOS	323
<b>13</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>325</b>
<b>14</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>329</b>
14.1	Referências de trabalho apresentado e publicado em Conferências e Revista Internacionais	340
	<b>ANEXOS</b>	<b>343</b>
	<b>ANEXO 1 – ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>345</b>
	<b>ANEXO 2 - ÍNDICE DE TABELAS</b>	<b>355</b>
	<b>ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES</b>	<b>359</b>
	<b>ANEXO 4 - CORRESPONDÊNCIAS ENTRE DESIGNAÇÕES DE CHAPA FERROMAGNÉTICA PARA DIVERSAS NORMAS INTERNACIONAIS (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS)</b>	<b>365</b>

## SIMBOLOGIA, NOTAÇÃO E UNIDADES UTILIZADAS

Neste trabalho foram utilizadas as unidades do Sistema Internacional (SI). Estas são indicadas entre parêntesis no fim da definição de cada letra ou símbolo na presente enumeração.

As palavras em inglês são representadas em itálico (e entre aspas na primeira vez que aparecem).

Os vectores são representados a negrito (“*bold*”), caso do vector indução magnética  $\mathbf{B}$ , e os fasores<sup>1</sup> a negrito com um til por cima, caso do fasor indução magnética  $\tilde{\mathbf{B}}$ . As componentes do fasor são representadas em itálico, como em  $\tilde{H}_z$ , componente segundo  $z$  do fasor  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Os valores máximos dos diversos vectores, iguais à amplitude dos respectivos fasores, foram designados por  $B_{\max}$ ,  $H_z$ ,  $H_s$  e  $J_{\max}$ , tal como se explica seguidamente na respectiva definição.

### Abreviaturas

1D	“uma dimensão”
2D	“duas dimensões”
3D	“três dimensões”
i.e.	“isto é” ou “por outras palavras”; do latim <i>id est</i>
cf.	“confronte-se” ou “confira”; do latim <i>conferre</i>
<i>et al</i>	“e outros”; do latim <i>et alli</i>

---

<sup>1</sup> Recorde-se que uma grandeza, quer escalar quer vectorial, variando de forma sinusoidal no tempo, pode ser representada por um fasor [Ida2000] pp.711-716 [Coimbra1995] pp.365-369. Assim, um vector dependente do tempo,  $\mathbf{B}(x, y, z, t) = B_{\max}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi)$ , em que  $B_{\max}$  representa o valor máximo de  $\mathbf{B}$  sinusoidal, i.e. a amplitude do fasor, pode ser representado pelo fasor

$$\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) = B_{\max}(x, y, z) e^{j\phi} = B_{\max}(x, y, z) \angle \phi = B_{\max}(x, y, z) \cos \phi + j B_{\max}(x, y, z) \sin \phi$$

aqui escrito nas formas exponencial, polar e rectangular, respectivamente. O valor instantâneo de  $\mathbf{B}$  pode rápida e facilmente ser calculado a partir da forma exponencial do fasor através de

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ B_{\max}(x, y, z) e^{j\phi} e^{j\omega t} \right\}$$

em que, obviamente,  $\operatorname{Re} \{ \}$  representa a parte real da função complexa entre parêntesis.

- r.m.s. “*root mean square*”; valor eficaz de uma grandeza alternada (para uma carga resistiva dá o valor que produziria o mesmo efeito que uma corrente contínua; no caso de uma grandeza sinusoidal, o valor eficaz é igual ao valor máximo a dividir por  $\sqrt{2}$  )
- sic* “assim”; do latim *sic*. Usado para indicar que uma passagem citada foi escrita na sua forma original ou escrita intencionalmente

## Expressões

Significado das seguintes expressões entre aspas:

- “Problema 1D”: genericamente, problema unidimensional. Nesta dissertação, para os problemas de correntes induzidas, refere-se aos casos (mesmo que modelados a duas dimensões) da chapa ferromagnética em que  $w \gg d$ , pelo que, comparativamente à espessura  $d$ , a largura  $w$  da chapa pode ser considerada “infinita”
- “Problema 2D”: genericamente, problema bidimensional. Neste caso, para os problemas de correntes induzidas, refere-se aos casos em que a chapa em que  $w \gg d$  não é verdade (chapas estreitas), pelo que é importante considerar o efeito de extremidades da chapa
- “semi-modelo” (de elementos finitos): Significa que o que é modelado por elementos finitos (e que constitui o “modelo” a resolver), devido à existência de simetrias, é apenas metade do dispositivo físico a analisar
- “um quarto de modelo” ou “ $\frac{1}{4}$  de modelo”: o que é modelado por elementos finitos, devido à existência de simetrias, é apenas um quarto do dispositivo a analisar
- “resultados numéricos”: obtidos por elementos finitos, por oposição a “resultados analíticos”, obtidos por expressões analíticas

## Letras e símbolos

<b>A</b>	vector potencial magnético (ou “potencial vector”) (Wb/m)
$\tilde{\mathbf{A}}$	fasor (do vector) potencial magnético (ou “potencial magnético vector”) (Wb/m)
$\tilde{A}_y$	componente segundo $y$ do fasor $\tilde{\mathbf{A}}$ (Wb/m)
$b$	termo constante na equação de uma recta
$b^*$	termo constante na equação de uma recta calculado analiticamente (* é substituído pela letra da zona correspondente)
$b^*_{num}$	termo constante na equação de uma recta calculado a partir de dados numéricos
$B$	indução magnética (ou densidade de fluxo) (T)
$B^a$	valor instantâneo médio de $B$ para toda a chapa(T)
<b>B</b>	vector indução magnética (ou vector densidade de fluxo) (T)
<b>B<sub>e</sub></b>	vector indução magnética externa (T)
<b>B<sub>m</sub></b>	vector indução magnética produzida pelo material magnetizado (T)
<b>B<sub>r</sub></b>	vector indução magnética produzida por magnetes permanentes (T)
<b>B<sub>t</sub></b>	vector indução total (T)
$\tilde{\mathbf{B}}$	fasor indução magnética em regime permanente sinusoidal (T)
$\tilde{B}_z$	componente segundo $z$ do fasor $\tilde{\mathbf{B}}$ (T)
$B_{max}$	valor de pico (valor máximo no tempo) da indução magnética sinusoidal <sup>2</sup> (T)
$B^a_{max}$	valor médio de $B_{max}$ ao longo da espessura da chapa (T)
$B_{ref}$	valor de referência pretendido para $B^a_{max}$ (T). Sem <sup>3</sup> efeito pelicular, tem-se $B^a_{max} = B_{max} = B_{ref}$
$B^e_R$	valor médio, no elemento finito, da componente real de $\tilde{B}_z$ (T)
$B^e_I$	valor médio, no elemento finito, da componente imaginária de $\tilde{B}_z$ (T)

<sup>2</sup> No caso de notação fasorial e em que o vector indução tem apenas componente segundo  $z$ ,  $B_{max}$  é a amplitude do fasor  $\tilde{B}_z$ , ou seja  $B_{max} = (\tilde{B}_z)_{max} = |\tilde{B}_z|$ .

<sup>3</sup> Com efeito pelicular:

- a 1D (i.e. chapas com largura  $w \rightarrow \infty$ )  $B^a_{max} = B_{ref}$  se e só se for usada a permeabilidade complexa equivalente  $\tilde{\mu}_e$ ;
- a 2D é preciso ainda considerar também o “efeito de sobreposição” (cf. página 118).

$c$	calor específico, também chamado capacidade calorífica específica (J/kg·K)
$d$	espessura da chapa ferromagnética laminada (m)
$dte$	“ <i>distance to edge</i> ”, distância à fronteira lateral da chapa (m)
<b>D</b>	vector deslocamento eléctrico (C/m <sup>2</sup> )
<b>E</b>	vector campo eléctrico (V/m)
$e$	número de Neper, constante igual a 2,71828182845904..., a base do logaritmo natural
$e_b$	potência emissiva ou poder emissivo (“ <i>emissive power</i> ”) por radiação (W/m <sup>2</sup> )
$e'_b$	fluxo de calor emitido por radiação por uma superfície real (W/m <sup>2</sup> )
$f$	frequência (Hz)
$\mathcal{F}_{1-2}$	factor para transferência de calor por radiação, que quantifica quão bem a superfície 2 é vista pela superfície 1 ( $\mathcal{F}_{1-2} \leq 1$ )
<b>F</b>	vector de fluxo de calor (W/m <sup>2</sup> )
$F$	fluxo de calor (W/m <sup>2</sup> )
$F_n$	fluxo de calor na direcção da normal à superfície (W/m <sup>2</sup> )
$F_x$	fluxo de calor na direcção do eixo dos $x$ (W/m <sup>2</sup> )
$f_t$	somatório de todas as fontes de calor pré-calculadas (por exemplo em processador de correntes induzidas) e introduzidas no pré-processador (W/m <sup>3</sup> )
$F_{sk}$	factor de efeito pelicular, “ <i>skin effect</i> ” (adimensional)
$h_c$	coeficiente de convecção [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$h_{cf}$	coeficiente de convecção forçada [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$h_{cn}$	coeficiente de convecção natural [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$h_{c\ ij}$	coeficiente de convecção na aresta $ij$ (entre nodos $i$ e $j$ ) do elemento finito [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$h_r$	coeficiente de transferência de calor por radiação [W/(m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup> )]
$h'_r$	coeficiente devido a que a modelização do fenómeno da radiação térmica introduz no modelo térmico uma forte componente não linear [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$h'_{r\ ij}$	$h'_r$ para a aresta entre os nodos $i$ e $j$ [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$H$	intensidade do campo magnético (A/m)

$H_{\max}$	valor de pico (valor máximo no tempo) da intensidade do campo magnético sinusoidal (A/m)
$\mathbf{H}$	vector intensidade do campo magnético (A/m)
$\tilde{\mathbf{H}}$	fasor intensidade do campo magnético regime permanente sinusoidal (A/m)
$\mathbf{H}_e$	vector intensidade do campo magnético exterior (A/m). Usado apenas quando é necessário distinguir entre campo magnético exterior e interior
$\tilde{H}_z$	componente segundo $z$ do fasor $\tilde{\mathbf{H}}$ (A/m): $\tilde{H}_z = H_R + jH_I$
$H_R$	componente real do fasor $\tilde{H}_z$ (A/m)
$H_I$	componente imaginária do fasor $\tilde{H}_z$ (A/m)
$H_R^e$	valor médio, no elemento finito, de $H_R$ (A/m)
$H_I^e$	valor médio, no elemento finito, de $H_I$ (A/m)
$H_z =  \tilde{H}_z $	amplitude de $\tilde{H}_z$ (A/m): $H_z =  \tilde{H}_z  = \sqrt{H_R^2 + H_I^2}$
$\mathbf{H}_s$	vector intensidade do campo magnético na superfície da chapa magnética (A/m)
$\tilde{\mathbf{H}}_s$	fasor intensidade do campo magnético na superfície da chapa em regime permanente sinusoidal (A/m)
$\tilde{H}_s$	componente segundo $z$ do fasor $\tilde{\mathbf{H}}_s$ (A/m): $\tilde{H}_s = H_{sR} + jH_{sI}$
$H_{sR}$	componente real de $\tilde{H}_s$ (A/m)
$H_{sI}$	componente imaginária de $\tilde{H}_s$ (A/m)
$H_s =  \tilde{H}_s $	amplitude da intensidade do campo magnético à superfície da laminação, módulo de $\tilde{H}_s$ (A/m): $H_s =  \tilde{H}_s  = \sqrt{H_{sR}^2 + H_{sI}^2}$
$I$	corrente eléctrica (A)
$J$	densidade de corrente (A/m <sup>2</sup> )
$\mathbf{J}$	vector densidade de corrente induzida (A/m <sup>2</sup> )
$\tilde{\mathbf{J}}$	fasor densidade de corrente induzida (A/m <sup>2</sup> )
$\tilde{J}$	fasor densidade de corrente induzida no plano $xy$ (A/m <sup>2</sup> ), $\tilde{J} = J_R + jJ_I$ , cf. Fig. 3.2
$J_R$	componente real do fasor $\tilde{J}$ (A/m <sup>2</sup> )

$J_I$	componente imaginária do fasor $\tilde{J}$ (A/m <sup>2</sup> )
$\mathbf{J}_{ms}$	densidade de corrente de magnetização superficial (A/m)
$\mathbf{J}_m$	densidade de corrente de magnetização volúmica (A/m <sup>2</sup> )
$J_{\max}$	valor máximo de $\tilde{J}$ no período (em cada ponto, ou elemento finito), ou seja $J_{\max} =  \tilde{J}_{\max} $ (A/m <sup>2</sup> )
$J_{\max lin}$	valor linearizado de $J_{\max}$ (grandeza constante em cada elemento finito), normalmente utilizado em figuras do CADyPOS (A/m <sup>2</sup> )
$k$	condutividade térmica [W/(m·K)]
$k_e$	condutividade térmica equivalente [W/(m·K)]
$k_1, k_2, k_3$	constantes genéricas
$l$	profundidade da chapa ferromagnética laminada (m)
$l_{ij}$	comprimento da aresta $ij$ do elemento finito (m)
$\mathbf{m}$	vector momento dipolar magnético (A·m <sup>2</sup> )
$\mathbf{M}$	vector magnetização (A/m)
$m$	declive na equação de uma recta
$m^*$	declive na equação de uma recta calculado analiticamente (* é substituído pela letra da zona correspondente)
$m^*_{num}$	declive na equação de uma recta calculado a partir de dados numéricos
$\hat{\mathbf{n}}$	versor (vector unitário) normal à superfície, apontando para fora
$nelems$	número de elementos finitos
$N_{int}$	número de intervalos de integração, iguais, para integração numérica
$P$	densidade de potência de perdas total (W/m <sup>3</sup> )
$P_{class}$	densidade de potência de perdas clássicas por correntes induzidas. O mesmo que $P_{B2}$ (W/m <sup>3</sup> )
$P_{din}$	densidade de potência de perdas dinâmicas (W/m <sup>3</sup> )
$P_{diele}$	densidade de potência de perdas dieléctricas (W/m <sup>3</sup> )
$P_{exc}$	densidade de potência de perdas em excesso, “ <i>excess loss</i> ” (W/m <sup>3</sup> ): $P_{exc} = P_{din} - P_{class}$
$P_{hist}$	densidade de potência de perdas por histerese (W/m <sup>3</sup> )

- $P_{int}$  números de pontos (pares de valores) para a grandeza a integrar numericamente.  
 $P_{int}=N_{int}+1$
- $P_J$  densidade de potência de perdas por efeito de Joule, i.e. por correntes induzidas ( $W/m^3$ ). Consoante a forma de cálculo toma diferentes designações:
- *Genericamente:*

$P_{ref}$  uma densidade de potência de perdas por efeito de Joule, tomada como referência ( $W/m^3$ )
  - *No cálculo por expressões analíticas:*

$P_{B1}$  em função de  $B_{max}^a$ , considerando efeito pelicular

$P_{B2}$  em função de  $B_{max}^a$ , sem considerar efeito pelicular

$P_{H1}$  em função de  $H_s$ , considerando efeito pelicular

$P_{H2}$  em função de  $H_s$ , só para altas frequências

$P_{H3}$  em função de  $H_s$ , só para baixas frequências
  - *No cálculo por elementos finitos (cálculo numérico):*

$P_{J1D}$  perdas para o problema 1D, obtido por elementos finitos

$P_J$  perdas para o problema 2D

$P_{Jcor}$  perdas para o problema 2D após correcção do efeito de sobreposição (i.e. para serem as perdas para o  $B_{ref}$  pretendido). Quando não há perigo de confusão entre as perdas não corrigidas e as corrigidas, estas são designadas apenas por  $P_J$ .

$P_{Jd}$  valor médio das perdas por correntes induzidas ao longo da espessura  $d$
- $q$  densidade de fontes térmicas ( $W/m^3$ )
- $q_{conv}''$  fluxo de calor por convecção por unidade de superfície ( $W/m^2$ )
- $q_{conv}$  fluxo total de calor transmitido por convecção através de uma superfície (W)
- $q_{rad}''$  fluxo de calor por radiação por unidade de superfície, emitido pela superfície 1 e absorvido pela superfície 2 ( $W/m^2$ )
- $q_{rad}$  fluxo total de calor transmitido por radiação (W)
- $R$  comprimento do vector  $\mathbf{R}$  (m)

<b>R</b>	vector da origem de um sistema de coordenadas a um ponto do espaço (m)
$R^2$	coeficiente de determinação (“ <i>coefficient of determination</i> ”) ou “quadrado do coeficiente de correlação momentânea”. Indicador de 0 a 1 que revela a proximidade com que os valores estimados para a linha de tendência correspondem aos dados reais. Uma linha de tendência é mais fidedigna quando o respectivo valor de raiz quadrada, $R^2$ , é 1 ou está perto de 1
$S$	área de uma superfície ( $m^2$ )
$S$	área de uma secção, nomeadamente a secção recta da chapa magnética $S=wd$ ( $m^2$ ), cf. Fig. 3.1 e Fig. 3.2
$t$	tempo (s)
$T$	período (s): $T=1/f$
$T$	temperatura (K)
$T_a$	temperatura da superfície do meio ambiente, para transferência de calor por radiação (K)
$T_f$	temperatura média do fluido (também por vezes representada por $T_a$ , temperatura ambiente, ou por $T_\infty$ i.e. a temperatura no infinito) (K)
$T_{max}$	temperatura máxima obtida para cada malha e cada $k$ (K)
$T_{ref}$	temperatura de referência (K)
$T_s$	temperatura da superfície a considerar (K)
$tg(\delta)$	tangente de perdas do dieléctrico
$v_f$	velocidade do fluido (m/s)
$V$	volume ( $m^3$ )
$V$	potencial eléctrico ou tensão eléctrica (V)
$w$	largura da chapa ferromagnética laminada (m)

\* tem o significado usual em informática: “qualquer”. Por exemplo:  
 “\*.pos”: qualquer ficheiro com a extensão “pos”;  
 “PDTCM10k.\*”: ficheiro PDTCM10k com qualquer extensão.

## Com letras gregas

$\alpha$	constante de atenuação (Np/m)
$\alpha'$	coeficiente de expansão linear ( $K^{-1}$ )
$\beta$	constante de fase (rad/m)
$\beta$	factor de amortecimento (ou factor de sub-relaxação), com valor compreendido entre 0 e 1
$\chi_m$	susceptibilidade magnética (adimensional)
$\delta$	profundidade de penetração pelicular das correntes induzidas (m)
$\Delta_i$	área do elemento finito $i$ ( $m^2$ )
$\Delta_{cobre}$	área de cobre, normalmente de um condutor ( $m^2$ )
$\Delta T$	aumento da temperatura máxima, $T_{max}$ (K)
$\Delta T_{ref}$	aumento da temperatura para a barra e malha originais, tomado como referência, (K)
$\Delta \omega t$	amplitude de cada intervalo de integração numérica (rad). $\Delta \omega t = \frac{\pi / 2}{N_{int}}$
$\varepsilon$	permitividade eléctrica (F/m)
$\varepsilon$	emissividade, com $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Fornece uma medida da eficiência da emissão de energia de uma superfície, por radiação, comparativamente a um “corpo negro”.
$\phi$	ângulo de fase (rad)
$\phi$	fluxo magnético (Wb)
$\phi_R^e$	valor médio, no elemento finito, da componente real do fasor fluxo magnético (Wb)
$\phi_I^e$	valor médio, no elemento finito, da componente imaginária do fasor fluxo magnético (Wb)
$\phi_{max}^a$	valor médio (do valor máximo) do fluxo na chapa com área da secção recta $S$ (Wb)
$\phi_h$	fluxo de calor (W)
$\phi_h/l$	fluxo de calor por metro de profundidade (W/m), problemas 2D
$\phi_{h\ cond}$	fluxo de calor por condução (W)

$\Phi_{c\ ij}$	fluxo de calor imposto como condição de fronteira na aresta $ij$ de um elemento finito ( $\text{W/m}^2$ )
$\hat{\gamma}$	constante de propagação $\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$
$\lambda$	quociente entre a espessura da chapa e a profundidade de penetração pelicular $\lambda = d/\delta$ (adimensional)
$\mu$	permeabilidade magnética (H/m)
$\mu_0$	permeabilidade magnética do vázio (H/m), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\mu_r$	permeabilidade magnética relativa (adimensional): $\mu = \mu_0 \mu_r$
$\tilde{\mu}_e$	permeabilidade magnética complexa equivalente (H/m)
$\mu_e$	valor da permeabilidade magnética complexa equivalente (H/m): $\mu_e =  \tilde{\mu}_e $
$\mu^e$	permeabilidade magnética no elemento finito (H/m)
$\nu$	relutividade magnética, inverso da permeabilidade magnética (m/H): $\nu = 1/\mu$
$\nu_e$	relutividade magnética complexa equivalente, inverso da permeabilidade magnética equivalente, na zona linear de funcionamento (m/H): $\nu_e = 1/\mu_e$
$\nu_{eR}$	componente real da relutividade magnética complexa equivalente (m/H)
$\nu_{eI}$	componente imaginária da relutividade magnética complexa equivalente (m/H)
$\pi$	“pi”: 3,14159265358979...
$\rho_c$	densidade volúmica de carga eléctrica ( $\text{C/m}^3$ )
$\rho$	densidade específica da chapa magnética ( $\text{kg/m}^3$ )
$\rho_0$	resistividade eléctrica à temperatura de referência $T_0$ ( $\Omega \cdot \text{m}$ )
$\sigma$	condutividade eléctrica (S/m)
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann (para transferência de calor por radiação), igual a $5,669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
$\omega$	frequência angular, podendo também ser designada por velocidade angular ou pulsação. $\omega = 2\pi f$ (rad/s)
$\Psi$	fluxo total ligado com um enrolamento (Wb); Para um enrolamento com $N$ espiras, $\Psi \approx N\phi$

## Operadores matemáticos

$\nabla$	operador nabla
$\nabla \times$	operador rotacional
$\nabla \cdot$	operador divergência
$j$	operador número imaginário, $j = \sqrt{-1}$
$\propto$	“proporcional”
$\infty$	“Infinito”
$\approx$	“aproximadamente igual”
$:=$	“toma o valor de”

## Programas de elementos finitos

**CADdyTERM:** Um pacote de *software* para simulação e análise térmica em regime permanente e transitório de dispositivos electromagnéticos, que partilha o pré-processador e o pós-processador com o **CADdyMAG** (é/era o gémeo térmico do **CADdyMAG**). Corre em VAX/VMS pelo que praticamente já não é utilizado, visto que o processador original para regime permanente, **TP21GN\_ALFAS**, já foi convertido para PC/*Windows* e integrado no **CADdyMAG**, como descrito no capítulo 10.

**CADdyMAG:** Um pacote de *software*, i.e., um conjunto de programas para o cálculo de campos electromagnéticos e (agora também) térmicos por elementos finitos, desenvolvido no Lab. de CAD/CAE do ISR – Instituto de Sistemas e Robótica, do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, da Universidade de Coimbra. É constituído por diversos programas (um pré-processador, um programa de interface entre os pré-processador e os processadores, diversos processadores e um pós-processador), tal como se descreve de seguida.

**CADdyPRE:** Pré-processador do **CADdyMAG**. Permite criar a malha de elementos finitos, em modo manual e semi-automático, para problemas electromagnéticos e térmicos. Actualmente para 20000 nodos.

**CADyEXE** (por vezes compilado com o nome **PREPRO**): Programa de interface entre o pré-processador (**CADyPRE**) e os processadores. Permite introduzir o valor das propriedades, das condições de fronteira e das fontes. Apenas para problemas electromagnéticos (os térmicos utilizam outros ficheiros). Actualmente para 5200 nodos. Funciona em modo manual e em modo *batch* (automaticamente, lendo as instruções de um ficheiro **\*.pee**).

## Processadores

O **CADdyMAG** tem diversos processadores para elementos finitos triangulares de primeira ordem (i.e., cada triangulo tem três nodos), a duas dimensões. Cada processador é específico para um ou vários tipos de modelos físicos. Todos eles podem funcionar:

- manualmente, i.e. com o utilizador introduzindo o nome do ficheiro de entrada, **\*.pro**, e do ficheiro de saída, **\*.pos** (bem como, se necessário, outros dados, como a frequência para os modelos magnetodinâmicos, e outros para os modelos não lineares); ou
- em modo *batch*, lendo esses dados do ficheiro **\*.peo**, ficando o resultado do processamento automático armazenado num ficheiro **\*.pso**.

**CARTyPRO**: Processador em coordenadas cartesianas, linear, de Poisson, de primeira ordem. Para problemas electrostáticos, electrocondutivos, magnetostáticos (e de condução térmica). Actualmente para 20000 nodos. Funciona em modo *batch*.

**CARTyTERB**: Processador em coordenadas cartesianas, linear, térmico com condução e convecção, de primeira ordem. Actualmente para 20000 nodos.

**CILyPRO**: Processador em coordenadas cilíndricas, linear, de Poisson, de primeira ordem. Para problemas electrostáticos, electrocondutivos e de condução térmica. Actualmente para 20000 nodos. Funciona em modo *batch*.

**EDDyPROC**: Processador em coordenadas cartesianas, linear, de correntes induzidas, de primeira ordem. Para problemas magnetodinâmicos, ou seja de correntes induzidas. Actualmente para 20000 nodos. Funciona em modo *batch*.

**EDDyNLIN:** Processador em coordenadas cartesianas, não linear (tem em conta a saturação magnética), de correntes induzidas, de primeira ordem. Para problemas magnetodinâmicos (de correntes induzidas) e materiais ferromagnéticos que podem estar na saturação. Actualmente para 20000 nodos. Lê as curvas de magnetização a partir do ficheiro **MAGNETIZ.BH**. Funciona em modo *batch*.

**PMAGNLIN:** Processador em coordenadas cartesianas, não linear (tem em conta a saturação magnética), de Poisson, de primeira ordem. Para problemas magnetostáticos e materiais ferromagnéticos que podem estar na saturação. Actualmente para 20000 nodos. Lê as curvas de magnetização a partir do ficheiro **MAGNETIZ.BH**. Funciona em modo *batch*.

**TP21GN\_ALFAS:** processador térmico original do **CADdyTERM**, para regime permanente (sem radiação), correndo em num computador VAX, em VMS. Convertido para PC/*Windows* e expandido, deu origem ao **CARTyTERB**.

**CADyPOS:** Pós-processador de elementos finitos para problemas 2D em coordenadas cartesianas ou cilíndricas. Permite visualizar, de forma gráfica, os resultados obtidos pelos processadores e calcular outras grandezas a partir desses resultados, nomeadamente energias, coenergias, correntes induzidas, campos eléctricos, campo magnéticos, fluxos de calor, forças, binários, etc. Inicialmente para 2000 nodos, actualmente para 2200 nodos. Funciona em modo *batch*. Em desenvolvimento para aumento do número de nodos e conversão definitiva para *Windows*.

**CalcBHeq:** Programa desenvolvido no âmbito dos trabalhos de doutoramento, para cálculo de curvas  $B-H$  efectivas com diversas formulações<sup>4</sup>, tal como descrito em “7.5 - Implementação e resultados das outras formulações para curvas  $B-H$  efectivas”, página 181.

## Ficheiros de dados com nomes próprios e extensões de ficheiros

Os ficheiros de dados e de resultados, utilizados pelo **CADdyMAG**, são formatados como texto, em ASCII. Por isso, podem ser lidos e/ou editados com um vulgar editor de texto. Segue-se uma descrição desses ficheiros.

---

<sup>4</sup> Teve uma primeira versão, designada por **CalculaBHequiv** que apenas considerava uma formulação, conforme exposto em “7.2 Curvas  $B-H$  efectivas e procedimento para a sua obtenção”, e que foi entretanto abandonada porque está contida no programa **CalcBHeq**.

### Ficheiros “normais” de dados e resultados do CADDyMAG

- \*.pre:** ficheiros de dados criados pelo pré-processador, **CADyPRE**. Estes ficheiros contêm a descrição da malha de elementos finitos: um cabeçalho com dados gerais, uma lista de nodos (com as suas coordenadas e as letras atribuídas às condições de fronteira de Dirichlet), e uma lista de elementos (indicando quais os nodos que constituem cada elemento finito e a etiqueta atribuída a cada elemento finito). No caso de problemas térmicos, inclui ainda uma lista das fronteiras onde há convecção e, se houver, radiação.
- \*.pro:** ficheiros de dados, criados pelo **CADyEXE**. Resultam de uma cópia do ficheiro **\*.pre**, criada pelo **CADyEXE**, ao qual este acrescenta os valores numéricos que caracterizam o problema: os valores das condições de fronteira de Dirichlet (nos nodos em que existem), os valores das propriedades físicas dos materiais e das fontes para cada elemento finito da malha. Estes valores podem ser introduzidos no **CADyEXE** manualmente, pelo utilizador, ou automaticamente, em modo *batch*, através de leitura num ficheiro **\*.pee** (neste caso o resultado da entrada de dados em modo *batch* é registado num ficheiro **\*.pse**).
- \*.pos:** ficheiros de resultados, criados pelo processador adequado ao problema. O processador cria uma cópia do ficheiro **\*.pro**, ao qual acrescenta a solução do problema: o potencial (tensão eléctrica,  $V$ , vector potencial magnético,  $\mathbf{A}$ , ou temperatura,  $T$ ) em todos os nodos onde não era conhecido. Os processadores podem funcionar manualmente, com os dados introduzidos pelo utilizador, ou automaticamente em modo *batch*, através de leitura num ficheiro **\*.peo** (neste caso o resultado da introdução em modo *batch* é registado num ficheiro **\*.pso**).

**MAGNETIZ.BH:** ficheiro que contém uma base de dados de curvas de magnetização de diversos materiais. Pode ser alterado por um editor de texto que grave em formato ASCII (texto). Necessário para os problemas magnéticos não lineares (magnetostáticos e magnetodinâmicos), pois o ficheiro de dados que vem do pré-processador contém o nome do material, e não o valor da relutividade magnética em cada elemento finito, uma vez que ainda não se conhece o valor da relutividade magnética a que o material vai funcionar.

## Ficheiros de entrada de dados e registo de resultados do CADyMAG em modo *batch*

- \*.pee**: ficheiro que permite fazer a entrada de dados em modo *batch* no **CADyEXE**. Este ficheiro faz com que o **CADyEXE** abra a(s) malha(s) **\*.pre** nele indicados, leia os valores necessários do ficheiro **\*.pee** e crie os ficheiros **\*.pro** a serem processados. O resultado desta introdução de dados, para futura consulta e verificação é guardado num ficheiro **\*.pse** (cf. Fig. 7.16, na página 173).
- \*.pse**: ficheiro de saída do **CADyEXE** em modo *batch*. Normalmente com o mesmo nome que o ficheiro **\*.pee** que lhe deu origem, guarda o resultado da introdução de dados em modo *batch*, para futura consulta e verificação.
- \*.peo**: ficheiro de entrada no processador para modo *batch*. Contém a lista dos ficheiros **\*.pro** a processar, as instruções para o processador respectivo e o nome dos ficheiros **\*.pos** de saída (cf. Fig. 7.18, exemplo para problema magnetodinâmico não linear).
- \*.pso**: ficheiro de saída do processador em modo *batch*. Normalmente, com o mesmo nome que o ficheiro **\*.peo** que lhe deu origem, guarda o resultado do processamento, em modo *batch*, dos modelos indicados nesse ficheiro **\*.peo**, em modo *batch*, para futura consulta e verificação (cf. Fig. 7.19).
- \*.pes**: ficheiro de entrada no pós-processador **CADyPOS** em modo *batch*. Contém a lista dos ficheiros **\*.pos** a serem pós-processados de acordo com as instruções indicadas no ficheiro **com\*.txt**. O cabeçalho do ficheiro **\*.pes**, é depois copiado para o início do ficheiro de saída de resultados, **\*.pss** (cf. Fig. 11.20, página 292).
- \*.pss**: ficheiro de saída de resultados dos pós-processamentos efectuados no **CADyPOS** em modo *batch*, segundo a sequência de comandos indicados no ficheiro de comandos **com\*.txt** (cf. Fig. 8.8, página 206, e Fig. 11.21, página 293).
- com\*.txt**: ficheiro de comandos para pós-processamento no **CADyPOS** em modo *batch*. Contém informações acerca do tipo de modelo a pós-processar e a lista dos comandos a executar sobre os ficheiros **\*.pos**, cujos nomes constam da lista do ficheiro **\*.pes** indicado ao **CADyPOS** (cf. Fig. 8.7, página 205, Fig. 11.12, página 284, e Fig. 11.17).
- \*.BHe**: ficheiro auxiliar em modo texto (i.e. ASCII), onde é gravada a curva *B-H* efectiva ou equivalente resultante, *B-H<sub>eq</sub>*. As curvas são depois importadas para o ficheiro **MAGNETIZ.BH** que tem formato semelhante.

## **Ficheiros de dados para o(s) processador(es) térmico(s) do CADdyMAG (e também do CADdyTERM)**

**materiais.pro:** ficheiro com valores das propriedades dos materiais, cf. Fig. 10.5, página 236.

**densidades.pro:** ficheiro com valores das densidades de corrente, cf. Fig. 10.6.

**fluidos.pro:** ficheiro com valores dos coeficientes de convecção (e radiação) e temperaturas dos fluidos, cf. Fig. 10.7.

**fronteira.pro:** ficheiro com valores das condições de fronteira de Dirichlet (potenciais fixos, i.e. temperaturas conhecidas), cf. Fig. 10.8.

**\*.ter:** só para processadores térmicos em VAX/VMS. Ficheiros de dados criados pelo pré-processador, **CADyPRE**, aos quais eram acrescentadas (num outro pré-processador só para problemas térmicos, já não utilizado) a indicação das arestas dos elementos finitos onde havia convecção e, se houvesse, radiação. Actualmente, os ficheiros **\*.pre**, gerados no pré-processador **CADyPRE**, já incluem as arestas de convecção e/ou radiação, se existirem, pelo que a extensão **\*.ter** já é pouco utilizada.

## **Variáveis e estruturas de dados do pacote de programa de elementos finitos**

*max\_pts* o número máximo de nodos permitidos para o modelo

*n\_ptos* número de pontos do problema concreto

*n\_pot\_livres* o número de potenciais livres (i.e. o número de nodos onde o potencial é desconhecido)

*b<sub>i</sub>, b<sub>j</sub>, c<sub>i</sub>, c<sub>j</sub>*: coeficientes para o cálculo de *S<sub>ij</sub>*, para o par de nodos *i* e *j*.

$\Delta$  área do elemento finito (m<sup>2</sup>)

### **Para o processador térmico, sistema global de equações**

[**M**] matriz relativa às capacidades térmicas

[**T'**] vector das derivadas das temperaturas nodais em ordem ao tempo

[**S**] matriz relativa às condutividades térmicas

[**H**] matriz referente à transferência térmica por convecção

- [**R**] matriz referente à transferência térmica por radiação
- [**G**] matriz de dependência da resistividade com a temperatura
- [**T**] vector das temperaturas nodais,  $T$
- [**J**] vector das perdas por efeito de Joule nos condutores, parte independente da temperatura
- [**F**] vector das fontes térmicas por perdas no ferro (e se existirem, também dieléctricas e mecânicas); pré-calculadas, normalmente num processador de correntes induzidas
- [**P**] vector referente à transferência térmica por convecção (condição de fronteira)
- [**E**] vector referente à transferência térmica por radiação (condição de fronteira)
- [**Q**] vector dos fluxos de calor impostos como condição fronteira

**Para o processador térmico, para cada elemento finito**

- [**M<sup>e</sup>**] matriz (3×3) de coeficientes relativa à capacidade térmica
- [**T'<sup>e</sup>**] vector (3×1) das derivadas das temperaturas nodais em ordem ao tempo
- [**S<sup>e</sup>**] matriz (3×3) de coeficientes relativa à condução
- [**H<sup>e</sup>**] matriz (3×3) de coeficientes relativa à convecção
- [**R<sup>e</sup>**] matriz (3×3) de coeficientes relativa à radiação
- [**G<sup>e</sup>**] matriz (3×1) de coeficientes relativa à dependência da resistividade com a temperatura
- [**T<sup>e</sup>**] vector (3×1) das temperaturas nos nodos do elemento (incógnita)
- [**J<sup>e</sup>**] vector (3×1) das perdas de Joule nos condutores, parte independente da temperatura
- [**F<sup>e</sup>**] vector (3×1) das fontes térmicas constantes (independentes da temperatura), pré-calculadas
- [**P<sup>e</sup>**] vector (3×1) das fontes de convecção
- [**Q<sup>e</sup>**] vector (3×1) dos fluxos de calor impostos como condição de fronteira

## Para o processador térmico, para tirar partido da esparsidade da matriz

- $n_{Adif0}$  número de coeficientes diferentes de zero
- [**S**<sub>11</sub>] sub-matriz dos coeficientes correspondentes aos potenciais livres, de dimensão  $(n_{pot\_livres} \times n_{pot\_livres})$
- [**S**<sub>12</sub>] e [**S**<sub>21</sub>] sub-matrizes dos coeficientes correspondentes à ligação entre os nodos com potencial livre aos nodos com potencial fixo (i.e. entre os nodos com potencial desconhecido e o nodos com potencial conhecido), de dimensões  $[(n_{ptos} - n_{pot\_livres}) \times n_{pot\_livres}]$  e  $[n_{pot\_livres} \times (n_{ptos} - n_{pot\_livres})]$ , respectivamente. Note-se que [**S**<sub>21</sub>]=[**S**<sub>12</sub>]<sup>T</sup>
- [**S**<sub>22</sub>] sub-matriz dos coeficientes correspondentes aos potenciais fixos ou conhecidos, de dimensão  $[(n_{ptos} - n_{pot\_livres}) \times (n_{ptos} - n_{pot\_livres})]$
- [**T**<sub>desc</sub>] sub-matriz vector dos potenciais livres, i.e. as temperaturas desconhecidas, de dimensão  $n_{pot\_livres}$
- [**T**<sub>conh</sub>] sub-matriz vector dos potenciais fixos, i.e. as temperaturas conhecidas, de dimensão  $n_{pot\_livres}$
- [**F**<sub>desc</sub>] sub-matriz vector das fontes correspondentes aos potenciais livres (e incluindo as condições de fronteira por convecção), de dimensão  $n_{pot\_livres}$ .
- [**F**<sub>conh</sub>] sub-matriz vector das fontes (e incluindo as condições de fronteira por convecção) correspondentes aos potenciais fixos, i.e. as temperaturas conhecidas, de dimensão  $n_{pot\_livres}$
- [**SV**] vector (matriz coluna) onde só se guardam os elementos da matriz de coeficientes ([**S**] ou [**S**<sub>11</sub>]) que estiverem entre o primeiro elemento diferente de zero e a diagonal principal: armazenamento pelo método de perfil. Para se aceder aos elementos da matriz armazenados no vector de coeficientes [**SV**], são ainda necessários dois vectores auxiliares (matrizes colunas): [**LEFT**] e [**ILINHA**].
- [**LEFT**] vector que guarda o número da coluna do primeiro elemento diferente de zero de cada linha da matriz de coeficientes. Associado a [**SV**]
- [**ILINHA**] vector que contém o índice de um elemento da matriz de coeficientes no vector de coeficientes [**SV**]

- [S<sub>esp</sub>]** vector com dimensão *nAdif0* que apenas guarda os coeficientes diferentes de zero da matriz dos coeficientes. Utiliza também dois vectores auxiliares **[jrow]** e **[jcol]**. **[S<sub>esp</sub>]** tem dimensão *nAdif0*, contendo números reais com dupla precisão.
- [jrow]** vector auxiliar, de inteiros, com dimensão *nAdif0*. Indica a linha da posição do coeficiente na matriz original **[S]**, de cada um dos coeficientes armazenados em **[S<sub>esp</sub>]**.
- [jcol]** vector auxiliar, de inteiros, com dimensão *nAdif0*. Indica a coluna da posição do coeficiente na matriz original **[S]**, de cada um dos coeficientes armazenados em **[S<sub>esp</sub>]**.



# 1 MOTIVAÇÃO, ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

## 1.1 Motivação

A presente dissertação intitula-se “**Perdas por Correntes Induzidas em Chapas Ferromagnéticas**”.

No projecto de dispositivos electromagnéticos, o estudo das **perdas** é muito importante pois estão presentes no funcionamento de qualquer máquina, aparelho ou dispositivo. Com efeito, sabendo que a energia que é fornecida a um sistema é sempre superior ao trabalho útil que ele produz, e que, como declarou Lavoisier, “*na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma*”, esta diferença tem que se transformar em alguma coisa: “perdas”. E estas, em última análise, traduzem-se em calor. No entanto, a própria definição de “perdas” depende do objectivo a atingir e, por isso, aquilo que numa situação é considerado “perdas”, noutra situação ou dispositivo poderá ser considerado “trabalho útil”.

De uma forma geral, nos dispositivos sobre os quais se debruça a engenharia electro-técnica, e especialmente nas máquinas eléctricas, poderemos considerar a existência de perdas mecânicas (por atritos e ventilação), perdas eléctricas (por efeito de Joule nos enrolamentos) e perdas magnéticas (no circuito magnético, por efeito de Joule por correntes induzidas, por histerese e as chamadas perdas extraviadas ou “*excess loss*”).

É importante referir que o estudo de cada uma das componentes das perdas pode justificar, e tem justificado só por si, várias dissertações de doutoramento, sendo um tema actual de estudo, apresentação em conferências internacionais e publicação nas mais conceituadas revistas da especialidade<sup>5</sup>. A visão com que são abordadas depende do objectivo, da escala de tempo pretendida, e da dimensão dos objectos de estudo (desde o nível microscópico ao macroscópico). Assim, há actualmente bastante investigação<sup>6</sup> na área do micromagnetismo (“*micromagnetics*”) e da dinâmica da magnetização não linear (“*nonlinear magnetization dynamics*”), para tempos inferiores a nanossegundos, comandada pelas

---

<sup>5</sup> Basta ver por exemplo as centenas de artigos publicados no “*IEEE Transactions on Magnetics*” nos últimos anos sobre perdas magnéticas, perdas por histerese e, claro, perdas por correntes induzidas.

<sup>6</sup> Tal como apresentado por Giorgio Bertotti num “*Tutorial Course*” e na sessão de discussão no *CEFC 2002* [Bertotti2002] [Torre2002], onde o autor desta dissertação esteve presente.

necessidades da gravação magnética (cada vez maior densidade e com maiores velocidades). Há também bastante interesse em abordar a questão das perdas ao nível do modelo de elementos finitos, integrando directamente as correntes induzidas na formulação<sup>7</sup>. Uma outra possibilidade, é considerar as perdas sobretudo a nível de pós-processamento, procurando uma solução mais leve e mais rápida do ponto de vista computacional, quando se está, por exemplo, interessado sobretudo no cálculo das perdas para estudar os seus efeitos térmicos. A nossa procura de modelos para o cálculo de perdas por correntes induzidas enquadra-se sobretudo nesta última abordagem, até porque, como se verá, para frequências maiores que a frequência industrial, a importância relativa das perdas por correntes induzidas aumenta.

As **correntes induzidas** surgem sempre que existem materiais condutores deslocando-se num campo magnético (e relativamente a ele), ou quando os dispositivos, contendo esses materiais condutores, são alimentados por fontes de tensão ou corrente variável<sup>8</sup>, pois em ambos os casos, o fluxo magnético é variável em relação aos materiais condutores.

Refira-se também, que o cálculo das correntes induzidas é um assunto que vai bastante para além da questão das perdas que elas geram. Com efeito, o cálculo e previsão das correntes induzidas, é um assunto de grande importância no projecto electromagnético de máquinas e outros dispositivos eléctricos, uma vez que têm grande influência no rendimento e na potência nominal desses equipamentos:

- Quer sejam indesejáveis, pois produzem perdas, aquecimento e blindagem electromagnética, sendo por isso importante minimizá-las;
- Quer sejam fundamentais para o próprio funcionamento dos dispositivos, i.e., para a geração e conversão de força ou potência, como é o caso dos motores de indução, dos contadores de energia eléctrica (máquinas de disco de Faraday), dos freios e dinamómetros electromagnéticos [Chalmers2003], do aquecimento e fornos por indução electromagnética [Kawase2000] [Pascal2003], da levitação magnética, da propulsão electromagnética (“*electromagnetic launching*”) e da biomedicina, para citar apenas algumas das aplicações<sup>9</sup>.

---

<sup>7</sup> Alguns dos autores que se têm debruçado mais sobre isto nos últimos tempos são Alain Bossavit, Patrick Dular, Luc Dupré, Johan Gyselinck e Oszkár Biró, para citar apenas alguns.

<sup>8</sup> Quer se trate de alimentação alternada sinusoidal ou de outras formas de onda, periódicas ou não, por exemplo, quando se utilizam variadores de frequência baseados em PWMs.

<sup>9</sup> Mais aplicações das correntes induzidas podem ser encontradas por exemplo em [Krawczyk1993] pp.1582-1585 e [Ida2000] pp.666-673.

Quanto às **chapas ferromagnéticas**, elas são constituintes e partes fundamentais da grande maioria das máquinas eléctricas, nomeadamente das grandes responsáveis pela produção de força motriz, os motores de indução, e da geração de energia eléctrica, os alternadores.

A temática é pois de enorme importância para o desenvolvimento de dispositivos electromagnéticos de elevada eficiência.

Para além dos aspectos já mencionados, havia também outros objectivos importantes, nomeadamente a **actualização do *software*** de elementos finitos utilizado, o **CADdyMAG**, bem como a **inclusão dos fenómenos térmicos** neste, o que implicou que o autor teve que ganhar um **conhecimento** mais aprofundado dos **aspectos concretos da implementação** do método dos elementos finitos no *software* e dos **procedimentos** a utilizar para o **cálculo numérico das grandezas**.

É de referir ainda, que todo o trabalho apresentado nesta dissertação se enquadra genericamente no âmbito das máquinas eléctricas e dentro das “baixas frequências”, i.e., em que se podem considerar as correntes de deslocamento eléctricas desprezáveis face às correntes conduzidas.

## 1.2 Estrutura

De uma forma resumida, pode dizer-se que a dissertação aborda principalmente o tema das perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas e a sua quantificação sob a forma de fontes de calor, resultando no aquecimento de dispositivos electromagnéticos. A metodologia numérica, utilizada para a análise e simulação dos fenómenos electromagnéticos e térmicos é a do método dos elementos finitos.

A presente dissertação é então constituída por três partes: a primeira, relacionada com o cálculo propriamente dito das perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas, uma segunda, relativa à inclusão dos fenómenos térmicos e uma terceira, relacionada com as alterações que foi necessário efectuar ao pacote de programas de elementos finitos **CADdyMAG** para poder efectuar o trabalho desenvolvido. De referir que algumas destas alterações ao **CADdyMAG** vão sendo explicadas durante o desenvolvimento da dissertação,

quando tal é oportuno, sendo as restantes apresentadas brevemente no final, no capítulo “12 OUTROS DESENVOLVIMENTOS: MELHORIAS AO *SOFTWARE* DE ELEMENTOS FINITOS, CADdyMAG”

Após a apresentação da simbologia, notação e unidades utilizadas, no capítulo 1 é feita a presente exposição acerca da dissertação e as suas contribuições originais. No capítulo 2, é feita uma pequena introdução aos campos magnéticos, aos materiais magnéticos, ao mecanismo físico das perdas nos materiais ferromagnéticos e a algumas formas comuns de as calcular. No capítulo 3, é abordado o cálculo de perdas por correntes induzidas considerando o efeito pelicular e a influência da largura da chapa. São feitas as apresentações do problema, das expressões analíticas existentes para o tentar resolver a 1D (e comparando-as entre si), e a formulação e metodologia para calcular, pelo Método dos Elementos Finitos, as correntes induzidas e as perdas resultantes.

No capítulo 4, entra-se então no cálculo numérico pelo método dos elementos finitos. Para uma chapa ferromagnética com largura limitada é efectuado o cálculo por elementos finitos das perdas por correntes induzidas em função da frequência, considerando diversas espessuras, larguras e frequências, sendo o problema resolvido para 1D e 2D. Os resultados numéricos a 1D são comparados com dados experimentais de fabricantes e de outros autores, sendo também feitas diversas considerações acerca do significado físico dos resultados obtidos. São ainda comparados com as expressões analíticas para 1D, tendo-se assim validado a metodologia utilizada e os resultados obtidos. Os resultados numéricos a 2D são então organizados para os tornar independentes dos casos concretos estudados, de forma a tentar obter resultados genéricos. Concluiu-se que para isso é conveniente apresentar os resultados das perdas sob a forma do quociente entre as perdas numéricas a 2D e as analíticas a 1D, em função da relação entre a espessura da chapa e a profundidade de penetração do efeito pelicular, e da relação entre a largura e espessura da chapa.

No capítulo 5, é feita uma extensão dos resultados obtidos no capítulo anterior, tendo resultado um modelo analítico extraído dos resultados numéricos. No entanto, este modelo sofre de um “fenómeno de sobreposição”, pelo que foi aplicado um factor de correcção do fenómeno de sobreposição. Resulta assim outro gráfico.

No capítulo 6, estendem-se os resultados do capítulo 5 para frequências mais elevadas, sendo também testadas outras chapas ferromagnéticas. Da análise dos resultados, chegou-se à conclusão de que estes são válidos para qualquer chapa, tendo assim sido desenvolvido um

novo gráfico genérico e um modelo analítico derivado das soluções numéricas por elementos finitos. O gráfico e/ou o modelo permitem um cálculo fácil das perdas por correntes induzidas, para qualquer chapa de material ferromagnético macio, isotrópico e não hysterético, na zona de funcionamento linear, com qualquer largura e espessura, nas gamas de frequências consideradas.

No capítulo 7, é feita a tentativa de extensão dos resultados anteriores também para regime saturado, utilizando curvas  $B(H)$  equivalentes, para comparar os nossos resultados no domínio da frequência com os resultados no domínio do tempo, obtidos pelo Prof. Dr. Johan Gyselinck, actualmente na *Université Libre de Bruxelles*, Bélgica. Concluiu-se que é possível utilizar estas curvas equivalentes, mas só se o efeito pelicular não for significativo. Em colaboração com o Prof. Dr. Johan Gyselinck, foi ainda testado o método do Balanço Harmónico, com melhores resultados. No entanto, por sugestão deste, deixou-se um pouco de lado os objectivos iniciais do capítulo 7, tendo-se optado por estudar a aplicação dos resultados numéricos a 2D (i.e. do problema da chapa estreita) a técnicas de homogeneização, tal como se apresenta no capítulo 8. Obtiveram-se alguns resultados interessantes, embora o objectivo final da implementação em técnicas de homogeneização ainda não tenha sido atingido.

Até ao capítulo 8, foi abordada a questão do cálculo das perdas no ferro, especialmente a consideração das perdas por correntes induzidas, em chapas estreitas e considerando efeito pelicular. No entanto, um dos principais objectivos desse estudo é a sua cada vez melhor inclusão na consideração dos fenómenos térmicos em máquinas eléctricas. Por essa razão, começaram-se a abordar também já as questões térmicas e a sua modelação por elementos finitos.

Assim, no capítulo 9, é feita uma introdução aos fenómenos térmicos do ponto de vista físico e é exposta a formulação para a resolução de problemas térmicos através da aplicação do método dos elementos finitos.

No capítulo 10, é mostrada a conversão efectuada do nosso processador térmico original do ambiente VAX/VMS para PC/*Windows*, bem como os diversos testes e optimizações efectuadas. O objectivo foi dotar o **CADdyMAG** também de um processador térmico funcionando em PC/*Windows*, mais rápido e com muito maiores capacidades de processamento. É também apresentado o problema tomado como referência e que serviu para verificação das soluções.

No capítulo 11, é exposta a metodologia desenvolvida (utilizando já o novo processador, **CARTyTERB**) para o cálculo de condutividades térmicas equivalentes, usando malhas grosseiras, para barras de máquinas eléctricas com diversos materiais isolantes. Esta homogeneização térmica permitirá resolver problemas térmicos muito mais rapidamente e com muito menor número de nodos do que modelando todos os materiais, ou, o que será ainda mais útil, poder resolver problemas completos considerando correctamente as barras utilizadas. São também apresentadas algumas considerações à cerca do cálculo do fluxo de calor por elementos finitos e dos cuidados a ter nesse cálculo.

No capítulo 12, são mostrados, de forma resumida, alguns outros desenvolvimentos efectuados, concretamente as melhorias ao *software* de elementos finitos.

No capítulo 13, são enunciadas as conclusões gerais e os trabalhos futuros possíveis.

No capítulo 14, é apresentada a lista das referências bibliográficas utilizadas, bem como a listagem dos artigos resultantes do presente trabalho e apresentados em conferências internacionais da especialidade.

Finalmente, nos Anexos, apresentam-se no ANEXO 1, o índice das figuras, no ANEXO 2, o índice das tabelas e no ANEXO 3, uma explicação mais detalhada à cerca da utilização da esparsidade, banda e zeros estruturais da matriz de coeficientes, para optimização da utilização do método dos elementos finitos. No ANEXO 4, apresentam-se as correspondências entre designações da chapa ferromagnética para diversas normas internacionais (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS), bem como entre normas actuais e mais antigas, sendo também referido o título das normas relevantes.

Passa-se de seguida a referir alguns aspectos formais importantes relativos à da escrita da dissertação.

Na elaboração deste documento, porque o tema é difícil e talvez por vezes um pouco árido, teve-se uma preocupação com a clareza de exposição do trabalho realizado, por forma a deixar bem registado o percurso, as formulações, os métodos utilizados e os principais resultados obtidos. Espera-se assim que a dissertação possa servir de base à continuação deste trabalho, sem ter que repetir o percurso efectuado e de forma a esclarecer bem as dúvidas que foram surgindo, os cuidados a ter e o que se pode esperar dos métodos utilizados. Esta exposição poderá, por vezes, levar a um certo nível de detalhe que torne a leitura um pouco longa.

Houve também uma certa preocupação didáctica, pelo que se fazem algumas introduções, nomeadamente aos fenómenos e materiais magnéticos e aos fenómenos térmicos, que poderiam, talvez, ter sido mais resumidas. No entanto, pareceu útil ao autor expô-las assim.

Para facilitar a consulta da dissertação, bem como das fontes bibliográficas, foram tidos em conta os seguintes aspectos:

- Em relação à citação das referências bibliográficas, optou-se por indicar o nome do primeiro autor seguido do ano da referência, a fim de ser mais fácil identificá-las mentalmente, sem ter que recorrer à listagem das referências bibliográficas. Para além disso, indicou-se também o número das páginas da referência em questão, sempre que esta é longa, caso dos livros e alguns artigos mais extensos. Torna-se assim bastante mais fácil ao leitor encontrar o que é referenciado: por exemplo, é muito mais fácil localizar a equação das perdas por correntes induzidas sem efeito pelicular com “[Bozorth1993] pp.778”, do que fazendo referência apenas a “[Bozorth1993]” visto que se trata de uma obra com 968 páginas.
- Como em diversas partes do texto são utilizadas em simultâneo diversas fontes bibliográficas, as referências são por vezes repetidas (até na mesma página), nomeadamente quando se comparam formulações ou metodologias de diferentes autores, para ficar bem claro “quem diz o quê”, a fim de facilitar trabalhos e pesquisas futuras, bem como a verificação das fontes em caso de dúvidas ou necessidade de esclarecimento adicionais.
- Há por vezes uma certa redundância na apresentação de alguns conceitos e ideias, ou a repetição da definição de alguns símbolos, quando reaparecem no texto afastados da primeira definição, pois devido à extensão da dissertação, é natural que já não se tenha presente a menção anterior.
- Quando nos referimos a figuras, tabelas ou capítulos já afastados, normalmente indica-se também o número da página, para facilitar a localização.

As palavras noutras línguas, geralmente em inglês, são apresentadas em itálico, e também entre aspas na primeira vez que é referida.

Seguindo a terminologia normalmente empregue nas obras e artigos da especialidade, quando nos referimos a “resultados numéricos” estamos a referir-nos a “resultados numéricos

obtidos por elementos finitos”, por oposição a “resultados analíticos”, obtidos por expressões analíticas.

### 1.3 Contribuições originais

Apesar de cada um de nós sonhar com a descoberta da “nossa Lei da Gravidade” ou da “nossa Teoria da Relatividade”, é necessário ter a consciência de que, havendo dezenas ou centenas de pessoas cujos nomes ficaram na história da ciência e da tecnologia, houve muitíssimos mais que deram contributos mais modestos e que, apesar disso, sem eles não teria sido possível ter feito o caminho percorrido pela humanidade. Para além disso, é preciso ter também a noção de que mesmo aqueles que ficaram conhecidos, porque a um dado momento fizeram uma descoberta importantíssima ou escreveram obras fundamentais, realizaram durante anos o trabalho que um dia lhes permitiu chegar a essas conclusões; com certeza, que com muitas dúvidas, incertezas, desilusões e tentativas e erros pelo meio.

Assim, também esta dissertação não é tanto um ponto de chegada, mas talvez mais um ponto de partida. E se se responderam a bastantes questões, muitas mais foram surgindo. No entanto, e apesar da nossa contribuição ser modesta, é aquela a que chegámos e queremos partilhar. As principais contribuições originais do trabalho realizado, tanto quanto nos é dado saber, foram as seguintes:

1. Comparação entre diversas expressões analíticas para o cálculo de perdas por correntes induzidas (considerando uma chapa larga, i.e., para o problema 1D), formuladas em termos da indução média na chapa ( $B_{\max}^a$ ) ou do valor da intensidade do campo magnético à superfície da chapa ( $H_s$ ). Foram verificados os domínios de aplicação descritos na literatura para cada uma delas, tendo-se concluído à cerca das situações em que se podem ou devem usar umas ou outras. Este estudo é mostrado no sub-capítulo “3.3 Expressões analíticas a 1D para o cálculo das perdas por correntes induzidas”, tendo sido apresentado no *8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE* [Pereirinha2003a];
2. Utilizando o método dos elementos finitos e uma condição de fronteira complexa, foi desenvolvida uma metodologia para calcular as perdas por correntes induzidas considerando o efeito pelicular e tendo em consideração a espessura e a largura das chapas. Foi mostrada a importância de considerar o efeito pelicular, a largura e a espessura da chapa para uma previsão correcta das perdas por correntes indu-

zidas. Esta metodologia é exposta nos capítulos “4 - CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA” e “5 - EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA  $d/\delta$  DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS”, tendo sido apresentado na *International Conference on Electrical Machines, ICEM 2002* [Antunes2002];

3. Foram desenvolvidos um (novo<sup>10</sup>) gráfico genérico e um modelo analítico derivado de soluções numéricas por elementos finitos. O gráfico e/ou o modelo permitem um cálculo fácil das perdas por correntes induzidas relativamente a valores analíticos de referência a 1D (dados por  $P_{BI}$ , equação (3.37), página 56), para qualquer chapa de material ferromagnético macio isotrópico e não histerético, na zona de funcionamento linear. Tanto o gráfico como o modelo são válidos para qualquer largura  $w$ , espessura  $d$  e frequência  $f$ , na gama considerada de  $w/d$  de 2 a 17,14 e de  $d/\delta$  de 0,05 a 30. Estes resultados foram apresentados no *20<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC 2002* [Pereirinha2002] (versão resumida) e no *International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF2003* [Pereirinha2003c], tendo este último sido seleccionado para publicação numa próxima edição da revista COMPEL – *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*;
4. Foi feito o estudo do efeito da largura da chapa ferromagnética na densidade local de perdas por correntes induzidas, em função de  $dte$ , “*distance to edge*”, i.e. da distância à fronteira lateral da chapa. Para chapas ferromagnéticas com diversas larguras  $e$ , tomando como referência a expressão analítica para a densidade volúmica de perdas para uma chapa magnética de largura “infinita”, foram obtidas as curvas da densidade relativa de perdas, em função de  $dte$ : quer usando uma intensidade do campo magnético na fronteira da chapa,  $H_s$ , constante, quer usando uma indução média na secção recta do corte da chapa. É demonstrado que no primeiro caso esta função é independente da relação  $w/d$  e que portanto poderá ser mais adequada para aplicação em técnicas de homogeneização. Este estudo foi

---

<sup>10</sup> O modelo analítico apresentado no capítulo 5, devido ao efeito de sobreposição, não corresponde a um  $B_{ref}$  constante, mas sim a um  $B_{max}^a$  função de  $d/\delta$  e  $w/d$ . O (novo) modelo analítico considera já o efeito de sobreposição e a respectiva correcção.

apresentado na *14th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Compumag 2003* [Pereirinha2003b];

5. Desenvolvimento de um método para o cálculo da condutividade térmica equivalente de barra de alternador (homogeneização térmica). O método parece ser capaz de calcular com elevada precisão a condutividade térmica equivalente,  $k_e$ , para qualquer barra com diferentes materiais isolantes e geometrias não triviais e com apenas condução de calor. O método desenvolvido foi apresentado na *16<sup>th</sup> International Conference On Electrical Machines, ICEM'2004*, on CD-ROM, Crakow, Poland, September 5-8, 2004 [Pereirinha2004].

Relacionado com o trabalho exposto nesta dissertação, houve também a colaboração do autor nos trabalhos que resultaram na apresentação das seguintes comunicações:

- J. Gyselinck, P. Pereirinha, C. Antunes, W. Legros, “Harmonic balance finite element modelling of eddy currents in steel laminations”, que foi por si (Paulo Pereirinha) apresentada no *8<sup>o</sup> Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, que decorreu em Vilamoura, Algarve, Portugal, de 3 a 5 de Julho de 2003;
- De Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Desarrollo de un modelo de histéresis dinámico tipo Preisach y su aplicación al cálculo de máquinas eléctricas”, apresentado no *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, em Lisboa, de 31 de Maio a 2 de Junho de 2004, APMTAC;
- De Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Determination of the hysteresis core losses on a single phase transformer by using a dynamic Preisach type hysteresis model”, que foi apresentado na *16th International Conference On Electrical Machines – ICEM'2004*, em Cracóvia, na Polónia, de 5 a 8 de Setembro de 2004.

Embora não possa propriamente ser considerada uma contribuição original, um desenvolvimento importante, pelo menos para o grupo de trabalho do Lab. de CAD/CAE, do DEEC-UC/ISR-Pólo de Coimbra, e que ocupou uma parte significativa do tempo em que decorreram os estudos que deram origem à presente dissertação, foi a actualização do pacote de programas de elementos finitos do **CADdyMAG** e o desenvolvimento da capacidade de

funcionamento em modo *batch*. Isto, embora ainda não esteja totalmente terminado, permite-nos continuar a dispor<sup>11</sup> de uma ferramenta de elementos finitos própria e alterável à medida das nossas necessidades. A grande maioria do trabalho realizado e descrito nesta dissertação não teria sido possível com a simples utilização de um *software* comercial de elementos finitos, pois mesmo sendo estes frequentemente mais potentes, não podem, normalmente, ser modificados para testar novas soluções e metodologias.

---

<sup>11</sup> Também o Professor Arnult Kost (presidente da ICS, *International Compumag Society*), na sessão de encerramento do 8CLEEE se referiu à importância de continuar a dispor de *software* próprio, para poder implementar e testar novas metodologias e soluções. Aliás, actualmente, em duas das conferências de referência da área, o COMPUMAG e o CEFC, já não são aceites para apresentação puras aplicações de *software* comercial.



## 2 INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS MAGNÉTICOS E ÀS PERDAS EM CHAPAS FERROMAGNÉTICAS

Neste capítulo vai-se fazer uma breve introdução aos fenómenos do magnetismo, ao porquê do comportamento dos diversos materiais face aos campos magnéticos e aos tipos de materiais magnéticos existentes, ao fenómeno físico das perdas nos materiais ferromagnéticos e a algumas formas de cálculo das perdas magnéticas.

### 2.1 Materiais magnéticos

Existem diversas obras sobre magnetismo e materiais magnéticos, algumas das quais com bastante detalhe, nomeadamente “*Ferromagnetism*” [Bozorth1993], considerado como “O” texto clássico sobre o fenómeno e as teorias do magnetismo, materiais magnéticos e teoria dos domínios, contendo dados técnicos de muitos materiais. Outras obras aprofundadas são, por exemplo, “*Electrical and magnetic properties of materials*” [Robert1988] e, embora incluindo também o magnetismo de uma forma genérica, mais focados sobre ímanes permanentes e as suas aplicações (temas não abordados neste trabalho, pelo que se deixam aqui algumas referências), *Permanent Magnet Materials and their Application* [Campbell1994], *Rare-Earth Iron Permanent Magnets* [Coey1996], e *Permanent Magnet and Electromechanical Devices – Materials, Analysis, and Applications* [Furlani2001].

Outras obras tratando o assunto do magnetismo e materiais magnéticos de uma forma um pouco mais resumida, são, por exemplo, *Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais* [Smith1998] (Cap. 11 – *Materiais Magnéticos*), *Physics for Scientists and Engineers* [Fishbane1996] (Cap. 32 – *Magnetism and Matter*), *Curso de Física de Berkeley (Vol. 2) - Electricidade e Magnetismo* [Purcell1970] (Cap. 10 – *Campos Magnéticos na Matéria*), e ainda “*Physique du génie électrique*” [Semail1998] (Cap. VIII – *Matériaux magnétiques*).

Nesta pequena introdução vai-se seguir mais de perto o capítulo 9.2, “*Magnetic Properties of Materials*”, de “*Engineering Electromagnetics*” [Ida2000]pp.528-559, por

parecer ter o nível de detalhe adequado a uma introdução ao tema e à presente dissertação (quando forem utilizadas outras fontes, serão indicadas).

A base para compreender os diferentes tipos de materiais do ponto de vista do seu comportamento em relação ao campo magnético é considerar a estrutura atômica dos vários materiais, bem como o efeito que o campo magnético pode ter nos átomos. É também necessário compreender alguns conceitos como “magnetização” e “dipolo magnético”.

### 2.1.1 O dipolo magnético

Basicamente, um dipolo magnético pode ser visto como um pequeno circuito ou espira (“loop”), de raio  $R=d$ , no qual circula uma corrente eléctrica  $I$ , tal como se pode ver na Fig. 2.1a. Esta corrente eléctrica cria um campo magnético em cada ponto do espaço (por exemplo no ponto  $P(R, \theta, \phi)$ , na figura), cujo vector indução magnética  $\mathbf{B}$  é dado por

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I d^2}{4R^3} (\hat{\mathbf{R}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \quad (2.1)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vazio, em H/m,  $I$  é a corrente no circuito em A,  $d$  o raio do circuito em m,  $R$  o comprimento do vector  $\mathbf{R}$ , e  $\hat{\mathbf{R}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  os versores segundo  $\mathbf{R}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  respectivamente (em coordenadas esféricas,  $R, \theta, \phi$ ).

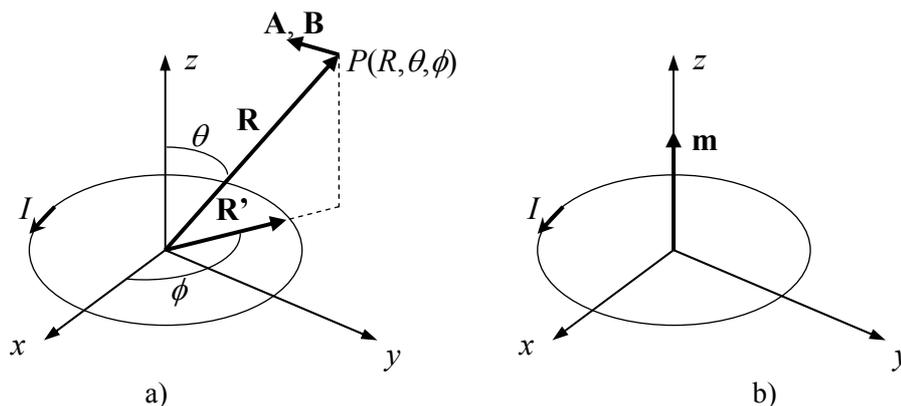


Fig. 2.1. Dipolo magnético elementar: a) circuito com corrente  $I$  criando um campo magnético no ponto  $P(R, \theta, \phi)$ ; b) o dipolo magnético e o seu momento  $\mathbf{m}$ .

A equação (2.1) dá um valor aproximado, mas que pode ser bastante preciso se o ponto estiver a grande distância do circuito ( $R$  grande), e, simultaneamente,  $d$  for muito pequeno. Ou seja, se  $R \gg d$ .

Pode-se agora definir o (vector) **momento dipolar magnético**<sup>12</sup>,  $\mathbf{m}$ , cujas unidades são  $A \cdot m^2$ , como sendo

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{n}} I \pi d^2 = \hat{\mathbf{n}} I S \quad (2.2)$$

em que  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor normal à superfície do circuito e  $S$  a área do circuito plano. Na Fig. 2.1b, tendo-se feito  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ , representa-se um dipolo magnético e o seu momento. Com esta condição, a equação (2.1) pode ser escrita em termos do momento dipolar magnético como

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 m}{4R^3} (\hat{\mathbf{R}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \quad (2.3)$$

em que  $m$  representa o valor de  $\mathbf{m}$ . Note-se que a direcção de  $\mathbf{B}$  depende da localização do ponto  $P$  no espaço, enquanto que a direcção de  $\mathbf{m}$  é sempre perpendicular ao circuito elementar.

O vector potencial magnético,  $\mathbf{A}$ , em Wb/m, criado pelo mesmo dipolo e em termos do seu momento, será

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2} \quad (2.4)$$

Estes resultados são importantes porque permitem calcular o campo devido aos electrões orbitando em torno do núcleo do átomo, como se verá na secção seguinte.

## 2.1.2 Um modelo das propriedades magnéticas dos materiais:

### Magnetização

O modelo atómico mais simples de um material consiste em ver o átomo como pequenos circuitos ou “dipolos magnéticos” que produzem um campo magnético no exterior do átomo (e que verificam facilmente a condição  $R \gg d$ ), tal como se pode ver na Fig. 2.2a.

---

<sup>12</sup> “*Magnetic dipole moment*”, em inglês, que em português pode ser traduzido por “momento dipolar magnético” [Brito1999] pp.220, ou simplesmente “momento magnético” [Villate1999] pp158, [Smith1998] pp.11.

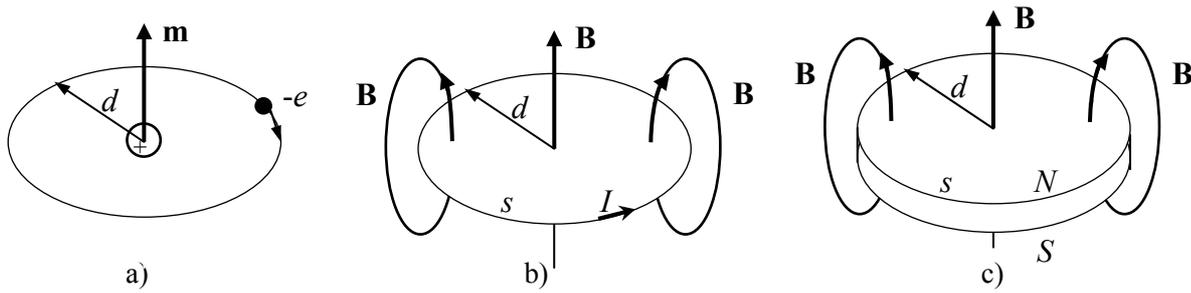


Fig. 2.2. Modelo dipolar magnético do átomo: a) orbital do electrão e momento dipolar magnético; b) indução magnética devida ao dipolo magnético; c) modelo de íman permanente equivalente.

O modelo equivalente é um circuito ou espira de raio  $d$ , no qual circula uma corrente  $I$ , tal como mostrado na Fig. 2.2b. Este modelo é apropriado tanto para os orbitais (a órbita dos electrões em torno do núcleo), como para o seu movimento de rotação dos electrões sobre si próprios (“*spin*”) na medida em que ambos produzem um campo magnético interno. Um modelo idêntico pode ser obtido substituindo a espira por um íman permanente muito pequeno, representado na Fig. 2.2c, que produza a mesma indução que a espira.

Em geral, os electrões dos vários átomos rodam em diversos planos em torno do núcleo e a rotação sobre si próprios é feita em torno de eixos orientados aleatoriamente. Assim, os momentos dipolares magnéticos de um conjunto de átomos num volume são normalmente orientados em todas as direcções, a não ser que exista algum mecanismo que force a sua orientação em determinadas direcções. Apesar de não se poder calcular o momento dipolar magnético de um átomo em particular (embora possa ser estimado) ou determinar a sua direcção no espaço, será razoável considerar que se existem  $N$  átomos num determinado volume  $V$ , o momento dipolar magnético do volume é a soma vectorial dos momentos de todos os dipolos individuais nesse volume. No entanto, uma vez que a densidade volúmica de dipolos pode variar de ponto para ponto, dependendo da distribuição local dos momentos dipolares, será mais útil calcular esta quantidade para um volume infinitesimal e portanto obter um valor pontual do momento magnético dipolar. A esta quantidade vectorial chama-se **magnetização**<sup>13</sup>,  $\mathbf{M}$ , definida por

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \quad (2.5)$$

Note-se que, visto que as unidades do momento magnético dipolar são  $A \cdot m^2$ , a magnetização, sendo a densidade volúmica de momentos dipolares, tem como unidades  $A/m$ . Para

<sup>13</sup> A magnetização é também muitas vezes representada pela letra  $J$  [Steingroever1997b].

além disso, a magnetização de um material pode ser, e é frequentemente, zero. A orientação aleatória dos momentos dipolares, tal como na Fig. 2.3a, produz uma soma vectorial nula e portanto magnetização igual a zero.

Quais serão então as condições que levam a que possa ser obtida magnetização não nula?

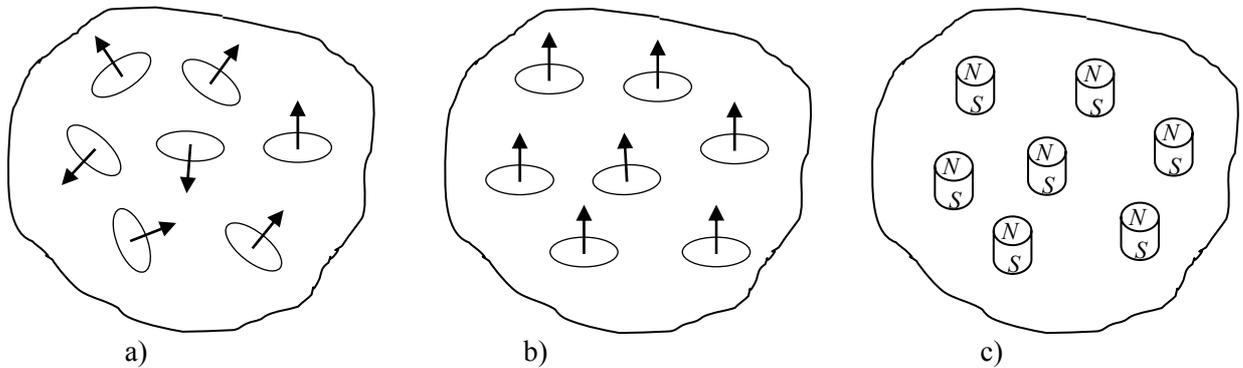


Fig. 2.3. Modelo para a magnetização em materiais: a) dipolos não orientados; b) a orientação dos dipolos produz magnetização; c) modelo de magnetização com ímanes permanentes.

Antes de responder a essa questão, veja-se o que acontece se todos (ou a maioria) dos momentos dipolares estiverem alinhados numa mesma direcção do espaço, tal como na Fig. 2.3b. O conjunto dos dipolos alinhados têm magnetização não nula e portanto produzem uma indução magnética  $\mathbf{B}$  resultante. Com efeito, esta distribuição de dipolos pode ser vista como se fosse um íman composto de um número elevado de ímanes elementares, tal como se pode ver na Fig. 2.3c. Isto permite concluir-se que um íman permanente não é mais do que um material no qual os dipolos magnéticos estão alinhados segundo uma direcção preferencial e permanecem com essa orientação. Assim, baseado neste modelo simples, pode dizer-se que “um íman permanente mais forte” é um para o qual o número de dipolos alinhados na direcção preferencial é maior.

A questão que se coloca agora é, conhecendo a magnetização em todo o volume dum material, qual será a indução produzida pela magnetização? A resposta a esta questão levar-nos-á à relação entre magnetização e densidade de corrente e portanto a uma explicação física muito simples do conceito de magnetismo. Neste sentido, um íman permanente pode ser encarado como uma distribuição equivalente de densidade de corrente, o que é bastante útil do ponto de vista de compreensão. Esse modelo também permitirá a avaliação dos campos devidos aos ímanes permanentes. Para o fazer, é necessário associar o efeito do campo magnético ao volume do material, o que pode ser facilmente feito a partir da definição de

magnetização. Então, dada uma magnetização  $\mathbf{M}$ , existente num determinado volume  $V$ , o momento dipolar magnético devido a um elemento de volume  $dV$  pode ser escrito como

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV \quad (2.6)$$

Assim, estando o volume  $V$  magnetizado e considerando na equação (2.4) a contribuição para  $\mathbf{A}$  devida a  $d\mathbf{m}$ , o vector potencial magnético num ponto do espaço, será dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^3} dV \quad (2.7)$$

Este resultado pode ser visto como o vector potencial magnético devido a um volume de ímanes infinitesimais, cada um com magnetização  $d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV$ . Uma vez conhecido  $\mathbf{A}$  para um dado volume de magnetização, a indução poderia ser calculada directamente por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.8)$$

No entanto, a equação (2.7) não é muito útil para cálculos práticos, pelo que, para calcular os campos magnéticos em ímanes permanentes, será preferível usar um modelo em termos de correntes equivalentes, baseado no modelo da Fig. 2.3b. Basicamente, se considerarmos um íman permanente como o da Fig. 2.4a, com  $\mathbf{M}$  constante, ao fazer um corte segundo um plano horizontal obtém-se a Fig. 2.4b, onde se podem ver os dipolos associados com este corte. Como  $\mathbf{M}$  é constante, os dipolos estão uniformemente distribuídos, pelo que os dipolos internos se cancelam uns aos outros (correntes iguais em sentidos opostos). Por isso, a única corrente equivalente resultante  $I$  é a dos dipolos exteriores, tal como se pode ver na Fig. 2.4c, à qual corresponde uma densidade de corrente de magnetização superficial,  $\mathbf{J}_{ms}$ . Assim, um íman permanente pode ser reduzido a uma bobina com uma fina camada de corrente na camada exterior<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Esta ideia é muitas vezes utilizada no método dos elementos finitos para modelar ímanes permanentes através de finas camadas de elementos finitos com uma densidade de corrente superficial por forma a impor a mesma magnetização que o íman permanente original [Salon1995] pp.39-47.

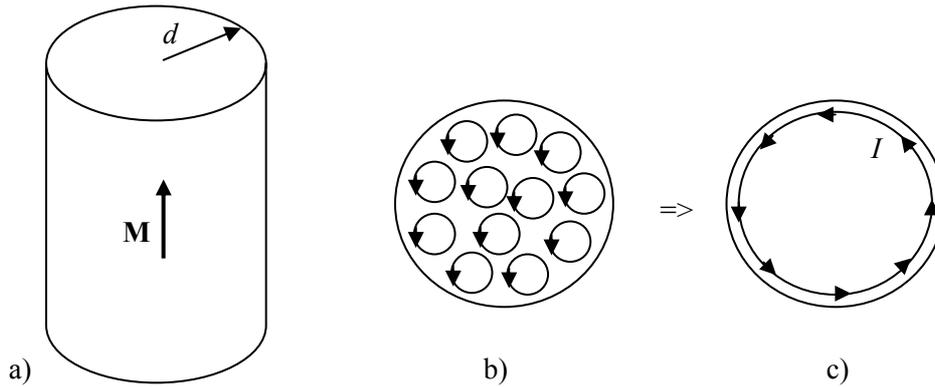


Fig. 2.4. a) Íman permanente; b) corte do íman mostrando os dipolos. Para magnetização constante, todas as correntes internas se cancelam; c) efeito resultante: densidade de corrente superficial.

Por isso, um material magnetizado pode sempre ser modelado pelas densidades de corrente equivalentes<sup>15</sup>, que podem ser uma densidade de corrente de magnetização superficial,  $\mathbf{J}_{ms}$ , em A/m, e uma densidade de corrente de magnetização volúmica,  $\mathbf{J}_m$ , em A/m<sup>2</sup>, dadas por

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.10)$$

em que  $\mathbf{J}_m$  apenas existirá se a magnetização no material não for uniforme (contrariamente ao caso da Fig. 2.4). É também importante referir que estas correntes não existem no sentido em que não as podemos medir. Tratam-se de correntes reais que existem ao nível atómico, mas normalmente são vistas como correntes fictícias que permitem calcular o campo magnético em vez de utilizar directamente a magnetização (são dados alguns exemplos em [Ida2000]pp.540-543).

Pode-se voltar agora à questão anteriormente colocada: porque é que os dipolos magnéticos se alinham, ou podem alinhar, segundo direcções específicas no espaço? Tal como acontece com outros efeitos, deverá existir uma força que actua neles para os alinhar. Esta força é fornecida por um campo magnético exterior. Sabe-se por experiência que um íman se alinhará com outro, se o puder fazer. Assim, voltando ao modelo dos pequenos

<sup>15</sup> Brito *et al* [Brito1999] pp.233 utilizam a designação “densidades de corrente equivalentes para a *distribuição volumétrica e para a distribuição superficial*”, referindo que “estas correntes também se designam por *correntes de magnetização* (daí o índice «m» nas expressões anteriores) ou *correntes amperianas*”.

ímãs da Fig. 2.3c, cada um produzido por um dipolo (Fig. 2.3b), percebe-se que cada um dos dipolos se alinha com um campo exterior, tal como apresentado na Fig. 2.5.

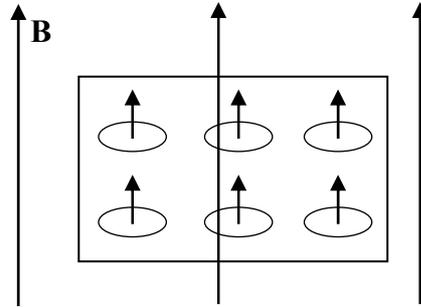


Fig. 2.5. Alinhamento dos momentos dipolares magnéticos quando submetidos a um campo magnético exterior.

Desta figura, torna-se claro que a indução magnética externa,  $\mathbf{B}_e$ , e a indução magnética produzida pelo material magnetizado,  $\mathbf{B}_m$ , têm a mesma direcção e sentido e portanto somam-se, dando origem a uma indução total,  $\mathbf{B}_t$ , em T, dada por

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_m \quad (2.11)$$

Assim sendo, a indução total,  $\mathbf{B}_t$  pode ser escrita como

$$\mathbf{B}_t = \mu_0 \mathbf{H}_e + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 (\mathbf{H}_e + \mathbf{M}) \quad (2.12)$$

em que  $\mu_0$  é a **permeabilidade magnética do vazio**,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m. Visto que a magnetização é gerada pelo campo magnético exterior,  $\mathbf{H}_e$  (caso contrário os momentos dipolares magnéticos teriam uma orientação aleatória), então  $\mathbf{M}$  deve ser proporcional a  $\mathbf{H}_e$ . A este factor de proporcionalidade, adimensional, chama-se **susceptibilidade magnética**, e indica o quanto um material é susceptível de ser magnetizado, i.e. de ter uma magnetização  $\mathbf{M}$ . A **susceptibilidade magnética** é uma propriedade fundamental dos materiais, sendo normalmente representada por  $\chi_m$ . A relação entre a intensidade do campo magnético exterior e a magnetização é então dada por

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_e \quad (2.13)$$

Substituindo  $\mathbf{M}$  na equação (2.12), fica-se com

$$\mathbf{B}_t = \mu_0 (\mathbf{H}_e + \chi_m \mathbf{H}_e) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}_e = \mu \mathbf{H}_e \quad (2.14)$$

em que  $\mu$  é a **permeabilidade magnética** do material, também em H/m, e portanto igual a

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (2.15)$$

Como a permeabilidade magnética depende da susceptibilidade, vai diferir de material para material. No vazio,  $\chi_m=0$  e portanto  $\mu=\mu_0$ . Noutros materiais, a permeabilidade pode ser superior ou inferior à do vazio, dependendo da susceptibilidade do material. Chama-se **permeabilidade relativa**,  $\mu_r$ , a

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (2.16)$$

que é uma grandeza adimensional. A gama de variação da susceptibilidade magnética é entre -1 e “infinito”, pelo que a permeabilidade relativa varia entre 0 e “infinito” (i.e. até  $10^5$  ou  $10^6$ ). A permeabilidade relativa tem este nome visto que dá a relação entre a permeabilidade  $\mu$  e a permeabilidade do vazio,  $\mu_0$

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad (2.17)$$

Esta forma é particularmente conveniente porque  $\mu_0$  é uma quantidade muito pequena ( $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m), sendo esta a representação normalmente utilizada no projecto electromagnético.

O aspecto mais notável desta definição é que evita a necessidade de lidar com a magnetização  $\mathbf{M}$  e a susceptibilidade magnética  $\chi_m$ , as quais são, de uma forma geral, difíceis de utilizar, e, em vez disso, considera os seus efeitos concentrados numa única grandeza, mensurável experimentalmente,  $\mu$ . Por isso, nas aplicações do electromagnetismo em engenharia (excepto quando se trabalha com ímanes permanentes), bem como na presente dissertação, se trabalha quase sempre em termos do campo magnético exterior,  $\mathbf{H}_e$  (que passa simplesmente a ser representado por  $\mathbf{H}$ ) da permeabilidade  $\mu$ , e da indução magnética  $\mathbf{B}$ .

## 2.2 Comportamento dos materiais magnéticos

Na secção anterior apresentou-se a magnetização e, mais importante, a relação com a intensidade do campo magnético  $\mathbf{H}$ , a indução magnética  $\mathbf{B}$ , e a densidade de corrente equivalente  $\mathbf{J}$  (densidades de corrente volúmica e superficial). Vai-se agora discutir as propriedades magnéticas básicas dos materiais dum ponto de vista macroscópico, ou seja, ver

quais os parâmetros e grandezas que são importantes do ponto de vista do projecto electromagnético em engenharia (e electrotécnica em particular).

Nas discussões anteriores, ficou em aberto a seguinte questão: Qual é a fonte da magnetização e, ainda mais importante, porque é que alguns materiais são capazes de ter magnetizações elevadas (por exemplo, o ferro), enquanto outros materiais parecem não ser afectados pelos campos magnéticos externos? A resposta reside na susceptibilidade magnética ou, se se preferir, na permeabilidade magnética dos materiais. Alguns materiais são altamente susceptíveis à magnetização enquanto outros não. Baseado na metodologia anteriormente utilizada, pode ver-se a susceptibilidade magnética como uma propriedade fundamental dos materiais, e mais, que pode ser obtida experimentalmente. No entanto, é muito mais fácil e intuitivo discutir as propriedades magnéticas em termos da permeabilidade relativa dos materiais. Assim, materiais com permeabilidade relativa elevada exibem elevada magnetização quando colocados num campo magnético, enquanto que os materiais com baixa permeabilidade não.

Em termos práticos, quanto ao comportamento face aos campos magnéticos, definem-se três tipos básicos de materiais: **diamagnéticos**, **paramagnéticos** e **ferromagnéticos**. Todos os materiais caem dentro de um destes grupos, à excepção do vácuo, que é considerado não magnético.

### 2.2.1 Materiais diamagnéticos e paramagnéticos

**Materiais diamagnéticos** são materiais com permeabilidade relativa inferior a 1 ( $\mu_r < 1$ ). Esta classe inclui materiais importantes como o mercúrio, a prata, o cobre, o chumbo, o silício, e a água. A permeabilidade relativa da maior parte dos materiais diamagnéticos varia entre 0,9999 e 0,99999 (a susceptibilidade varia entre  $-10^{-5}$  e  $-10^{-4}$ ) e para a maioria das aplicações, nomeadamente em actuadores e máquinas eléctricas, podem ser assumidos como sendo não magnéticos, ou seja com  $\mu_r \approx 1$ . O valor da permeabilidade relativa para alguns materiais diamagnéticos importantes é apresentado na Tabela 2.1.

Uma excepção notável à susceptibilidade baixa e negativa da maior parte dos materiais diamagnéticos são os materiais supercondutores. Esses materiais são puramente diamagnéticos, ou seja  $\chi_m = -1$ , e portanto a permeabilidade relativa é zero ( $\mu_r = 0$ ). A consequência disso é que, dentro dos supercondutores, a indução magnética (ou densidade de fluxo) é sempre zero ( $\mathbf{B} = 0$ ) qualquer que seja o campo magnético externo.

Um aspecto interessante do diamagnetismo é o facto de que a indução magnética dentro do material diamagnético é inferior à do campo magnético exterior. Se se colocar um pedaço de material diamagnético sobre um íman permanente, o íman vai repelir o material diamagnético, tal como se pode ver na Fig. 2.6a. A explicação para este fenómeno é óbvia se olharmos para o modelo equivalente da Fig. 2.6b: visto que o íman permanente e o íman equivalente ao material diamagnético (devido à magnetização do material diamagnético) ficam com os pólos do mesmo nome face a face, repelem-se um ao outro. No entanto, esta força de repulsão é extremamente baixa para todos os materiais diamagnéticos, excepto nos supercondutores, nos quais é muito elevada. É devido a esta repulsão que um íman permanente flutua sobre um material supercondutor.

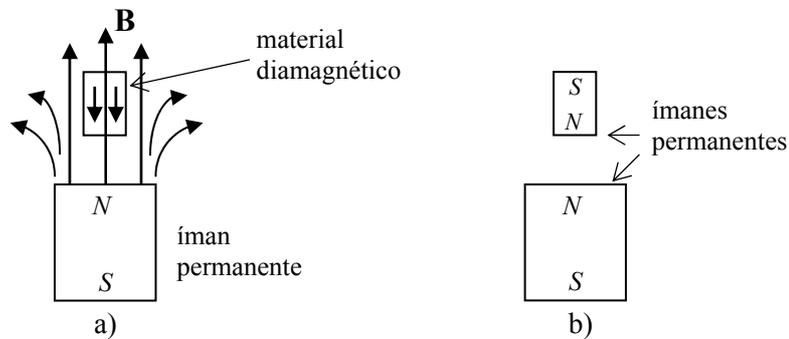


Fig. 2.6. a) Repulsão de um material diamagnético por um campo magnético devido à magnetização interna oposta; b) modelo com ímanes permanentes para a).

O comportamento dos materiais diamagnéticos pode ser explicado baseando-se no modelo atómico dos materiais. Num modelo de materiais diamagnéticos, os momentos magnéticos devidos aos orbitais dos electrões e devidos à rotação sobre si próprios (*spin*) cancelam-se mutuamente em condições normais. Sob a influência de um campo exterior, o campo devido aos orbitais dos electrões é ligeiramente inferior ao do *spin* dos electrões, causando um campo magnético resultante que se opõe ao campo exterior. Isto traduz-se numa permeabilidade mais baixa dos materiais diamagnéticos. Na realidade, todos os materiais possuem esta propriedade: um campo magnético externo induz uma magnetização no material que se opõe ao campo exterior. No entanto, nos outros tipos de materiais, esta propriedade é escondida por outros efeitos magnéticos maiores (concretamente nos materiais cujos átomos têm momentos magnéticos permanentes), tal como se verá posteriormente.

Tabela 2.1. Permeabilidades relativas para alguns materiais diamagnéticos e paramagnéticos.

Materiais diamagnéticos		Materiais paramagnéticos	
Material	Permeabilidade relativa, $\mu_r$	Material	Permeabilidade relativa, $\mu_r$
Prata	0,999974	Ar	1,00000036
Água	0,9999991	Alumínio	1,000021
Cobre	0,999991	Paládio	1,0008
Mercúrio	0,999968	Platina	1,00029
Chumbo	0,999983	Tungsténio	1,000068
Ouro	0,999998	Magnésio	1,0000693
Grafite (carbono)	0,999956	Manganésio	1,000125
Hidrogénio	0,99999998	Oxigénio	1,0000019

Os **materiais paramagnéticos** são materiais nos quais a permeabilidade relativa é ligeiramente superior à unidade. Nestes materiais, os momentos orbitais e de *spin* não se cancelam e os átomos têm um momento magnético resultante (i.e. não nulo) na ausência de campos magnéticos exteriores. No entanto, como os momentos magnéticos de um conjunto de átomos têm orientações aleatórias, o campo magnético externo resultante é zero ou muito próximo de zero. Contrariamente aos materiais diamagnéticos, nos quais o momento magnético dos átomos é induzido por um campo exterior, os momentos magnéticos existem sempre nos materiais paramagnéticos. Na presença de um campo magnético exterior estes momentos tendem a alinhar-se com ele, resultando um campo total superior.

A permeabilidade relativa dos materiais paramagnéticos varia entre 1,0000001 e 1,001 (a susceptibilidade magnética é sempre positiva, variando entre  $10^{-7}$  e  $10^{-3}$ ). Alguns materiais comuns como o alumínio, paládio, tungsténio e ar são paramagnéticos. Uma consequência interessante, e talvez surpreendente, é que uma peça de alumínio é atraída por um íman. No entanto, é necessário um íman muito forte para se “sentir” esta atracção, visto que a permeabilidade relativa do alumínio é apenas 1,000021. O oxigénio sofre também esta atracção tal como se pode ver na Fig. 2.7. O valor da permeabilidade relativa para alguns outros materiais paramagnéticos é também apresentado na Tabela 2.1.



Fig. 2.7. O oxigénio é paramagnético, sendo por isso atraído pelos pólos de um íman. O oxigénio líquido derramado, é mantido entre dois pólos magnéticos [Fishbane1996] pp.875.

### 2.2.2 Materiais ferromagnéticos

Os materiais magnéticos mais úteis são de longe os designados por **materiais ferromagnéticos**. O nome deriva do ferro, que é o material ferromagnético mais comum. A permeabilidade relativa dos materiais ferromagnéticos é muito maior que 1 e pode ser de vários milhares ou superior. Alguns materiais ferromagnéticos típicos são o ferro, o cobalto e o níquel. Na Tabela 2.2 apresentam-se também mais alguns materiais e as permeabilidades relativas respectivas.

Tabela 2.2. Permeabilidades relativas para alguns materiais ferromagnéticos.

Material	$\mu_r$	Material	$\mu_r$
Cobalto	250	Permalloy (78% Ni)	100000
Níquel	600	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> (Magnetite)	100
Ferro	6000	Ferrites	5000
Supermalloy (5% Mo, 79% Ni)	10 <sup>7</sup>	Mumetal (75% Ni, 5% Cu, 2%Cr)	100000
Aço (0,9 % C)	100	Permandur	5000
Ferro com silício (4% Si)	7000		

Os materiais ferromagnéticos tendem a magnetizar-se na direcção do campo magnético e alguns deles retêm essa magnetização após o campo exterior ter sido removido. Nestes casos, em que a magnetização é permanentemente retida, o material torna-se um **íman permanente**. Outro aspecto importante dos materiais ferromagnéticos é a dependência da magnetização com o nível do campo magnético exterior: a magnetização em materiais ferromagnéticos é um processo não linear.

Contudo, a grande magnetização que ocorre nos materiais ferromagnéticos não pode ser explicada em termos do modelo simples, anteriormente utilizado e apresentado na Fig. 2.2, de orbitais e *spins* dos electrões, uma vez que estes existem em todos os materiais, mas a maioria deles não são ferromagnéticos. O modelo que explica os materiais ferromagnéticos é um modelo modificado que provou experimentalmente ser correcto. De forma diferente dos outros materiais, os *spins* dos electrões individuais, em vez de terem orientação aleatória, estão orientados conjuntamente em domínios; isto significa que um determinado número de *spins* num pequeno domínio de material estão alinhados na mesma direcção, na ausência de campos exteriores, e são mantidos assim por forças de ligação atómicas. A este pequeno volume chama-se **domínio magnético**<sup>16</sup>.

Um domínio magnético tem entre 0,001 e 1 mm de largura e um volume entre  $10^{-9}$  e  $1 \text{ mm}^3$ . Por isso, o número de *spins* dos electrões varia com o tamanho do domínio mas a média é da ordem de  $10^{16}$ . Assim, apesar dos domínios serem pequenos, são muito grandes comparados com as dimensões típicas ao nível atómico. Por isso, a sua existência pode ser medida e até fotografada, tal como se pode ver na Fig. 2.8, onde a cada cor diferente, correspondem domínios com orientações diferentes e cada um deles com um forte campo resultante.



Fig. 2.8. Microfotografia de domínios magnéticos numa amostra de ferro com 3% de silício [Fishbane1996] pp.871.

Na Fig. 2.9a mostra-se esquematicamente a estrutura dos domínios dos materiais ferromagnéticos.

---

<sup>16</sup> A existência dos domínios, bem como a perda de magnetização a partir de uma certa temperatura (ponto ou temperatura de Curie), fazem parte do trabalho do físico Francês Pierre Weiss (1865-1940). As paredes dos domínios (“*domain walls*”) são por isso por vezes designadas por **paredes de Weiss** (“*Weiss walls*”) ou por **paredes de Bloch** (“*Bloch walls*”), devido ao físico Suíço Felix Bloch, prémio Nobel da Física em 1952. Em português podem também designar-se por “**fronteira de domínio**” [Smith1998] pp.675.

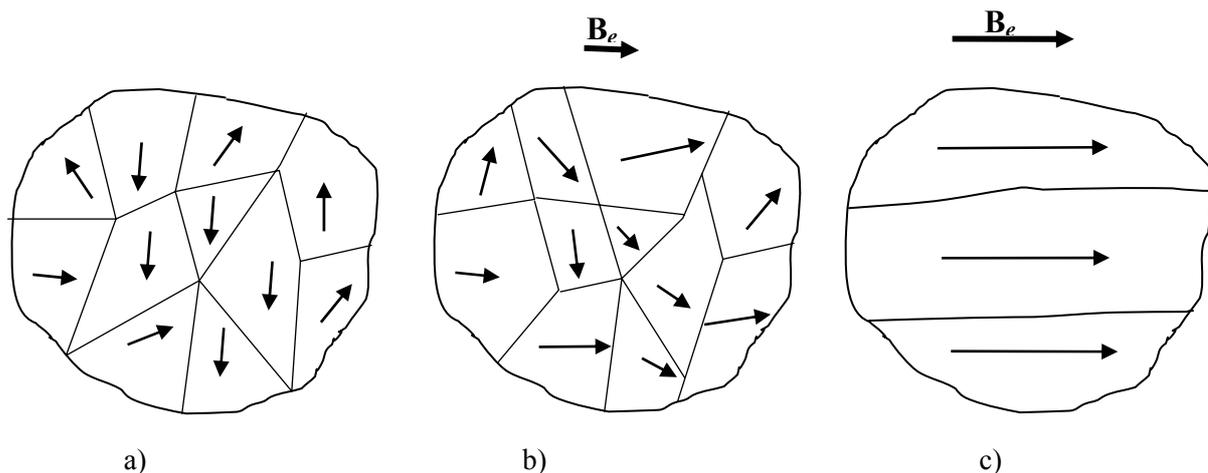


Fig. 2.9. Modelo de domínios para a magnetização em materiais ferromagnéticos: a) domínios não orientados; b) o campo exterior faz rodar os dipolos para se alinharem com ele e os domínios mais alinhados crescem à custa dos menos alinhados; c) os domínios alinhados ocupam todo (ou quase todo) o volume.

Os domínios individuais podem ser alinhados em qualquer direcção no espaço. A região de transição entre domínios é designada por **parede do domínio**. Quando um campo externo  $B_e$  é aplicado, os domínios magnéticos tendem a orientar-se de acordo com esse campo. Os domínios que estão desalinhados vão rodando e os que estão alinhados com o campo permanecem alinhados, mas as paredes dos domínios movem-se, fazendo com que estes domínios cresçam à custa da diminuição dos domínios não alinhados (Fig. 2.9b). À medida que o campo exterior aumenta cada vez mais, a maioria dos domínios fica alinhada na direcção do campo magnético. A intensidade do campo magnético necessária para fazer isto é relativamente pequena, resultando no entanto numa indução magnética interna elevada.

Na Fig. 2.10a apresenta-se uma vista explodida dos constituintes de um material ferromagnético (duro), na qual se pode ter uma noção das dimensões e quantidades relativas do átomo, domínio, cristal e um pequeno volume de material. Os cristais têm a ver com a estrutura cristalina dos materiais ferromagnéticos, podendo ser monocristalinos ou policristalinos, estando também relacionados com as direcções de fácil magnetização e de difícil magnetização [Smith1998] pp.674. Na Fig. 2.10b pode ver-se a mudança de orientação dos domínios ao longo de uma parede entre dois domínios com orientação oposta. Esta mudança faz-se ao longo de cerca de 300 átomos.

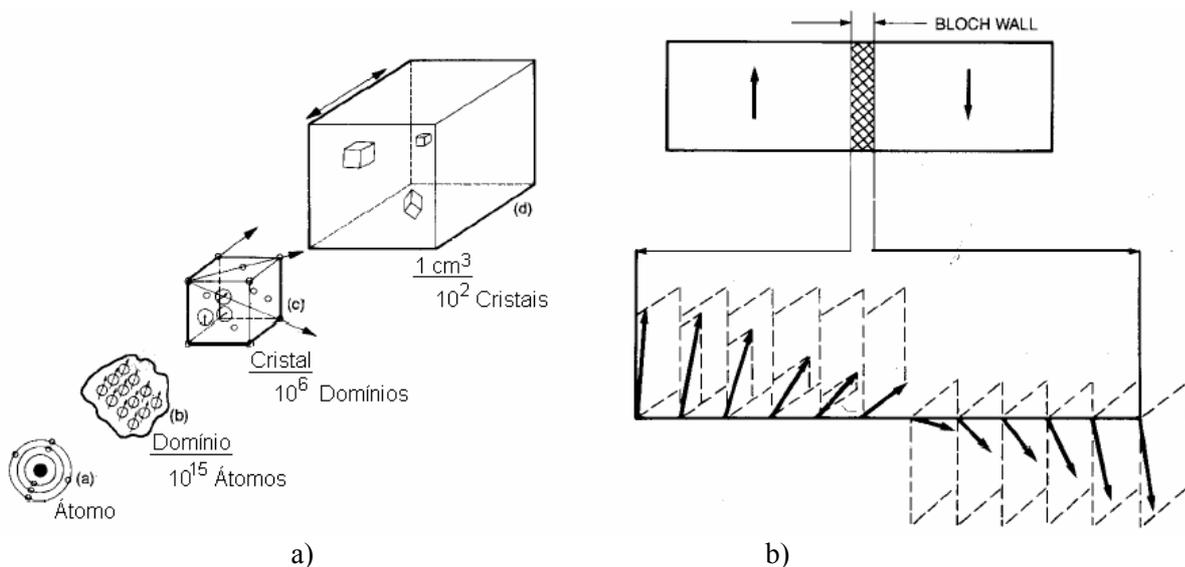


Fig. 2.10. a) Vista explodida de um volume de material ferromagnético; b) parede de domínio (“*Bloch wall*”) entre domínios ferromagnéticos [PMG1988] pp.4.

O processo de magnetização pode ser melhor explicado usando a chamada curva de magnetização. A **curva de magnetização** é um gráfico, obtido experimentalmente, do valor da indução magnética interna,  $B$ , em função da intensidade do campo magnético exterior aplicado,  $H$ . Na Fig. 2.11a mostra-se uma curva típica para um material ferromagnético, o ferro. Para compreender o comportamento da curva, considere-se em primeiro lugar uma amostra de material não magnetizado. Este não apresenta magnetização interna (os domínios estão orientados aleatoriamente) e portanto o seu ponto de funcionamento é o ponto  $O$  na Fig. 2.11a (origem dos eixos). Quando se aplica um campo exterior, à medida que este cresce, a indução magnética na amostra de material vai aumentando ao longo da curva representada. Continuando a aumentar o campo exterior, o número de domínios que ainda existem para orientar vai diminuindo e, portanto, o declive da curva diminui. Num dado momento, todos os domínios estarão alinhados com o campo exterior. Por isso, qualquer aumento do campo magnético exterior apenas provocará um aumento do campo no interior da amostra igual a esse aumento do campo magnético exterior: já não há qualquer aumento da magnetização, pois o material já está totalmente magnetizado (ou seja, já não há mais domínios para orientar). Este ponto é mostrado como  $M_I$  e é chamado **ponto de saturação**. Ao segmento de curva entre  $O$  e  $M_I$  chama-se **curva de magnetização inicial** (ou **curva de magnetização em corrente contínua**, ou ainda **curva de primeira magnetização** [Semail1998] pp.83). Na Fig. 2.11b apresenta-se a curva da permeabilidade magnética correspondente à curva de magnetização inicial da Fig. 2.11a.

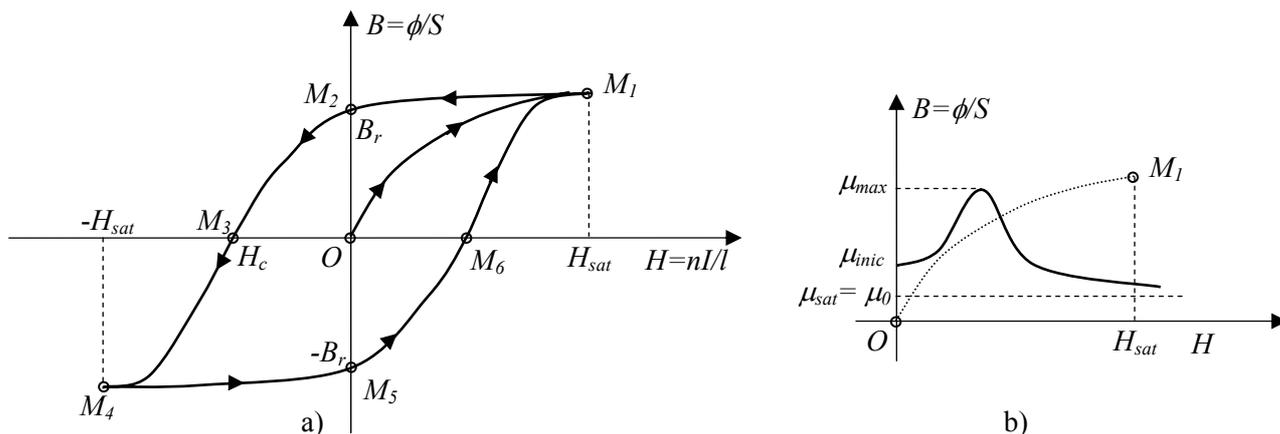


Fig. 2.11. a) Curva de magnetização (curva  $B(H)$ ) para o ferro; b) variação da permeabilidade magnética  $\mu$  ao longo da curva de magnetização inicial,  $OM_1$ .

Na Fig. 2.12 apresenta-se mais em detalhe esta curva de primeira magnetização e a evolução dos domínios quando um material ferromagnético desmagnetizado é magnetizado até à saturação. Na realidade, primeiro crescem os domínios com orientação favorável e depois rodam a sua orientação, porque o crescimento por movimento das fronteiras requer menos energia que a rotação dos domínios.

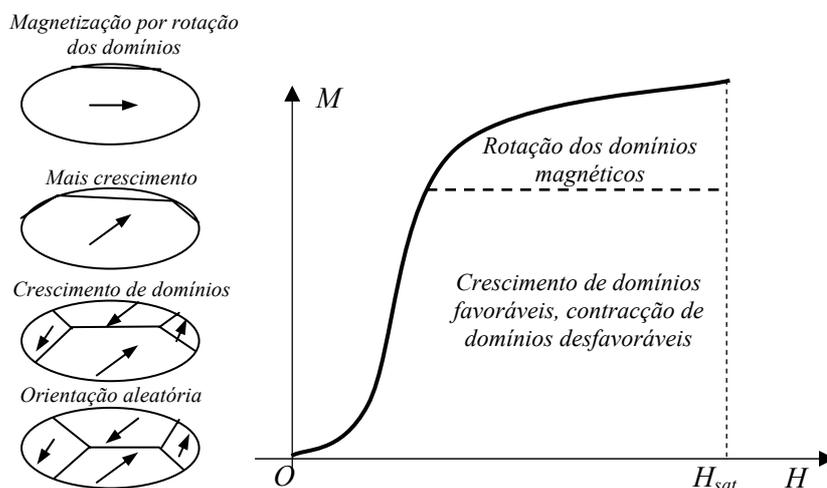


Fig. 2.12. Crescimento e rotação dos domínios magnéticos, quando um material ferromagnético desmagnetizado é magnetizado até à saturação [Smith1998] pp.671.

Voltando ao ponto  $M_1$  da Fig. 2.11a, se agora se começar a diminuir o campo magnético exterior (representado na figura pela sua intensidade,  $H$ ), a curva de magnetização não segue a curva de magnetização inicial. Em vez disso, a indução magnética diminui mais devagar devido a um atraso no realinhamento dos domínios. Por outras palavras, os domínios tendem

a manter a sua magnetização. Este atraso no alinhamento dos domínios dá origem ao nome de **curva de histerese** (“atrasar”, em Grego). Diminuindo o campo ainda mais, poderá chegar-se ao ponto  $M_2$ . Neste ponto, a intensidade do campo magnético exterior é zero ( $H=0$ ), mas a indução magnética interna do material é  $B_r$ . A  $B_r$  chama-se **indução remanescente**, ou **remanente**, pois é “o que sobra” depois do campo magnético exterior ter sido removido. Assim, neste ponto, tem-se um pedaço de material que apresenta um campo magnético interno na ausência de campo magnético exterior.

Para reduzir a indução magnética até zero, é necessário aplicar-se um campo magnético de sentido contrário ao original. Este processo é designado por **desmagnetização**. Se a intensidade do campo magnético exterior negativo for aumentada até  $H_c$  (ponto  $M_3$ ), a indução magnética é reduzida a zero. A  $H_c$  dá-se o nome de **campo coercivo**. Continuando ainda a aumentar o campo desmagnetizante, a indução magnética torna-se negativa; ou seja, depois dos domínios terem voltado a uma situação de orientação aleatória, começam agora a orientar-se na direcção contrária da amostra. Se o processo continuar até que todos os domínios estejam orientados na direcção oposta, chega-se novamente a um ponto de saturação,  $M_4$ . Refira-se que as amplitudes de **H** e **B** em  $M_1$  e  $M_4$  são iguais visto que a estrutura dos domínios é a mesma, excepto quanto às direcções.

Reduzindo o campo desmagnetizante, reduz-se a indução magnética até  $-B_r$  (ponto  $M_5$ ), que é também uma indução magnética remanescente, e com a mesma amplitude que  $B_r$  em  $M_2$ . Para reduzir este campo remanescente a zero, é necessário aumentar a intensidade do campo magnético, agora novamente no sentido positivo. No ponto  $M_6$ ,  $B=0$  (chegou-se à intensidade do campo magnético coercivo,  $H_c$ ). Se se continuar ainda a aumentar  $H$ , poder-se-á chegar novamente ao ponto de saturação  $M_1$ , tendo completado o ciclo. Se agora se continuar com os ciclos de diminuir e aumentar a intensidade do campo magnético, vai-se percorrer o ciclo exterior da Fig. 2.11a, que se costuma designar por **ciclo histerético** (ou **anel de histerese** [Smith1998] pp.679). A única forma de se voltar à curva de magnetização inicial, i.e., a partir do ponto  $O$ , é desmagnetizar primeiro o material completamente ou começar com um material que não tenha sido sujeito a magnetização. Isto significa que os materiais magnéticos têm uma “história”, ou seja, que o estado do material depende do que tiver acontecido antes.

Da curva de magnetização (ou “curva  $B-H$ ”, ou ainda “curva  $B(H)$ ”) e da descrição feita, pode concluir-se àcerca das seguintes propriedades:

1. Os valores relevantes, ponto de saturação  $B_{sat}$  e  $H_{sat}$ , indução magnética remanente  $B_r$ , e intensidade do campo coercivo  $H_c$ , são dependentes do material. Com efeito, cada material satura a diferentes valores de campo magnético e tem  $H_c$  e  $B_r$  diferentes. Na Tabela 2.3, são apresentados esses valores para alguns materiais ferromagnéticos importantes;
2. Visto que a curva de magnetização dá a relação entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ ), a inclinação da curva em qualquer ponto dá a permeabilidade do material ferromagnético para cada valor do campo. A inclinação depende da localização na curva, por isso a permeabilidade dos materiais ferromagnéticos é uma função não linear da intensidade do campo magnético  $\mathbf{H}$ . Para exprimir isto é comum escrever-se

$$\mathbf{B}=\mu(H)\mathbf{H} \quad (2.18)$$

3. A permeabilidade será negativa entre o ponto  $M_2$  e  $M_3$ , devido a que, para  $H$  negativo, se terá  $B$  positivo. De forma similar, entre os pontos  $M_5$  e  $M_6$ ,  $H$  é positivo e  $B$  negativo. A permeabilidade é portanto positiva no 1º e 3º quadrantes da curva de magnetização, sendo negativa no 2º e 4º;
4. Para além disso, a permeabilidade é elevada ao longo da curva de magnetização inicial, excepto na proximidade da saturação. Na saturação a permeabilidade relativa aproxima-se de 1;
5. A consequência mais importante deste comportamento dos materiais é que um aumento na intensidade do campo magnético (que normalmente aumenta a magnetização e portanto a indução magnética) pode causar saturação e, assim, o acréscimo resultante na indução magnética é muito menor para valores elevados de intensidade do campo magnético. Por essa razão, os dispositivos magnéticos são normalmente projectados para trabalharem abaixo do ponto de saturação;
6. A região entre  $M_2$  e  $M_3$  é caracterizada por uma indução magnética interna na ausência de campo magnético exterior ou mesmo na presença de um campo exterior desmagnetizante. Esta é a região em que os **ímans permanentes** operam. Um íman permanente ideal operaria no ponto  $M_2$  enquanto que um íman real operará algures entre  $M_2$  e  $M_3$ ;

7. Em qualquer ponto da curva, o comportamento depende da magnetização anterior à chegada àquele ponto (i.e. da história). A única exceção é para níveis de magnetização muito baixa. No princípio da curva de magnetização inicial, o campo externo é muito baixo e a magnetização é reversível; assim, a magnetização não segue um ciclo histerético mas sim inverte o sentido de deslocamento ao longo da curva de magnetização inicial;
8. A área da superfície dentro do ciclo da curva de magnetização representa energia: a energia necessária para mover as paredes dos domínios e alinhá-los. Esta energia é perdida no processo. Assim, quando a magnetização é feita com um campo periódico (campo alternado), cada período do campo exterior traça o ciclo uma vez. Durante esse ciclo há uma perda de energia por unidade de volume de material, e, apesar de não se calcular agora esta energia, é óbvio que quanto mais estreito for o ciclo, menor será a perda de energia, isto é menores serão as **perdas no material ferromagnético**. Estas são as perdas normalmente designadas por **perdas por histerese**;
9. Ciclos estreitos e altos, representam materiais com baixas perdas por ciclo, magnetismo remanescente elevado e baixo campo coercivo. Em particular, o baixo campo coercivo, indica que o material pode ser facilmente magnetizado e desmagnetizado. Isto é muito importante em aplicações em que é necessário magnetizar e desmagnetizar o material rápida e repetidamente como sucede com uma grande gama de máquinas e dispositivos electromagnéticos, como motores e geradores eléctricos, transformadores, relés, contactores, etc. Os materiais ferromagnéticos que apresentam aquelas características designam-se por **materiais magnéticos macios**. Na Tabela 2.3 mostram-se alguns valores típicos. Note-se que a intensidade do campo coercivo é baixa, tipicamente  $H_c < 50$  A/m. Em [Bozorth1993]pp.864-874 são apresentadas tabelas com propriedades físicas e magnéticas de muito mais materiais. Na Fig. 2.13 podem ver-se algumas curvas de magnetização para diversos materiais magnéticos macios<sup>17</sup>;
10. Ciclos largos e baixos representam materiais com baixo magnetismo remanescente, mas com campo coercivo elevado. A grande vantagem destes materiais é que uma vez magnetizados, é difícil (é “duro”) desmagnetizá-los. Por isso, são

---

<sup>17</sup> Sobre o significado de M-19 e AISI 1020, veja-se o “ANEXO 4 - CORRESPONDÊNCIAS ENTRE DESIGNAÇÕES DE CHAPA FERROMAGNÉTICA PARA DIVERSAS NORMAS INTERNACIONAIS (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS)”.

designados por **materiais magnéticos duros**. Ou seja, para os desmagnetizar será necessário um campo desmagnetizante elevado para reduzir a sua magnetização a zero. São assim os candidatos naturais para a produção de ímãs permanentes; no entanto, o ideal seria ter materiais com simultaneamente  $B_r$  e  $H_c$  elevados. Na Tabela 2.4 apresentam-se algumas características de materiais magnéticos duros úteis (note-se o elevado valor do campo coercivo de alguns deles) e na Fig. 2.14 algumas curvas de desmagnetização. Os ímãs de Sm-Co (Samário-Cobalto) e Nd-Fe-B (Neodímio-Ferro-Boro) são também designados por “**ímãs permanentes de terras raras**”, apresentando melhores propriedade magnéticas que os **ímãs cerâmicos** (ferrites), sendo no entanto muito mais caros.

Tabela 2.3. Propriedades de materiais ferromagnéticos macios.

Material	Permeabilidade relativa (max.) $\mu_r$	Intensidade do campo coercivo $H_c$ (A/m)	Indução remanescente $B_r$ (T)	Indução de saturação $B_{sat}$ (T)
Ferro (0,2% de impurezas)	9000	80	0,77	2,15
Ferro puro (0,05% de impurezas)	$2 \times 10^5$	4	-	2,15
Ferro com silício (3% Si)	55000	8	0,95	2,0
Permalloy (78% Ni)	$10^6$	4	0,6	1,08
Supermalloy (5% Mo, 79% Ni)	$10^7$	0,16	0,5	0,79
Permendur	5000	160	1,4	2,45
Níquel	600	-	-	-

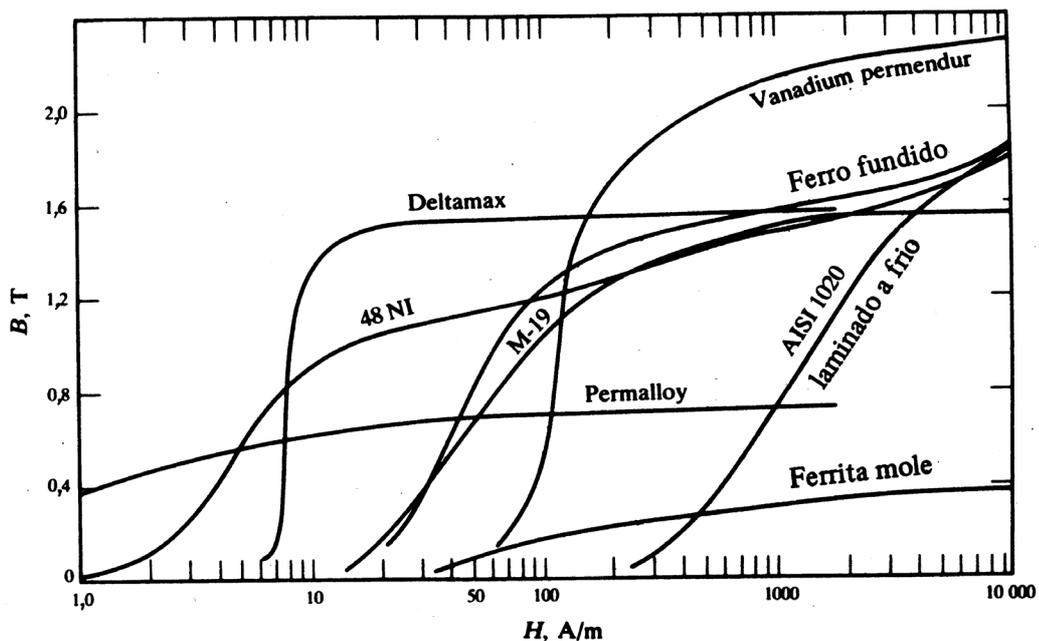


Fig. 2.13. Curvas  $B(H)$  de alguns materiais magnéticos macios [Nasar1984] pp.211.

Tabela 2.4. Propriedades de materiais ferromagnéticos duros.

Material	Permeabilidade relativa $\mu_r$	Intensidade do campo coercivo $H_c$ (A/m)	Indução remanescente $B_r$ (T)	Temperatura de Curie (°C)
Alnico (Alumínio-Níquel-Cobalto)	3-5	60	1,25	850
Ferrite (Bário-Ferro)	1,1	240	0,38	600
Sm-Co (Samário-Cobalto)	1,05	700	0,9	700
Nd-Fe-B (Neodímio-Ferro-Boro)	1,05	800	1,15	300

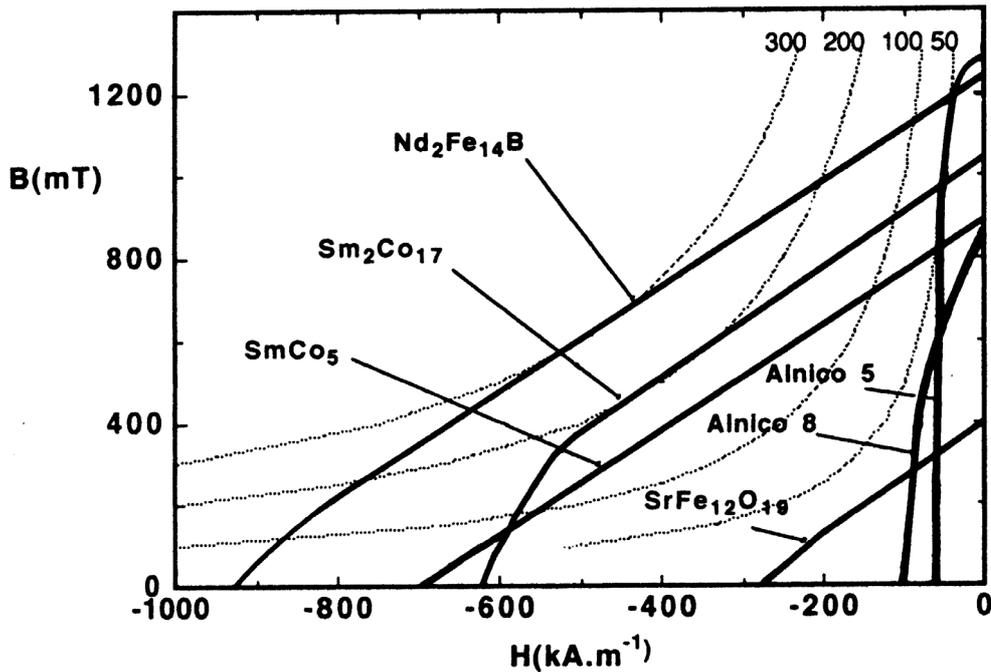


Fig. 2.14. Curvas  $B(H)$  no segundo quadrante para ímãs permanentes típicos de Nd-Fe-B, Sm-Co e ferrite. As linhas a ponteadas são curvas de produto  $BH$  constante [Coey1996] pp.8.

É importante referir que as propriedades magnéticas de todos os materiais são dependentes de certa forma da temperatura. Em particular, cada material tem um ponto, chamado “temperatura de Curie” ou “ponto de Curie”, acima do qual perde a sua magnetização. A esta temperatura os materiais ferromagnéticos mudam o seu comportamento magnético para o dos materiais paramagnéticos. Como consequência, não é possível magnetizar um material ferromagnético acima da sua **temperatura de Curie** (para o ferro, este valor é de cerca de 770 °C). O mesmo se passa com os ímãs permanentes: se é aquecido acima da sua temperatura de Curie, perde a sua magnetização e torna-se apenas um pedaço de material (paramagnético). Os ímãs permanentes de Sm-Co, embora sejam mais antigos e tenham menor produto energético que os de Nd-Fe-B, continuam a apresentar a vantagem ter uma temperatura de Curie bastante mais elevada. Um ímã desmagnetizado normalmente pode ser

novamente magnetizado, mas o processo de magnetização depende do material e normalmente envolve mais do que simplesmente pôr o material num campo magnético. Concretamente, no caso de máquinas eléctricas, magnetizar de novo implicaria extrair o material dos (ex-)ímãs permanentes e colocá-los num magnetizador [Steingroever1997b], o que por vezes será mais caro e complicado do que comprar uma nova máquina. O fundamental, portanto, é calcular bem as perdas e a dissipação térmica na máquina para que, em nenhuma circunstância a temperatura na máquina se aproxime da temperatura de Curie.

### 2.2.3 Outros materiais magnéticos

Apesar de todos os materiais serem diamagnéticos, ou paramagnéticos, ou ferromagnéticos, existem algumas subclasses de materiais que são suficientemente diferentes e importantes em engenharia para serem considerados separadamente dos três grupos gerais. Dois deles, com importantes aplicações em engenharia, são os **ferrimagnéticos** e os **superparamagnéticos**.

Os materiais **ferrimagnéticos**, mais conhecidos como **ferrites**, são baseados em partículas ferromagnéticas, comprimidas juntamente com agentes aglutinantes para adquirirem as formas sólidas pretendidas. O momento dipolar magnético nas ferrites é inferior ao do material ferromagnético base a partir do qual são formadas (essencialmente compostos de ferro com outros óxidos). As ferrites têm baixa condutividade e, sendo feitas de pequenas partículas (pós ou poeiras), podem ser produzidas em quase qualquer forma desejada. A maior parte das ferrites são usadas em altas frequências, visto que a sua baixa condutividade é uma vantagem (perdas muito menores; cf. página 89). Por exemplo, o núcleo da antena da maior parte dos rádios portáteis, bem como dos transformadores de alta frequência em fontes de alimentação comutadas e em televisões são feitos de ferrite. Há ainda a referir que existem ferrites macias e duras, tal como se pode ver na Fig. 2.13 e Fig. 2.14 consoante os valores de  $H_c$  e  $B_r$ .

Os materiais **superparamagnéticos** são feitos de pequenas partículas ferromagnéticas, suspensas em substratos não condutores como resinas ou plásticos. As aplicações mais comuns são fitas magnéticas para gravação, discos rígidos e outros suportes magnéticos que contenham partículas de ferro ou crómio, suspensas em substratos sólidos. Cada partícula é uma entidade magnética separada, podendo ser magnetizada ou desmagnetizada separada ou juntamente com as partículas vizinhas. O estado das partículas é consequência da magnetização aplicada e, portanto, pode ser utilizada para gravar e recuperar informação. As

utilizações deste tipo de materiais são vastas, indo desde fitas magnéticas (áudio, vídeo e bandas magnéticas em cartões de crédito) a outros suportes magnéticos como disquetes e discos duros. Na Fig. 2.15 apresenta-se uma microfotografia da superfície de um “disco duro” de computador, com informação gravada sob a forma de sinais digitais.

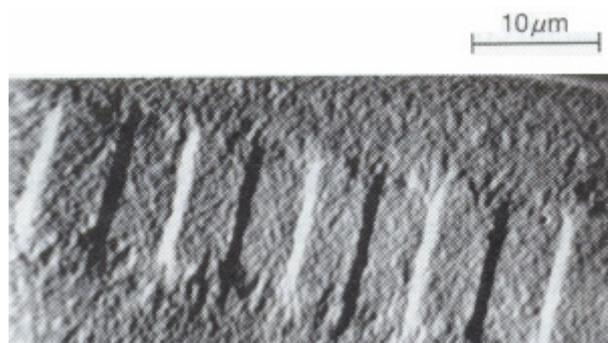


Fig. 2.15. Microfotografia da superfície de um “disco duro” de computador com informação gravada sob a forma de sinais digitais em materiais magnéticos duros [Fishbane1996] pp.873.

Outro tipo interessante de materiais neste grupo são os **fluidos magnéticos**. Utilizam partículas similares às usadas nas fitas magnéticas mas suspensas num líquido. O líquido pode ser água, óleo, ou um solvente (como querosene). Os fluidos magnéticos são úteis na detecção de campos magnéticos, no teste de quebras em materiais magnéticos e ainda nalgumas outras aplicações em que o estado líquido é mais conveniente que o sólido. Uma dessas aplicações, utilizada experimentalmente, é o tratamento de tumores localizados. Estes são injectados com o fluido magnético e de seguida todo o corpo ou o órgão específico é exposto a um campo de microondas (semelhante ao dos fornos de microondas, mas de intensidade muito mais baixa). O material magnético absorve muito mais energia que os tecidos envolventes, aquecendo por isso o tumor localmente e destruindo-o com danos reduzidos para os tecidos envolventes. Os fluidos magnéticos são também utilizados em altifalantes especiais em que os fluidos conduzem o calor circulando através de permutadores de calor. Outra aplicação importante dos fluidos magnéticos é em selagem magnética, utilizados juntamente com rolamentos magnéticos.

Há ainda a considerar os materiais **antiferromagnéticos**. O antiferromagnetismo é um tipo de magnetismo que ocorre em alguns materiais. Na presença de um campo magnético, os dipolos magnéticos dos átomos destes materiais alinham-se em sentidos opostos (isto é o contrário do que ocorre nos materiais ferromagnéticos, daí o nome). Estes materiais são relativamente incomuns, mas o manganês e crómio, no estado sólido à temperatura ambiente são antiferromagnéticos. Geralmente, os materiais antiferromagnéticos apresentam

antiferromagnetismo a baixa temperatura, tornando-se desordenado acima de uma determinada temperatura, temperatura de Neel<sup>18</sup>. Acima da temperatura de Neel, o material é tipicamente paramagnético. O comportamento antiferromagnético a baixa temperatura normalmente resulta em propriedades diamagnéticas, mas por vezes revela comportamento ferrimagnético, o que em muitas propriedades físicas observáveis se aproxima mais das interações que ocorrem no materiais ferromagnéticos.

Em resumo, neste sub-capítulo foi feita uma apresentação dos diversos fenómenos existentes nos materiais magnéticos, bem como dos tipos de materiais magnéticos mais comuns. A presente dissertação vai-se debruçar sobre os materiais ferromagnéticos e em particular sobre as chapas de ferro silício de grão não orientado. Estas são utilizadas na grande maioria das máquinas eléctricas rotativas, nas quais o fenómeno das perdas é importante.

### **2.3 Mecanismo físico das perdas nos materiais ferromagnéticos**

Tal como se verá um pouco mais à frente, em electrotecnia há o hábito de distinguir dois ou três tipos de perdas no ferro: as perdas por histerese, as perdas por correntes induzidas (ou perdas por correntes de Foucault) e, por vezes, também as perdas em excesso. No entanto, a sua origem física é nos três casos a mesma: as correntes de Foucault. O seguinte modelo simplificado permite compreender a sua origem [Semail1998] pp.91-94.

Considerem-se dois domínios magnéticos separados por uma parede de Bloch, tal como na Fig. 2.16a, sujeitos a um campo magnético  $\mathbf{H}$  variável no tempo em amplitude, mas não em direcção.

---

<sup>18</sup> A temperatura de Neel está para os materiais antiferromagnéticos como a temperatura Curie está para os ferromagnéticos. Deve o seu nome a Louis Néel (1904-2000), que recebeu o prémio Nobel da física em 1970 pelo seu trabalho nesta área (<http://www.answers.com/main/ntquery?s=neel+temperature>).

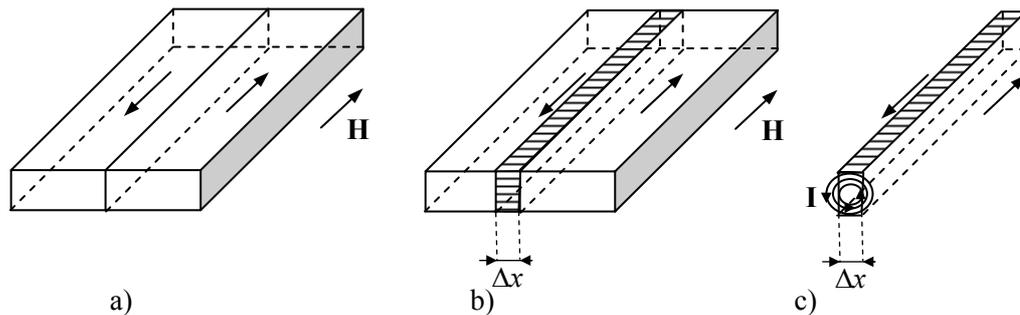


Fig. 2.16. a) Dois domínios com orientação diferentes, separados por uma parede de Bloch;  
 b) a aplicação de um campo exterior  $\mathbf{H}$ , variável no tempo, faz deslocar a parede dos domínios;  
 c) correntes induzidas  $\mathbf{I}$  resultantes da deslocação da parede do domínio [Semail1998] pp.92.

Veja-se o que se passa durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ : a parede vai-se deslocar de  $\Delta x$ , pois o domínio da direita vai crescer em relação ao outro, visto que a sua orientação em relação ao campo é mais favorável, tal como se pode ver na Fig. 2.16b. Neste elemento de volume, o campo magnético passou de  $+B$  a  $-B$ . Como consequência há uma variação de fluxo durante  $\Delta t$  e, por isso, segundo a **Lei de Faraday** e **Lei de Lenz**<sup>19</sup>, expressas por

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (2.19)$$

(em que  $\Psi$  representa o **fluxo total ligado com um enrolamento**; neste caso será simplesmente o **fluxo magnético**  $\phi$ ), vai surgir uma força electromotriz induzida  $e$ , dada por

$$e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (2.20)$$

As correntes induzidas vão assim opor-se à causa que lhe deu origem (segundo a Lei de Lenz, e expresso pelo sinal menos nas duas equações anteriores), criando um campo que se vai opor à variação de  $+B$  a  $-B$ . Elas circulam no interior do material ferromagnético condutor, tal como representado na Fig. 2.16c, provocando assim perdas por correntes induzidas devido ao efeito de Joule.

<sup>19</sup> **Lei de Faraday da indução electromagnética** (também existe a Lei de Faraday da electrólise) ou **Lei geral da indução electromagnética**: “Sempre que através da superfície abraçada por um circuito, tiver lugar uma variação de fluxo, gera-se nesse circuito uma fem induzida; se o circuito é fechado, será percorrido por uma corrente induzida”. De Michael Faraday, físico e químico inglês (1791–1867), a quem muito devemos na engenharia electrotécnica, tendo, entre outras muitas coisas, inventado o primeiro dínamo: um disco de cobre, rodando entre os pólos de um íman permanente, e produzindo uma força electromotriz.

**Lei de Lenz**: “O sentido da corrente induzida é tal que pelas suas acções magnéticas tende sempre a opor-se à causa que lhe deu origem”. Do cientista Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865), físico russo-alemão.

Para diminuir as perdas no ferro resultantes, é necessário utilizar materiais com baixa condutividade eléctrica, e fazer com que haja o mínimo de correntes induzidas possível bloqueando as paredes de Bloch.

Assim, o que se faz é laminar o material ferromagnético em vez de utilizar blocos de material maciço, i.e., utilizar **chapas ferromagnéticas**<sup>20</sup>, o que impede um movimento de translação, tal como se pode ver na Fig. 2.17. Note-se que na espessura de uma única chapa, há mesmo assim uma grande quantidade de domínios empilhados. As paredes de Bloch são livres de se mover entre esses domínios. Por essa razão há interesse em utilizar chapas finas (por exemplo 0,23 mm, 0,35 mm, ou 0,5 mm).

Uma chapa é constituída por grãos, zonas espaciais no seio das quais se observa a estrutura cristalina. São eles que constituem a primeira fronteira ao movimento das paredes de Bloch. No interior dum grão, podem ser observados diversos domínios magnéticos. Assim, na direcção não laminada, há interesse em que a largura dos grãos seja a mais pequena possível. Isso consegue-se orientando os grãos na direcção do campo sempre que este tenha direcção invariável, como acontece nos transformadores. Nesse caso tem-se aquilo a que se chama **chapas ferromagnéticas de grão orientado**. Estas apresentam melhores propriedades magnéticas (maior permeabilidade relativa) na direcção de melhor magnetização e menores perdas, não sendo no entanto boas para a situação em que há alteração da direcção do campo magnético, como acontece normalmente nas máquinas eléctricas rotativas. Nestas devem-se usar **chapas ferromagnéticas de grão não orientado**, que têm as mesmas propriedades em todas as direcções.

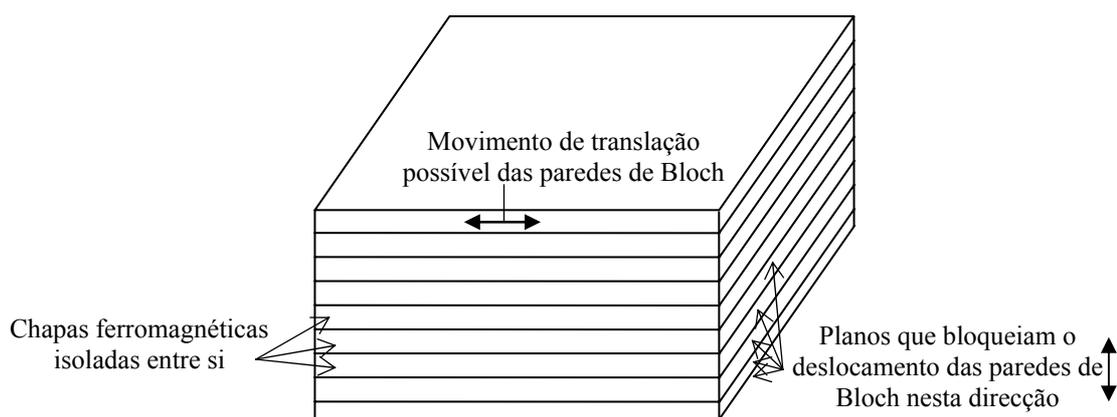


Fig. 2.17. a) Chapa ferromagnética empilhada [Semail1998] pp.93.

<sup>20</sup> Em inglês, as chapas ferromagnéticas têm, pelo menos, as seguintes designações: “*magnetic steel laminations*” ou simplesmente “*laminations*”, “*electric steel sheets*” ou “*silicon steel sheets*”; em francês costumam designar-se por “*tôles magnétiques*”.

Veja-se agora porque é que, apesar das perdas terem como origem as correntes induzidas, se pode no entanto continuar a falar de dois (ou três) tipos de perdas:

As perdas por histerese devem-se às correntes induzidas geradas pelos movimentos descontínuos e irreversíveis das paredes de Bloch que se formam junto às zonas de restrição. Uma observação fina da curva  $B(H)$  permite, com efeito, pôr em evidência o seu carácter descontínuo (variação por saltos, ditos de “Barkhausen”<sup>21</sup>). É de notar que, mesmo a baixa frequência, este fenómeno estará sempre presente. Estas perdas podem ser minimizadas através de:

- controlo das impurezas do material e das tensões internas da chapa;
- no caso de chapas de grão orientado, obtenção de maior grau de orientação dos grãos. Assim, estes estarão já na boa direcção, não sendo por isso necessário despendere energia para fazer a rotação dos domínios para se alinharem com o campo magnético exterior.

As chamadas perdas por correntes induzidas são obviamente também elas provocadas pelas correntes induzidas! Tal como se viu, uma variação temporal do campo magnético produz movimentos regulares das paredes dos domínios (ou de Bloch), síncronos com o campo. Por isso, estas perdas dependem da frequência de excitação e existiriam mesmo se o material fosse perfeito (sem defeitos, como juntas dos grãos, impurezas, tensões mecânicas resultantes do corte da chapa, etc.). Podem ser reduzidas por:

- uma diminuição do tamanho do grão: a amplitude dos movimentos das paredes diminui;
- a diminuição da espessura das chapas;
- o aumento da resistividade eléctrica (junção de impurezas, normalmente o silício);
- aplicação, para as chapas de grão orientado, de esforços mecânicos de direcção paralela à de laminação (que é também a de mais fácil magnetização) por tracção e por irradiação com feixe de raios laser.

---

<sup>21</sup> De Heinrich Barkhausen, físico alemão (2 Dezembro de 1881 a 20 de Fevereiro de 1956).

## 2.4 Algumas formas comuns de cálculo das perdas nos materiais ferromagnéticos

No projecto de dispositivos electromagnéticos, é importante efectuar o cálculo das perdas em chapas ferromagnéticas. Para esse efeito, são várias as possibilidades, de acordo com os dados disponíveis, o grau de precisão e a rapidez necessárias, e os conhecimentos e as técnicas de projecto utilizadas.

1- Assim, quando se pretende um projecto rápido, e quando se dispõe desta informação, é costume utilizarem-se as curvas de perdas fornecidas pelos fabricantes, obtidas através do ensaio com a Estrutura de *Epstein* (cf. página 91). Estas curvas dão as perdas em função da indução máxima [AST1999a] [EGB1997]. No entanto, muitas vezes, não se dispõem destas curvas, ou apenas se têm os valores das perdas para 50 Hz.

2 - Quando não se dispõe das curvas de perdas, ou quando se quer calcular as perdas para frequências diferentes daquela para a qual se têm as curvas e se tem a possibilidade de calcular a densidade de correntes induzidas, normalmente utilizando o método dos elementos finitos, há a possibilidade de calcular as perdas no ferro, tal como fizemos no passado [Pinto2001], utilizando as expressões seguintes: para  $P_{hist}$ , a densidade de potência de perdas por histerese, em  $W/m^3$

$$P_{hist} = k_H f \rho B_{max}^2 \quad (2.21)$$

e para  $P_J$ , densidade de potência de perdas por efeito de Joule, i.e. por correntes induzidas, também em  $W/m^3$

$$P_J = \frac{1}{S} \int_S \rho_0 J^2 dS \quad (2.22)$$

em que  $k_H$  representa um coeficiente de histerese,  $f$  é a frequência em Hz,  $\rho$  é a densidade específica do material em  $kg/m^3$  (é comum um valor da ordem de 7620 a 7850  $kg/m^3$  [Chatelain1983] pp.15, tendo sido usado 7700  $kg/m^3$  no trabalho referido acima),  $B_{max}$  é a indução máxima (neste caso a indução em cada elemento finito), em T. Note-se que  $B_{max}$  está elevado ao quadrado, embora seja comum considerar-se 1,6 [Say1976] pp.175. Na equação (2.22),  $S$  é área da superfície do material ferromagnético, em  $m^2$ ,  $\rho_0$  representa a resistividade

elétrica em  $\Omega \cdot m$  à temperatura de referência,  $T_0$ , e  $J$  o valor eficaz da densidade de corrente sinusoidal, em  $A/m^2$ . [Krawczyk1993]pp.108.

3- Uma outra forma de calcular as perdas no núcleo de material ferromagnético, mais elaborada, utiliza a seguinte expressão empírica

$$\frac{P}{f} = C_0 + C_1 f + C_2 \sqrt{f} \quad (2.23)$$

em que  $P$  é a densidade de potência de perdas total em  $W/m^3$  e os coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são funções da indução máxima (ou de pico).

As perdas por histerese, sendo a área do ciclo histerético (tal como se viu na explicação da Fig. 2.11), dependem de uma grande quantidade de detalhes. No entanto, a maioria desses detalhes são irrelevantes, e apenas algumas características são importantes para a equação das perdas. Isto é ainda mais notável se se considerar que esta lei se aplica a uma grande quantidade de diferentes materiais magnéticos, caracterizados por estruturas com domínios muito diferentes. Uma consequência disso é a separação das perdas. Com efeito, é possível separar as perdas magnéticas no material ferromagnético em três termos, que reflectem não apenas a lei das perdas, mas também a existência de três escalas ou dimensões espaciais do processo de magnetização:

- *Perdas por Histerese*. À escala microscópica dos saltos de Barkhausen (“*Barkhausen jumps*”), relacionadas com  $C_0$ .
- *Perdas Clássicas* (perdas por correntes induzidas). À escala da geometria da amostra, relacionadas com  $C_1 f$ .
- *Perdas em Excesso* (“*Excess losses*”). À escala dos domínios, relacionadas com  $C_2 \sqrt{f}$ .

As perdas por histerese devem-se ao carácter descontínuo, à escala microscópica, do processo de magnetização, ou seja, devem-se à energia dissipada por cada salto de Barkhausen.

O procedimento clássico para determinar as perdas por histerese é a utilização da **equação de Steinmetz** (da qual foi derivada a equação (2.21)) e que em [Bozorth1993]pp.509 é apresentada como

$$W_h = \eta B^{1,6} \quad (2.24)$$

em que  $W_h$  é a perda por histerese, por ciclo, em ergs/cm<sup>3</sup>,  $B$  é o valor máximo da indução, e  $\eta$  é um coeficiente numérico que varia de material para material. Por exemplo,  $\eta=120 \times 10^6$  para ferro-silício a 4%, rolado a quente, e  $\eta=500 \times 10^6$  para ferro-silício a 3%, rolado a frio; para ferro tratado termicamente (“*annealing*”) a 900°C,  $\eta=1200 \times 10^6$ . Outros valores podem ser encontrados em [Bozorth1993]pp.513. A conversão dos valores para o sistema internacional, pode ser feita considerando que para o ferro, a 60 Hz, 1W/kg=1312 ergs/cm<sup>3</sup>/ciclo; a 50 Hz, 1W/kg=1574 ergs/cm<sup>3</sup>/ciclo. Para ferro-silício a 4%, a 60 Hz, 1W/kg=1267 ergs/cm<sup>3</sup>/ciclo; a 50 Hz, 1W/kg=1520 ergs/cm<sup>3</sup>/ciclo.

Uma melhor opção, é utilizar o facto de que a densidade volúmica de energia dissipada devido aos saltos de Barkhausen corresponde à área do ciclo histerético quase-estático e portanto a energia perdida por ciclo é dada pela área do ciclo histerético quase-estático,  $A_h$ , em W/(Hz·m<sup>3</sup>), ou multiplicada pelo volume da amostra, para W/Hz. Assim, as perdas por histerese, em W/m<sup>3</sup>, podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$P_{hist} = f A_k \quad (2.25)$$

A área  $A_h$  pode ser calculada com boa precisão utilizando o modelo clássico de Preisach (“*classical Preisach model*”) [Blas2004b].

Não vamos detalhar aqui o assunto do modelo de Preisach, estático ou dinâmico, que tem estado a ser objecto de estudo dos trabalhos de doutoramento do Eng. Alfredo de Blas, da *Universidad Politécnica de Cataluña*, com quem temos estado a colaborar, e de cuja colaboração resultaram já duas publicações conjuntas.

Quanto às perdas em excesso, o assunto será retomado em “3.1 - Definição do problema”, e sendo esta dissertação dedicada maioritariamente ao estudo das perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas, o tema será abordado em maior profundidade nos próximos capítulos.



### 3 CÁLCULO DE PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, CONSIDERANDO EFEITO PELICULAR E INFLUÊNCIA DA LARGURA DA CHAPA

#### 3.1 Definição do problema

Tanto as correntes induzidas como a histerese são muitas vezes efeitos indesejáveis, visto que para uma boa parte dos dispositivos se traduzem em perdas com a consequente produção de calor. Por isso, se tentam minimizar utilizando circuitos magnéticos constituídos por chapa ferromagnética empilhada (também designada simplesmente por “chapa ferromagnética” ou “chapa magnética”) em vez de peças maciças.

Assim, considere-se a chapa ferromagnética laminada representada na Fig. 3.1, com largura  $w$ , comprimento  $l$  e espessura  $d$ , com permeabilidade magnética  $\mu$ , condutividade  $\sigma$  e permitividade eléctrica  $\varepsilon$ .

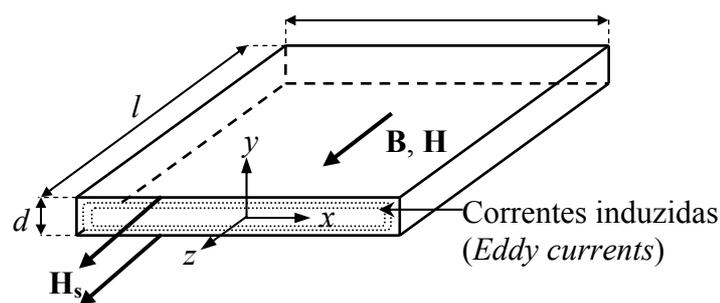


Fig. 3.1. Chapa ferromagnética com espessura  $d$ , largura  $w$  e comprimento  $l$ , sujeita a um campo magnético variável  $\mathbf{H}$  e correntes induzidas resultantes.

Se a chapa for submetida a um campo magnético variável com vector intensidade  $\mathbf{H}$  e correspondente densidade de fluxo  $\mathbf{B}$ , vão ser nela induzidas correntes e surgir fenómenos de histerese que vão afectar o campo dentro da chapa e também dar origem a perdas, tal como visto no capítulo anterior.  $\mathbf{H}_s$  é o  $\mathbf{H}$  à superfície da chapa magnética.

Para “altas” frequências, i.e. significativamente acima dos 50 Hz, o efeito pelicular devido às correntes induzidas tem que ser considerado, pois as correntes deixam de estar uniformemente distribuídas ao longo da espessura da chapa, circulando até uma determinada profundidade do material, dependendo da frequência. Isto significa que a espessura da chapa deixa de ser toda útil, pois a densidade de fluxo não é uniformemente distribuída (cf. Fig. 3.4, página 62), mas torna-se menor e com o ângulo de fase mudando à medida que se caminha em direcção ao interior da laminação. Assim, para um campo com pulsação  $\omega=2\pi f$ , a constante de propagação  $\hat{\gamma}$  da onda electromagnética no interior da chapa [Ida2000]pp.774 é dada por

$$\hat{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta \quad (3.1)$$

em que  $\alpha$  é a constante de atenuação em Np/m e  $\beta$  é a constante de fase em rad/m. Em materiais condutivos, visto que  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são dados por

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (3.2)$$

sendo  $\delta$  a **profundidade de penetração pelicular** em m

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \sigma \mu}} \quad (3.3)$$

Para  $y=\delta$ , a densidade de corrente será 37% do seu valor à superfície [Ida1997] pp.150, ou mais exactamente,  $e^{-1}=0,3679 \Rightarrow 36,79\%$ , pois a relação entre as densidades de corrente à profundidade  $y=x\delta$ ,  $J_{x\delta}$ , e à superfície,  $J_s$ , é dada por

$$\frac{J_s}{J_{x\delta}} = e^{-x} \quad (3.4)$$

Assim, por exemplo, para uma distância à superfície  $y=3\delta$ , teremos que a densidade de corrente  $J_{3\delta}$  será  $J_{3\delta} = e^{-3} J_s = 0,0498 \approx J_s \approx 5\% J_s$ , ou seja cerca de 5% do valor que teria à superfície.

De acordo com o princípio da separação das perdas tal como apresentado por Giorgio Bertotti [Bertotti1988], as perdas médias por unidade de volume podem ser decompostas na soma de uma componente de histerese  $P_{hist}$  e uma componente dinâmica,  $P_{din}$

$$P = P_{hist} + P_{din} \quad (3.5)$$

$P_{hist}$  é igual ao produto da área do ciclo histerético quase-estático pela frequência de magnetização, originado pelo carácter descontínuo do processo de magnetização a uma escala muito microscópica, ao passo que  $P_{din}$  está associado ao comportamento macroscópico em larga escala da estrutura dos domínios magnéticos. As  $P_{din}$  podem ser consideradas como a soma de duas parcelas, as “perdas clássicas”,  $P_{class}$  (correspondentes às perdas por correntes induzidas clássicas, dadas pelo “modelo clássico” [Bozorth1993] pp.778) e as “perdas em excesso”  $P_{exc}$ , “*excess losses*”. Estas resultam do facto de que normalmente as  $P_{din}$  são significativamente superiores às  $P_{class}$ , sendo então a diferença entre elas chamada “perdas em excesso”<sup>22</sup>. Assim, a densidade de perdas totais  $P$  [Bertotti1988] (e [Jiles1994], [Brauer1999] e [Bertotti1991]),

$$P = P_{hist} + P_{class} + P_{exc} \quad (3.6)$$

pode ser dada [Bertotti1988], para frequências<sup>23</sup> superiores a 20 Hz e enquanto<sup>24</sup>  $P_{hist} \propto B_{max} f^2$ , pela mesma ordem e em  $W/m^3$ , por

$$P = C_0 B_{max}^2 f + \frac{\sigma \pi^2 d^2 B_{max}^2 f^2}{6} + C_1 (B_{max} f)^{1.5} \quad (3.7)$$

em que  $B_{max}$  é o valor máximo (ou de pico) da densidade de fluxo sinusoidal de frequência  $f$ , e  $C_0$  e  $C_1$  são constantes que podem ser determinadas a partir de dois pontos obtidos por medições efectuadas em regime quase-estático [Bertotti1988].

<sup>22</sup> Estas perdas em excesso resultam de que a estrutura de domínios magnéticos, provoca uma concentração das correntes induzidas em torno das paredes dos domínios em movimento [Atallah1992].

Outros autores [Bottauscio1998] agrupam as perdas em excesso nas “perdas por histerese dinâmicas” (“*dynamic hysteresis losses*”):  $P = P_{hist} + P_{class}$ .

<sup>23</sup> Para  $f < 20$  Hz, as  $P_{exc}$  usam uma expressão um pouco mais complexa.

<sup>24</sup> O que segundo Bertotti será uma boa aproximação pelo menos para  $B_{max} \leq 1.5$  T.

Para fluxo não sinusoidal, as perdas clássicas poderão ser dadas por uma expansão em séries de harmônicos:

$$P_{class} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2}{6} \sum_n n^2 B_n^2 \quad (3.8)$$

em que  $B_n$  é a amplitude do harmônico de ordem  $n$ .

É interessante observar que, para uma dada frequência, (3.7) põe em evidência a existência de duas contribuições básicas de  $B_{max}$  para as perdas totais  $P$ : uma proporcional a  $B_{max}^2$ , e a outra proporcional a  $B_{max}^{1.5}$ . O expoente médio exprimindo a dependência de  $P$  com  $B_{max}$ , deverá portanto estar compreendido entre 1,5 e 2, dependendo dos valores de  $C_0$  e  $C_1$  em (3.7). Esta conclusão está de acordo com as regras empíricas normalmente mencionadas na literatura, [Bozorth1993] pp.782 [Say1976] pp.175, que exprimem  $P$  como  $P \propto B_{max}^x$ , com  $x$  variando também entre 1,5 e 2, sendo  $B_{max}^{1.7}$  um valor típico.

Infelizmente, a expressão (3.7) apenas se aplica para baixas frequências, para as quais o efeito pelicular pode ser desprezado. Para frequências acima da frequência industrial, o efeito pelicular não pode ser ignorado e alguns autores [Delage-Darces2000] propuseram recentemente um modelo modificado de separação de perdas, no qual o valor de  $B_{max}$  a ser usado em (3.7) é corrigido por forma a considerar o efeito pelicular, mostrando melhores resultados que o modelo inicial de Bertotti, para frequências um pouco superiores<sup>25</sup>, até 380 Hz.

No entanto, para frequências maiores, resultantes por exemplo do uso de variadores de frequência para motores, o efeito pelicular aumenta e também a importância relativa das perdas por correntes induzidas [Sadowski2000], visto que estas dependem, de uma forma genérica, de  $f^2$ . Por isso, o estudo apresentado no presente trabalho trata principalmente do cálculo das perdas por correntes induzidas, considerando efeito pelicular para frequências até alguns kHz, tanto utilizando expressões analíticas como, e sobretudo, através do método dos elementos finitos. Um aspecto muito importante considerado neste estudo é a influência da largura da chapa nas perdas: quando a chapa é estreita, i.e. quando a relação  $w/d$  (entre a largura  $w$  e a espessura  $d$ , cf. Fig. 3.1) é pequena, deixa de ser possível utilizar as expressões

<sup>25</sup> Segundo Basso *et al* [Basso1997] as perdas em excesso são proporcionais a  $f^{1.5}$  para frequências até 200-400 Hz dependendo de  $B_{max}$ . Para além deste limite há definitivamente desvios, devido ao efeito de blindagem por correntes induzidas (“*eddy current shielding*”).

analíticas clássicas (apresentadas em “3.3 Expressões analíticas a 1D”, página 55). Torna-se então necessário efectuar uma análise por elementos finitos a 2D (duas dimensões) ou utilizar o ábaco genérico ou o modelo analítico desenvolvidos, apresentados no capítulo 6.

## 3.2 Formulação matemática do problema

### 3.2.1 Equações de Maxwell

O **problema de correntes induzidas** é governado pelas **equações de Maxwell** e leis constitutivas associadas [Coulomb1985] pp.27-41, [Lowther1986] pp.36-56, [Ida1997] pp.22-45, [Ida2000] pp.696;716, [Hayt1989] pp.311-324, as quais podem ser apresentadas na sua forma integral ou na sua forma diferencial (ou pontual). Na forma diferencial, as quatro equações de Maxwell, que representam as relações entre os campos, são:

- $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.9)$$

que expressa as **Leis de Faraday e de Lenz**, significando que um campo magnético variável origina em qualquer ponto do espaço um campo eléctrico induzido rotacional. Se existirem materiais condutores são neles induzidas correntes cujos efeitos se vão opor ao campo que lhe deu origem;

- $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.10)$$

a qual exprime a **Lei de Ampère**, tendo como significado físico que uma corrente eléctrica ou um deslocamento eléctrico variável no tempo dão origem a um campo magnético rotacional;

- $$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad (3.11)$$

esta exprime a **Lei de Ostrogradski-Gauss**, ou **Lei de Gauss eléctrica**, significando que o fluxo do deslocamento eléctrico que sai uma superfície fechada é igual à carga eléctrica encerrada nessa superfície fechada, ou seja o fluxo do vector **D** é não conservativo;

- $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.12)$$

representa a não existência de cargas magnéticas isoladas pelo que o fluxo de um campo magnético através duma superfície fechada é nulo, ou seja, significa que o fluxo magnético é conservativo. Embora não seja muito comum, é designada por “**Lei de Gauss magnética**” em [Ida2000] pp.716.

Para além destas, existe também um conjunto de 3 equações auxiliares, conhecidas como **equações dos materiais** ou **relações constitutivas**, que descrevem o meio material em termos das suas propriedades físicas:

- $$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.13)$$

que, fisicamente, representa a relação entre o deslocamento eléctrico **D** (densidade de fluxo eléctrico), a permitividade eléctrica  $\varepsilon$  do meio e o campo eléctrico **E** nesse mesmo meio. É a relação fundamental nos **materiais isolantes** e quando se estudam campos eléctricos;

- $$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (3.14)$$

fisicamente, representa a relação existente entre a densidade de fluxo existente num material de permeabilidade magnética  $\mu$ , e a intensidade do campo magnético e a densidade de fluxo originada por magnetes permanentes. É a relação fundamental nos **materiais ferromagnéticos** e quando se estudam campos magnéticos. Sendo  $\nu$  a relutividade magnética e  $\nu=1/\mu$ , a equação (3.14) pode também ser representada como:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} - \nu \mathbf{B}_r \quad (3.15)$$

- $$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.16)$$

que é a lei de Ohm, representando fisicamente que um campo eléctrico num material de condutividade eléctrica  $\sigma$  dá origem a uma corrente eléctrica, aqui representada pela densidade de corrente eléctrica de condução **J**. É a relação fundamental nos **materiais condutores** e quando se estudam problemas de correntes conduzidas.

Nas relações precedentes,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$  tanto podem ser escalares (o que acontece em materiais isotrópicos) como tensores (caso dos materiais anisotrópicos) [Ida1997] pp.36, sendo neste caso representados por  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Outras relações importantes são a que nos permite definir  $\mathbf{B}$  a partir de um campo de potencial, o vector potencial magnético,  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.8)$$

a que nos permite definir  $\mathbf{E}$  a partir de um campo escalar, o potencial eléctrico,  $V$ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.17)$$

e a equação de continuidade eléctrica

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.18)$$

Para além destas equações é necessário considerar também correctamente as condições limite, ou seja as condições que garantam a correcta continuidade dos campos nas fronteiras entre materiais com propriedades diferentes (cf. [Jin1993]pp.6-7, [Mendiratta1995] pp.287, [Ida2000] pp.553-559;707).

### 3.2.2 Definição do modelo matemático de correntes induzidas e das perdas

No caso das correntes induzidas em chapas ferromagnéticas, bem como genericamente no caso de campos variáveis no tempo em materiais condutores (ferromagnéticos ou não), o problema pode ser reduzido a uma equação de segunda ordem às derivadas parciais a partir das equações de Maxwell, o que tornará a sua resolução possível. Começando por substituir (2.8) em (3.9), esta vem

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.19)$$

o que, para ser verdade em qualquer ponto do espaço, obriga a que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.20)$$

Por outro lado, e designando apenas neste parágrafo por  $\mathbf{J}_i$  a densidade de correntes induzidas, e por  $\mathbf{J}_s$  a densidade de corrente provocada por fontes (“sources”) exteriores, temos que a densidade de corrente total  $\mathbf{J}$ , no caso da chapa magnética em que não há circulação de correntes impostas por fontes exteriores<sup>26</sup>, vem

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_i \quad (3.21)$$

pelo que substituindo (3.20) em (3.16) virá

$$\mathbf{J} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.22)$$

e como em materiais condutores  $\sigma \gg \omega \varepsilon$  (ou seja  $\sigma / \omega \varepsilon \gg 1$ ) para as frequências envolvidas<sup>27</sup>, o termo respeitante às correntes de deslocamento é desprezável em relação às correntes induzidas, temos que substituindo (3.22) em (3.10) esta virá

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.23)$$

Aplicando o operador rotacional  $\nabla$  a ambos os lados da equação anterior tem-se

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left( -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.24)$$

e usando as relações (2.8) e (3.14), virá

<sup>26</sup> Razão pela qual neste trabalho se designam quase sempre as correntes induzidas apenas por  $\mathbf{J}$ . Se existissem fontes exteriores, as equações (3.17) e (3.20) teriam que incluí-las também, ficando  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$ .

<sup>27</sup> Sendo  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , e atendendo a que para campos sinusoidais de frequência angular  $\omega$ ,  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  pode ser convertida em  $j\omega \mathbf{D} = j\omega \varepsilon \mathbf{E}$ , temos que  $J / \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma / \omega \varepsilon$ . Assim, por exemplo para uma frequência  $f = 10$  kHz,

para uma chapa magnética com  $\sigma = 4,5 \times 10^6$  S/m, e supondo uma permitividade de material condutor  $\varepsilon = 10 \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-11}$  F/m, virá  $\sigma / \omega \varepsilon = 8,093 \times 10^{11} \gg 1$  (embora normalmente  $\varepsilon$  não seja indicada para os materiais condutores, usamos aqui o valor sugerido em [Brito1999] pp.331; cf. [Bessonov1977] pp.717).

A componente de corrente de deslocamento eléctrico só tem valor igual ao da densidade de correntes induzidas quando  $\sigma = \omega \varepsilon$ , ou seja  $f = \sigma / 2\pi \varepsilon$ , o que para estes valores de propriedades só acontece para  $f = 8,093 \times 10^{15}$  Hz. Por isso, pode-se dizer com confiança que para materiais condutores as **correntes de deslocamento** são perfeitamente desprezáveis pelo menos até 1 GHz.

De referir ainda que a relação  $\sigma / \omega \varepsilon$  é conhecida por **tangente de perdas** em materiais dieléctricos com perdas [Ida2000] pp.765.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r) \quad (3.25)$$

Esta é a equação vectorial de difusão expressa em  $\mathbf{H}$ . A equação do modelo de correntes induzidas, na ausência de magnetes permanentes,  $\mathbf{B}_r=0$ , será finalmente

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H})} \quad (3.26)$$

em que obviamente  $\mathbf{H}$  é o campo magnético local (e  $\mathbf{B}$  a densidade de fluxo local).

Atendendo à geometria e natureza do problema (cf. Fig. 3.1, página 45), podem ser consideradas as seguintes simplificações que facilitam a resolução numérica de (3.26):

- os campos  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  são independentes da coordenada  $z$  e perpendiculares à secção recta da chapa (plano  $xy$ ), i.e.

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = H_z(x, y, t), \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = B_z(x, y, t) \quad (3.27)$$

- o material da chapa é isotrópico e não histerético, i.e.  $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$  e a condutividade eléctrica  $\sigma$  é constante;
- Assume-se uma variação sinusoidal em regime permanente dos vectores de campo, permitindo o uso de fasores complexos,  $\tilde{H}_z$ .

Com estas condições, a equação (3.26) torna-se na equação do modelo de correntes induzidas para excitação sinusoidal,

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{H}_z - j\omega\mu\sigma\tilde{H}_z = 0} \quad (3.28)$$

em que  $\omega=2\pi f$ . Esta é a equação final a ser resolvida com as condições de fronteira adequadas. O problema poderá então ser representado pela Fig. 3.2 na qual se representam os diversos fasores e as correntes induzidas numa chapa ferromagnética laminada sujeita a um campo magnético sinusoidal,  $\tilde{H}_z$ . Na superfície da chapa, este é representado por  $\tilde{H}_s$ .

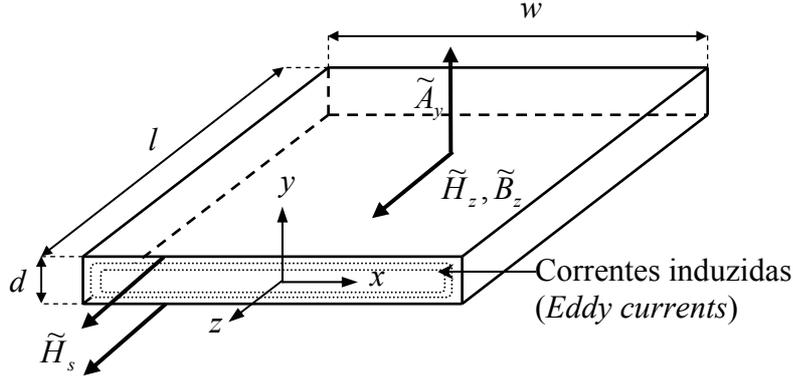


Fig. 3.2. Fasores e correntes induzidas numa chapa ferromagnética laminada sujeita a um campo magnético sinusoidal,  $\tilde{H}_z$ .

Assim, da Lei de Ampère, equação (3.10), a densidade de corrente induzida  $\tilde{J} = J_R + jJ_I$  pode facilmente ser calculada a partir da distribuição de  $\tilde{H}_z$  por

$$\boxed{\tilde{J} = \nabla \times \tilde{H}_z = \nabla \times H_R + j\nabla \times H_I} \quad (3.29)$$

Finalmente, a densidade de perdas médias por efeito de Joule num período  $T = 1/f$ , resultantes das correntes induzidas, podem ser calculadas, em W/kg, por

$$P_J = \frac{1}{\rho ST} \int_T \left( \int_S \frac{\tilde{J}^2}{\sigma} dS \right) dt \quad (3.30)$$

em que  $\rho$  é a densidade específica do material em  $\text{kg/m}^3$  e  $S = wd$  a secção recta da chapa (Fig. 3.2). Para correntes induzidas sinusoidais, virá

$$P_J = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{S} \int_S \frac{\tilde{J}_{max}^2}{2\sigma} dS \right) \quad (\text{W/kg}) \quad (3.31)$$

em que  $J_{max}$  é o valor máximo no período (em cada ponto, i.e. elemento finito) da densidade de corrente induzida complexa  $\tilde{J}$ , ou seja  $J_{max} = |\tilde{J}_{max}| = \sqrt{2}J$ , sendo  $J$  o valor eficaz da densidade de corrente sinusoidal, em  $\text{A/m}^2$ .

Multiplicando pela densidade específica da chapa magnética,  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ ), a densidade de perdas  $P_J$  em  $\text{W/m}^3$ , será dada por

$$\boxed{P_J = \frac{1}{S} \int_S \frac{J_{max}^2}{2\sigma} dS} \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.32)$$

Note-se que esta expressão é equivalente à anteriormente apresentada

$$P_j = \frac{1}{S} \int_s \rho_0 J^2 dS \quad (2.22)$$

No entanto, visto que neste trabalho, se utilizam os valores máximos das grandezas sinusoidais, a expressão com que se vai trabalhar é a (3.32).

Note-se ainda que a densidade  $\rho$  nas equações anteriores, deverá entrar em consideração com o “factor de empacotamento da chapa magnética”, ou seja, deverá incluir o espaço interlaminar constituído pelo isolamento e superfície de contacto das chapas (no qual, por um lado, não existem perdas por correntes induzidas, e por outro lado, tem uma densidade significativamente inferior à do material ferromagnético propriamente dito). Dito de outra forma,  $\rho$  deverá ser a densidade de um pacote de chapas magnéticas e não do aço maciço do qual se fizeram as chapas. Assim não será necessário efectuar nenhuma correcção no valor da densidade de perdas devido ao espaço interlaminar. Note-se que também em relação à permeabilidade e à curva  $B-H$  dum pacote de chapas magnéticas se coloca a mesma questão pelo que, para evitar modelar cada chapa e o espaço interlaminar, deverá ser também usado um valor de permeabilidade que entre em consideração com o espaço interlaminar, dependendo do sentido do fluxo, i.e. se é paralelo ou perpendicular às chapas. Para fluxo paralelo às chapas, o caso desejável e normal, é usual (e em termos práticos, obrigatório) utilizar-se uma curva  $B-H$  equivalente entrando em consideração com a saturação e que representa a curva para o pacote de chapas já considerando este espaço [Salon1995] pp.135-138.

### **3.3 Expressões analíticas a 1D para o cálculo das perdas por correntes induzidas**

A análise 1D do problema de propagação do campo electromagnético pode ser feita se a largura  $w$  da chapa for muito maior que a sua espessura  $d$  (i.e.  $w \gg d$ , ou seja  $w/d \gg 1$ ), podendo ser deduzidas expressões para o cálculo das perdas por correntes induzidas a 1D. Na pesquisa bibliográfica efectuada, e ao mesmo tempo que se estudava e desenvolvia a metodologia para a aplicação do Método dos Elementos Finitos ao cálculo das perdas por correntes induzidas, foram encontradas uma série de expressões que permitiam calcular as perdas por correntes induzidas para o caso 1D: expressões em termos de  $B$  ou  $H$  (esta última

mais concretamente em termos de  $H_s$ ) e considerando ou não o efeito pelicular, as quais se resumem e apresentam seguidamente e que irão ser depois comparadas entre si, por forma a clarificar a sua validade e domínios de aplicação.

### 3.3.1 Expressões em função de $B$

Considerando efeito pelicular, a expressão (3.33) [Gyselinck1999] dá o valor das perdas por correntes induzidas, em  $W/m^3$ , permitindo considerar fluxo rotacional variando periodicamente no tempo, para  $n$  frequências  $f_i$ ,

$$P_J = \frac{1}{6} \sigma \pi^2 d^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 \left( (\hat{B}_{x,i}^a)^2 + (\hat{B}_{y,i}^a)^2 \right) F_{sk}(\lambda_i) \quad (3.33)$$

sendo  $\hat{B}_{x,i}^a$  e  $\hat{B}_{y,i}^a$  a amplitude da média calculada do valor máximo da indução através da espessura da chapa, segundo as direcções  $x$  e  $y$  respectivamente. Note-se que é uma generalização da equação (3.8). O efeito pelicular é considerado através de um **factor de efeito pelicular** (factor de “*skin effect*”),  $F_{sk}$ , adimensional, dado por

$$F_{sk} = \frac{3 \sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i} \quad (3.34)$$

em que

$$\lambda_i = \frac{d}{\delta_i} \quad (3.35)$$

e a profundidade de penetração pelicular  $\delta_i$  para a frequência  $i$  vem

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{\pi f_i \sigma \mu}} \quad (3.36)$$

No caso de (se considerar) uma só frequência (de cada vez), para maior clareza em utilização mais à frente designando por  $P_{B1}$  ( $=P_J$ ) as perdas por unidade de volume em  $W/m^3$ , a equação (3.33) torna-se

$$P_{B1} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} F_{sk} \quad (3.37)$$

em que  $B_{\max}^a$  é o valor médio de  $B_{\max}$  ao longo da espessura da chapa. Obviamente que agora o factor de efeito pelicular  $F_{sk}$  virá

$$F_{sk} = \frac{3}{\lambda} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda - \cos \lambda} \quad (3.38)$$

em que

$$\lambda = \frac{d}{\delta} \quad (3.39)$$

Esta relação “ $d/\delta$ ” virá a revelar-se um parâmetro muito importante no cálculo das perdas (como veremos bastante mais à frente em “4.5 Conclusão de que os factores determinantes são  $d/\delta$  e  $w/d$ ”, página 105). A profundidade de penetração pelicular  $\delta$  vem (tal como em (3.3))

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \sigma \mu}} \quad (3.40)$$

Encontra-se também outra expressão [Jiles1994] [Bertotti1988] [Ida1997] pp.155, [Bozorth1993] pp.778, que é evidentemente a já apresentada em (3.7) e que, em  $W/m^3$ , vamos designar por  $P_{B2}$ ,

$$P_{B2} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} \quad (3.41)$$

que também<sup>28</sup> aparece [Brauer1999], [Ida1997]pp.153-155 (dedução) como

$$P_J = \frac{\sigma \omega^2 d^2 (B_{\max}^a)^2}{24} \quad (3.42)$$

Esta equação só é válida para baixas frequências, onde não se faz sentir efeito pelicular, pelo que  $B_{\max}$  será constante ao longo da espessura da laminação e portanto  $B_{\max}^a = B_{\max}$ . Note-se que existe também uma variante de (3.41) em [Bertotti1991] que pode considerar fluxo

---

<sup>28</sup> Para além destas duas formas aparecem ainda diversas variantes nas notações utilizadas. Assim  $B_{\max}$  aparece também como “B” [Brauer1999], “*I<sub>max</sub>*” [Bertotti1988], etc. O mesmo se passa de uma forma genérica com as equações seguintes em que aparecem diversas formas e simbologia.

rotacional e a existência de harmônicos, sendo semelhante a (3.33) excepto que não inclui o  $F_{sk}$ , ou seja não considera efeito pelicular.

### 3.3.2 Expressões em função de $H$

Sendo  $H_s$  o valor do campo magnético à superfície da chapa (cf. Fig. 3.2, página 54) dado por

$$H_s = |\tilde{H}_s| = \sqrt{H_{sR}^2 + H_{sI}^2} \quad (3.43)$$

encontram-se algumas expressões dando as perdas por unidade de superfície da chapa ( $w \times l$ , Fig. 3.2), i.e. em  $W/m^2$  [Krawczyk1993] [Stoll1974] pp.11-16 [Plonsey1961] pp.357;360 [Brauer1999] deduzidas a partir da propagação de uma onda electromagnética numa chapa (num semi-plano, i.e. uma chapa de espessura considerada infinita). Considerando já os dois lados da chapa e convertendo essas expressões para densidade de perdas por correntes induzidas por unidade de volume de chapa magnética,  $W/m^3$ , e que (para maior clareza em utilização mais à frente) designámos por  $P_{H1}$ , temos

$$P_{H1} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \quad (3.44)$$

que considera efeito pelicular [Krawczyk1993] pp.10-11 [Stoll1974] pp.14.

Encontram-se também dois casos particulares de (3.44). O primeiro é dado por<sup>29</sup>

$$P_{H2} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \quad (3.45)$$

válido apenas para  $\delta \ll d$  (frequências elevadas), o qual é conhecido na literatura como “*inductance-limited state*” [Krawczyk1993] pp.9 [Brauer1999] [Ida1997]<sup>30</sup> pp.14, sendo

<sup>29</sup> É deduzido a partir da análise do problema da reflexão de uma onda plana por um plano condutor, através do cálculo do vector de Poynting complexo na superfície.

Aparece em termos de perdas por unidade de superfície de cada face da chapa magnética,  $W/m^2$ , como:

- $P_e = \frac{H_s^2}{2\sigma\delta}$ , equação (2.52) de [Stoll1974],
- ou de uma forma equivalente como  $P_l = \frac{1}{2}|H_t|^2 R_m$  com  $R_m = \frac{1}{\sigma\delta}$  [ $\Omega/m^2$ ], em [Plonsey1961] pp.357 e 360 (referenciada e apresentada ainda com outra notação em (13) e (14) de [Brauer1999]), em que  $H_t$  representa o campo magnético tangente à superfície e  $R_m$  a resistência em corrente contínua entre as duas faces da chapa.

normalmente considerado quando temos materiais condutores maciços com espessuras elevadas em máquinas eléctricas. O segundo caso [Stoll1974] [Krawczyk1993], conhecido por “*resistance-limited state*”, é válido apenas para  $\delta \ll d$  (baixa frequência), ou seja corresponde ao caso em que as correntes induzidas não afectam o campo magnético e por isso são limitadas pela resistência do corpo, sendo (“sempre”, segundo [Krawczyk1993] pp.11) utilizado no caso das chapas do núcleo dos transformadores, e é dado<sup>31</sup> por

$$P_{H3} = \frac{H_s^2 d^2}{6\sigma\delta^4} \quad (3.46)$$

### 3.3.3 Comparação de expressões analíticas para o cálculo de perdas por correntes induzidas

Para verificar os domínios de aplicação descritos na literatura para as equações apresentadas em 3.3.1 e 3.3.2, bem como avaliar as situações em que se podem ou devem usar umas ou outras, as perdas por correntes induzidas foram calculadas e os resultados comparados.

Como caso de estudo, foi considerada uma chapa magnética com  $\sigma=4,5 \times 10^6$  S/m,  $\mu=6,667 \times 10^{-3}$  H/m (relutividade  $\nu=150$  m/H) e  $d=0,65$  mm, para  $d/\delta=\lambda$  variando entre 0,05 e 30 (frequências de 0,06 Hz a 22,6 kHz, aproximadamente) e  $B_{\max}^a=1,2$  T.

Para as equações em  $H$ , foram consideradas duas situações diferentes: usar um  $H_s$  (obtido da curva  $B-H$  para o  $B$  pretendido) e usar um  $H_s$  “flutuante” (i.e. variável, calculado<sup>32</sup> por forma a impor o mesmo  $B_{\max}^a=B_{ref}$  a ser usado em (3.37) e (3.41),  $P_{B1}$  e  $P_{B2}$  respectivamente):

$$H_s = \frac{B_{\max}^a}{|\tilde{\mu}_e|} \quad (3.47)$$

em que a permeabilidade complexa equivalente  $\tilde{\mu}_e$  (H/m), na forma  $|\tilde{\mu}_e| \angle \phi$ , é dada por

---

<sup>30</sup> Esta obra apresenta, na página 16, também uma forma de consideração da histerese no modelo de correntes induzidas.

<sup>31</sup> Originalmente em W/m<sup>2</sup> como  $P_e = \frac{H_s^2}{\sigma\delta} \frac{1}{6} \frac{d^3}{\delta^3}$ , equação (2.23) de [Stoll1974] pp.14. Aliás aparece também uma variante, equação (2.20) em [Krawczyk1993].

<sup>32</sup> Embora, por razões de facilidade de leitura e compreensão global do cálculo das perdas por correntes induzidas e do trabalho desta dissertação, a utilização desta permeabilidade complexa apareça aqui referida pela primeira vez neste texto, na realidade ela foi por nós utilizada primeiramente na modelação por elementos finitos tal como descrita no capítulo 3.4.1. Inclusivamente foi feita a sua dedução, embora posteriormente se tenha também encontrado referência a ela em [Stoll1974] pp.15, [Bessonov1977]pp.725-726 e [Moreau1998].

$$|\tilde{\mu}_e| = \mu \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left( \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \right)^{1/2} \quad (3.48)$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda} \quad (3.49)$$

Assim, para as equações (3.44) a (3.46), referidas como  $P_{H1}$ ,  $P_{H2}$  e  $P_{H3}$ , para o caso de:

- $H_s$  constante foi usado  $H_s = 180$  A/m (obtido da curva  $B$ - $H$  da chapa M400-50A [SollacMéditerranée2001b], para  $B=1,2$  T, limite da zona linear);
- $H_s$  flutuante, este foi calculado usando (3.47) também para  $B_{\max}^a = 1,2$  T.

Tabela 3.1. Cálculo de  $P_{Bl}$  e de  $H_s$  variável para utilização nas equações (3.44) a (3.46).

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$d/\delta$	$F_{sk}$	$P_{Bl}$ (W/m <sup>3</sup> )	$\mu_e$ (H/m)	$H_s$ flutuante (A/m)
0,06	1,3000E-02	0,05	1,00000	0,02	6,667E-03	180,00
1,57	2,6000E-03	0,25	0,99999	11,09	6,666E-03	180,01
6,28	1,3000E-03	0,50	0,99990	177,50	6,659E-03	180,22
14,13	8,6667E-04	0,75	0,99950	898,22	6,626E-03	181,10
25,11	6,5000E-04	1,00	0,99842	2835,74	6,541E-03	183,46
39,24	5,2000E-04	1,25	0,99615	6907,46	6,373E-03	188,31
56,50	4,3333E-04	1,50	0,99207	14264,61	6,099E-03	196,75
76,91	3,7143E-04	1,75	0,98546	26250,92	5,722E-03	209,72
100,45	3,2500E-04	2,00	0,97559	44334,45	5,268E-03	227,80
127,14	2,8889E-04	2,25	0,96179	70010,75	4,780E-03	251,04
156,96	2,6000E-04	2,50	0,94356	104684,41	4,301E-03	279,02
189,92	2,3636E-04	2,75	0,92065	149548,42	3,859E-03	310,98
226,02	2,1667E-04	3,00	0,89321	205490,06	3,469E-03	345,97
265,26	2,0000E-04	3,25	0,86171	273053,35	3,134E-03	382,95
307,64	1,8571E-04	3,50	0,82699	352475,50	2,851E-03	420,98
401,81	1,6250E-04	4,00	0,75228	546980,10	2,414E-03	497,07
508,54	1,4444E-04	4,50	0,67781	789422,75	2,105E-03	570,08
627,83	1,3000E-04	5,00	0,61003	1082894,17	1,878E-03	638,83
759,67	1,1818E-04	5,50	0,55178	1434067,27	1,704E-03	704,10
904,08	1,0833E-04	6,00	0,50308	1851814,85	1,564E-03	767,32
1061,03	1,0000E-04	6,50	0,46260	2345362,92	1,446E-03	829,75
1230,55	9,2857E-05	7,00	0,42865	2923115,97	1,345E-03	892,18
1412,62	8,6667E-05	7,50	0,39974	3592320,00	1,257E-03	954,96
1607,25	8,1250E-05	8,00	0,37471	4359281,18	1,179E-03	1018,13
2511,32	6,5000E-05	10,00	0,29999	8520481,77	9,429E-04	1272,70
3923,94	5,2000E-05	12,50	0,24000	16642143,83	7,542E-04	1591,00
5650,47	4,3333E-05	15,00	0,20000	28757371,64	6,285E-04	1909,19
7690,92	3,7143E-05	17,50	0,17143	45665683,21	5,387E-04	2227,39
10045,28	3,2500E-05	20,00	0,15000	68165680,33	4,714E-04	2545,58
12713,56	2,8889E-05	22,50	0,13333	97056213,01	4,190E-04	2863,78
15695,75	2,6000E-05	25,00	0,12000	133136094,68	3,771E-04	3181,98
18991,86	2,3636E-05	27,50	0,10909	177204142,01	3,428E-04	3500,18
22601,89	2,1667E-05	30,00	0,10000	230059171,60	3,143E-04	3818,38

Na Tabela 3.1 podem observar-se os valores de  $f$ ,  $d/\delta$  e  $F_{sk}$  usados para calcular  $P_{B1}$  através das equações (3.37) a (3.40), bem como os valores de  $|\tilde{\mu}_e|$ , i.e.  $\mu_e$ , para calcular o  $H_s$  “flutuante” a usar no cálculo de  $P_{H1}$ ,  $P_{H2}$  e  $P_{H3}$ .

Desta tabela podem tirar-se algumas conclusões interessantes: observe-se a evolução do valor de  $F_{sk}$ , variando entre 1 para frequências baixas e 0,1 para 22,6 kHz, tendendo depois cada vez mais lentamente para zero à medida que a frequência aumenta, tal como se pode observar na Fig. 3.3. Veja-se também como o valor da permeabilidade complexa equivalente  $\mu_e$  é inicialmente igual ao da permeabilidade magnética física  $\mu$  e depois vai diminuindo (tal como se pode ver em valor relativo também na Fig. 3.3 para a permeabilidade relativa equivalente, igual a  $\mu_e/\mu$ , curva “PermRelEq”).

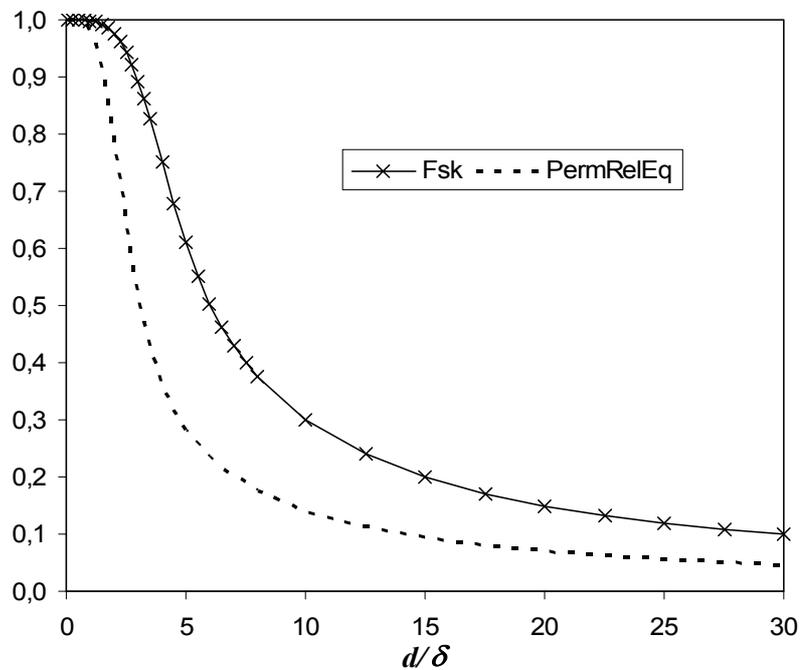


Fig. 3.3. Curvas de  $F_{sk}$  e  $\mu_e/\mu$  em função de  $d/\delta$ .

Pelo contrário, na última coluna da Tabela 3.1, pode ver-se que o  $H_s$  “flutuante” parte do valor igual ao  $H_s$  constante, 180 A/m, tendo que aumentar na superfície da chapa por forma a manter  $B_{\max}^a = 1,2$  T. Isto é devido ao efeito das correntes induzidas, que faz com que  $H_z$  e  $B_{\max}$  vão diminuindo para o interior da laminação e de uma forma cada vez mais significativa à medida que o efeito pelicular aumenta, tal como se representa na Fig. 3.4 (note-se que esta figura está rodada de 90° em torno do eixo dos  $yy$  em relação à Fig. 3.1 e Fig. 3.2).

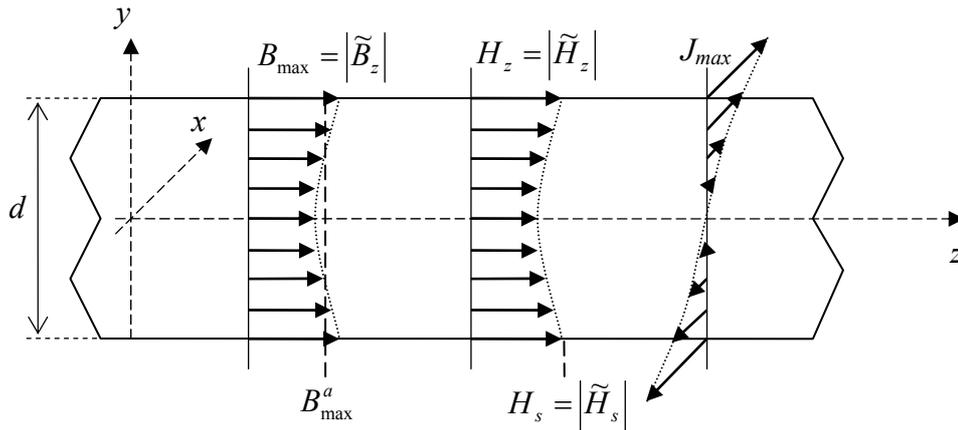


Fig. 3.4. Conseqüências do efeito pelicular em  $B_{max}$ ,  $H_z$  e  $J_{max}$  numa chapa com espessura  $d$ .

Com efeito, se não houvesse efeito pelicular significativo, os vectores de  $H_z$  e  $B_{max}$  na Fig. 3.4 teriam sempre a mesma amplitude ao longo da espessura  $d$  da chapa, pelo que o valor médio seria igual ao valor constante de  $H_z$  e  $B_{max}$  respectivamente; ou seja, seria  $H_s = H_z$  e  $B_{max}^a = B_{max}$ . Também os vectores de  $J_{max}$  (só com componente segundo  $x$ , perpendiculares a  $H_z$  e  $B_{max}$ ) variariam segundo uma linha recta. Contudo à medida que a frequência vai aumentando, as correntes induzidas vão aumentando e os seus efeitos também:  $H_z$  e  $B_{max}$  vão diminuindo para o interior da laminação, tornando-se cada vez mais pronunciada a curvatura dos arcos das linhas ponteadas na Fig. 3.4 (e portanto  $H_s \neq H_z$  e  $B_{max}^a \neq B_{max}$ ). Também os vectores de  $J_{max}$  deixam de variar segundo uma linha recta, tornando-se a sua curvatura cada vez mais pronunciada com o aumento da frequência. Este efeito será claramente visível nas curvas “A” da Fig. 4.21 (na página 85), que apresenta já uma solução por elementos finitos para 50 Hz e 10 kHz.

Tabela 3.2. Valores das relações entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas várias expressões analíticas consideradas e a de referência,  $P_{B1}$ , equação (3.37).

$f$ (Hz)	$d/\delta$	$P_{B2}/P_{B1}$	$H_s$ constante			$H_s$ flutuante		
			$P_{H1}/P_{B1}$ (c/ efeito pelicular)	$P_{H2}/P_{B1}$ (altas freq.)	$P_{H3}/P_{B1}$ (baixas freq.)	$P_{H1\sim}/P_{B1}$ (c/ efeito pelicular)	$P_{H2\sim}/P_{B1}$ (altas freq.)	$P_{H3\sim}/P_{B1}$ (baixas freq.)
0,06	0,05	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	48000,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	48000,01	<b>1,00</b>
1,57	0,25	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	384,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	384,06	<b>1,00</b>
6,28	0,50	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	48,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	48,12	<b>1,00</b>
14,13	0,75	<b>1,00</b>	0,99	14,23	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	14,40	1,01
25,11	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,96	6,01	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	6,24	1,04
39,24	1,25	<b>1,00</b>	0,91	3,08	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	3,38	1,10
56,50	1,50	1,01	0,84	1,79	1,01	<b>1,00</b>	2,14	1,20
76,91	1,75	1,01	0,74	1,14	1,01	<b>1,00</b>	1,54	1,38
100,45	2,00	1,03	0,62	0,77	1,03	<b>1,00</b>	1,23	1,64
127,14	2,25	1,04	0,51	0,55	1,04	<b>1,00</b>	1,07	2,02
156,96	2,50	1,06	0,42	0,41	1,06	<b>1,00</b>	0,98	2,55
189,92	2,75	1,09	0,34	0,31	1,09	<b>1,00</b>	0,94	3,24
226,02	3,00	1,12	0,27	0,25	1,12	<b>1,00</b>	0,92	4,14
265,26	3,25	1,16	0,22	0,20	1,16	<b>1,00</b>	0,92	5,25
307,64	3,50	1,21	0,18	0,17	1,21	<b>1,00</b>	0,93	6,61
401,81	4,00	1,33	0,13	0,12	1,33	<b>1,00</b>	0,95	10,14
508,54	4,50	1,48	0,10	0,10	1,48	<b>1,00</b>	0,97	14,80
627,83	5,00	1,64	0,08	0,08	1,64	<b>1,00</b>	0,99	20,65
759,67	5,50	1,81	0,07	0,07	1,81	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	27,73
904,08	6,00	1,99	0,06	0,06	1,99	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	36,12
1061,03	6,50	2,16	0,05	0,05	2,16	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	45,94
1230,55	7,00	2,33	0,04	0,04	2,33	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	57,31
1412,62	7,50	2,50	0,04	0,04	2,50	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	70,41
1607,25	8,00	2,67	0,03	0,03	2,67	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	85,38
2511,32	10,00	3,33	0,02	0,02	3,33	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	166,65
3923,94	12,50	4,17	0,01	0,01	4,17	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	325,52
5650,47	15,00	5,00	0,01	0,01	5,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	562,50
7690,92	17,50	5,83	0,01	0,01	5,83	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	893,23
10045,28	20,00	6,67	0,00	0,01	6,67	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	1333,33
12713,56	22,50	7,50	0,00	0,00	7,50	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	1898,44
15695,75	25,00	8,33	0,00	0,00	8,33	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	2604,17
18991,86	27,50	9,17	0,00	0,00	9,17	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	3466,15
22601,89	30,00	10,00	0,00	0,00	10,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	4500,00

Finalmente os valores dos quocientes entre as várias expressões para as perdas por correntes induzidas e a perda de referência  $P_{B1}$ , dada pela equação (3.37), são apresentados na Tabela 3.2 onde os valores iguais a 1,00 são apresentados a negrito. Nas Fig. 3.5 e Fig. 3.6 são apresentados os mesmos quocientes. Nestas figuras, as curvas para as quais as perdas por correntes induzidas foram calculadas, pelas equações (3.44) a (3.46), usando:

- “ $H_s$  constante”, utilizam a notação “PH\*/PB1” (nas quais \* significa 1, 2 ou 3, i.e. respectivamente  $P_{H1}$ ,  $P_{H2}$  ou  $P_{H3}$ );
- “ $H_s$  flutuante”, aparecem como “PH\*~/PB1” (i.e. nas figuras aparecem como PH1~/PB1, PH2~/PB1 e PH3~/PB1).

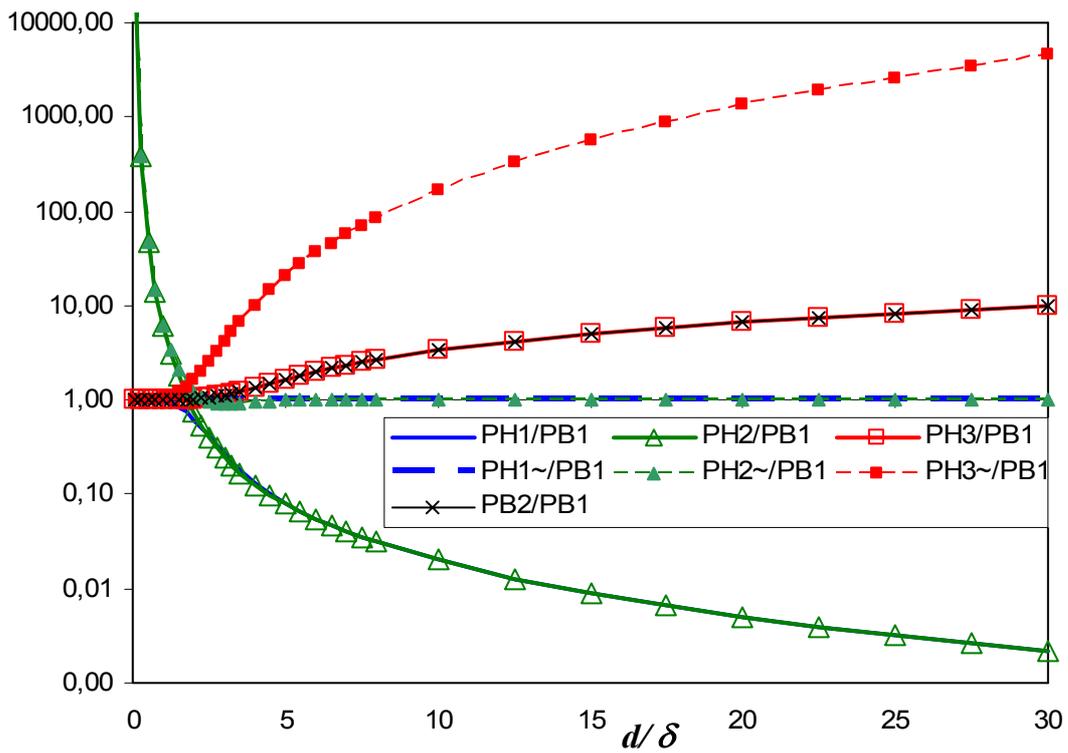


Fig. 3.5. Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas diversas expressões analíticas e por  $P_{B1}$ .

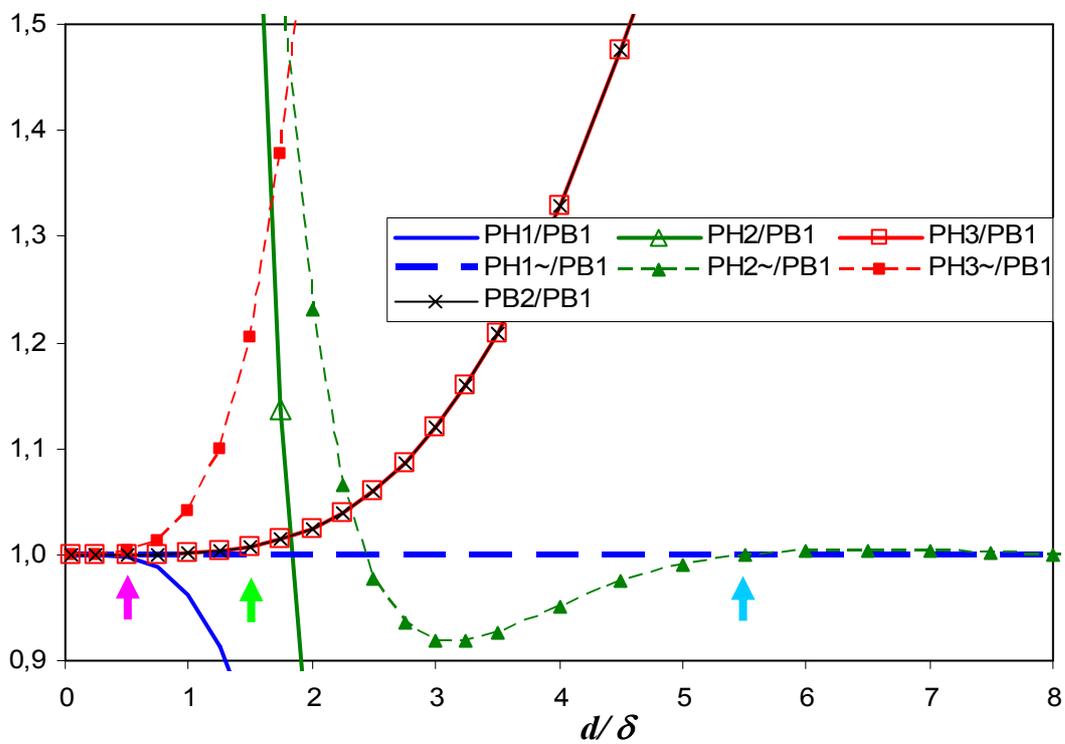


Fig. 3.6. Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas expressões analíticas e por  $P_{B1}$  (ampliação).

Dos resultados apresentados na Tabela 3.1, Tabela 3.2, Fig. 3.5 e Fig. 3.6 mais algumas **conclusões** interessantes podem ser extraídas:

- Em primeiro lugar, foi verificado o domínio de validade apresentado na literatura para cada uma das expressões;
- Apenas  $P_{BI}$  e  $P_{HI}$  podem ser usadas desde baixa até alta frequência;
- $P_{BI}$  e  $P_{HI}$  dão o mesmo resultado apenas se em  $P_{HI}$  for usado um  $H_s$  variável, calculado por (3.47) que garanta o mesmo  $B_{\max}^a$  que é usado em  $P_{BI}$  (tal como se pode ver na curva “PH1~/PB1” na Fig. 3.5 e na Fig. 3.6);
- $P_{B2}$  e  $P_{H3}$  (com  $H_s$  constante) são equivalentes, e ambas só são válidas para baixas frequências;
- É claramente visível na Tabela 3.2, na Fig. 3.5 e na Fig. 3.6, o que é que se deverá entender como “baixas frequências” ou “altas frequências” para cada uma das expressões, i.e., até que ou a partir de que valor de  $d/\delta$  se pode usar cada uma das expressões analíticas:
  - Para impor o mesmo  $B_{\max}^a = B_{\text{ref}}$  usado em  $P_{BI}$ , os domínios de validade são os apresentados na Tabela 3.3;
  - Para  $H_s$  constante ter-se-á  $B_{\max}^a$  variável e diminuindo com o aumento da frequência. Neste caso a referência será  $P_{HI}$  (cf. Fig. 3.7) e os domínios de validade são os apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.3. Domínio de validade das expressões analíticas para o cálculo das perdas por correntes induzidas para **impor o mesmo**  $B_{\max}^a = B_{\text{ref}}$  usado em  $P_{B1}$ .

Equação	Válida para $d/\delta$ no intervalo	Nota: na Fig. 3.5 e Fig. 3.6, ver curva
$P_{B1} = \frac{\sigma\pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} F_{sk} \quad (3.37)$	[0-30*]	- (valor de referência)
$P_{B2} = \frac{\sigma\pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} \quad (3.41)$	[0-1,5]	“PB2/PB1”
$P_{H1} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \quad (3.44)$	[0-30*] ----- (e [0-1,5] com $H_s$ constante)	“PH1~/PB1” (seta azul) ----- (PH1/PB1)
$P_{H2} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \quad (3.45)$	[5,5-30*] ----- (e [0-1,5] com $H_s$ constante)	PH2~/PB1 ----- (PH2/PB1)
$P_{H3} = \frac{H_s^2 d^2}{6\sigma\delta^4} \quad (3.46)$	[0-0,5] ----- (e [0-1,5] com $H_s$ constante)	PH3~/PB1 ----- (PH3/PB1)

\* Verificado até  $d/\delta=30$ , embora teoricamente sejam válidas para  $d/\delta$  muito superiores.

Tabela 3.4. Domínio de validade das expressões analíticas em  $H_s$  para o cálculo das perdas por correntes induzidas, com  $H_s$  constante ( $B_{\max}^a$  diminuindo com o aumento da frequência).

Equação	Válida para $d/\delta$ no intervalo	Nota: na Fig. 3.7 ver curva
$P_{H1} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \quad (3.44)$	[0-30*]	- (valor de referência)
$P_{H2} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \quad (3.45)$	[4,5-30*]	PH2/PH1
$P_{H3} = \frac{H_s^2 d^2}{6\sigma\delta^4} \quad (3.46)$	[0-1,5]	PH3/PH1

\* Verificado até  $d/\delta=30$ , embora teoricamente sejam válidas para  $d/\delta$  muito superiores.

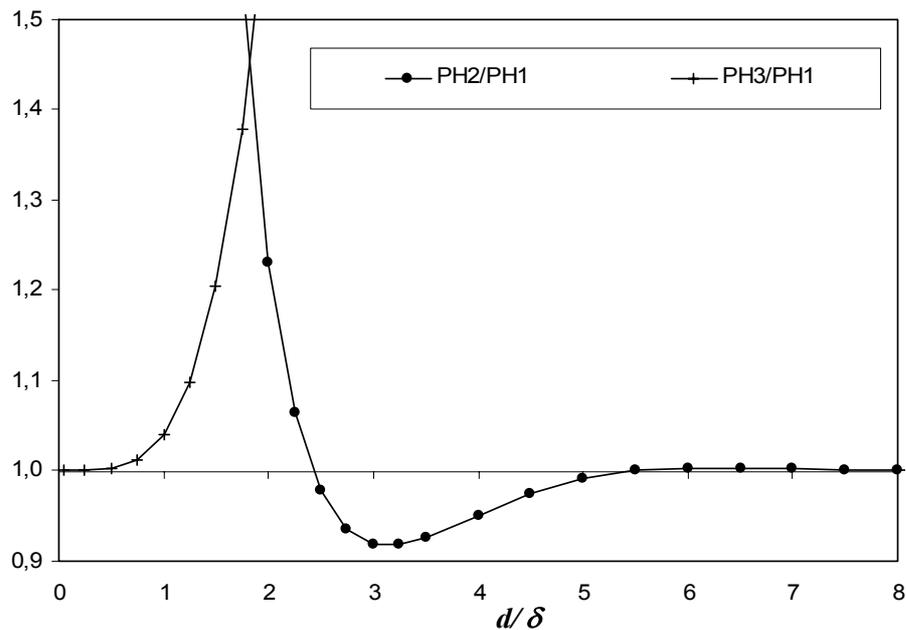


Fig. 3.7. Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas expressões analíticas para  $H_s$  constante ( $P_{HI}$  como referência. Ampliação).

Para concluir esta análise acerca das expressões analíticas apresentadas, recorde-se, no entanto, que **estas expressões só são válidas para 1D**, ou seja, quando a largura da chapa pode ser considerada muito maior que a sua espessura. Nos casos em que  $w/d$  é menor que 25 ou 20 será necessário recorrer-se a uma **análise por elementos finitos** ou ao **gráfico** ou **modelo analítico** desenvolvidos, tal como se verá em “6.2 Comparação entre os resultados numéricos para o problema 2D com os de  $P_{BI}$ ”, página 131 [Pereirinha2003a].

### 3.4 Metodologia para a modelação por elementos finitos

#### 3.4.1 Utilização de processador de EF para equação de difusão em $A$ para o cálculo de $H$

Considere-se a clássica ([Kriezis1992] pp.1562, [Hoole1996] pp.330, [Ida1997] pp.417, [Coimbra1995] pp.53) equação de difusão para campos sinusoidais na ausência de fontes (i.e., na ausência de correntes produzidas por fontes de tensão ou de corrente), em termos do vector potencial magnético em notação fasorial,  $\tilde{A}$ :

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} - j\omega\mu\sigma\tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (3.50)$$

Para o sistema de eixos representado na Fig. 3.2 (página 54) e tendo os campos  $\tilde{\mathbf{H}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$  apenas componentes segundo  $z$  e perpendiculares ao plano  $xy$  da chapa, temos que  $\tilde{\mathbf{A}}$ , perpendicular a esse plano, terá apenas componente segundo  $y$ ,  $\tilde{A}_y$ , tal como também aparece na mesma figura. Assim, a equação (3.50) torna-se simplesmente

$$\nabla^2 \tilde{A}_y - j\omega\mu\sigma\tilde{A}_y = 0 \quad (3.51)$$

que tem a mesma forma que a equação a resolver

$$\nabla^2 \tilde{H}_z - j\omega\mu\sigma\tilde{H}_z = 0 \quad (3.28)$$

à excepção de utilizar  $\tilde{A}_y$  em vez de  $\tilde{H}_z$ . Será por isso possível utilizar o mesmo processador para resolver a equação de difusão em  $\tilde{A}_y$  (3.51) e em  $\tilde{H}_z$  (3.28) com condições de fronteira adequadas. Deve contudo chamar-se a atenção para o problema da descontinuidade da componente normal de  $\mathbf{H}$  (neste caso de  $\tilde{H}_z$ ) na fronteira entre materiais com permeabilidades magnéticas diferentes, tal como se verá no capítulo 3.4.2. No entanto, este problema não se coloca quando temos um único material, como é o caso de uma chapa magnética.

Assim, a equação (3.28) foi numericamente resolvida em grande parte do trabalho utilizando o processador linear de correntes induzidas<sup>33</sup> a 2D para elementos finitos triangulares de 1ª ordem, **EDDYPROC**. Este foi desenvolvido [Coimbra1995]pp.70 no Lab. de CAD/CAE do Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores da Universidade de Coimbra, sob a supervisão do orientador do presente doutoramento. Tratando-se de um processador desenvolvido para calcular o vector potencial magnético a 2D no plano  $xz$  do sistema de eixos representado na Fig. 3.2, foi utilizado para resolver a equação de difusão em termos de  $\tilde{H}_z$  a 2D no plano  $xy$  da mesma figura.

---

<sup>33</sup> Após estarmos a trabalhar nesta ideia já há algum tempo, verificámos, numa pesquisa bibliográfica mais aprofundada, que esta técnica tinha também já sido utilizada cerca de 2 anos antes por Brauer e Cendes [Brauer1999]. No entanto, estes não usam a condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$ , calculada por (3.52), mas simplesmente o valor de  $H_s = \mu B$  tirado da curva de magnetização. Para além disso, estes autores utilizam apenas as equações (3.45) e (3.46),  $P_{H2}$  (altas frequências) e  $P_{H3}$  (baixas frequências) respectivamente, propondo a utilização da modelação por elementos finitos na gama de frequências intermédias, o que, como vimos no capítulo anterior, não é necessário para o problema 1D, pois existem expressões analíticas exactas, tanto em  $B$  como em  $H$ .

A condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$  a aplicar na fronteira da chapa magnética é dada por

$$\tilde{H}_s = \frac{B_{max}^a}{\tilde{\mu}_e} = \frac{B_{ref}}{\tilde{\mu}_e} \quad (3.52)$$

se se quiser impor um determinado valor de médio da indução máxima na laminação,  $B_{max}^a$ , o qual será igual à referência pretendida, designada por  $B_{ref}$ . Assim,  $\tilde{H}_s$  é calculado usando uma permeabilidade complexa equivalente  $\tilde{\mu}_e$  que, recorde-se, expressa na forma  $|\tilde{\mu}_e| \angle \phi$  é dada por

$$|\tilde{\mu}_e| = \mu \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left( \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \right)^{1/2} \quad (3.48)$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda} \quad (3.49)$$

Repare-se que, ao contrário do realizado na equação (3.47), em “3.3.3 Comparação de expressões analíticas para o cálculo de perdas por correntes induzidas”, agora, na aplicação das condições de fronteira de Dirichlet ao modelo de elementos finitos, se usou o valor complexo de  $\tilde{H}_s = H_{sR} + jH_{sI}$ , (tal como se poderá ver na Fig. 4.17 e Fig. 4.18 página 83) por forma a manter como referência a fase de  $B_{max}^a$  igual a zero. Pode-se assim intuir mais facilmente<sup>34</sup> e à partida (antes de resolver o problema de elementos finitos) a rotação sofrida por  $\tilde{H}_s$  devido ao efeito das correntes induzidas.

### 3.4.2 Processador em $H$ : problema de descontinuidades

Uma limitação grave da estratégia apresentada em “3.2 Formulação matemática do problema” e “3.4.1 Utilização de processador de EF para equação de difusão em  $A$  para o cálculo de  $H$ ” reside em que no método convencional dos elementos finitos, baseado no cálculo dos potenciais nodais (o método por nós utilizado), a utilização da formulação em

---

<sup>34</sup> No entanto, do ponto de vista apenas do cálculo das perdas por correntes induzidas em regime linear, poderia ter-se utilizado apenas o valor de  $H_s$ , tal como foi verificado através da resolução de alguns modelos de teste, não apresentados nesta dissertação: o valor das perdas seria, como é lógico, o mesmo, embora a fase de  $\tilde{H}_s$  e  $\tilde{J}$  viesse alterada.

termos de  $\mathbf{H}$  (em vez da mais habitual formulação em termos de  $\mathbf{A}$ ), é inconveniente nas zonas em que a permeabilidade varia descontinuamente [Kriezis1992] pp.1563. O problema surge devido a que contrariamente ao que acontece na formulação em  $\mathbf{A}$ , a componente normal de  $\mathbf{H}$  não se mantém na fronteira entre com permeabilidades magnéticas diferentes tal como se pode ver em [Reece2000] pp.20.

Para além disso, a equação de difusão, tal como qualquer outra equação diferencial, só tem solução única se for possível impor condições limite. Neste caso, é o valor do campo nos limites da peça estudada, o que genericamente obrigará a acoplar este modelo com uma outra forma de cálculo que permita determinar o campo exterior [Coulomb1985] pp.40. Por vezes, isto pode ser realizado quando é válido supor que o campo exterior não é deformado pela presença da peça estudada. Isto traduz-se em desprezar a chamada “reação do induzido”.

Este modelo, genericamente muito eficaz, é limitado ao estudo de peças condutoras mergulhadas em campos magnéticos variáveis [Coulomb1985] pp.39, devendo portanto ser utilizado com cuidado, atendendo ao exposto anteriormente.

Para o problema em causa (estudo das correntes induzidas em chapas ferromagnéticas), o problema da descontinuidade da permeabilidade não se põe quando se estuda uma única chapa, sendo o problema do cálculo das condições de fronteira resolvido através da aplicação da permeabilidade complexa, tal como exposto no capítulo “3.4.1. Utilização de processador de EF para equação de difusão em  $A$  para o cálculo de  $H$ ”.

Para resolução de problemas com materiais em que a permeabilidade magnética varie bruscamente, não basta simplesmente utilizar o processador existente, mas será necessário fazer alterações para permitir contemplar este efeito, utilizando (por exemplo) elementos de fronteira (“*edge elements*”, também conhecidos por “*Whitney elements*”) que tornam possível garantir de uma forma natural a continuidade da componente tangencial de  $H$ , sem impor a continuidade da sua componente normal [Kriezis1992] pp.1580, [Bossavit1982] [Bossavit1983] [van Welij1985] [Ferrari1985] [Bossavit1988] [Ren1990] [Yu1995] [Li1997] [Ren2000].

### 3.4.3 Procedimento de cálculo das perdas por correntes induzidas por elementos finitos a partir da solução de H

O cálculo das perdas por correntes induzidas é feito no módulo de pós processamento, **CADyPOS** [Coimbra1995]<sup>35</sup> pp.99-151, a partir do conhecimento da solução nodal de  $\tilde{H}_z = H_R + jH_I$ , i.e., em cada nodo da malha de elementos finitos.

Assim, para calcular as perdas por correntes induzidas em  $W/m^3$  dadas por

$$P_J = \frac{1}{S} \int_S \frac{J_{max}^2}{2\sigma} dS \quad (W/m^3) \quad (3.32)$$

o procedimento de cálculo é o seguinte:

- a) Calcular  $J_{max}$ , ou seja o valor máximo que  $\tilde{J}$  atingirá em cada elemento finito  $i$ . Para isso utiliza-se o comando “|Bmax|” já existente no **CADyPOS** que para uma solução em termos de vector potencial magnético calcula em cada elemento finito o módulo do valor máximo (no período<sup>36</sup>) da indução magnética [Coimbra1995] pp.143-145. Basicamente o que este comando faz é calcular, para cada elemento finito, o valor máximo de

$$|\mathbf{B}(t)| = \sqrt{(B_x(t))^2 + (B_y(t))^2} \quad (3.53)$$

Para os casos estudados, e para o sistema de eixos utilizado pelo **CADyPOS** em que o ecrã do computador corresponde ao plano  $xy$ , ao utilizarmos o processador 2D para resolver a equação em  $\tilde{H}_z$ , em vez de  $\tilde{A}_z$  temos  $\tilde{H}_z$  e em vez de  $\tilde{B}$ , temos  $\tilde{J}$ . Assim, este comando<sup>37</sup> calcula directamente o módulo do valor máximo de  $|\mathbf{J}(t)|$  no semi-período,  $J_{max} = |\tilde{J}_{max}|$ , para cada elemento finito, i.e.

$$|\tilde{J}_{max}| = (|\mathbf{J}(t)|)_{\max[0, T/2]} = \left( \sqrt{(J_x(t))^2 + (J_y(t))^2} \right)_{\max[0, T/2]} \quad (3.54)$$

<sup>35</sup> Designado nesta por MAGPOST.

<sup>36</sup> Como  $B_x(t)$  pode não estar em fase com  $B_y(t)$ , isto é o máximo de  $B_y(t)$  pode não ocorrer ao mesmo tempo que o máximo de  $B_x(t)$ , o comando “|Bmax|” faz um varrimento para um semi-período ( $\omega t$  a variar de 0 a  $\pi$  radianos) com um passo de amostragem relativamente pequeno,  $2\pi/360$  radianos (i.e. um grau), calculando o valor máximo que  $|\mathbf{B}(t)|$  atinge nesse semi-período, para cada elemento finito.

<sup>37</sup> Por analogia, o comando “|Bmax|” (cf. canto superior esquerdo da Fig. 4.14, página 81) existente no **CADyPOS**, deveria chamar-se agora “|Jmax|”.

- b) Calcular o quadrado de  $|\tilde{J}_{max}|$ ,  $\tilde{J}_{max}^2 = \left(|\tilde{J}_{max}|\right)^2 = J_{max}^2$ , para cada elemento finito, para o que foi desenvolvido um comando próprio no **CADyPOS**;
- c) Integrar para a superfície da secção recta da laminação,  $S=wd$ , pois trata-se de um problema resolvido com um processador a 2D. Para isso tem que se calcular o somatório, para o número de elementos finitos (*nelems*), do produto de  $\tilde{J}_{max}^2$  para o elemento  $i$ ,  $(\tilde{J}_{max}^2)_i$ , pela área desse mesmo elemento,  $\Delta_i$ :

$$\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS = \sum_{i=1}^{nelems} (\tilde{J}_{max}^2)_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{nelems} (J_{max}^2)_i \Delta_i \quad (3.55)$$

- d) Dividir o resultado obtido na equação anterior por  $2\sigma$

$$P_J = \frac{\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS}{2\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{nelems} (\tilde{J}_{max}^2)_i \Delta_i}{2\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{nelems} (J_{max}^2)_i \Delta_i}{2\sigma} \quad (\text{W/m}) \quad (3.56)$$

o que dará a densidade de potência de perdas na chapa por cada metro de profundidade (i.e., para  $l=1$  m, cf. Fig. 3.2, na página 54), ou seja as perdas em W/m. Esta operação, sendo a condutividade constante, foi feita já fora do **CADyPOS**, introduzindo o resultado da equação (3.55) numa folha de cálculo (concretamente *Microsoft Excel*®);

- e) Finalmente, e também na folha de cálculo, dividindo o valor em W/m da equação (3.56) pela área da superfície recta da chapa,  $S$ , obtemos as perdas em  $\text{W/m}^3$ , tal como é dado na equação (3.32).

## 4 CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA

No capítulo 3, foi exposta a metodologia para o cálculo de correntes induzidas e as respectivas perdas, tanto analiticamente, como pelo método dos elementos finitos.

O objectivo seguinte foi procurar uma lei de variação, uma “espessura equivalente”, um gráfico genérico ou um modelo, que permitisse, ao projectista ou ao *software* de elementos finitos, calcular as perdas por correntes induzidas quando a largura da chapa é relativamente pequena comparada com a sua espessura, pois nesta situação as expressões apresentadas no capítulo “3.3 Expressões analíticas a 1D” deixam de ser válidas (como se verá em, e a partir de, “4.4 Resultados numéricos do problema 2D”). A geometria do problema 2D é reduzida a um simples rectângulo representando a secção recta da laminação: devido à simetria existente em relação a  $x=0$ , o problema 2D pode ser reduzido à modelação de apenas metade da chapa (i.e., apenas por um semi-modelo, tal como se representa na Fig. 4.1).

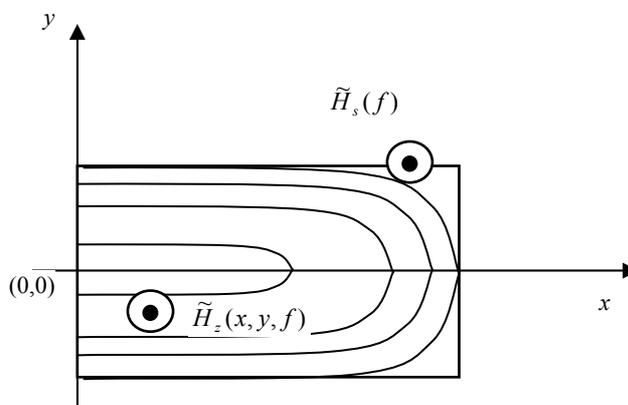


Fig. 4.1. Semi-modelo a 2D com indicação de correntes induzidas.

Como primeira abordagem ao problema, decidiu-se considerar a chapa FeV 400-50 HA [UGINE]<sup>38</sup> do fabricante francês UGINE<sup>39</sup>, porque tínhamos a curva de magnetização (ou

<sup>38</sup> A designação “FeV 400-50 HA” refere-se a um tipo de chapa com 0,5 mm de espessura (“50”) e cujas perdas máximas são 4 W/kg a 1,5 T e 50 Hz, segundo as normas “NFC 28.900” e “DIN 46400 Teil 1”. Esta designação veio substituir a anterior, em que as perdas eram medidas para 1 T (em vez de 1,5 T): a mesma chapa tinha como limite 1,7 W/kg a 1 T, sendo designada por “FeV 170-50 HA” [DECOUP]. Actualmente há normas mais recentes, segundo as quais a chapa “FeV 400-50 HA” terá actualmente a designação “M 400-50 A” na norma EN 10106 de 1996 e “400-50 A5” na norma IEC 60404-8-4 de 1988.

curva  $B-H$ , que se encontra na Fig. 4.2) e conhecíamos o valor da condutividade,  $\sigma = 2 \times 10^6$  S/m. Infelizmente não conhecíamos a sua curva de perdas o que nos viria a causar algumas dificuldades como se verá mais à frente.

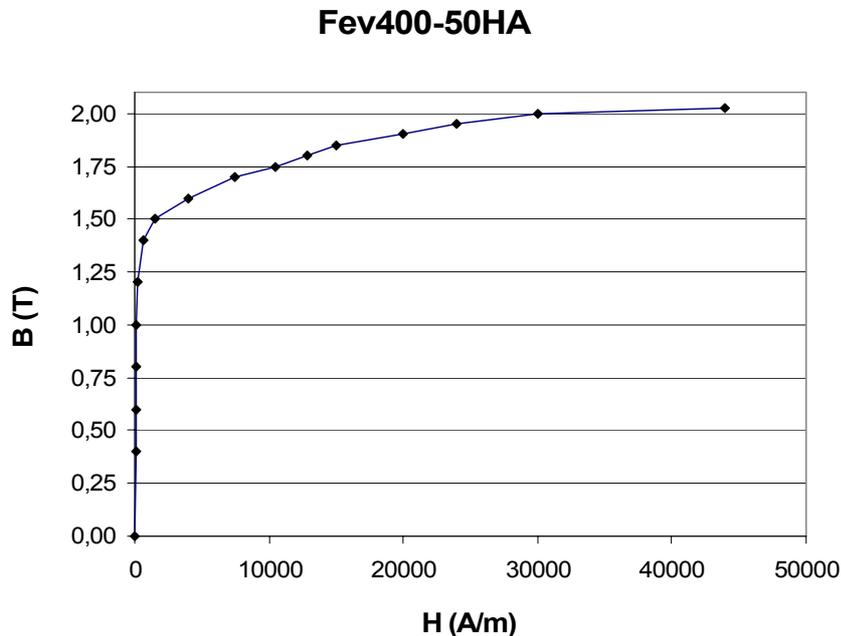


Fig. 4.2. Curva de magnetização para FeV 400-50HA [UGINE].

Foram consideradas:

- as quatro espessuras diferentes mais comuns<sup>40</sup> (0,35, 0,5, 0,65 e 1 mm);
- quatro larguras diferentes (2, 4, 6 mm e “largura infinita”; esta última apenas para cálculo analítico a 1D); e
- 12 frequências desde 25 Hz a 10 kHz (25, 50, 100, 150, 250, 350, 500, 1000, 2500, 5000, 7500 e 10000 Hz).

O material foi considerado na zona linear, com  $\mu = 0,001$  H/m ( $\mu_r = 796$ ), e com valor médio da indução na secção recta da laminação,  $B_{max}^a$ , igual a um valor de referência,  $B_{ref} = 1,5$  T.

---

Para outras correspondências entre as designações actuais para diversas chapas magnéticas segundo diversas **normas internacionais** (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS) ver ANEXO 4.

<sup>39</sup> Em contactos efectuados em 1 de Setembro de 2001 fomos informados que já não produziam chapa magnética, não tendo conseguido obter as curvas de perdas.

<sup>40</sup> Para NO, “non oriented”, i.e. chapa de grão não orientado.

No início deste trabalho o processador linear de correntes induzidas, **EDDyPROC**, estava limitado a 600 nodos, o que causou alguns problemas, pois é difícil conseguir obter uma malha de elementos finitos que permita considerar as diversas relações largura/espessura (especialmente para o caso da maior largura  $w=6$  mm, em que se tem, para  $d=0,35$  mm, a relação  $w/d=17,14$ ) e conseguir ainda manter as camadas adaptadas ao efeito pelicular para as frequências mais elevadas, mas também razoavelmente refinadas na zona central (necessário para não ter grandes imprecisões na zona central da chapa, sobretudo a baixas frequências).

Assim, para esta primeira abordagem numérica, foram usadas malhas de elementos finitos triangulares de primeira ordem, com uma discretização de cerca de 600 nodos e 1120 elementos finitos, tendo sido modelada:

- Toda a laminação (para visualizar todo o problema) para as frequências menores ( $f \leq 2,5$  kHz), tal como se pode ver, por exemplo, para o caso de maior diferença entre  $w$  e  $d$  ( $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm) na Fig. 4.3 e para o caso de menor diferença entre  $w$  e  $d$  ( $w=2$  mm e  $d=1$  mm) na Fig. 4.4. Para manter a mesma distribuição de elementos finitos para os diversos casos, todas as malhas para o modelo total foram obtidas a partir de uma malha comum, aplicando às coordenadas em  $x$  e em  $y$  um factor de escala adequado. Foram feitas 12 camadas de elementos finitos ao longo da espessura da chapa, tal como se pode observar bem na Fig. 4.4;



Fig. 4.3. Malha de elementos finitos para o modelo total, para  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm, 597 nodos, 1072 elementos. Ficheiro PATB1000.pos<sup>41</sup>.

---

<sup>41</sup> “PATB1000.pos”: nome do ficheiro \*.pos utilizado. Nesta figura como em várias outras e também em tabelas ao longo do trabalho, são referidos os nomes dos ficheiros que identificam de forma unívoca cada problema.

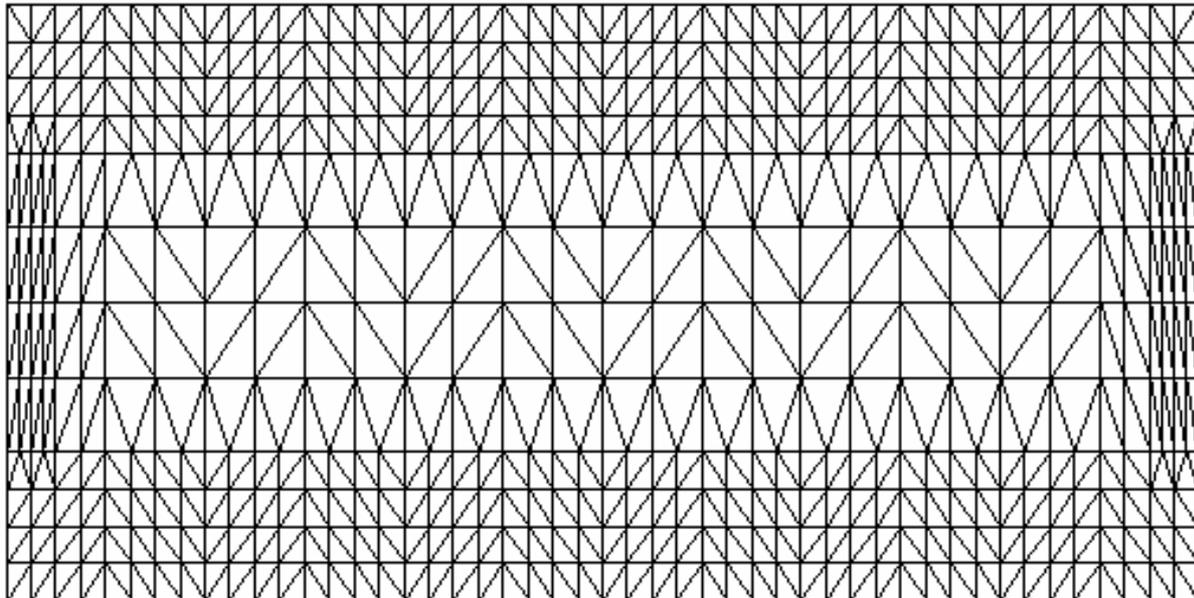


Fig. 4.4. Malha de elementos finitos para o modelo total, para  $w=2$  mm e  $d=1$  mm, 597 nodos, 1072 elementos. PDTC50.pos.

- Metade da laminação, i.e., o “semi-modelo” (permitido devido à simetria em relação a  $x=0$ ) para  $f \geq 5$  kHz, de forma a obter uma melhor discretização. Neste caso, para adaptar as malhas à profundidade de penetração, foram consideradas 6 camadas de elementos junto à superfície da chapa, tal como se pode ver ainda para o caso de maior diferença entre  $w$  e  $d$  ( $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm) na Fig. 4.5, e para um caso intermédio ( $w=4$  mm e  $d=0,65$  mm) na Fig. 4.6. Todas as malhas para o semi-modelo foram também obtidas a partir de uma malha comum, aplicando um factor de escala adequado às coordenadas em  $x$  e em  $y$ . Neste caso, já foram feitas 18 camadas de elementos finitos ao longo da espessura da chapa, tal como se pode observar facilmente na Fig. 4.6.



Fig. 4.5. Malha de elementos finitos para semi-modelo,  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm (modelado 3 mm por 0,35 mm), 598 nodos, 1112 elementos. PATBM5K.pos

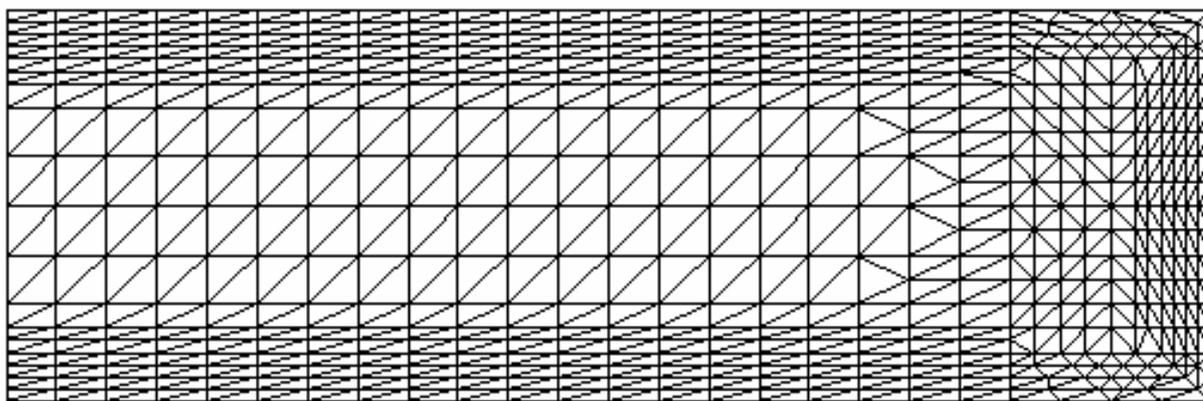


Fig. 4.6. Malha de elementos finitos para semi-modelo,  $w=4$  mm e  $d=0,65$  mm (modelados 2 mm por 0,65 mm), 598 nodos, 1112 elementos. PCTAM7k5.pos

Como a solução exacta para as perdas por correntes induzidas a 2D não é conhecida, e antes de passar para a análise a 2D, começou-se por utilizar as malhas 2D para resolver o problema a 1D como primeiro passo para validar a metodologia e estimar os erros introduzidos pelas malhas de elementos finitos que eram relativamente pouco refinadas. Esta solução numérica do problema 1D pode assim ser comparada com a analítica correspondente tomada como referência,  $P_{Bl}$  dada pela equação (3.37) e que apenas é válida quando  $w \gg d$ .

Para a resolução numérica dos problemas 1D foram usadas exactamente as mesmas malhas que para a solução numérica do problema 2D (excepto quanto à localização das condições de fronteira) e portanto muito aproximadamente com os mesmos erros numéricos e de discretização. Para o problema 1D a condição de fronteira de Dirichlet  $\tilde{H}_s$  foi imposta apenas nas fronteiras horizontais da chapa (Fig. 4.7), e para o 2D foi imposta em todas as fronteiras exteriores, tal como se pode ver na Fig. 4.8, para baixas frequências e modelo total, e na Fig. 4.9 para frequências a partir de 5 kHz, para as quais foi usado o semi-modelo. Note-se que na Fig. 4.9 a ausência de condições de fronteira de Dirichlet no lado esquerdo do semi-modelo corresponde à existência de uma condição de fronteira de Neumann homogénea, i.e., uma linha de simetria.



Fig. 4.7. Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 1D para a malha correspondente ao modelo total,  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm. PAHB1000.pos.



Fig. 4.8. Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 2D para a malha correspondente ao modelo total,  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm. PATB1000.pos.



Fig. 4.9. Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 2D para a malha correspondente ao semi-modelo,  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm. PATBM5K.pos.

O problema de correntes induzidas foi então resolvido numericamente para os 144 casos diferentes para o problema 2D e também os correspondentes 144 casos diferentes para o problema 1D. Apresentam-se seguidamente um conjunto de figuras representando alguns dos resultados obtidos.

#### 4.1 Visão geral da solução do campo e correntes induzidas

Comece-se por observar as figuras seguintes, Fig. 4.10 a Fig. 4.15, para a chapa com  $w=2$  mm e  $d=1$  mm (chapa mais estreita, i.e., menor largura  $w$  considerada no estudo) para 50 Hz e para o problema 2D, resolvido com condições de fronteira de Dirichlet  $\tilde{H}_s = H_{sR} + jH_{sI} = 1500,822 + j78,528$  A/m. Na Fig. 4.10 podem ver-se as linhas equipotenciais da componente real de  $\tilde{H}_z$ ,  $H_R$ , cujos valores variam entre 1501,61 A/m e 1500,86 A/m. Isto significa que  $H_R$  se mantém praticamente constante na profundidade da chapa, pois devido ao facto de a frequência ser baixa, o efeito pelicular ainda não se faz sentir significativamente. Na Fig. 4.11 podem ver-se as linhas equipotenciais da componente imaginária de  $\tilde{H}_z$ ,  $H_I$ , variando entre 78,53 A/m e -28,89 A/m.

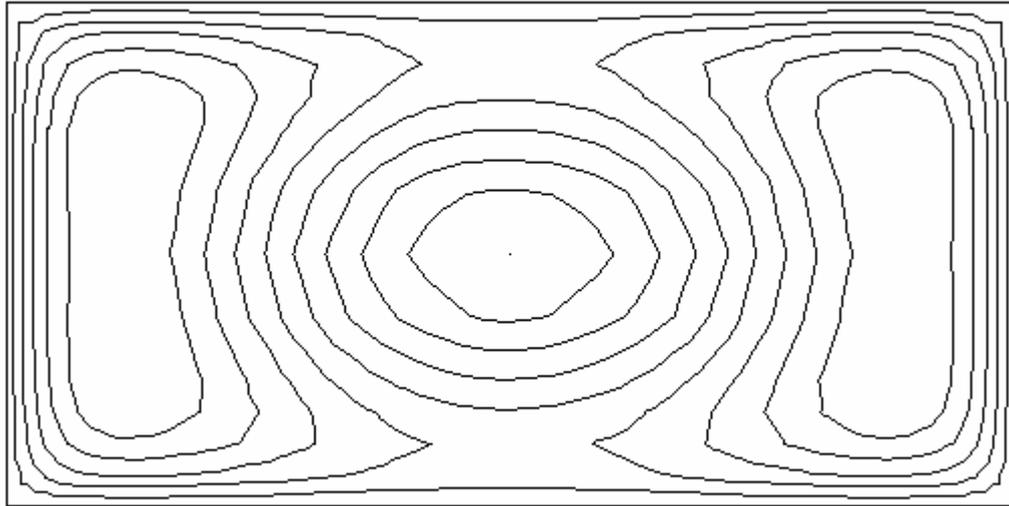


Fig. 4.10. Equipotenciais da componente real de  $\tilde{H}_z$ ,  $H_R$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm, 50 Hz). Valores variam entre 1501,61 A/m e 1500,86 A/m. PDTC50.pos.

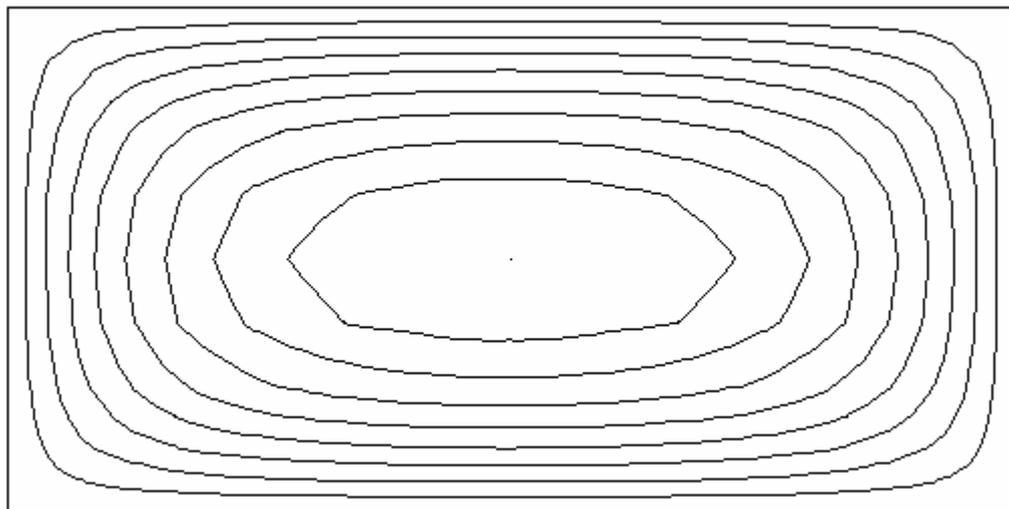


Fig. 4.11. Equipotenciais da componente imaginária de  $\tilde{H}_z$ ,  $H_I$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm, 50 Hz). Valores variam entre 78,53 A/m e -28,89 A/m. PDTC50.pos.

Na Fig. 4.12 podem observar-se os vectores da componente real de  $\tilde{J}$ ,  $J_R$ , e na Fig. 4.13 os da componente imaginária,  $J_I$ .

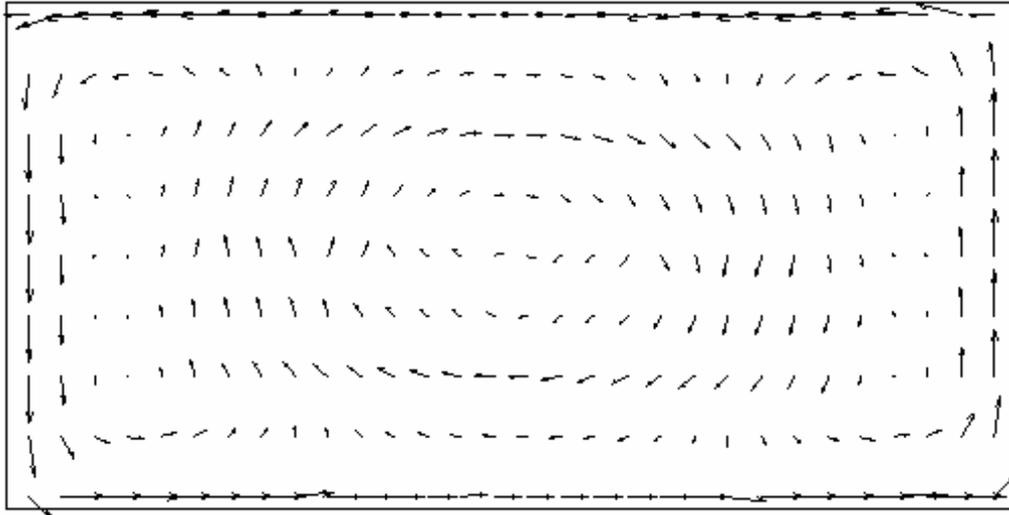


Fig. 4.12. Vectors da componente real da densidade de corrente induzida,  $J_R$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm). Os valores variam entre  $6,240e+3$  e  $6,040e+1$  A/m<sup>2</sup>. PDTC50.pos.

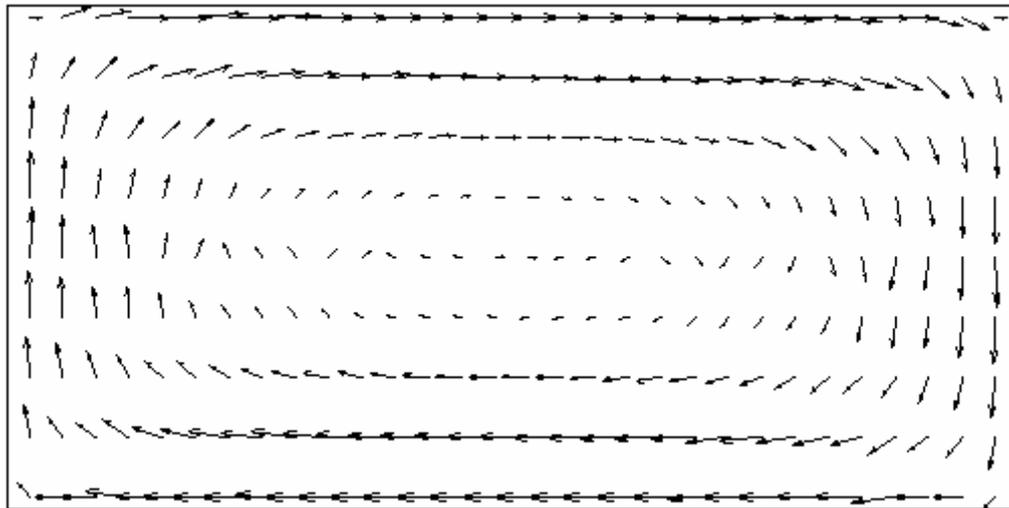


Fig. 4.13. Vectors da componente imaginária da densidade de corrente induzida,  $J_I$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm). Os valores variam entre  $4,094636e+5$  e  $4,953e+4$  A/m<sup>2</sup>. PDTC50.pos.

Note-se que embora  $J_R$  na Fig. 4.12 pareça ter um comportamento estranho é preciso ver que para este caso de baixa frequência os valores de  $J_I$  são bastante maiores<sup>42</sup> que os de  $J_R$ , pelo que as correntes induzidas são praticamente iguais a  $J_I$ , tal como se pode ver comparando os valores máximo e mínimo de  $J_I$  ( $4,094636e+5$  e  $4,953e+4$  A/m<sup>2</sup>, respectivamente) com

<sup>42</sup> Como é óbvio, e se pode depreender da equação (3.28),  $J$  está desfasado no tempo um quarto de período em relação de  $H$ , ou seja o máximo de  $J$  ocorre  $T/4$  segundos após o máximo de  $H$ . Por isso, como neste caso a frequência é baixa e a fase de  $H_s$  é praticamente 0, a fase de  $J$  será aproximadamente constante na profundidade e igual a  $90^\circ$ , pelo que  $J \approx J_I$ . No entanto, à medida que a frequência de vai aumentando, tanto a fase de  $H$  como a de  $J$ , sempre em quadratura, vão variar de ponto para ponto devido ao efeito das correntes induzidas (cf. Fig. 4.17b).

$J_{\max}$ , o valor da amplitude do fasor  $\tilde{J}$  (variando entre  $4,094635e+5$  e  $4,953e+4$  A/m<sup>2</sup>), na Fig. 4.14.

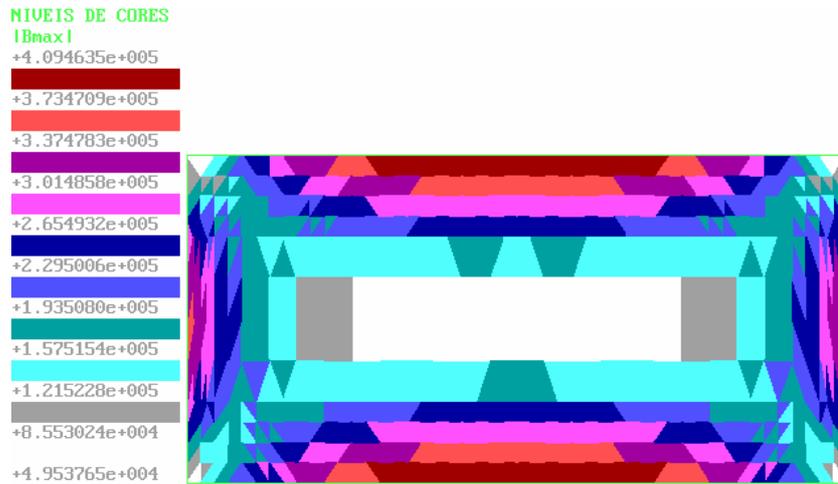


Fig. 4.14. Distribuição de  $J_{\max}$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm). Os valores variam entre  $4,094635e+5$  A/m<sup>2</sup> e  $4,953e+4$  A/m<sup>2</sup>. PDTC50.pos.

Tendo sido utilizados elementos finitos de 1<sup>a</sup> ordem, i.e. lineares,  $J_{\max}$  (valor máximo, no período, da densidade de corrente induzida) é constante em cada elemento finito, sendo este o valor a utilizar para o cálculo das perdas pela equação (3.56) e cuja distribuição se pode observar na Fig. 4.14. O aspecto algo estranho desta figura (“em mosaico”) deve-se ao facto de o número de elementos ser relativamente baixo (1072) e de  $J_{\max}$  ser constante em cada elemento finito, fazendo com que apareçam claramente “desenhados” as formas dos triângulos cujo valor de  $J_{\max}$  cai numa ou noutra gama de cores. No entanto, após aplicação de um algoritmo que transforma grandezas constantes em lineares [Coimbra1995] pp.167-199, o valor de “ $J_{\max}$  linearizado” será o representado na Fig. 4.15 (com a designação “Jmaxlin (A/m2)” em que “(A/m2)” representa as unidades, A/m<sup>2</sup>).

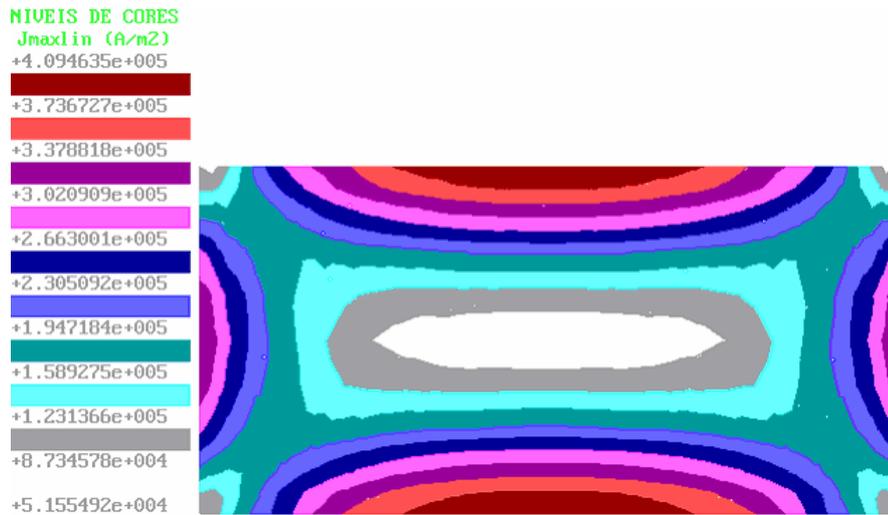


Fig. 4.15. Distribuição de  $J_{maxlin}$ : conversão de  $J_{max}$ , grandeza constante em cada elemento finito, para grandeza linear (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm). PDTC50.pos.

A fim de ilustrar alguns aspectos das consequências do aumento da frequência, vamos agora comparar para a mesma chapa, alguns dos resultados para 50 Hz, com resultados a 10 kHz. Para permitir uma melhor comparação, através da apresentação lado a lado, os resultados para 50 Hz (já apresentados nas figuras Fig. 4.10 a Fig. 4.15), embora tenham sido obtidos com o modelo total, vão ser apresentados para meio modelo (“zoom”).

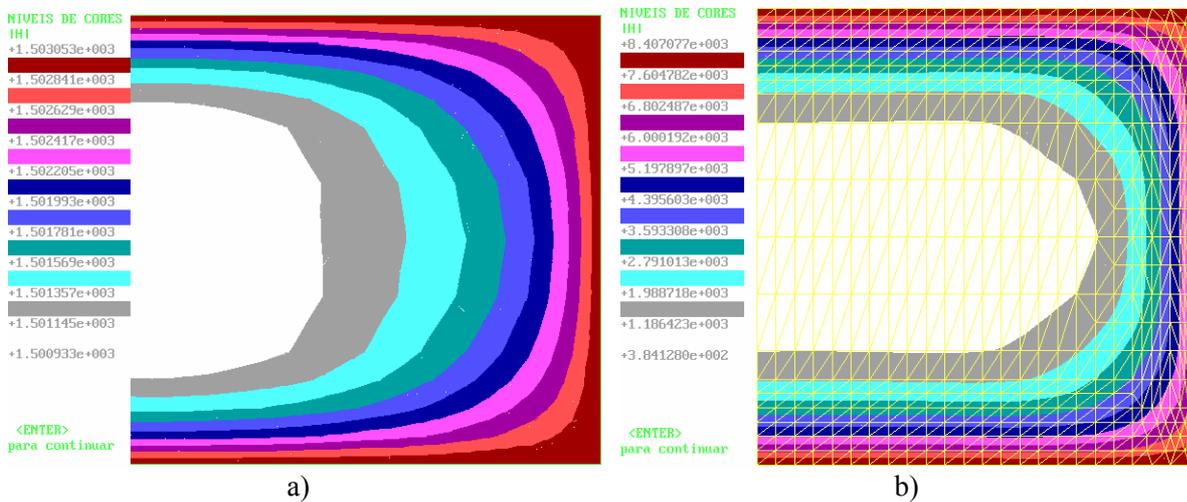


Fig. 4.16. Distribuição de  $|\tilde{H}_z|$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm): a) para 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.

Na Fig. 4.16 pode ver-se claramente o aumento do efeito pelicular com a frequência: para 50 Hz (a) apesar da variação das cores, note-se que  $H_z = |\tilde{H}_z|$  é praticamente constante, pois

varia entre  $1,5030e+3$  e  $1,5009e+3$ ; para 10 kHz (b), a variação de  $H_z$  é muito maior e diminui abruptamente logo nas proximidades da fronteira da chapa.

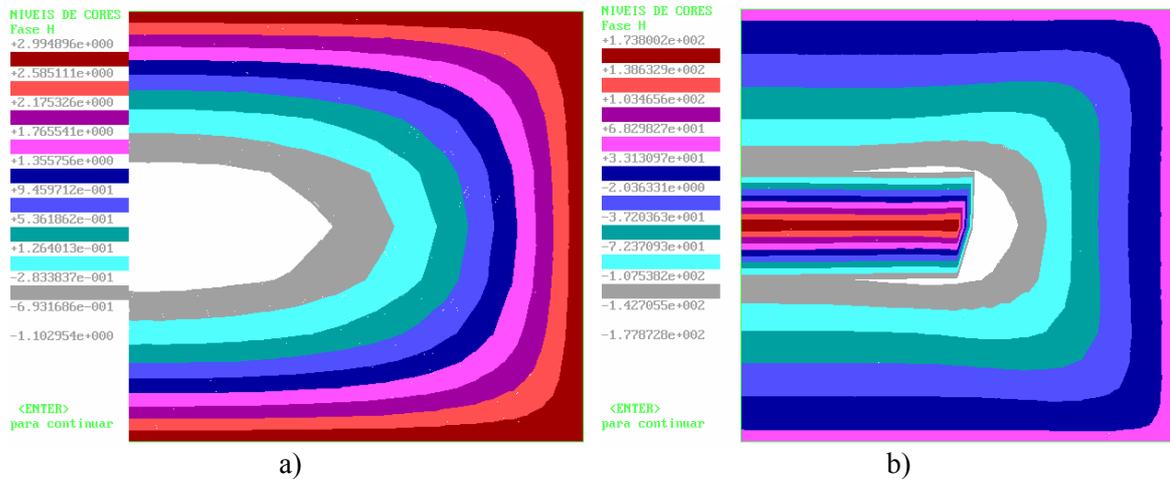


Fig. 4.17. Distribuição da fase de  $\tilde{H}_z$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm): a) para 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.

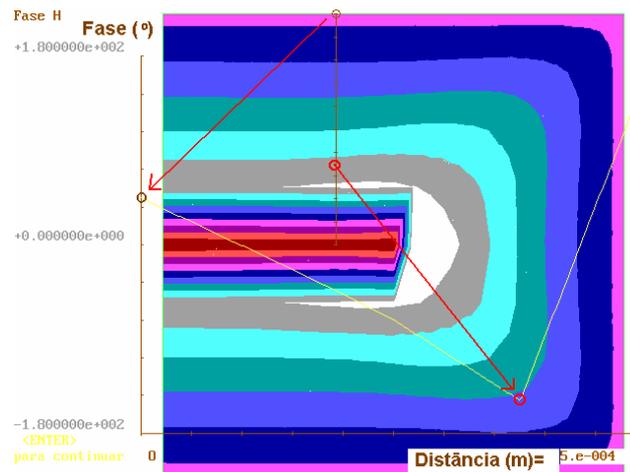


Fig. 4.18. Gráfico da variação da fase de  $\tilde{H}_z$  para 10 kHz (linha amarela), ao longo da linha indicada a castanho (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm). PDTCM10k.pos.

Na Fig. 4.17 pode observar-se a variação da fase de  $\tilde{H}_z$ . Para 50 Hz, (a), a variação de fase é de aproximadamente  $4,1^\circ$  pois o efeito pelicular é reduzido, enquanto que para 10 kHz, (b), temos uma variação de quase  $360^\circ$  (mais concretamente  $351,6^\circ$ , de  $+173,8^\circ$  a  $-177,8^\circ$ ), devido ao efeito das correntes induzidas. Na Fig. 4.18 representa-se pela linha amarela (sobreposta à figura da variação por níveis de cor, já apresentada na Fig. 4.17a) um gráfico da variação de fase segundo a linha traçada a castanho. Pode ver-se que à superfície, temos um valor de  $45^\circ$  (início da linha castanha, indicada pela bola), o que está de acordo com o esperado [Bessonov1977] pp.721.

Na Fig. 4.19 pode ver-se  $J_I$  representado por vectores<sup>43</sup>, sendo claramente visível a intensificação do efeito pelicular com o aumento da frequência. Este efeito é ainda mais visível na Fig. 4.20, na qual é apresentada a distribuição de  $J_{\max}$  linearizado,  $J_{\max lin}$ .

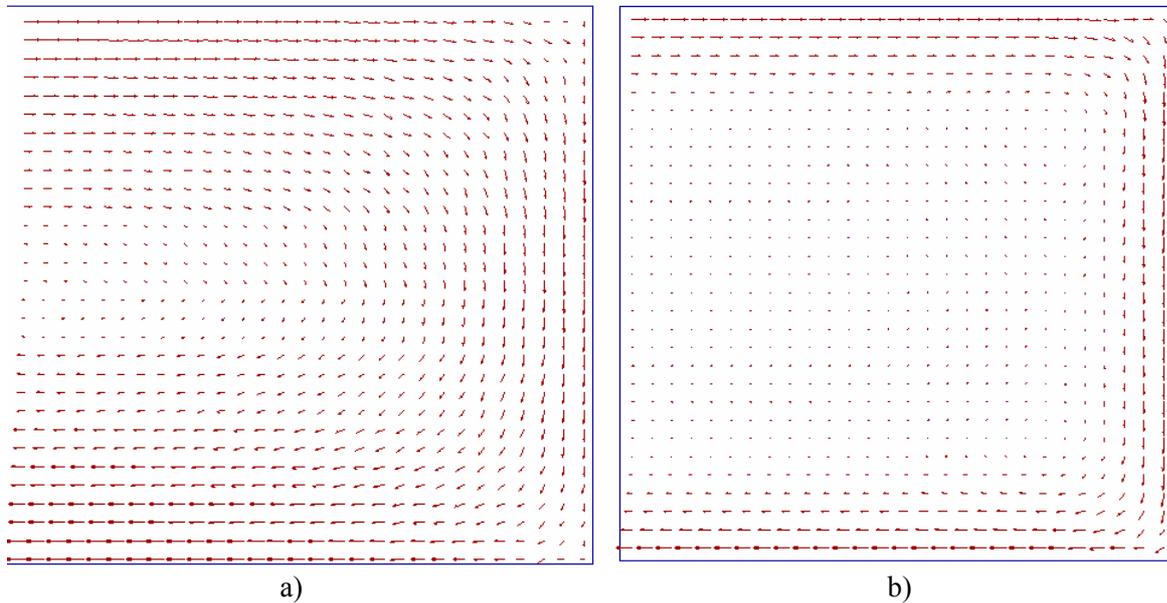


Fig. 4.19. Vectores da componente imaginária da densidade de corrente induzida  $J_I$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm): a) 50 Hz, PDTTC50.pos; b) 10 kHz, PDTTCM10k.pos.

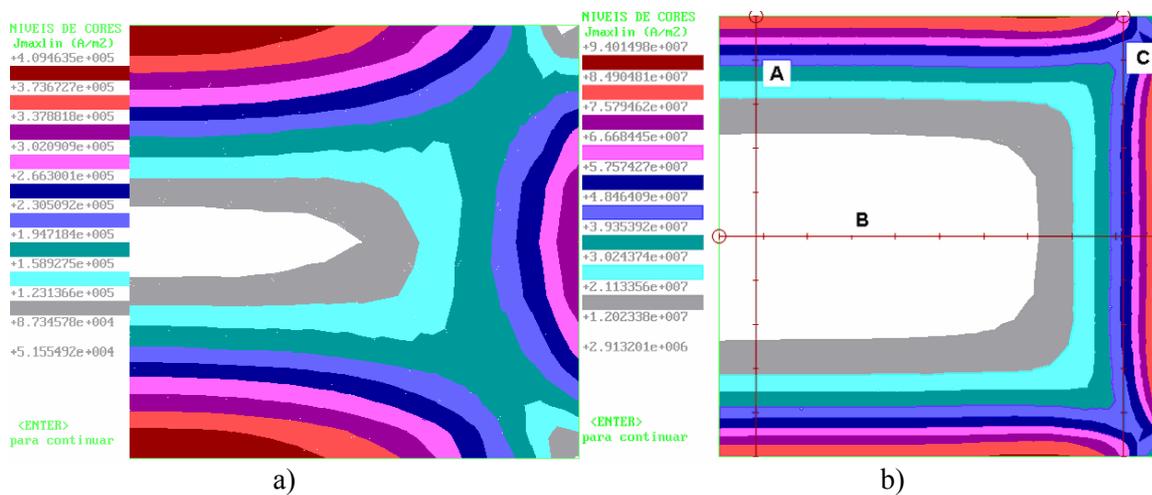


Fig. 4.20. Distribuição de  $J_{\max lin}$  (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm): a) 50 Hz, PDTTC50.pos; b) 10 kHz, PDTTCM10k.pos.

Os gráficos de “ $J_{\max lin}$ ” (linearização de  $J_{\max}$ ) ao longo das linhas<sup>44</sup> A, B e C apresentadas na Fig. 4.20b, são apresentados na Fig. 4.21, também para 50 Hz e 10 kHz. Pode ver-se

<sup>43</sup> Note-se que a escala não é a mesma para ambas as figuras. Os vectores maiores correspondem ao valor máximo de  $J_I$ , sendo o seu valor muito diferente para 50 Hz e 10 kHz (a 10 kHz  $J_I$  é cerca de 200 vezes superior ao valor para 50 Hz, tal como se pode ver na Fig. 4.20).

<sup>44</sup> Cada linha é dividida em 10 troços, sendo o seu início indicado pelo “0”, i.e. o círculo na sua extremidade.

na Fig. 4.21 que, devido ao efeito pelicular, as correntes se concentram à superfície da chapa: note-se nas linhas A e B para 10 kHz declives mais abruptos que para 50 Hz, enquanto que na linha C se pode ver que o valor de  $J_{maxlin}$  permanece “quase constante” para 10 kHz, ou seja que a corrente circula junto à superfície de chapa.

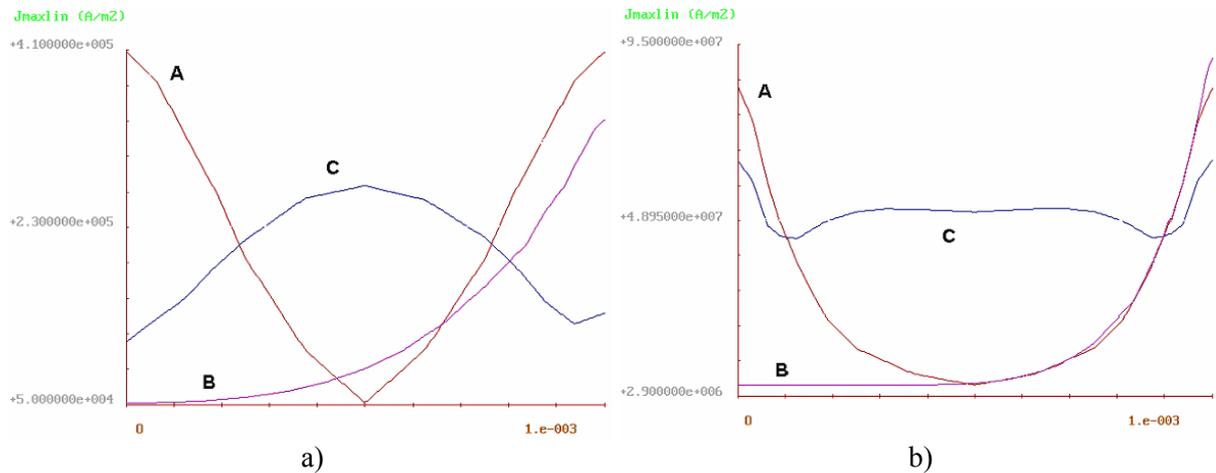


Fig. 4.21. Gráficos de  $J_{maxlin}$  ao longo das linhas A, B e C indicadas na Fig. 4.20b (problema 2D, modelo total,  $w=2$  mm e  $d=1$  mm): a) 50 Hz ( $J_{maxlin_{max}}=4,1e+5$  A/m<sup>2</sup>), PDTC50.pos; b) 10 kHz ( $J_{maxlin_{max}}=9,4e+5$  A/m<sup>2</sup>), PDTM10k.pos.

## 4.2 Resultados numéricos do problema 1D

Vamos agora analisar os resultados numéricos do problema 1D.

Tal como referido anteriormente, foi resolvido um conjunto de casos correspondentes ao problema 1D, usando o processador 2D e as mesmas malhas de elementos finitos que seriam usadas para o problema a 2D, à excepção do local onde eram impostas as condições fronteira de Dirichlet, tal como mostrado nas figuras Fig. 4.7 a Fig. 4.9 (página 77).

Recorde-se que a condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$  a aplicar, no caso do problema 1D apenas na fronteira horizontal da chapa magnética, é dada por

$$\tilde{H}_s = \frac{B_{max}^a}{\tilde{\mu}_e} = \frac{B_{ref}}{\tilde{\mu}_e} \quad (3.52)$$

calculado usando uma permeabilidade complexa equivalente  $\tilde{\mu}_e$  que na forma  $|\tilde{\mu}_e| \angle \phi$  é dada por

$$|\tilde{\mu}_e| = \mu \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left( \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \right)^{1/2} \quad (3.48)$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda} \quad (3.49)$$

Na Tabela 4.1 pode ver-se a sequência e os resultados do cálculo da condição de fronteira a aplicar,  $H_{sR}+jH_{sI}$ , para  $d=0,35$  mm,  $\mu=0,001$  H/m ( $\mu_r=796$ ) e  $B_{ref}=1,5$  T, para frequências desde 25 Hz a 10 kHz. Sendo  $H_{sR}=v_{eR} B_{ref}$  e  $H_{sI}=v_{eI} B_{ref}$ , foram usadas para o cálculo mas omitidas na tabela, por razões de espaço, as colunas relativas a  $v_{eR}$  e  $v_{eI}$ , (componentes real e imaginária da relutividade equivalente, iguais ao inverso das respectivas componentes de  $\tilde{\mu}_e$ ). Embora não necessárias para o cálculo, são apresentadas por curiosidade, a itálico, as colunas respeitantes à “Fase de  $v_e$  em graus” e a  $H_s = |\tilde{H}_s|$ .

Tabela 4.1. Cálculo da condição de fronteira  $\tilde{H}_s = H_{sR}+jH_{sI}$ , para  $d=0,35$  mm,  $\mu=0,001$  H/m ( $\mu_r=796$ ) e  $B_{ref}=1,5$  T, frequências de 25 Hz a 10 kHz.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$ \mu_e $ (H/m)	$\text{tg } \phi$	Fase $\mu_e$ (rad)	$ v_e $ (m/H)	Fase $v_e$ (°)	$H_{sR}$	$H_{sI}$	$H_s$
25	2,5231E-03	1,000E-03	-3,207E-03	-0,003207	1,000E+03	<i>0,1837489</i>	1500,003	4,811	<i>1500,01</i>
50	1,7841E-03	1,000E-03	-6,414E-03	-0,0064139	1,000E+03	<i>0,3674911</i>	1500,012	9,621	<i>1500,04</i>
100	1,2616E-03	9,999E-04	-1,283E-02	-0,0128269	1,000E+03	<i>0,7349286</i>	1500,049	19,242	<i>1500,17</i>
150	1,0301E-03	9,997E-04	-1,924E-02	-0,019238	1,000E+03	<i>1,102259</i>	1500,111	28,863	<i>1500,39</i>
250	7,9788E-04	9,993E-04	-3,206E-02	-0,032051	1,001E+03	<i>1,8363851</i>	1500,309	48,103	<i>1501,08</i>
350	6,7434E-04	9,986E-04	-4,488E-02	-0,0448452	1,001E+03	<i>2,5694434</i>	1500,605	67,340	<i>1502,11</i>
500	5,6419E-04	9,971E-04	-6,407E-02	-0,0639856	1,003E+03	<i>3,6661054</i>	1501,234	96,189	<i>1504,31</i>
1000	3,9894E-04	9,887E-04	-1,277E-01	-0,1270533	1,011E+03	<i>7,2796188</i>	1504,930	192,242	<i>1517,16</i>
2500	2,5231E-04	9,354E-04	-3,125E-01	-0,3028534	1,069E+03	<i>17,352224</i>	1530,586	478,255	<i>1603,57</i>
5000	1,7841E-04	8,011E-04	-5,807E-01	-0,5261185	1,248E+03	<i>30,144367</i>	1619,228	940,310	<i>1872,45</i>
7500	1,4567E-04	6,726E-04	-7,811E-01	-0,6631276	1,487E+03	<i>37,994412</i>	1757,394	1372,751	<i>2230,00</i>
10000	1,2616E-04	5,728E-04	-9,139E-01	-0,7404486	1,746E+03	<i>42,424578</i>	1933,206	1766,781	<i>2618,93</i>

Da Tabela 4.2 à Tabela 4.5 são apresentados os valores obtidos (a partir da solução numérica por elementos finitos, para a chapa com  $w=6$  mm) para as densidades de perdas em W/m, W/m<sup>3</sup> e W/kg calculados respectivamente pelas equações (3.56) (3.32) e (3.31) para uma densidade específica  $\rho=7,65$  kg/m<sup>3</sup> (valor fornecido pelo fabricante [UGINE]). Supôs-se que esta densidade entra em consideração com o espaço interlaminar, i.e., é a densidade de um pacote de chapas e não de um bloco maciço de aço. Não é assim necessário efectuar nenhuma correcção devido ao espaço interlaminar). Nestas tabelas, os casos cujos nomes dos

ficheiros têm a letra “M” (aparecem a itálico) utilizam semi-modelos<sup>45</sup>, pelo que os valores respectivos apresentados na coluna “ $\int J_{max}^2 dS$ ” (também a itálico) não são os calculados no CADyPOS pela equação (3.55) pois corresponderiam a meia chapa (com largura considerada igual a  $w/2=3$  mm) mas sim já o dobro desse valor, correspondendo portanto ao modelo total (largura do problema= $w=6$ mm).

Tabela 4.2. Valores de  $H_{sR}$  e  $H_{sI}$ , nome dos ficheiros \*.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para  $d=0,35$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m)	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	$P_J$ (W/kg)
25	2,5231E-03	1500,003	4,811	1500,01	PAHB25	4,718139E+03	1,1795E-03	5,6168E+02	7,3423E-02
50	1,7841E-03	1500,012	9,621	1500,04	PAHB50	1,887228E+04	4,7181E-03	2,2467E+03	<b>2,9369E-01</b>
100	1,2616E-03	1500,049	19,242	1500,17	PAHB100	7,548468E+04	1,8871E-02	8,9863E+03	1,1747E+00
150	1,0301E-03	1500,111	28,863	1500,39	PAHB150	1,698237E+05	4,2456E-02	2,0217E+04	2,6428E+00
250	7,9788E-04	1500,309	48,103	1501,08	PAHB250	4,715952E+05	1,1790E-01	5,6142E+04	7,3389E+00
350	6,7434E-04	1500,605	67,340	1502,11	PAHB350	9,251700E+05	2,3129E-01	1,1014E+05	1,4397E+01
500	5,6419E-04	1501,234	96,189	1504,31	PAHB500	1,886398E+06	4,7160E-01	2,2457E+05	2,9356E+01
1000	3,9894E-04	1504,930	192,242	1517,16	PAHB1000	7,545724E+06	1,8864E+00	8,9830E+05	1,1742E+02
2500	2,5231E-04	1530,586	478,255	1603,57	PAHB2500	4,704338E+07	1,1761E+01	5,6004E+06	7,3208E+02
5000	1,7841E-04	1619,228	940,310	1872,45	<i>PAHBM5k</i>	<i>1,859250E+08</i>	4,6481E+01	2,2134E+07	2,8933E+03
7500	1,4567E-04	1757,394	1372,751	2230,00	<i>PAHBM7k5</i>	<i>4,083534E+08</i>	1,0209E+02	4,8614E+07	6,3547E+03
10000	1,2616E-04	1933,206	1766,781	2618,93	<i>PAHBM10k</i>	<i>7,019034E+08</i>	1,7548E+02	8,3560E+07	1,0923E+04

Tabela 4.3. Valores de  $H_{sR}$  e  $H_{sI}$ , nome dos ficheiros \*.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para  $d=0,5$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m)	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	$P_J$ (W/kg)
25	2,5231E-03	1500,013	9,817	1500,04	PBHB25	1,375355E+04	3,4384E-03	1,1461E+03	1,4982E-01
<b>50</b>	1,7841E-03	1500,051	19,635	1500,18	PBHB50	5,501081E+04	1,3753E-02	4,5842E+03	<b>5,9925E-01</b>
100	1,2616E-03	1500,206	39,268	1500,72	PBHB100	2,199909E+05	5,4998E-02	1,8333E+04	2,3964E+00
150	1,0301E-03	1500,463	58,900	1501,62	PBHB150	4,947988E+05	1,2370E-01	4,1233E+04	5,3900E+00
250	7,9788E-04	1501,285	98,151	1504,49	PBHB250	1,374655E+06	3,4366E-01	1,1455E+05	1,4974E+01
350	6,7434E-04	1502,517	137,379	1508,78	PBHB350	2,696754E+06	6,7419E-01	2,2473E+05	2,9376E+01
500	5,6419E-04	1505,133	196,158	1517,86	PBHB500	5,497643E+06	1,3744E+00	4,5814E+05	5,9887E+01
1000	3,9894E-04	1520,442	391,171	1569,95	PBHB1000	2,194585E+07	5,4865E+00	1,8288E+06	2,3906E+02
2500	2,5231E-04	1623,971	958,617	1885,80	PBHB2500	1,352442E+08	3,3811E+01	1,1270E+07	1,4732E+03
5000	1,7841E-04	1948,825	1797,102	2650,94	<i>PBHBM5k</i>	<i>5,087366E+08</i>	1,2718E+02	4,2395E+07	5,5418E+03
7500	1,4567E-04	2374,402	2464,131	3421,95	<i>PBHBM7k5</i>	<i>1,046207E+09</i>	2,6155E+02	8,7184E+07	1,1397E+04
10000	1,2616E-04	2814,850	2976,059	4096,38	<i>PBHBM10k</i>	<i>1,683413E+09</i>	4,2085E+02	1,4028E+08	1,8338E+04

<sup>45</sup> Nesta primeira abordagem numérica, tal como exposto anteriormente, foram usados para  $f \geq 5$  kHz.

Tabela 4.4. Valores de  $H_{sR}$  e  $H_{sI}$ , nome dos ficheiros \*.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para  $d=0,65$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m)	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	$P_J$ (W/kg)
25	2,5231E-03	1500,037	16,591	1500,13	PCHB25	3,021215E+04	7,5530E-03	1,9367E+03	2,5316E-01
50	1,7841E-03	1500,147	33,182	1500,51	PCHB50	1,208276E+05	3,0207E-02	7,7454E+03	1,0125E+00
100	1,2616E-03	1500,587	66,359	1502,05	PCHB100	4,836503E+05	1,2091E-01	3,1003E+04	4,0527E+00
150	1,0301E-03	1501,321	99,524	1504,62	PCHB150	1,087072E+06	2,7177E-01	6,9684E+04	9,1090E+00
250	7,9788E-04	1503,667	165,799	1512,78	PCHB250	3,021550E+06	7,5539E-01	1,9369E+05	2,5319E+01
350	6,7434E-04	1507,179	231,964	1524,93	PCHB350	5,916117E+06	1,4790E+00	3,7924E+05	4,9574E+01
500	5,6419E-04	1514,620	330,907	1550,35	PCHB500	1,207289E+07	3,0182E+00	7,7390E+05	1,0116E+02
1000	3,9894E-04	1557,758	656,368	1690,39	PCHB1000	4,802462E+07	1,2006E+01	3,0785E+06	4,0242E+02
2500	2,5231E-04	1832,442	1554,751	2403,14	PCHB2500	2,862296E+08	7,1557E+01	1,8348E+07	2,3984E+03
5000	1,7841E-04	2543,350	2674,761	3690,93	PCHBM5k	9,839594E+08	2,4599E+02	6,3074E+07	8,2450E+03
7500	1,4567E-04	3252,239	3401,013	4705,74	PCHBM7k5	1,873876E+09	4,6847E+02	1,2012E+08	1,5702E+04
10000	1,2616E-04	3842,464	3923,779	5491,86	PCHBM10k	2,878568E+09	7,1964E+02	1,8452E+08	2,4121E+04

Tabela 4.5. Valores de  $H_{sR}$  e  $H_{sI}$ , nome dos ficheiros \*.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para  $d=1$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m)	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	$P_J$ (W/kg)
25	2,5231E-03	1500,206	39,268	1500,72	PDHB25	1,099642E+05	2,7491E-02	4,5818E+03	5,9893E-01
50	1,7841E-03	1500,822	78,528	1502,88	PDHB50	4,400562E+05	1,1001E-01	1,8336E+04	2,3968E+00
100	1,2616E-03	1503,287	156,981	1511,46	PDHB100	1,758724E+06	4,3968E-01	7,3280E+04	9,5791E+00
150	1,0301E-03	1507,387	235,288	1525,64	PDHB150	3,954979E+06	9,8874E-01	1,6479E+05	2,1541E+01
250	7,9788E-04	1520,442	391,171	1569,95	PDHB250	1,097056E+07	2,7426E+00	4,5711E+05	5,9753E+01
350	6,7434E-04	1539,843	545,609	1633,65	PDHB350	2,146826E+07	5,3671E+00	8,9451E+05	1,1693E+02
500	5,6419E-04	1580,362	773,393	1759,45	PDHB500	4,354882E+07	1,0887E+01	1,8145E+06	2,3719E+02
1000	3,9894E-04	1800,897	1481,275	2331,82	PDHB1000	1,677876E+08	4,1947E+01	6,9912E+06	9,1388E+02
2500	2,5231E-04	2814,850	2976,059	4096,38	PDHB2500	8,418036E+08	2,1045E+02	3,5075E+07	4,5850E+03
5000	1,7841E-04	4208,337	4247,377	5979,16	PDHBM5k	2,395154E+09	5,9879E+02	9,9798E+07	1,3046E+04
7500	1,4567E-04	5163,416	5151,586	7293,81	PDHBM7k5	4,351504E+09	1,0879E+03	1,8131E+08	2,3701E+04
10000	1,2616E-04	5948,958	5940,397	8407,05	PDHBM10k	6,683272E+09	1,6708E+03	2,7847E+08	3,6401E+04

Na Fig. 4.22 podem ver-se os valores finais da densidade de perdas  $P_J$  calculada numericamente a partir da solução por elementos finitos para as quatro espessuras consideradas: em W/m<sup>3</sup>, na Fig. 4.22a, e em W/kg, na Fig. 4.22b.

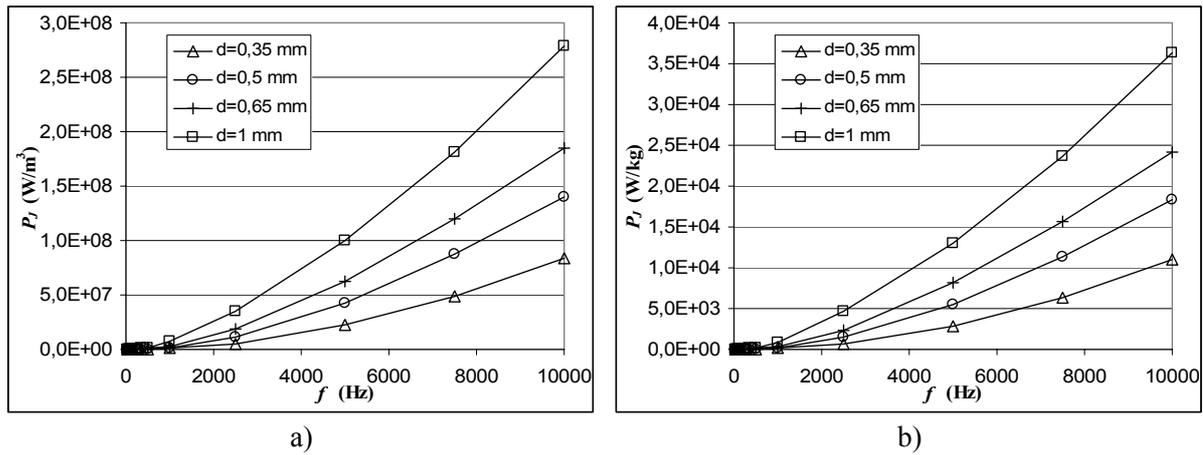


Fig. 4.22.  $P_j$  numéricas a 1D: a) em  $\text{W/m}^3$ ; b) em  $\text{W/kg}$ .

### 4.3 Análise dos resultados 1D

Observando os valores obtidos por elementos finitos, pôs-se de imediato a questão da validade (e validação) dos resultados obtidos, nomeadamente em relação ao significado das perdas obtidas para as frequências mais elevadas e em relação à comparação com dados experimentais, do fabricante ou outros. Segue-se uma análise destes dois aspectos.

#### 4.3.1 Significado físico dos resultados para as frequências mais elevadas

Em primeiro lugar coloca-se a questão do significado físico dos resultados para as frequências mais elevadas: para a frequência de 10 kHz, cerca de 10,9 kW/kg para a chapa de 0,35 mm e 36,4 kW/kg para a chapa com 1 mm de espessura (últimos valores da Tabela 4.2 e Tabela 4.5 respectivamente)! Embora estes resultados pareçam absurdos (e são-no, em termos práticos), apenas querem dizer o seguinte: não é praticamente realizável pretender obter induções desta ordem (1,5 T) para esta frequência, com chapas destas! Para além da questão do rendimento ou eficiência energética deste dispositivo, haveria ainda o problema da quantidade de calor libertada. Esta levaria a uma subida inadmissível de temperatura, para a chapa e para o dispositivo em que estivesse incluída, e ainda a uma alteração do valor da condutividade que por sua vez alteraria os resultados apresentados. Por isso, se o objectivo for obter induções (mais ou menos) elevadas para frequências elevadas (a partir de alguns kHz), como por exemplo para fontes de alimentação comutadas, equipamento de telecomunicações

ou electrónica automóvel, será necessário utilizar outros tipos de materiais<sup>46</sup> consoante a aplicação e em função da gama de frequências, valores de indução, permeabilidade inicial, temperaturas e custo pretendidos. Serão sobretudo materiais de ligas ferromagnéticas de Níquel (chapas finas e núcleos de **fita magnética bobinada**, “*tape/strip wound cores*”), **ferrites** de Ni-Zn (níquel-zinco, de 1 MHz até 1 GHz) e Mn-Zn (manganésio-zinco. Têm menores resistividades que as de Ni-Zn mas maior permeabilidade, sendo usadas até 1-3 MHz) e diversos tipos de núcleos de pó ferromagnético (“*magnetic powder cores*”).

No entanto, e voltando à validade e interesse dos resultados apresentados da Tabela 4.2 até à Tabela 4.5 para as frequências mais elevadas, é importante recordar que mesmo em dispositivos funcionando a 50 Hz, sobretudo os alimentados por electrónica de potência, a existência de harmónicos elevados mesmo com amplitudes significativamente mais baixas poderá levar a perdas por correntes induzidas não desprezáveis e que convirá considerar. Por exemplo para 10 kHz, para uma indução média cem vezes menor ( $B'_{ref}=0,015$  T) que o valor de referência considerado nesta fase do estudo,  $B_{ref}=1,5$  T, e supondo que o valor da permeabilidade magnética se manteria constante, o que não é bem verdade, daria origem a perdas por correntes induzidas dez mil vezes menores, i.e., cerca de 1,09 W/kg para  $d=0,35$  mm e 3,64 W/kg para  $d=1$  mm. Estes valores são ainda superiores à contribuição dos 50 Hz (0,294 W/kg para  $d=0,35$  mm e 2,40 W/kg para  $d=1$  mm), pelo que, se existirem, não se podem desprezar.

---

<sup>46</sup> Tal como se referiu em “2.2.3 Outros materiais magnéticos”. Apresentam-se a título de exemplo algumas referências interessantes, comentadas, sobre este assunto de materiais para frequências mais elevadas:

[Magnetics1999]: tabelas para escolha do tipo de material (“*powder cores*”, núcleos de ferrite, núcleos de fita magnética enrolada, *Permalloy*, *supermendur*, *orthonol*) e da geometria do núcleo consoante a aplicação (transformadores de saída, indutores, filtros em modo comum e em linha) e em função da gama de frequências, valores de indução, permeabilidade inicial, temperaturas e custo pretendidos.

[JFE Steel Corporation2003]: avanço recente em ferrites macias de MnZn com baixas perdas e pequena variação das propriedades magnéticas em função da temperatura.

[Anim-Appiah1997]: utilização de núcleos de ferrites em osciladores de detectores de proximidade indutivos (estudo por elementos finitos e verificação experimental das geometrias mais adequadas. De 1 Hz a 300 kHz).

[Krause1998]: aplicação de um novo material magnético macio de pó comprimido a motores eléctricos na gama de 400 a 800 Hz.

[Mason1998]: aplicação de compostos magnéticos macios (*Accucore*) em rolamentos/suspensões (“*bearings*”) magnéticos activos, para máquinas eléctricas de alta velocidade: sistema de roda livre para armazenamento de energia eléctrica (“*energy storage flywheel systems*”) para aplicação em veículos eléctricos.

[Matsuo2000]: núcleos de ferrite de MnZn super largos (os maiores do mundo no ano 2000) para sistemas de carga indutiva de baterias de veículos eléctricos (100 a 370 kHz).

[Persson1995]: avanços em processos metalúrgicos de produção de materiais compósitos magnéticos macios para utilização em máquinas eléctricas na gama de 50 a 1000 Hz, e sua influência nas propriedades mecânicas e magnéticas.

[Saotome1997]: análise de perdas em núcleos de ferrites de MnZn até 1 MHz.

Esclarecida a questão do significado físico dos resultados, vamos abordar a questão da validação dos nossos resultados.

### 4.3.2 Dificuldades na obtenção de dados experimentais.

#### Experimentação numérica

Em qualquer trabalho de doutoramento é normal, e quase obrigatória, a existência de trabalho experimental que sirva de suporte à dissertação apresentada ou valide os resultados obtidos pelos modelos propostos. Por isso, desde o início se procurou uma forma de realizar experimentação que nos permitisse comparar resultados com os obtidos pela solução de elementos finitos. No entanto, e atendendo a que o ponto fulcral desta dissertação consiste na determinação das perdas por correntes induzidas considerando a largura da chapa, i.e., em chapas estreitas, após pesquisa sobre os aparelhos de medida existentes, de contactos efectuados com o Dr. Giorgio Bertotti durante o CEFC 2002 em Perugia, Itália, e com o Prof. Dr. Luc Dupré durante o ICEM 2002 em Bruges, Bélgica, chegou-se à conclusão que a obtenção de resultados experimentais para este problema concreto seria extremamente difícil, senão quase impossível, pelas seguintes razões:

- A medição de chapas estreitas não se enquadra nos aparelhos de medida existentes:
  - Estrutura de Epstein “*Epstein frame*” descrita em detalhe na norma IEC 60404-2 [IEC 60404-2\_1996] até 400 Hz, em que para a estrutura de Epstein de 25 cm [Holmberg1997] [Cundeva2001], é utilizado um conjunto de chapas cortadas com largura  $w=30$  mm e comprimento  $l=280$  mm. Por exemplo, para o “*Epstein Iron Loss Test Set – Type 3265*” da Yokogava [Yokogava1986], existente na Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona<sup>47</sup> são utilizadas chapas cortadas com largura  $w=30$  mm e comprimento  $l$  entre 280 e 320 mm, correspondendo aproximadamente a 2 kg de chapa magnética o que corresponde a 104, 88, 64 e 48 chapas para as espessuras de 0,30, 0,35, 0,50 e 0,70 mm respectivamente;
  - “Testador de chapa única” (“*single sheet tester*”, SST), descrito em detalhe na norma IEC 60404-3 [IEC 60404-3\_2002] (muito usado para medição de perdas por fluxo rotacional [Zhu1998] [Stranges2000]) utiliza normalmente amostras de

---

<sup>47</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, grupo do Prof. Ramón Bargalló com quem foram iniciadas colaborações no âmbito das perdas em chapas ferromagnéticas ao longo deste trabalho, especialmente com o Eng. Alfredo de Blas [Blas2004a] [Blas2004b].

- 50 mm × 50 mm, embora existam versões para outras dimensões de chapa, por exemplo 30 mm × 100 mm e 117 mm × 120 mm [BROCKHAUS2004];
- Outros equipamentos de medida mais específicos [Steingroever1997a];
  - Isto obrigaria ao desenvolvimento e à construção de equipamento específico para a medição, o que, se teoricamente é possível, seria extremamente difícil, atendendo a que teríamos que ter um equipamento que medisse as perdas em chapas com larguras bastante variadas (correspondendo a  $w/d$  variando de 2 a, pelo menos, 20) e com precisão muito elevada. Caso contrário, os erros de medida seriam muito superiores aos efeitos da variação da relação  $w/d$ . Assim, teríamos os problemas da calibração, linearidade e exactidão, numa grande gama de frequências, de um aparelho que, contrariamente à estrutura de Epstein e ao testador de chapa única, teria amostras de dimensão variável. Haveria também que resolver a questão da separação dos diferentes tipos de perdas com exactidão, a fim de se poder comparar com os resultados da simulação por elementos finitos;
  - Para além disso, é sabido que, o processo comum de corte das chapas por punçoamento (“*punching*”) introduz tensões mecânicas na proximidade dos limites da chapa que conduzem a alterações locais das suas propriedades magnéticas [Pulnikov2002] [Pulnikov2002b]. Este efeito (embora na prática possa ser diminuído por tratamento térmico após o corte, “*annealing*”) é extremamente complexo de caracterizar [Ossart2000], e portanto de considerar, para comparação com resultados por elementos finitos. Para evitar este efeito as chapas a medir teriam ainda que ser cortadas por electroerosão [Dupré1998].

Assim, optou-se por comparar os resultados com valores de fabricante e fazer “experimentação numérica”, comparando os resultados com expressões analíticas e com resultados numéricos de outros autores, nomeadamente com Gyselinck e Bertotti tal como se verá nos pontos seguintes.

### **4.3.3 Comparação com valores do fabricante e experimentais de outros autores**

Após termos obtido os primeiros resultados por elementos finitos, e justificado a quase impossibilidade de obtenção de resultados experimentais nesta área (para o problema 2D), o

segundo aspecto a analisar é a comparação com os valores típicos do fabricante, normalmente fornecidos para 50 Hz. Tal como referido anteriormente, não possuíamos à partida a curva de perdas para a chapa utilizada, pelo que partimos do valor de referência (cf. nota de rodapé nº38, na página 71) que temos para esta chapa, que é  $P=4$  W/kg, para  $d=0,5$  mm e 50 Hz, correspondente ao valor máximo das perdas totais (i.e., o fabricante garante que as perdas serão inferiores a este valor). Destas, uma parte serão perdas por correntes induzidas, outra por histerese e ainda uma outra serão as “perdas em excesso” (praticamente desprezáveis para 50 Hz e fluxo alternado). O valor obtido pela simulação por elementos finitos para  $d=0,5$  mm, 50 Hz, foi de 0,59925 W/kg, tal como se pode ver na Tabela 4.3 (valor a negrito), ou seja significativamente menor que os 4 W/kg das perdas totais. Assim, tem-se a relação  $P_j/P=0,1498\approx 15\%$ , o que numa primeira análise parece bastante (demasiado?) baixo. Ao contactar o fabricante UGINE, fomos informados que já não fabricavam chapa magnética e não conseguimos obter as curvas de perdas relativas ao material FeV 400-50 HA utilizado na simulação [UGINE], pelo que contactamos outro fabricante do mesmo grupo, a Sollac Méditerranée [SollacMéditerranée2001a]. Segundo as primeiras informações prestadas por este fabricante, a repartição típica do valor das perdas para esta espessura e frequência é de 30% para as perdas por correntes induzidas e 70% para as perdas por histerese, o que nos levaria a esperar cerca de 1,2 W/kg (30 % de 4 W/kg), i.e., precisa e estranhamente o dobro do valor que obtivemos. Isto levou-nos inicialmente a pensar que haveria um erro num factor de  $\frac{1}{2}$  (ou de 2), o que acontece normalmente quando se consideram valores eficazes em vez de valores máximos (ou vice-versa). Tendo verificado que não nos tínhamos enganado, ou seja que tal como o fabricante<sup>48</sup> tínhamos usado o valor de  $B_{max}$  e que as perdas vinham em valor médio parecia que algo estava mal e, pior, que não tínhamos explicação para isso.

Consultando as curvas de perdas que nos forneceram para a chapa magnética M400-50A (designação que segundo a norma EN 10106 de 1996, substitui a designação “FeV 400-50 HA”), com  $\sigma = 2,222(2)\times 10^6$  S/m e  $d=0,5$  mm, as perdas totais são  $P=3,3$  W/kg, para  $f=50$  Hz,  $B_{max}=1,5$  T (significativamente inferiores ao valor máximo de 4 W/kg). Usando o valor típico da distribuição de perdas indicado pelo fabricante para as perdas por correntes induzidas, 30 % de 3,3 W/kg deveria dar 1,1 W/kg. No entanto, e segundo carta de 12 de Março de 2001 [SollacMéditerranée2001a], para a separação de perdas, utilizam para o

---

<sup>48</sup> Correio electrónico de 5-11-2001: “4-Dans tous les cas les valeurs de B et H sont des valeurs Max et les valeurs de pertes des valeurs moyennes” (sic).

cálculo das perdas por correntes induzidas “clássicas” a mesma expressão<sup>49</sup> já por nós citada e designada por  $P_{B2}$ ,

$$P_{B2} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} \quad (3.41)$$

válida para permeabilidade constante, sem efeito pelicular. Calculando as perdas desta forma, vem  $P_{B2} = 0,668$  W/kg, valor bastante inferior aos 1,1 W/kg que deveria dar caso se verificasse a proporção de 30 % de perdas por correntes induzidas, pois  $P_{B2}/P = 0,668/3,3 = 20,2\%$ . Confrontados com estes resultados, responderam que a proporção 30%-70% traduz com razoável precisão a realidade prática a 50 Hz e  $d = 0,5$  mm, embora exista uma componente a que chamam “perdas anormais”<sup>50</sup>.

Tendo assim a questão em aberto, procurámos na literatura outros valores para a relação entre perdas por correntes induzidas e as perdas totais. Para o caso correspondente ao material 3 da “Table I” de [Bertotti1988], para chapa com 3% silício de grão não orientado,  $\sigma = 2 \times 10^6$  S/m,  $f = 50$  Hz,  $B_{\max} = 1,5$  T e  $d = 0,35$  mm, portanto para as mesmas condições por nós consideradas quando obtivemos os resultados apresentados na Tabela 4.3 (excepto a espessura,  $d = 0,35$  m, um pouco diferente da nossa  $d = 0,5$  mm)<sup>51</sup>, os resultados obtidos por Bertotti foram (cf. equação (3.6),  $P = P_{\text{hist}} + P_{\text{class}} + P_{\text{exc}}$ ),  $P_{\text{class}} = 0,29$  W/kg,  $P_{\text{exc}} = 0,33$  W/kg e  $P_{\text{hist}} = 1,8$  W/kg. Ou seja  $P = 2,42$  W/kg, pelo que  $P_{\text{class}}/P = 0,12 = 12\%$ , isto é uma componente das perdas por correntes induzidas ainda menor do que a que obtivemos (15%). Para o material 4, semelhante ao anterior mas com um grão maior, será  $P_{\text{class}}/P = 0,10 = 10\%$  ( $P_{\text{class}} = 0,28$  W/kg,  $P_{\text{exc}} = 0,41$  W/kg e  $P_{\text{hist}} = 2,1$  W/kg, ou seja  $P = 2,79$  W/kg). Para além disso, se compararmos os resultados obtidos experimentalmente por Bertotti para grão não orientado, materiais 3 e 4 da “Table I” em [Bertotti1988]  $P_{\text{class}} = 0,29$  W/kg e  $P_{\text{class}} = 0,28$  W/kg (grão com  $0,85 \times 10^{-4}$  m e  $1 \times 10^{-4}$  m, respectivamente), com os nossos resultados numéricos, para 50 Hz e  $d = 0,35$  mm (a negrito na Tabela 4.2),  $P_f = 2,9369 \times 10^{-1}$  W/kg, vemos que há uma muito boa concordância.

Assim, voltando à distribuição de perdas de 70% para histerese e 30% para correntes induzidas, mencionada pelo fabricante, parece claro que esta tem que se referir à separação

<sup>49</sup> Embora não usem esta notação e esteja em W/kg, é equivalente à equação (3.41).

<sup>50</sup> Correio electrónico de 5-11-2001: “A noter aussi que ce que nous appelons “pertes anormales” et qui ne sont pas en proportion significatives a 50 Hz augmentent avec la fréquence” (sic).

<sup>51</sup> O facto de, para este material a 50 Hz, tal como se pode ver na Tabela 4.3 a negrito,  $\delta = 1,7841$  mm ser bastante maior que  $d = 0,35$  mm ou  $d = 0,5$  mm, isto é sem efeito pelicular, leva-nos a crer que a diferença na relação  $P_{\text{class}}/P = P_f/P$  para  $d = 0,35$  mm ou  $d = 0,5$  mm não será muito significativa.

clássica entre apenas “perdas por histerese” e “perdas por correntes induzidas”, tal como vem na equação

$$P = P_{hist} + P_{din} \quad (3.5)$$

Repare-se que assim, chamando “perdas por correntes induzidas” a  $P_{din}$ , virá para os casos apresentados por Bertotti,  $P_{din}=P_{class}+P_{exc}=0,62$ , ou seja  $P_{din}/P=0,62/2,42=25,6\%$ , e  $P_{din}=0,69$ , ou seja  $P_{din}/P=0,69/2,79=24,7\%$ , mais perto dos 30% indicados.

Assim, concluímos que certamente a informação enviada pela Sollac Méditerranée [SollacMéditerranée2001b] está correcta quanto à percentagem de distribuição “perdas por histerese”-“perdas por correntes induzidas”, mas estas “perdas por correntes induzidas” (as quais não poderão ser calculadas pela equação (3.41), contrariamente ao que nos foi dito) englobarão também as “perdas em excesso”, ou “perdas anormais”, como as designaram, fazendo portanto a separação das perdas em dois termos e não em três.

Atendendo ao anteriormente exposto neste ponto 4.3.2, considerámos portanto que os valores obtidos estão de acordo com os valores experimentais para as perdas por correntes induzidas, dados pelo fabricante (embora seja uma conclusão de forma indirecta) e por Bertotti.

Surge no entanto agora uma nova questão: o presente trabalho dedica-se sobretudo ao estudo das perdas por correntes induzidas clássicas,  $P_{class}$ . Contudo, atendendo aos valores acima indicados,  $P_{class}$  é o termo com menor contribuição para as perdas totais. Assim, fará sentido dedicar tanto esforço ao estudo das “ $P_{class}$ ”? Pensamos que sim. Note-se que embora a 50 Hz,  $P_{class}$  seja o termo menor, como depende de  $f^2$  enquanto  $P_{exc}$  depende de  $f^{1.5}$  e  $P_{hist}$  depende de  $f$  (cf. equação ((3.7)), página 47), com o aumento da frequência, rapidamente  $P_{class}$  se torna o termo mais importante.

#### **4.3.4 Comparação das perdas por correntes induzidas, calculadas numericamente a 1D, com os valores da expressão analítica exacta**

Tendo feito a comparação e validação com valores experimentais, fomos então comparar os nossos resultados numéricos com os que se obtêm das expressões analíticas. Como

referência usamos as perdas analíticas exactas, dadas pela expressão (3.37) considerando efeito pelicular

$$P_{B1} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} F_{sk} \quad (3.37)$$

obviamente com  $\sigma = 2 \times 10^6$  S/m,  $B_{\max}^a = 1,5$  T e  $d = [0,35-1]$  mm e  $f = [25-10000]$  Hz. Os valores obtidos estão representados nas colunas “ $P_{B1}$  (W/m<sup>3</sup>)” da Tabela 4.6, para cada uma das espessuras. Na mesma tabela, são também apresentados os erros obtidos, em percentagem, no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas (valores apresentados da Tabela 4.2 à Tabela 4.5). Este erro foi calculado por

$$Erro \% = \frac{P_J - P_{B1}}{P_{B1}} 100\% \quad (4.1)$$

Tabela 4.6. Valores das perdas por correntes induzidas calculadas pela expressão analítica exacta, e erros no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas correspondentes a 1D.

$f$ [Hz]	$\delta$ [m]	$d=0,35$ mm		$d=0,5$ mm		$d=0,65$ mm		$d=1$ mm	
		$P_{B1}$ (W/m <sup>3</sup> ) (eq. (3.37))	<i>Erro</i>						
25	2,5231E-03	5,6673E+02	-0,8907%	1,1566E+03	-0,9046%	1,9546E+03	-0,9186%	4,6262E+03	-0,9588%
50	1,7841E-03	2,2669E+03	-0,8919%	4,6263E+03	-0,9100%	7,8184E+03	-0,9337%	1,8503E+04	-0,9022%
100	1,2616E-03	9,0676E+03	-0,8971%	1,8505E+04	-0,9306%	3,1271E+04	-0,8557%	7,3976E+04	-0,9402%
150	1,0301E-03	2,0402E+04	-0,9057%	4,1634E+04	-0,9619%	7,0349E+04	-0,9458%	1,6632E+05	-0,9166%
250	7,9788E-04	5,6670E+04	-0,9308%	1,1563E+05	-0,9310%	1,9533E+05	-0,8390%	4,6084E+05	-0,8095%
350	6,7434E-04	1,1107E+05	-0,8348%	2,2658E+05	-0,8184%	3,8259E+05	-0,8751%	8,9989E+05	-0,5981%
500	5,6419E-04	2,2664E+05	-0,9125%	4,6219E+05	-0,8759%	7,7968E+05	-0,7410%	1,8223E+06	-0,4242%
1000	3,9894E-04	9,0592E+05	-0,8409%	1,8433E+06	-0,7881%	3,0931E+06	-0,4707%	6,9803E+06	0,1548%
2500	2,5231E-04	5,6343E+06	-0,6018%	1,1293E+07	-0,2044%	1,8316E+07	0,1724%	3,5061E+07	0,0407%
5000	1,7841E-04	2,2156E+07	-0,0975%	4,2343E+07	0,1216%	6,3023E+07	0,0821%	1,0008E+08	-0,2782%
7500	1,4567E-04	4,8517E+07	0,1989%	8,7090E+07	0,1083%	1,2020E+08	-0,0678%	1,8207E+08	-0,4171%
10000	1,2616E-04	8,3258E+07	0,3632%	1,4024E+08	0,0292%	1,8490E+08	-0,2056%	2,7993E+08	-0,5233%

Estes erros são também apresentados de forma gráfica na Fig. 4.23. Desta figura e da Tabela 4.6 pode ver-se facilmente que os erros (valor absoluto) variam entre 0,03% e 0,96%. Pode também verificar-se que os maiores erros acontecem para as frequências mais baixas, pois devido ao facto de ser uma primeira abordagem numérica do problema e, por uma questão de melhor visualização de resultados, se ter optado por modelar toda a chapa, são estes casos os que têm as malhas mais grosseiras ( $f < 5$  kHz, neste caso frequências até 2,5 kHz). O erro é maior nos casos em que o efeito pelicular é menor, pois nestes casos o campo é praticamente uniforme ao longo da espessura da chapa, pelo que o erro relativo na

zona central do modelo (com elementos finitos maiores, tal como se pode ver na Fig. 4.4, página 76) tem maior importância no erro total. Estes erros podem ser muito diminuídos usando uma malha de elementos finitos mais adaptada ao problema 1D e ao efeito pelicular. Por exemplo, foi verificado numericamente que com uma malha muito estreita (largura  $w=0,05\text{mm}$ ) mas usando muito aproximadamente o mesmo número nodos, obtivemos um erro de apenas 0,0028 % para 10 kHz.

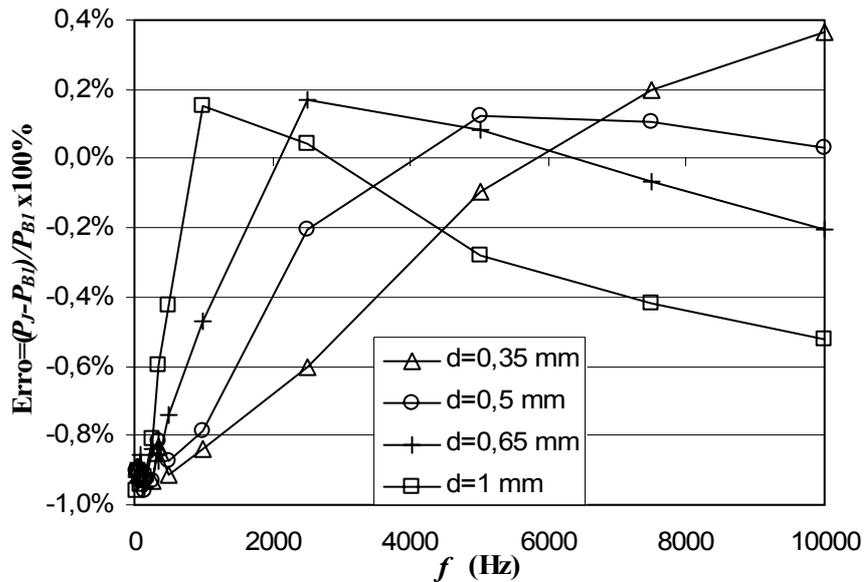


Fig. 4.23. Erros no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas a 1D.

Falta ainda referir que os resultados numéricos apresentados da Tabela 4.2 à Tabela 4.5 para o problema 1D foram obtidos com os modelos com largura  $w=6\text{ mm}$ . No entanto, foram também resolvidos os mesmos casos para as larguras de 2 e 4 mm (apenas para aferir os erros numéricos associados a malhas diferentes), que como é óbvio foram quase coincidentes com os obtidos com as malhas para 6 mm, com diferenças muito pequenas, sempre inferiores a 0,04%.

### 4.3.5 Conclusões dos resultados numéricos do problema 1D

Do exposto anteriormente, especialmente em “4.2 Resultados numéricos do problema 1D” e “4.3 Análise dos resultados 1D” podem retirar-se algumas conclusões importantes:

- Apesar de nesta primeira fase terem sido utilizadas malhas grosseiras, pois estávamos limitados a 600 nodos, o erro em relação à expressão analítica exacta foi sempre inferior a 1%, pelo que se consideram os resultados aceitáveis;

- Visto que se utilizaram exactamente as mesmas malhas, à excepção do local de aplicação das condições fronteira, os erros espectáveis para o problema 2D, deverão ser iguais aos correspondentes a 1D, ou da mesma ordem de grandeza;
- A comparação dos nossos resultados numéricos com os dados experimentais de outro autor, considerado de referência [Bertotti1988], apresentou uma boa concordância e a comparação com os dados de fabricante, apesar de discrepantes, foi justificada.

Assim, **tanto a formulação como os resultados estão verificados.**

#### 4.4 Resultados numéricos do problema 2D

Tendo sido validada a metodologia e os resultados para o problema 1D, vamos agora debruçar-nos sobre o problema 2D.

Tal como expresso anteriormente, foram usadas as mesmas<sup>52</sup> malhas que para o problema 1D (“largura infinita”). Note-se que o valor de  $H_s$  aplicado para cada  $d$  e  $f$  é o mesmo que o utilizado no problema 1D correspondente e que se encontra na Tabela 4.2 (página 87) e seguintes, até à Tabela 4.5. Assim, os erros a esperar serão aproximadamente iguais ou da mesma ordem de grandeza que os obtidos para o problema 1D.

Da Tabela 4.7 à Tabela 4.10, para as chapas magnéticas com  $w=2, 4$  e  $6$  mm, são apresentados os valores obtidos por elementos finitos para  $\int J_{max}^2 dS$  (equação (3.55)) e para as densidades de perdas por correntes induzidas, em  $W/m^3$ , calculadas pela equação (3.32), tal como exposto no final de “3.4.3 Procedimento de cálculo das perdas por correntes induzidas por elementos finitos a partir da solução de H”. Da mesma forma que para o problema 1D, nestas tabelas os casos cujos nomes dos ficheiros têm a letra “M” (aparecem a itálico) utilizam semi-modelos, pelo que os valores respectivos apresentados na coluna “ $\int J_{max}^2 dS$ ” (também a itálico) não são os calculados no **CADyPOS** pela equação (3.55) (corresponderia a meia chapa, com largura considerada igual a  $w/2$ ) mas sim já o dobro desse valor, correspondendo portanto ao modelo total (largura do problema igual a  $w$ ). Os últimos dígitos do nome de cada ficheiro correspondem às frequências utilizadas. Assim, em “PATB25.pos”, 25 significa 25 Hz e em “PATBM7k5.pos”, “7k5” corresponde a 7,5 kHz.

---

<sup>52</sup> À excepção das condições de fronteira, agora marcadas a toda a volta da malha para o modelo completo e deixando livre o lado correspondente à linha de simetria (linha de  $x=0$ ) para o semi-modelo, usado para frequências iguais ou superiores a 5 kHz.

Tabela 4.7. Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para  $d=0,35$  mm.

$w = 6$ mm			$w = 4$ mm			$w = 2$ mm		
Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )
PATB25	4,526441E+03	5,388620E+02	PATA25	2,963332E+03	5,291664E+02	PATC25	1,396523E+03	4,987582E+02
PATB50	1,810553E+04	2,155420E+03	PATA50	1,185318E+04	2,116639E+03	PATC50	5,586040E+03	1,995014E+03
PATB100	7,241835E+04	8,621232E+03	PATA100	4,741041E+04	8,466145E+03	PATC100	2,234330E+04	7,979750E+03
PATB150	1,629270E+05	1,939607E+04	PATA150	1,066646E+05	1,904725E+04	PATC150	5,026920E+04	1,795329E+04
PATB250	4,524580E+05	5,386405E+04	PATA250	2,962191E+05	5,289627E+04	PATC250	1,396106E+05	4,986093E+04
PATB350	8,876709E+05	1,056751E+05	PATA350	5,811624E+05	1,037790E+05	PATC350	2,739285E+05	9,783161E+04
PATB500	1,810133E+06	2,154920E+05	PATA500	1,185166E+06	2,116368E+05	PATC500	5,587201E+05	1,995429E+05
PATB1000	7,245126E+06	8,625150E+05	PATA1000	4,745126E+06	8,473439E+05	PATC1000	2,239236E+06	7,997271E+05
PATB2500	4,534723E+07	5,398480E+06	PATA2500	2,975760E+07	5,313857E+06	PATC2500	1,413211E+07	5,047182E+06
PATBM5k	1,816351E+08	2,162322E+07	PATAM5k	1,196888E+08	2,137300E+07	PATCM5k	5,772510E+07	2,061611E+07
PATBM7k5	4,030548E+08	4,798271E+07	PATAM7k5	2,669932E+08	4,767736E+07	PATCM7k5	1,308898E+08	4,674636E+07
PATBM10k	6,987574E+08	8,318540E+07	PATAM10k	4,649016E+08	8,301814E+07	PATCM10k	2,309810E+08	8,249321E+07

Tabela 4.8. Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para  $d=0,5$  mm.

$w = 6$ mm			$w = 4$ mm			$w = 2$ mm		
Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )
PBTB25	1,299363E+04	1,082803E+03	PBTA25	8,428354E+03	1,053544E+03	PBTC25	3,856058E+03	9,640145E+02
PBTB50	5,197182E+04	4,330985E+03	PBTA50	3,371184E+04	4,213980E+03	PBTC50	1,542378E+04	3,855945E+03
PBTB100	2,078456E+05	1,732047E+04	PBTA100	1,348230E+05	1,685288E+04	PBTC100	6,168823E+04	1,542206E+04
PBTB150	4,675099E+05	3,895916E+04	PBTA150	3,032694E+05	3,790868E+04	PBTC150	1,387756E+05	3,469390E+04
PBTB250	1,299098E+06	1,082582E+05	PBTA250	8,427991E+05	1,053499E+05	PBTC250	3,857992E+05	9,644980E+04
PBTB350	2,549270E+06	2,124392E+05	PBTA350	1,654116E+06	2,067645E+05	PBTC350	7,575784E+05	1,893946E+05
PBTB500	5,200195E+06	4,333496E+05	PBTA500	3,375284E+06	4,219105E+05	PBTC500	1,547565E+06	3,868913E+05
PBTB1000	2,082939E+07	1,735783E+06	PBTA1000	1,354399E+07	1,692999E+06	PBTC1000	6,247322E+06	1,561831E+06
PBTB2500	1,305985E+08	1,088321E+07	PBTA2500	8,568406E+07	1,071051E+07	PBTC2500	4,069947E+07	1,017487E+07
PBTBM5K	5,072970E+08	4,227475E+07	PBTAM5k	3,373510E+08	4,216888E+07	PBTCM5k	1,673314E+08	4,183286E+07
PBTBM7k5	1,062777E+09	8,856473E+07	PBTAM7k5	7,130808E+08	8,913510E+07	PBTCM7k5	3,632736E+08	9,081840E+07
PBTBM10k	1,729813E+09	1,441511E+08	PBTAM10k	1,167240E+09	1,459051E+08	PBTCM10k	6,045262E+08	1,511316E+08

Tabela 4.9. Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para  $d=0,65$  mm.

$w = 6$ mm			$w = 4$ mm			$w = 2$ mm		
Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )
PCTB25	2,808563E+04	1,800361E+03	PCTA25	1,804674E+04	1,735263E+03	PCTC25	7,997605E+03	1,538001E+03
PCTB50	1,123270E+05	7,200449E+03	PCTA50	7,217848E+04	6,940238E+03	PCTC50	3,198885E+04	6,151702E+03
PCTB100	4,496853E+05	2,882598E+04	PCTA100	2,889779E+05	2,778634E+04	PCTC100	1,281056E+05	2,463569E+04
PCTB150	1,010963E+06	6,480532E+04	PCTA150	6,497491E+05	6,247588E+04	PCTC150	2,881658E+05	5,541650E+04
PCTB250	2,812049E+06	1,802596E+05	PCTA250	1,808035E+06	1,738495E+05	PCTC250	8,029813E+05	1,544195E+05
PCTB350	5,511835E+06	3,533228E+05	PCTA350	3,545976E+06	3,409592E+05	PCTC350	1,578054E+06	3,034719E+05
PCTB500	1,127245E+07	7,225929E+05	PCTA500	7,260624E+06	6,981369E+05	PCTC500	3,244586E+06	6,239588E+05
PCTB1000	4,533929E+07	2,906365E+06	PCTA1000	2,937828E+07	2,824835E+06	PCTC1000	1,339983E+07	2,576890E+06
PCTB2500	2,810441E+08	1,801565E+07	PCTA2500	1,858811E+08	1,787318E+07	PCTC2500	9,059822E+07	1,742273E+07
PCTBM5K	1,009907E+09	6,473760E+07	PCTAM5k	6,809948E+08	6,548027E+07	PCTCM5k	3,519384E+08	6,768046E+07
PCTBM7k5	1,959307E+09	1,255966E+08	PCTAM7k5	1,333363E+09	1,282080E+08	PCTCM7k5	7,072604E+08	1,360116E+08
PCTBM10k	3,038786E+09	1,947940E+08	PCTAM10k	2,077962E+09	1,998040E+08	PCTCM10k	1,116945E+09	2,147972E+08

Tabela 4.10. Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para  $d=1$  mm.

$w = 6$ mm			$w = 4$ mm			$w = 2$ mm		
Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	Ficheiro *.pos	$\int J_{max}^2 dS$ (A/m) <sup>2</sup>	$P_J$ (W/m <sup>3</sup> )
PDTB25	9,826803E+04	4,094501E+03	PDTA25	6,168823E+04	3,855514E+03	PDTC25	2,513122E+04	3,141403E+03
PDTB50	3,933707E+05	1,639045E+04	PDTA50	2,469845E+05	1,543653E+04	PDTC50	1,006846E+05	1,258558E+04
PDTB100	1,574054E+06	6,558558E+04	PDTA100	9,890039E+05	6,181274E+04	PDTC100	4,042186E+05	5,052733E+04
PDTB150	3,546726E+06	1,477803E+05	PDTA150	2,231068E+06	1,394418E+05	PDTC150	9,156912E+05	1,144614E+05
PDTB250	9,896927E+06	4,123720E+05	PDTA250	6,247322E+06	3,904576E+05	PDTC250	2,596754E+06	3,245943E+05
PDTB350	1,952440E+07	8,135167E+05	PDTA350	1,238220E+07	7,738875E+05	PDTC350	5,234553E+06	6,543191E+05
PDTB500	4,018239E+07	1,674266E+06	PDTA500	2,569300E+07	1,605813E+06	PDTC500	1,118772E+07	1,398465E+06
PDTB1000	1,625533E+08	6,773054E+06	PDTA1000	1,067123E+08	6,669519E+06	PDTC1000	5,087362E+07	6,359203E+06
PDTB2500	8,822969E+08	3,676237E+07	PDTA2500	6,022698E+08	3,764186E+07	PDTC2500	3,218184E+08	4,022730E+07
<i>PDTBM5k</i>	<i>2,615798E+09</i>	<i>1,089916E+08</i>	<i>PDTAM5k</i>	<i>1,816515E+09</i>	<i>1,135322E+08</i>	<i>PDTCM5k</i>	<i>1,017069E+09</i>	<i>1,271337E+08</i>
<i>PDTBM7k5</i>	<i>4,810060E+09</i>	<i>2,004192E+08</i>	<i>PDTAM7k5</i>	<i>3,358884E+09</i>	<i>2,099303E+08</i>	<i>PDTCM7k5</i>	<i>1,907704E+09</i>	<i>2,384630E+08</i>
<i>PDTBM10k</i>	<i>7,437382E+09</i>	<i>3,098909E+08</i>	<i>PDTAM10k</i>	<i>5,209864E+09</i>	<i>3,256165E+08</i>	<i>PDTCM10k</i>	<i>2,982360E+09</i>	<i>3,727950E+08</i>

Sendo nosso objectivo tentar encontrar alguma forma de poder considerar o efeito de extremidade das chapas de uma forma fácil, eventualmente através da obtenção de gráficos ou modelos analíticos, vamos analisar de seguida estes resultados, pois nestas tabelas encontra-se informação (muito) importante embora de uma forma escondida. Vamos seguidamente apresentá-la de forma gráfica, tentando encontrar uma representação que nos permita relacionar os diversos parâmetros em jogo e extrair conclusões úteis. Assim, a primeira tentativa encontra-se na Fig. 4.24, representando a densidade de perdas por correntes induzidas em função da frequência para cada uma dos pares “espessura  $\times$  largura”, i.e., “ $d \times w$ ”, pondo em evidência, por cores, a variação de  $d$  para cada  $w$ . Na Fig. 4.25 representam-se os mesmos resultados mas agora pondo em evidência a variação de  $w$  para cada  $d$  e ainda na Fig. 4.26 mas usando escala logarítmica. Embora estas figuras sejam interessantes, pelas razões que serão oportunamente apresentadas em “5.4 Efeito de sobreposição”, página 118 não vamos agora extrair grandes conclusões delas, ficando apenas como referência.

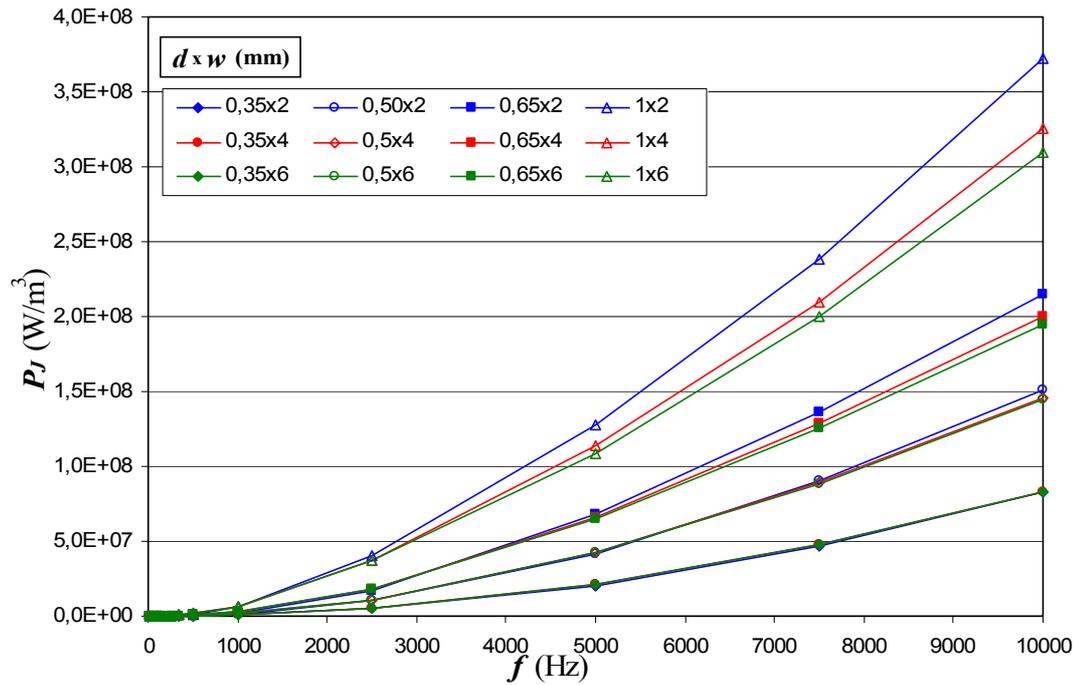


Fig. 4.24. Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da espessura  $d$  para cada largura  $w$  (na mesma cor).

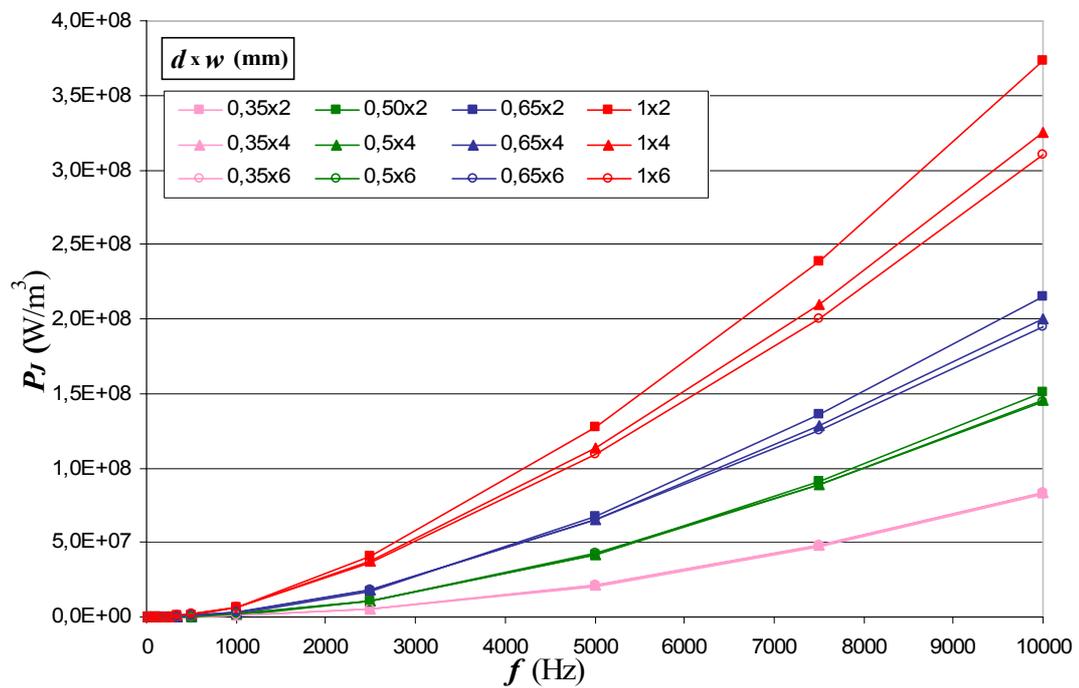


Fig. 4.25. Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura  $w$  para cada espessura  $d$  (na mesma cor).

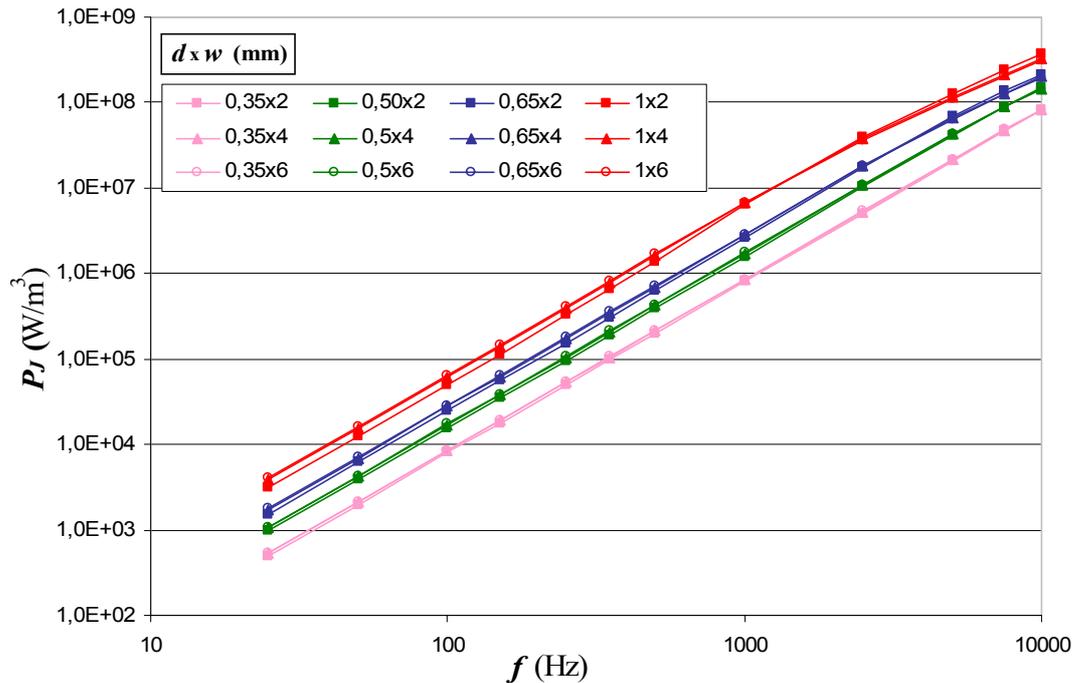


Fig. 4.26. Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura  $w$  para cada espessura  $d$ . Escala logarítmica.

Para além disso, as figuras e tabelas anteriores referem-se ainda a casos “demasiado concretos”, ou seja temos a densidade de perdas para cada  $d$ ,  $w$ ,  $f$  e  $H_s$ , para uma chapa particular, com um determinado valor de condutividade e de permeabilidade magnética. Na tentativa de encontrar uma **lei de variação das perdas** mais genérica, calculou-se o rácio entre as perdas numéricas 2D,  $P_j$ , e as analíticas a 1D tomando em conta o efeito pelicular,  $P_{BI}$ , que considerámos as perdas de referência (equação (3.37), página 56). Na Tabela 4.11 apresenta-se  $P_j/P_{BI}$  para  $d=0,35$  mm e 0,5 mm e na Tabela 4.12 para 0,65 mm e 1 mm.

Apresentando estes resultados de forma gráfica, na Fig. 4.27 pode ver-se  $P_j/P_{BI}$  em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da espessura  $d$  (mesma cor para cada largura  $w$ ), e na Fig. 4.28 os mesmos resultados mas agora pondo em evidência a variação da largura  $w$  (mesma cor para cada espessura  $d$ ). O aspecto mais interessante a realçar neste momento é o cruzamento das curvas para a mesma espessura em  $P_j/P_{BI}=1$  para frequências diferentes consoante a espessura.

Tabela 4.11.  $P_j/P_{Bl}$  para o problema 2D, para  $d=0,35$  e  $0,5$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$d=0,35$ mm			$d=0,5$ mm		
		$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm
25	2,5231E-03	0,88006	0,93372	0,95083	0,83350	0,91090	0,93620
50	1,7841E-03	0,88006	0,93371	0,95081	0,83348	0,91087	0,93616
100	1,2616E-03	0,88003	0,93367	0,95077	0,83341	0,91073	0,93600
150	1,0301E-03	0,87998	0,93360	0,95070	0,83331	0,91053	0,93576
250	7,9788E-04	0,87985	0,93341	0,95049	0,83412	0,91109	0,93624
350	6,7434E-04	0,88084	0,93439	0,95146	0,83587	0,91253	0,93757
500	5,6419E-04	0,88044	0,93380	0,95082	0,83709	0,91286	0,93761
1000	3,9894E-04	0,88278	0,93534	0,95209	0,84728	0,91844	0,94165
2500	2,5231E-04	0,89579	0,94312	0,95814	0,90095	0,94838	0,96368
5000	1,7841E-04	0,93052	0,96468	0,97597	0,98795	0,99588	0,99838
7500	1,4567E-04	0,96350	0,98269	0,98899	1,04282	1,02349	1,01694
10000	1,2616E-04	0,99082	0,99712	0,99913	1,07764	1,04037	1,02786

Tabela 4.12.  $P_j/P_{Bl}$  para o problema 2D, para  $d=0,65$  e  $1$  mm.

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$d=0,65$ mm			$d=1$ mm		
		$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm
25	2,5231E-03	0,78685	0,88777	0,92107	0,67905	0,83341	0,88507
50	1,7841E-03	0,78683	0,88768	0,92097	0,68021	0,83429	0,88585
100	1,2616E-03	0,78782	0,88857	0,92182	0,68303	0,83558	0,88658
150	1,0301E-03	0,78773	0,88808	0,92119	0,68822	0,83842	0,88855
250	7,9788E-04	0,79057	0,89004	0,92286	0,70436	0,84728	0,89483
350	6,7434E-04	0,79321	0,89120	0,92351	0,72711	0,85998	0,90401
500	5,6419E-04	0,80027	0,89541	0,92678	0,76743	0,88122	0,91878
1000	3,9894E-04	0,83312	0,91328	0,93964	0,91102	0,95547	0,97030
2500	2,5231E-04	0,95121	0,97580	0,98358	1,14736	1,07361	1,04853
5000	1,7841E-04	1,07391	1,03900	1,02721	1,27037	1,13445	1,08908
7500	1,4567E-04	1,13153	1,06661	1,04488	1,30972	1,15301	1,10077
10000	1,2616E-04	1,16167	1,08058	1,05349	1,33172	1,16319	1,10701

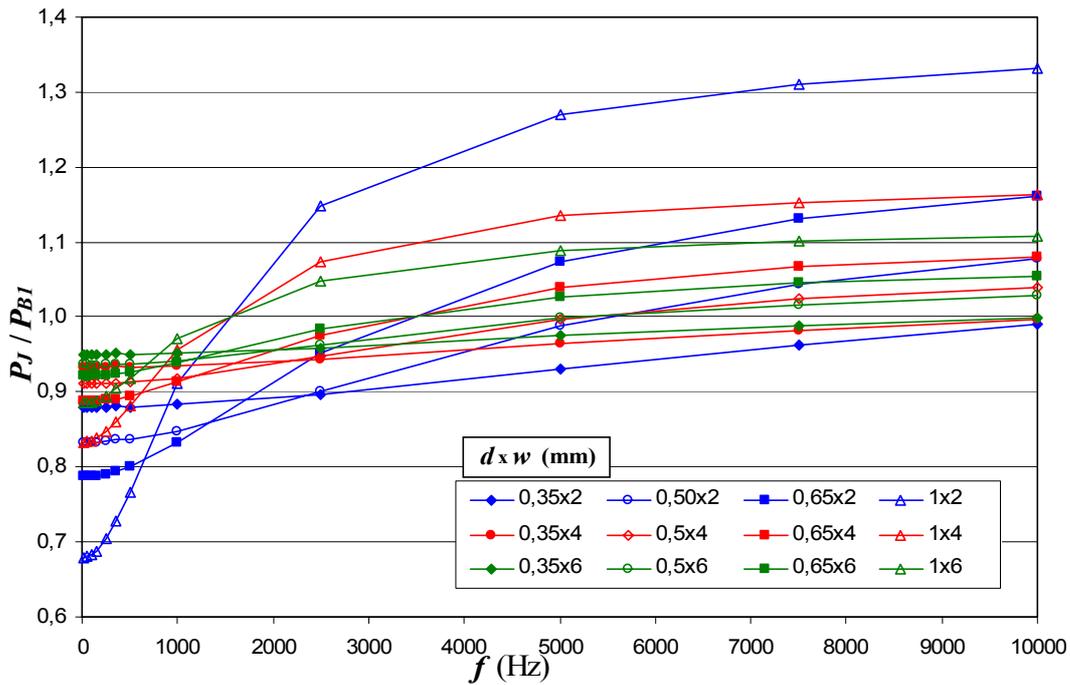


Fig. 4.27.  $P_J/P_{B1}$  para o problema 2D em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da espessura  $d$  para cada largura  $w$  (mesma cor).

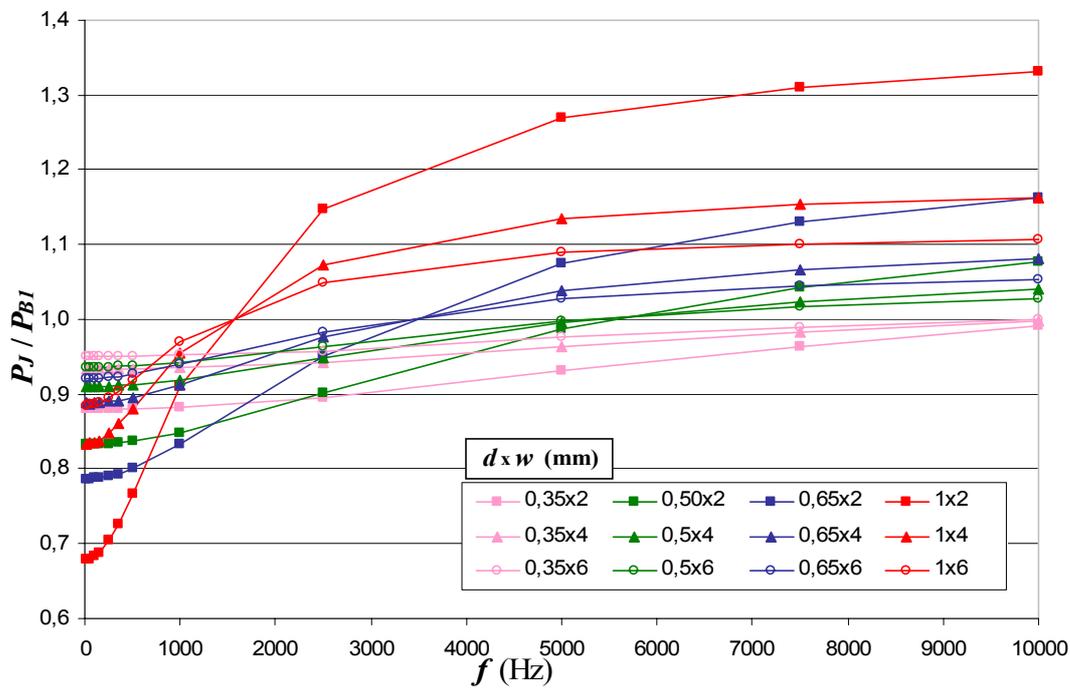


Fig. 4.28.  $P_J/P_{B1}$  para o problema 2D em função da frequência, para cada par  $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura  $w$  para cada espessura  $d$  (mesma cor).

## 4.5 Conclusão de que os factores determinantes são $d/\delta$ e $w/d$

Continuando a procurar um “factor unificador”, após várias outras tentativas (combinações de  $\delta$ ,  $H_s$ ,  $P_j/P_{J(50Hz)}$ ,  $d/\delta$ ,  $w/d, \dots$ ) experimentou-se  $d/\delta$  e  $w/d$ . Assim, os resultados anteriormente apresentados na Tabela 4.11 e Tabela 4.12, apresentam-se novamente na Tabela 4.13 e Tabela 4.14, com os respectivos  $d/\delta$  e  $w/d$ . Estes resultados apresentam-se também na Fig. 4.29.

Tabela 4.13.  $P_j/P_{BI}$  para o problema 2D, para  $d=0,35$  e  $0,5$  mm, e respectivos  $d/\delta$  e  $w/d$ .

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$d=0,35$ mm				$d=0,5$ mm			
		$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$d / \delta$	$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$d / \delta$
25	2,5231E-03	0,88006	0,93372	0,95083	<b>0,14</b>	0,83350	0,91090	0,93620	<b>0,20</b>
50	1,7841E-03	0,88006	0,93371	0,95081	<b>0,20</b>	0,83348	0,91087	0,93616	<b>0,28</b>
100	1,2616E-03	0,88003	0,93367	0,95077	<b>0,28</b>	0,83341	0,91073	0,93600	<b>0,40</b>
150	1,0301E-03	0,87998	0,93360	0,95070	<b>0,34</b>	0,83331	0,91053	0,93576	<b>0,49</b>
250	7,9788E-04	0,87985	0,93341	0,95049	<b>0,44</b>	0,83412	0,91109	0,93624	<b>0,63</b>
350	6,7434E-04	0,88084	0,93439	0,95146	<b>0,52</b>	0,83587	0,91253	0,93757	<b>0,74</b>
500	5,6419E-04	0,88044	0,93380	0,95082	<b>0,62</b>	0,83709	0,91286	0,93761	<b>0,89</b>
1000	3,9894E-04	0,88278	0,93534	0,95209	<b>0,88</b>	0,84728	0,91844	0,94165	<b>1,25</b>
2500	2,5231E-04	0,89579	0,94312	0,95814	<b>1,39</b>	0,90095	0,94838	0,96368	<b>1,98</b>
5000	1,7841E-04	0,93052	0,96468	0,97597	<b>1,96</b>	0,98795	0,99588	0,99838	<b>2,80</b>
7500	1,4567E-04	0,96350	0,98269	0,98899	<b>2,40</b>	1,04282	1,02349	1,01694	<b>3,43</b>
10000	1,2616E-04	0,99082	0,99712	0,99913	<b>2,77</b>	1,07764	1,04037	1,02786	<b>3,96</b>
$w/d =$		<b>5,71</b>	<b>11,43</b>	<b>17,14</b>	–	<b>4,00</b>	<b>8,00</b>	<b>12,00</b>	–

Tabela 4.14.  $P_j/P_{BI}$  para o problema 2D, para  $d=0,65$  e  $1$  mm, e respectivos  $d/\delta$  e  $w/d$ .

$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$d=0,65$ mm				$d=1$ mm			
		$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$d / \delta$	$w = 2$ mm	$w = 4$ mm	$w = 6$ mm	$d / \delta$
25	2,5231E-03	0,78685	0,88777	0,92107	<b>0,26</b>	0,67905	0,83341	0,88507	<b>0,40</b>
50	1,7841E-03	0,78683	0,88768	0,92097	<b>0,36</b>	0,68021	0,83429	0,88585	<b>0,56</b>
100	1,2616E-03	0,78782	0,88857	0,92182	<b>0,52</b>	0,68303	0,83558	0,88658	<b>0,79</b>
150	1,0301E-03	0,78773	0,88808	0,92119	<b>0,63</b>	0,68822	0,83842	0,88855	<b>0,97</b>
250	7,9788E-04	0,79057	0,89004	0,92286	<b>0,81</b>	0,70436	0,84728	0,89483	<b>1,25</b>
350	6,7434E-04	0,79321	0,89120	0,92351	<b>0,96</b>	0,72711	0,85998	0,90401	<b>1,48</b>
500	5,6419E-04	0,80027	0,89541	0,92678	<b>1,15</b>	0,76743	0,88122	0,91878	<b>1,77</b>
1000	3,9894E-04	0,83312	0,91328	0,93964	<b>1,63</b>	0,91102	0,95547	0,97030	<b>2,51</b>
2500	2,5231E-04	0,95121	0,97580	0,98358	<b>2,58</b>	1,14736	1,07361	1,04853	<b>3,96</b>
5000	1,7841E-04	1,07391	1,03900	1,02721	<b>3,64</b>	1,27037	1,13445	1,08908	<b>5,60</b>
7500	1,4567E-04	1,13153	1,06661	1,04488	<b>4,46</b>	1,30972	1,15301	1,10077	<b>6,86</b>
10000	1,2616E-04	1,16167	1,08058	1,05349	<b>5,15</b>	1,33172	1,16319	1,10701	<b>7,93</b>
$w/d =$		<b>3,08</b>	<b>6,15</b>	<b>9,23</b>	–	<b>2,00</b>	<b>4,00</b>	<b>6,00</b>	–

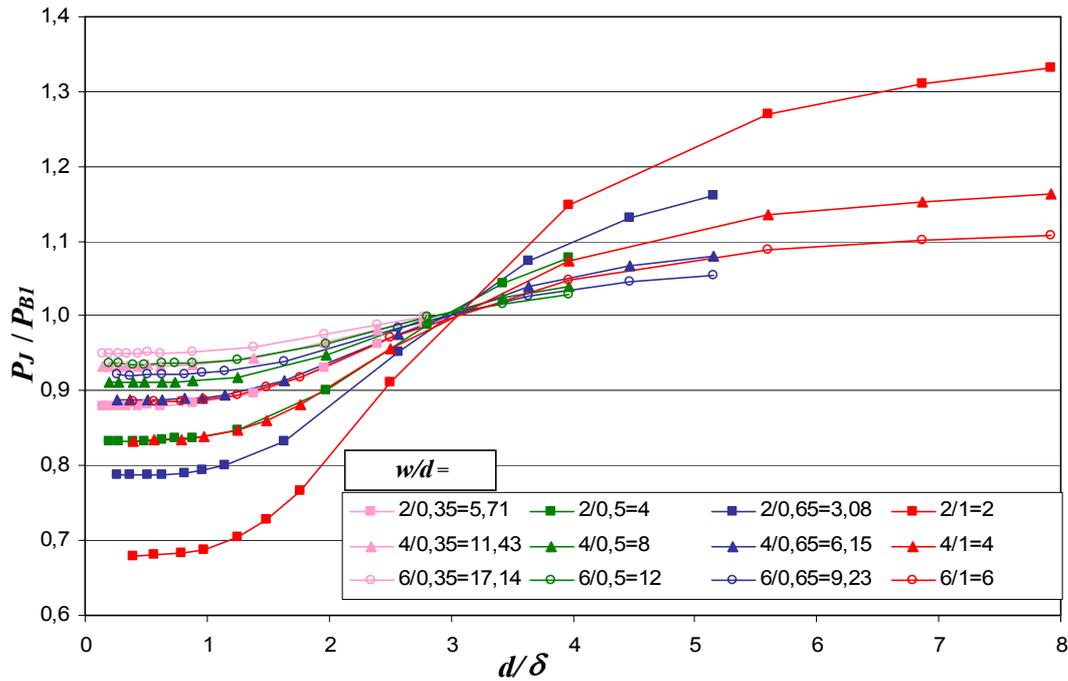


Fig. 4.29.  $P_J/P_{BI}$  para o problema 2D em função de  $w/d$  e  $d/\delta$ .

Observando o gráfico da Fig. 4.29, aparecem finalmente resultados muito interessantes, pois verifica-se que:

- usando  $d/\delta$ , as curvas de  $P_J/P_{BI}$  com o mesmo rácio  $w/d$  são coincidentes, tal como se pode ver nas curvas com  $w/d=4$ , obtidas para  $w/d=2/0,5$  e  $w/d=4/1$ , e também se pode perceber nas curvas com  $w/d$  muito próximo, caso das curvas com  $w/d$  igual a 5,71, a 6 e a 6,15, que são quase coincidentes.

Para além disso, poderá ainda concluir-se<sup>53</sup> que:

- Para  $d/\delta \cong 3$ ,  $P_J/P_{BI} \cong 1$ ;
- Para  $d/\delta < 3$ ,  $P_J/P_{BI} < 1$  e para  $d/\delta > 3$ ,  $P_J/P_{BI} > 1$ ;
- Para  $d/\delta < 3$ ,  $P_J/P_{BI}$  aumenta com o aumento de  $w/d$  e para  $d/\delta > 3$ ,  $P_J/P_{BI}$  diminui com o aumento de  $w/d$ .

Parece portanto ser altamente interessante tentar determinar um modelo ou expressão analítica baseada em resultados numéricos que permita calcular a relação  $P_J/P_{BI}$  e portanto calcular  $P_J$  para qualquer  $d/\delta$  e  $w/d$ , o que se irá fazer de seguida.

<sup>53</sup> No entanto deverá desde já deixar-se bem claro que estas conclusões terão que ser reavaliadas devido àquilo a que chamámos “efeito de sobreposição das condições de fronteira” ou simplesmente “efeito de sobreposição”, tal como se verá em “5.4 Efeito de sobreposição”, página 118.

## 5 EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA $d/\delta$ DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Tal como exposto no capítulo anterior, após ter calculado  $P_J/P_{BI}$  para diferentes valores de  $d/\delta$  (0,14-7,93) e  $w/d$  (2-17,14), pretendeu-se agora obter um modelo analítico que permitisse calcular a relação  $P_J/P_{BI}$  e portanto, para a chapa magnética considerada e na zona linear de funcionamento, calcular  $P_J$  para qualquer  $d/\delta$  e  $w/d$  na gama considerada. A chapa usada continuou a ser a FeV 400-50 HA [UGINE] (cf. página 73), com  $\mu=0,001$  H/m ( $\mu_r = 796$ ),  $\sigma = 2 \times 10^6$  S/m e continuou a pretender-se  $B_{max}^a = B_{ref} = 1,5$  T.

Começou-se por tentar obter uma aproximação (“*fitting*”) de cada uma das curvas da Fig. 4.29, através de polinómios de 2º e 3º grau. Rapidamente se concluiu que:

- Era necessário considerar duas zonas independentes, uma para frequências mais baixas, com  $d/\delta < 3$  e outra para frequências mais altas para  $d/\delta \geq 3$ ;
- Os coeficientes dos polinómios eram bastante sensíveis a quaisquer pequenas variações de  $d/\delta$  (ou seja, duas curvas sobrepostas mas com diferentes pontos  $d/\delta$  produziam polinómios com coeficientes significativamente diferentes);
- Os polinómios de 3º grau permitiam uma aproximação bastante melhor que os de 2º grau.

Assim, optou-se por usar exactamente os mesmos  $d/\delta$  para todas as curvas, pelo que foram considerados 24 valores de  $d/\delta$  (entre 0,05 e 8) e os mesmos 9 valores de  $w/d$  que anteriormente e usada a mesma malha ao longo de toda a gama de frequências (para cada par  $w/d$ , ou seja para cada curva). Os resultados numéricos foram portanto agora obtidos apenas com malhas correspondendo a metade da chapa (semi-modelos, devido a simetria), com cerca de 600 nodos e 1120 elementos finitos (ainda o limite do programa **CADdyMAG**, para modelos magnetodinâmicos, à data destes trabalhos), i.e., utilizaram-se agora para toda a gama de frequências, as malhas que anteriormente (em “4 CÁLCULO POR ELEMENTOS

FINITOS DAS PERDAS POR CORRENTES INDUZIDAS, EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA”) tinham sido usadas apenas para  $f \geq 5$  kHz, as quais são mais adaptadas ao efeito pelicular e permitem obter menores erros tal como se viu na Tabela 4.6 (página 96) e na Fig. 4.23 (página 97).

O processador de correntes induzidas utilizado, para resolver a equação

$$\nabla^2 \tilde{H}_z - j\omega\mu\sigma\tilde{H}_z = 0 \quad (3.28)$$

necessita que a frequência do problema,  $f$  ( $\omega=2\pi f$ ), seja fornecida como dado. Para obter a frequência correspondente ao  $d/\delta$  pretendido, pode-se ir substituindo o valor de  $f$  por tentativa e erro na equação (3.40), até obter o  $d/\delta$  com a precisão pretendida tal como foi feito inicialmente (usámos 4 casas decimais), ou pegando nesta expressão

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \sigma \mu}} \quad (3.40)$$

e resolvendo em ordem a  $f$ , facilmente se chega à equação (5.1) que permite calcular o valor exacto da frequência para o  $d/\delta$  pretendido.

$$\boxed{f = \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \frac{1}{d^2 \pi \mu \sigma}} \quad (5.1)$$

Nas tabelas seguintes, da Tabela 5.1 à Tabela 5.4, apresentam-se para cada uma das quatro espessuras consideradas, os valores de  $d/\delta$  utilizados, as frequências correspondentes, e os valores de  $H_{sR}$  e  $H_{sI}$  (e para referência também os de  $H_s = |\tilde{H}_s|$ ) bem como o valor das perdas calculadas pela expressão analítica com efeito pelicular,  $P_{BI}$ , equação (3.37).

Tabela 5.1. Valores de  $H_{sR}+jH_{sI}$ , e  $P_{BI}$  correspondentes, para  $d/\delta$  entre 0,05 e 8 e  $d=0,35$  mm.

$d/\delta$	$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	$P_{BI}$ (W/m <sup>3</sup> )
0,05	3,25	6,9979E-03	1500,0	0,6	1500,00	9,57776E+00
0,25	81,20	1,4000E-03	1500,0	15,6	1500,11	5,97870E+03
0,50	324,80	7,0001E-04	1500,5	62,5	1501,82	9,56502E+04
0,75	730,80	4,6667E-04	1502,6	140,6	1509,19	4,84034E+05
1,00	1299,30	3,4999E-04	1508,3	249,6	1528,83	1,52837E+06
1,25	2030,00	2,8000E-04	1520,2	389,1	1569,24	3,72232E+06
1,50	2923,30	2,3333E-04	1541,7	558,0	1639,58	7,68748E+06
1,75	3979,00	2,0000E-04	1576,5	754,5	1747,72	1,41476E+07
2,00	5197,00	1,7500E-04	1628,5	975,6	1898,34	2,38929E+07
2,25	6577,50	1,5555E-04	1701,4	1217,3	2091,99	3,77310E+07
2,50	8120,00	1,4000E-04	1798,0	1474,3	2325,13	5,64128E+07
2,75	9825,50	1,2727E-04	1920,0	1740,6	2591,55	8,05939E+07
3,00	11690,00	1,1668E-04	2066,9	2009,3	2882,59	1,10688E+08
3,20	13306,00	1,0937E-04	2201,9	2223,1	3128,98	1,39394E+08
3,50	15920,00	9,9986E-05	2427,9	2533,2	3508,78	1,90041E+08
4,00	20790,00	8,7495E-05	2846,9	3009,3	4142,57	2,94824E+08
4,50	26310,00	7,7777E-05	3285,5	3431,4	4750,74	4,25440E+08
5,00	32480,00	7,0001E-05	3715,4	3812,7	5323,56	5,83559E+08
5,50	39300,00	6,3638E-05	4124,9	4172,7	5867,41	7,72779E+08
6,00	46770,00	5,8335E-05	4515,1	4527,6	6394,19	9,97884E+08
6,50	54900,00	5,3842E-05	4892,8	4886,5	6915,04	1,26419E+09
7,00	63670,00	4,9997E-05	5263,8	5251,2	7435,30	1,57557E+09
7,50	73090,00	4,6664E-05	5633,3	5621,6	7958,47	1,93626E+09
8,00	83140,00	4,3753E-05	6003,0	5995,1	8483,93	2,34879E+09

Tabela 5.2. Valores de  $H_{sR}+jH_{sI}$ , e  $P_{BI}$  correspondentes, para  $d/\delta$  entre 0,05 e 8 e  $d=0,5$  mm.

$d/\delta$	$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{sR}$ (A/m)	$H_{sI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	$P_{BI}$ (W/m <sup>3</sup> )
0,05	1,59	1,0005E-02	1500,0	0,6	1500,00	4,67838E+00
0,25	39,80	1,9997E-03	1500,0	15,6	1500,11	2,93133E+03
0,50	159,15	1,0000E-03	1500,5	62,5	1501,82	4,68674E+04
0,75	358,10	6,6667E-04	1502,6	140,6	1509,19	2,37187E+05
1,00	636,60	5,0001E-04	1508,3	249,6	1528,83	7,48766E+05
1,25	994,70	4,0000E-04	1520,2	389,1	1569,24	1,82394E+06
1,50	1432,30	3,3334E-04	1541,7	558,0	1639,56	3,76626E+06
1,75	1949,60	2,8572E-04	1576,4	754,5	1747,69	6,93155E+06
2,00	2546,50	2,5000E-04	1628,5	975,6	1898,33	1,17073E+07
2,25	3223,00	2,2222E-04	1701,4	1217,3	2091,99	1,84885E+07
2,50	3979,00	2,0000E-04	1798,0	1474,3	2325,20	2,76449E+07
3,00	5730,00	1,6666E-04	2067,2	2009,8	2883,19	5,42694E+07
3,20	6520,00	1,5624E-04	2201,9	2223,1	3128,99	6,83041E+07
3,50	7798,50	1,4286E-04	2427,5	2532,6	3508,12	9,30737E+07
4,00	10186,00	1,2500E-04	2846,7	3009,1	4142,30	1,44439E+08
4,50	12890,00	1,1112E-04	3285,3	3431,2	4750,35	2,08419E+08
5,00	15915,00	1,0000E-04	3715,3	3812,6	5323,52	2,85939E+08
5,50	19260,00	9,0904E-05	4125,2	4173,0	5867,86	3,78748E+08
6,00	22920,00	8,3330E-05	4515,4	4527,9	6394,56	4,89048E+08
6,50	26900,00	7,6919E-05	4892,8	4886,4	6914,92	6,19418E+08
7,00	31190,00	7,1434E-05	5263,2	5250,6	7434,33	7,71724E+08
7,50	35810,00	6,6667E-05	5633,0	5621,3	7958,02	9,48602E+08
8,00	40740,00	6,2503E-05	6003,1	5995,2	8484,07	1,15097E+09

Tabela 5.3. Valores de  $H_{SR}+jH_{SI}$ , e  $P_{BI}$  correspondentes, para  $d/\delta$  entre 0,05 e 8 e  $d=0,65$  mm.

$d/\delta$	$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{SR}$ (A/m)	$H_{SI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	$P_{BI}$ (W/m <sup>3</sup> )
0,05	0,94	1,3012E-02	1500,0	0,6	1500,00	2,76340E+00
0,25	23,55	2,5996E-03	1500,0	15,6	1500,11	1,73447E+03
0,50	94,18	1,3000E-03	1500,5	62,5	1501,82	2,77372E+04
0,75	211,90	8,6665E-04	1502,6	140,6	1509,19	1,40356E+05
1,00	376,70	6,5000E-04	1508,3	249,6	1528,83	4,43089E+05
1,25	588,60	5,2000E-04	1520,2	389,1	1569,24	1,07933E+06
1,50	847,60	4,3333E-04	1541,7	558,1	1639,58	2,22900E+06
1,75	1153,60	3,7143E-04	1576,4	754,5	1747,69	4,10144E+06
2,00	1506,80	3,2500E-04	1628,5	975,6	1898,33	6,92733E+06
2,25	1907,00	2,8889E-04	1701,3	1217,2	2091,94	1,09388E+07
2,50	2354,30	2,6000E-04	1798,0	1474,3	2325,12	1,63561E+07
2,75	2848,70	2,3637E-04	1920,0	1740,6	2591,49	2,33657E+07
3,00	3390,00	2,1668E-04	2067,1	2009,6	2882,91	3,21030E+07
3,20	3857,80	2,0311E-04	2201,9	2223,0	3128,90	4,04132E+07
3,50	4615,30	1,8570E-04	2427,7	2533,0	3508,51	5,50894E+07
4,00	6028,00	1,6249E-04	2846,9	3009,3	4142,62	8,54844E+07
4,50	7628,00	1,4445E-04	3285,5	3431,4	4750,62	1,23344E+08
5,00	9417,50	1,3000E-04	3715,4	3812,7	5323,63	1,69203E+08
5,50	11395,00	1,1818E-04	4124,9	4172,8	5867,49	2,24070E+08
6,00	13560,00	1,0834E-04	4515,0	4527,6	6394,06	2,89311E+08
6,50	15915,00	1,0000E-04	4892,4	4886,1	6914,46	3,66446E+08
7,00	18460,00	9,2853E-05	5263,8	5251,2	7435,19	4,56803E+08
7,50	21190,00	8,6665E-05	5633,1	5621,4	7958,14	5,61329E+08
8,00	24110,00	8,1248E-05	6003,6	5995,6	8484,68	6,81194E+08

Tabela 5.4. Valores de  $H_{SR}+jH_{SI}$ , e  $P_{BI}$  correspondentes, para  $d/\delta$  entre 0,05 e 8 e  $d=1$  mm.

$d/\delta$	$f$ (Hz)	$\delta$ (m)	$H_{SR}$ (A/m)	$H_{SI}$ (A/m)	$H_s$ (A/m)	$P_{BI}$ (W/m <sup>3</sup> )
0,05	0,40	1,9997E-02	1500,0	0,6	1500,00	1,17254E+00
0,25	9,95	3,9994E-03	1500,0	15,6	1500,11	7,32832E+02
0,50	39,79	2,0000E-03	1500,5	62,5	1501,82	1,17183E+04
0,75	89,53	1,3333E-03	1502,6	140,6	1509,20	5,93035E+04
1,00	159,15	1,0000E-03	1508,3	249,6	1528,83	1,87192E+05
1,25	248,67	8,0002E-04	1520,2	389,1	1569,23	4,55966E+05
1,50	358,10	6,6667E-04	1541,7	558,0	1639,57	9,41695E+05
1,75	487,40	5,7144E-04	1576,4	754,5	1747,69	1,73289E+06
2,00	636,60	5,0001E-04	1628,4	975,6	1898,30	2,92659E+06
2,25	805,70	4,4445E-04	1701,3	1217,2	2091,94	4,62156E+06
2,50	994,70	4,0000E-04	1798,0	1474,3	2325,13	6,91057E+06
2,75	1203,60	3,6364E-04	1920,0	1740,6	2591,52	9,87239E+06
3,00	1432,00	3,3338E-04	2066,9	2009,3	2882,56	1,35588E+07
3,20	1630,00	3,1248E-04	2201,9	2223,1	3128,99	1,70760E+07
3,50	1950,00	2,8569E-04	2427,7	2533,0	3508,55	2,32760E+07
4,00	2546,50	2,5000E-04	2846,7	3009,1	4142,30	3,61097E+07
4,50	3223,00	2,2222E-04	3285,6	3431,5	4750,76	5,21170E+07
5,00	3979,00	2,0000E-04	3715,5	3812,7	5323,70	7,14913E+07
5,50	4814,40	1,8182E-04	4125,0	4172,8	5867,50	9,46698E+07
6,00	5730,00	1,6666E-04	4515,4	4527,9	6394,56	1,22262E+08
6,50	6724,20	1,5385E-04	4892,5	4886,1	6914,52	1,54827E+08
7,00	7798,50	1,4286E-04	5263,5	5250,9	7434,79	1,92968E+08
7,50	8952,00	1,3334E-04	5632,8	5621,2	7957,80	2,37131E+08
8,00	10186,00	1,2500E-04	6003,4	5995,5	8484,49	2,87784E+08

Os problemas de correntes induzidas 2D foram resolvidos por elementos finitos com os valores de  $f$  e  $d/\delta$  apresentados nas duas primeiras colunas da Tabela 5.1 até à Tabela 5.4 para cada par  $w/d$  pretendido. Para não se tornar fastidioso, apresentam-se na Tabela 5.5 apenas os valores finais de  $P_j/P_{B1}$ . Note-se que para calcular agora  $P_j/P_{B1}$ , o  $P_{B1}$  a utilizar dependerá da espessura da chapa correspondente a cada uma das relações  $w/d$  larguras. Assim, nas últimas quatro linhas da Tabela 5.5 indica-se qual o valor de  $w/d$ , os  $w$  e  $d$  respectivos, e ainda qual a tabela donde se deve retirar o valor  $P_{B1}$  para calcular cada  $P_j/P_B$  para o  $d/\delta$  pretendido. Cada um destes  $w/d$ , é obtido utilizando malhas com os  $w$  e  $d$  indicados nesta tabela.

Tabela 5.5.  $P_j/P_{B1}$  para o problema 2D em função de  $d/\delta$  e  $w/d$ .

$d/\delta$	$P_j/P_{B1}$								
	$w/d=2,00$	$w/d=2,50$	$w/d=3,08$	$w/d=4,00$	$w/d=4,00$	$w/d=6,00$	$w/d=9,23$	$w/d=12,00$	$w/d=17,14$
0,05	0,6810	0,7424	0,7890	0,8357	0,8357	0,8879	0,9244	0,9401	0,9558
0,25	0,6809	0,7422	0,7888	0,8356	0,8356	0,8878	0,9244	0,9401	0,9557
0,50	0,6815	0,7428	0,7893	0,8360	0,8360	0,8880	0,9246	0,9402	0,9559
0,75	0,6843	0,7451	0,7912	0,8375	0,8375	0,8891	0,9253	0,9409	0,9564
1,00	0,6916	0,7513	0,7964	0,8416	0,8416	0,8920	0,9274	0,9426	0,9577
1,25	0,7064	0,7635	0,8066	0,8497	0,8497	0,8977	0,9314	0,9459	0,9603
1,50	0,7309	0,7838	0,8235	0,8631	0,8631	0,9072	0,9381	0,9513	0,9645
1,75	0,7660	0,8125	0,8471	0,8818	0,8818	0,9203	0,9472	0,9587	0,9702
2,00	0,8101	0,8483	0,8766	0,9050	0,9049	0,9364	0,9584	0,9678	0,9771
2,25	0,8600	0,8883	0,9094	0,9307	0,9306	0,9542	0,9705	0,9776	0,9845
2,50	0,9118	0,9297	0,9433	0,9571	0,9571	0,9724	0,9829	0,9873	0,9918
2,75	0,9622	0,9700	0,9764	0,9828	0,9828	0,9898	0,9946	0,9966	0,9985
<b>3,00</b>	<b>1,0093</b>	<b>1,0078</b>	<b>1,0073</b>	<b>1,0067</b>	<b>1,0067</b>	<b>1,0059</b>	<b>1,0053</b>	<b>1,0049</b>	<b>1,0044</b>
3,20	1,0442	1,0359	1,0301	1,0243	1,0243	1,0177	1,0129	1,0108	1,0087
3,50	1,0911	1,0737	1,0608	1,0478	1,0479	1,0333	1,0230	1,0186	1,0141
4,00	1,1555	1,1252	1,1025	1,0796	1,0796	1,0541	1,0361	1,0284	1,0206
4,50	1,2043	1,1640	1,1336	1,1032	1,1032	1,0693	1,0455	1,0353	1,0249
5,00	1,2399	1,1921	1,1561	1,1201	1,1201	1,0800	1,0519	1,0398	1,0276
5,50	1,2659	1,2125	1,1724	1,1323	1,1324	1,0878	1,0565	1,0430	1,0294
6,00	1,2852	1,2278	1,1846	1,1415	1,1415	1,0935	1,0599	1,0454	1,0307
6,50	1,3004	1,2397	1,1942	1,1486	1,1486	1,0980	1,0625	1,0472	1,0316
7,00	1,3129	1,2496	1,2020	1,1545	1,1545	1,1017	1,0646	1,0486	1,0323
7,50	1,3236	1,2580	1,2087	1,1595	1,1595	1,1048	1,0664	1,0497	1,0327
8,00	1,3330	1,2653	1,2145	1,1638	1,1640	1,1074	1,0677	1,0505	1,0329
$w/d=$	$w/d=2,00$	$w/d=2,50$	$w/d=3,08$	$w/d=4,00$	$w/d=4,00$	$w/d=6,00$	$w/d=9,23$	$w/d=12,00$	$w/d=17,14$
$w$ (mm) =	2	2,5	2	2	4	6	6	6	6
$d$ (mm) =	1,00	1,00	0,65	0,50	1,00	1,00	0,65	0,5	0,35
$P_{B1}$ na:	Tabela 5.4	Tabela 5.4	Tabela 5.3	Tabela 5.2	Tabela 5.4	Tabela 5.4	Tabela 5.3	Tabela 5.2	Tabela 5.1

Estes resultados são também apresentados na Fig. 5.1, onde se podem observar as curvas de  $P_j/P_B=f(d/\delta)$  para  $w/d=cte$ . Nesta figura é possível reconhecer os resultados já

anteriormente apresentados na Fig. 4.29, página 106, embora agora com uma discretização bastante mais adequada.

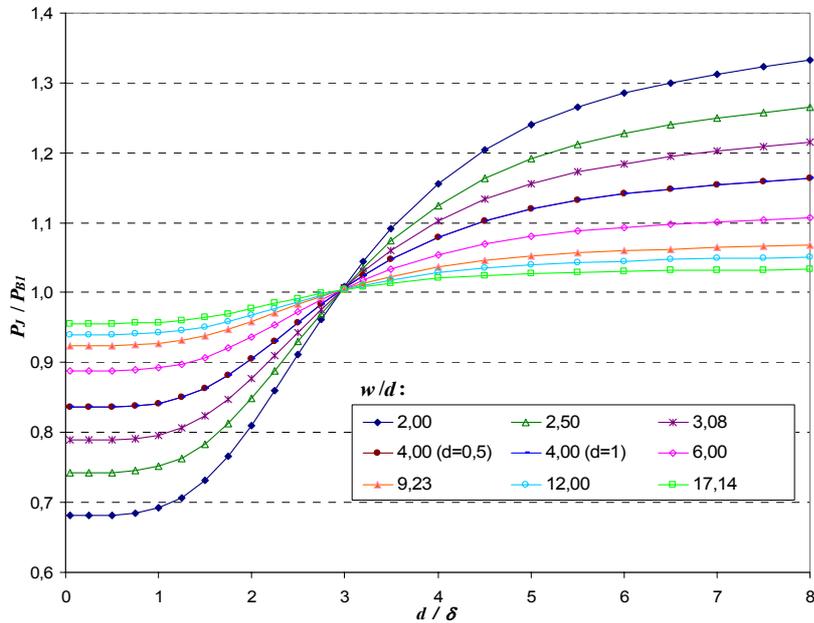


Fig. 5.1.  $P_J/P_{B1}$  para o problema 2D em função de  $w/d$  para  $d/\delta$  entre 0,05 e 8.

### 5.1 Aproximação polinomial de 3ª ordem a $P_J/P_{B1} = f(d/\delta)$ para $w/d$ constante

Sendo difícil encontrar um modelo analítico que possa exprimir o gráfico da Fig. 5.1, concluímos no entanto que atendendo à existência de um ponto notável, em que  $P_J/P_{B1} = 1$ , na vizinhança de  $d/\delta = 3$ , é possível separar aquele gráfico em duas zonas distintas, uma para  $d/\delta < 3$  (linhas contínuas na Fig. 5.2) e outra para  $d/\delta \geq 3$  (linhas contínuas na Fig. 5.3). As curvas nestas figuras podem ser aproximadas bastante bem por expressões polinomiais de 3ª ordem (linhas a tracejado na Fig. 5.2 e Fig. 5.3) do tipo:

$$\frac{P_J}{P_{B1}} = C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 \quad (5.2)$$

em que  $x = d/\delta$ , e  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$  são os coeficientes de (5.2) para cada curva de  $w/d$  constante. A título de exemplo, algumas das expressões polinomiais com os valores dos coeficientes bem como os respectivos valores de  $R^2$  (coeficiente de determinação, “*coefficient of*

*determination*” ou “quadrado do coeficiente de correlação momentânea”), são apresentados nas mesmas figuras. Sendo as curvas com o mesmo  $w/d$  coincidentes, os resultados apresentados na curva “4,00 ( $d=1$ )” da Fig. 5.2 foram obtidos para  $w/d= (4 \text{ mm} / 1 \text{ mm})=4$ , e na Fig. 5.3 pela curva “4,00 ( $d=0,5$ )” foram obtidos para  $w/d= (2 \text{ mm} / 0,5 \text{ mm})=4$ .

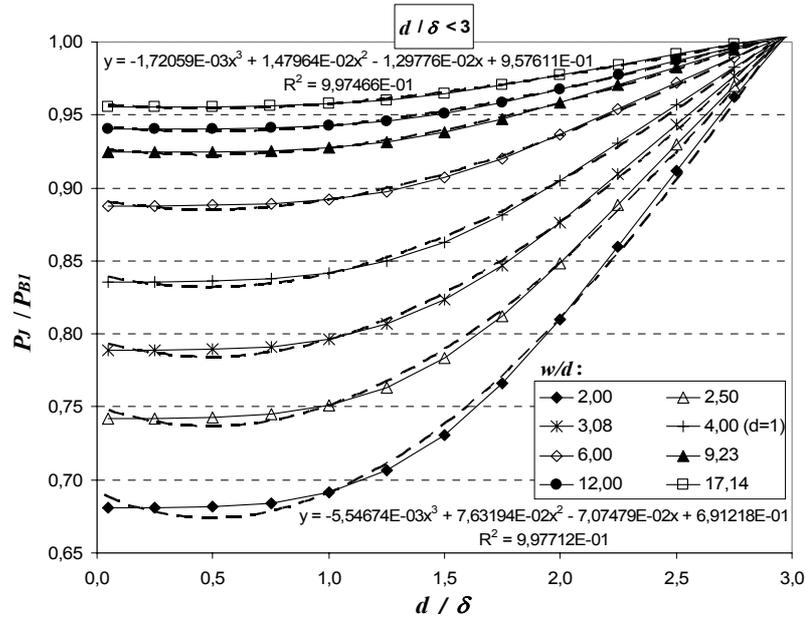


Fig. 5.2.  $P_j/P_{BI}$  para o problema 2D e aproximação polinomial de 3ª ordem para  $d/\delta < 3$ .

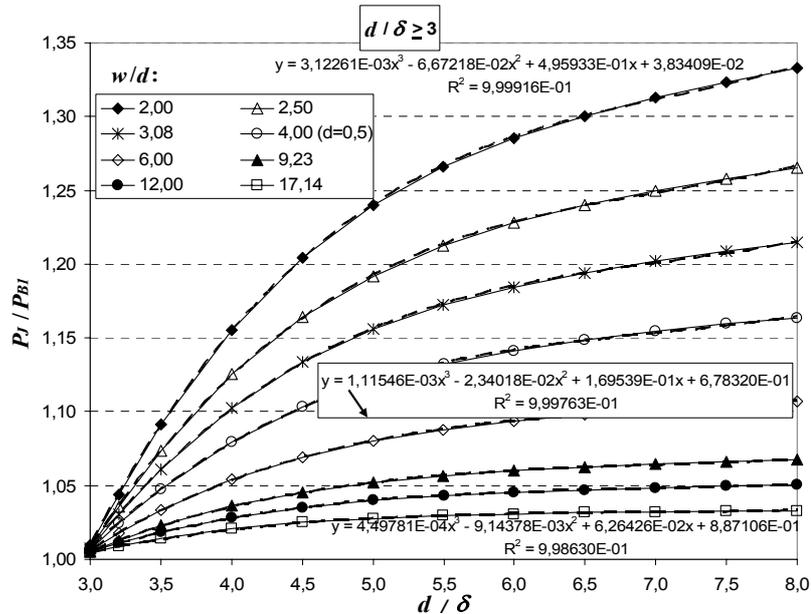


Fig. 5.3.  $P_j/P_{BI}$  para o problema 2D e aproximação polinomial de 3ª ordem para  $d/\delta \geq 3$ .

## 5.2 Expressões para a determinação analítica dos coeficientes polinomiais

Atendendo a que, tal como mencionado anteriormente, se ter concluído que os valores de  $P_j/P_{BI}$  são função de  $w/d$  e  $d/\delta$ , e portanto o mesmo ponto pode ser obtido por “infinitas” combinações de  $d$ ,  $f$ , e  $w$ , seria muito interessante se se pudesse obter uma forma fácil de calcular os coeficientes  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$  a aplicar em (5.2) para qualquer  $w/d$  e  $d/\delta$  (ou se se preferir, para qualquer  $d$ ,  $f$ , e  $w$ ). Poder-se-ia assim calcular as perdas por correntes induzidas para qualquer chapa em que não é lícito supor que a largura da chapa é muito maior que a sua espessura ( $w \gg d$ ), sem precisar de recorrer a uma análise por elementos finitos. Para atingir este objectivo, os valores dos coeficientes polinomiais  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$  em (5.2) para  $P_j/P_{BI}$  obtido a partir da análise por elementos finitos a 2D, foram representados graficamente (linhas contínuas) como função de  $w/d$  na Fig. 5.4 ( $d/\delta < 3$ ) e Fig. 5.5 ( $d/\delta \geq 3$ ).

Após diversas tentativas concluiu-se que, para cada um dos coeficientes  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$ , pode ser calculado um valor muito aproximado (designado por  $C_3'$ , ...,  $C_0'$  e representado por linhas a ponteadas, na Fig. 5.4 e Fig. 5.5) pela função hiperbólica

$$C_i' = k_1 + \frac{k_2}{(w/d)} \quad (5.3)$$

em que  $i$  representa o índice do coeficiente, de 0 a 3, e  $k_1$  e  $k_2$  são constantes obtidas a partir dos dados numéricos usando o Método dos Mínimos Quadrados. Os valores de  $k_1$  e  $k_2$  a usar em (5.3) para calcular os coeficientes  $C_3'$ ,  $C_2'$ ,  $C_1'$ , e  $C_0'$  são apresentados na Tabela 5.6 (separadamente para  $d/\delta < 3$  e  $d/\delta \leq 3$ ). Na mesma tabela é também apresentada a diferença média<sup>54</sup> entre os 8 valores de cada  $C_i$  obtido a partir dos dados numéricos, e os do respectivo  $C_i'$  (aproximado) calculado por (5.3).

---

<sup>54</sup> Dos módulos das diferenças de cada 8 pares de valores.

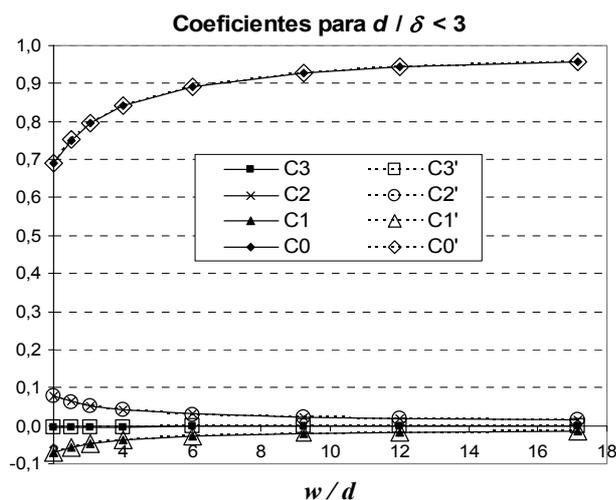


Fig. 5.4. Valores dos coeficientes  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$  para  $d/\delta < 3$ .

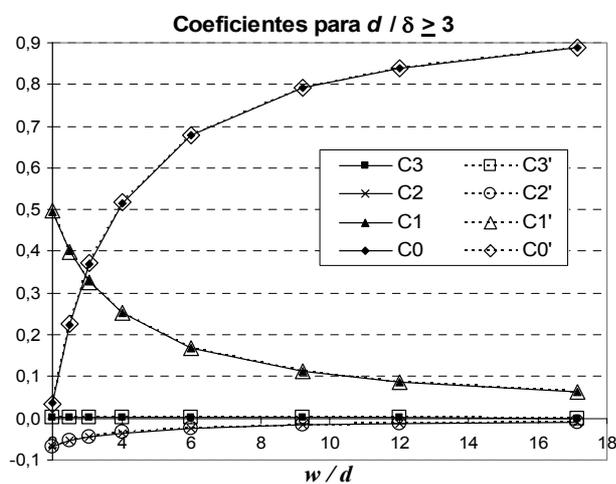


Fig. 5.5. Valores dos coeficientes  $C_3$ ,  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_0$  para  $d/\delta \geq 3$ .

Tabela 5.6. Valores de  $k_1$  e  $k_2$  para calcular os  $C_i'$  e diferença média destes em relação aos  $C_i$  obtidos a partir dos dados numéricos.

Espessura sobre profundidade de penetração pelicular ( $d/\delta < 3$ )			
Para	$k_1$	$k_2$	Diferença média
$C_3'$	-1,1890E-03	8,968000E-03	2,44%
$C_2'$	6,6000E-03	-1,402550E-01	0,79%
$C_1'$	-5,2690E-03	1,311226E-01	0,33%
$C_0'$	9,9300E-01	6,039565E-01	0,06%
Espessura sobre profundidade de penetração pelicular ( $d/\delta \geq 3$ )			
Para	$K_1$	$k_2$	Diferença média
$C_3'$	9,3500E-05	-6,095720E-03	0,53%
$C_2'$	-1,4800E-03	1,312118E-01	0,45%
$C_1'$	4,9000E-03	-9,860400E-01	0,37%
$C_0'$	1,0002E+00	1,931146E+00	1,59%

Os coeficientes  $C_3'$ ,  $C_2'$ ,  $C_1'$ , e  $C_0'$  apresentados na Tabela 5.6 para  $d/\delta > 3$  e  $d/\delta \leq 3$ , serão utilizados em (5.2) para calcular cada  $P_J/P_{B1}$  aproximado, designado por  $P_J/P_{B1}'$ .

### 5.3 Resultados do modelo analítico aproximado e conclusões

Na Fig. 5.6 temos dois tipos de resultados: os valores de  $P_J/P_{B1}$  obtidos a partir dos resultados numéricos por elementos finitos (linhas contínuas) e os obtidos pelo modelo analítico aproximado, equação (5.2) com os coeficientes  $C_3'$ ,  $C_2'$ ,  $C_1'$ , e  $C_0'$  apresentados na Tabela 5.6 (linhas ponteadas, coluna da direita na legenda da figura, designada pelo valor respectivo de  $w/d$  seguido de plica: '). Pode ver-se que o modelo numérico apresentado produz uma aproximação muito boa aos resultados numéricos, com uma diferença média<sup>55</sup> de 0,185% e um erro máximo de 1,1% o qual ocorre para  $w/d = 2$  e  $d/\delta = 0,5$ . A sobreposição das curvas “4,00 (d=0,5)” e “4,00 (d=1)” para toda a gama de  $d/\delta$  considerada e (também dos analíticos correspondentes “4,00' (d=0,5)” e “4,00' (d=1)”), confirma mais uma vez que os valores de  $P_J/P_{B1}$  são função de  $w/d$  e  $d/\delta$ , independentemente das combinações de  $d$ ,  $f$ , e  $w$  que lhes deram origem.

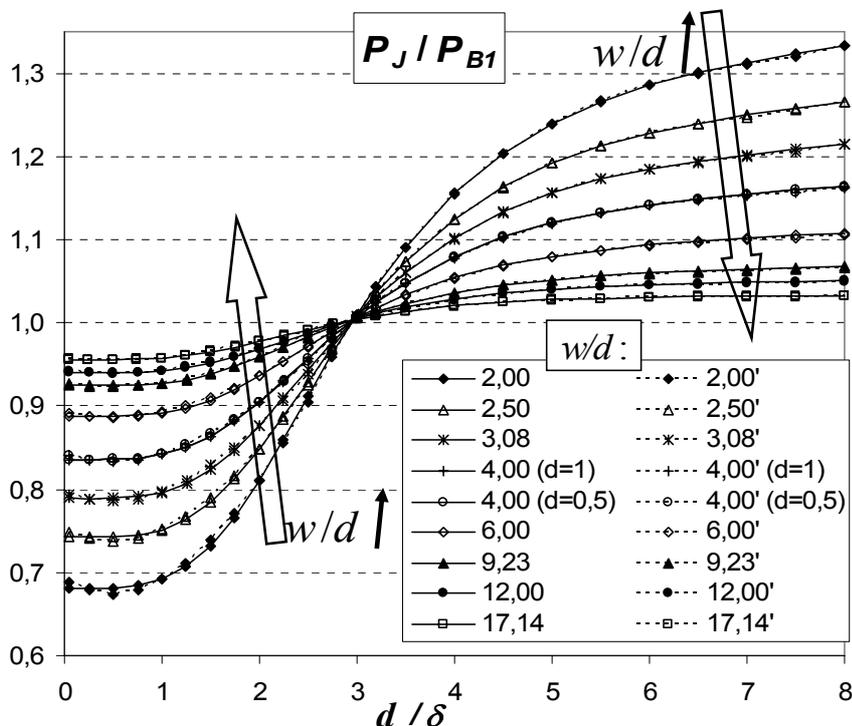


Fig. 5.6. Comparação de  $P_J/P_{B1}$  obtido pela análise por EF a 2D e pelo modelo analítico aproximado.

<sup>55</sup> Média dos módulos das diferenças entre os valores originais (numéricos, anteriormente apresentados na Tabela 5.5 e Fig. 5.1) e os aproximados (calculados pela equações (5.2) e (5.3)).

Pôs-se também a questão se estes resultados seriam válidos apenas para o  $B_{ref}$  considerado (1,5 T) ou se também são válidos para qualquer outro  $B_{ref}$  considerado. Assim, resolvendo (tanto numericamente como com o modelo analítico apresentado) alguns casos para outros valores de  $B_{ref}$ , **foi verificado que o modelo apresentado é válido para este material magnético na zona linear de funcionamento, independentemente do valor de  $B_{ref}$  pretendido, desde que  $\mu$  permaneça constante.** Aliás, analisando cuidadosamente a formulação e metodologia empregues, verifica-se que isto era de esperar.

Do trabalho apresentado até agora neste capítulo 5 podem extrair-se as seguintes **conclusões**:

- Foi apresentado um novo modelo analítico que permitiria facilmente calcular as perdas por correntes induzidas relativamente a um valor analítico para o problema 1D correspondente, para cada  $w$ ,  $d$ , e  $f$ , na gama de  $w/d$  (2-17,14) e de  $d/\delta$  (0,05-8) considerada;
- Este modelo consiste numa aproximação polinomial de 3ª ordem, derivada dos resultados das perdas por correntes induzidas obtidos por uma análise a 2D por elementos finitos, para uma chapa ferromagnética macia trabalhando na zona de comportamento linear;
- O modelo conduz a uma concordância bastante boa com os resultados numéricos, com uma diferença média de 0,185% em relação aos obtidos pela análise a 2D por elementos finitos;
- Foi ainda verificado que o modelo apresentado é válido para este material magnético na zona linear de funcionamento, independentemente do valor de  $B_{ref}$  pretendido, desde que  $\mu$  permaneça constante.

Atendendo a que o gráfico e modelo apresentados foram obtidos para a chapa magnética FeV 400-50 HA [UGINE], o passo natural seguinte, seria verificar se aqueles seriam também válidos para outras chapas magnéticas, nomeadamente com diferentes  $\sigma$  e  $\mu$ . Isto foi e será abordado, mas antes vamos abordar uma questão muito importante e que vem de certa forma obrigar a reavaliar as conclusões apresentadas em 4.4, 4.5 e 5: aquilo a que chamámos “**efeito de sobreposição**” (das condições fronteira).

## 5.4 Efeito de sobreposição

No trabalho apresentado neste capítulo, obteve-se um gráfico e um modelo que permitiriam facilmente calcular as perdas por correntes induzidas relativamente a um valor analítico para o problema 1D correspondente, i.e., calcular  $P_J/P_{B1}$ , para cada  $w$ ,  $d$ , e  $f$ , na gama de  $w/d$  (2-17,14) e  $d/\delta$  (0,05-8) considerada. Recorde-se que  $P_{B1}$  é dado por

$$P_{B1} = \frac{\sigma \pi^2 d^2 f^2 (B_{max}^a)^2}{6} F_{sk} \quad (3.37)$$

em que  $B_{max}^a$  foi considerado constante e igual a 1,5 T para todos os casos estudados, ou seja, pretendíamos usar um valor de referência para a indução,  $B_{ref}=1,5$  T. O valor de  $B_{max}^a$  seria portanto igual a  $B_{ref}=1,5$  T e para garantir isso foi usada uma permeabilidade complexa  $\tilde{\mu}_e$ , a partir da qual se calculou a condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$  a aplicar na fronteira da chapa magnética a qual, recorde-se (cf. página 69), é dada por

$$\tilde{H}_s = \frac{B_{max}^a}{\tilde{\mu}_e} = \frac{B_{ref}}{\tilde{\mu}_e} \quad (3.52)$$

Assim, impor-se-ia um determinado valor de médio da indução na laminação,  $B_{max}^a$ , igual à referência pretendida,  $B_{ref}$ . A validade do método apresentado foi confirmada através da óptima concordância entre os resultados obtidos por  $P_{B1}$ , equação (3.37), e os obtidos por elementos finitos para o problema 1D, tal como visto anteriormente em “4.3.5 Conclusões dos resultados numéricos do problema 1D” (página 97).

No entanto, a **extensão do procedimento** usado para o problema 1D, i.e., para chapas de “largura infinita”, **ao caso 2D**, em que  $w \gg d$  deixa de ser verdade, sofre do seguinte **problema**: quando se aplica a condição de fronteira complexa da equação (3.52) aos modelos do problema 2D, ou seja, às “fronteiras verticais” na Fig. 5.7 (cf. Fig. 4.8 e Fig. 4.9, página 78) há um **efeito de sobreposição** que deve ser tomado em conta.

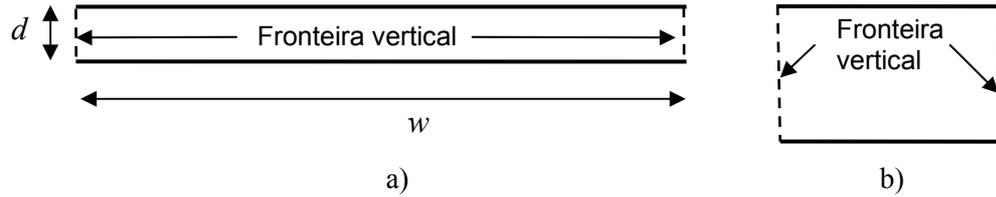


Fig. 5.7. “Fronteira vertical” onde se aplica a condição de fronteira de Dirichlet para o problema 2D, para 2 modelos com  $w/d$  diferentes: a)  $w/d$  grande; b)  $w/d$  pequeno.

Para se entender donde vem este efeito de sobreposição, atente-se no seguinte: o valor da condição fronteira complexa a aplicar foi calculado com uma expressão deduzida a 1D, ou seja, foi calculado o valor que  $\tilde{H}_s$  teria que ter nos limites horizontais da chapa para garantir<sup>56</sup> “um valor médio do  $B_{max}$ ”, i.e. um  $B_{max}^a$ , igual a 1,5 T. Isto foi verificado numericamente<sup>57</sup>, calculando  $B_{max}^a$  por elementos finitos para o problema 1D, usando

$$B_{max}^a = \frac{\mu}{S} \sqrt{\left(\int_S H_R dS\right)^2 + \left(\int_S H_I dS\right)^2} \quad (5.4)$$

Então, atendendo a que, quando se começa a verificar efeito pelicular, o valor de  $B_{max}$  deixa de ser constante ao longo da espessura da chapa (tal como se pode ver na Fig. 3.4, página 62), para manter um mesmo  $B_{max}^a = B_{ref}$ , o valor de  $\tilde{H}_s$  a aplicar na fronteira horizontal vai aumentando com a frequência (tal como se pode ver, por exemplo, nas penúltimas colunas da Tabela 5.1 à Tabela 5.4, na página 109 e seguintes). Quando se aplica  $\tilde{H}_s$  também nas fronteiras laterais verticais (como na Fig. 5.7),  $\tilde{H}_z$  terá na zona junto a essas fronteiras (cf.

<sup>56</sup> O interesse e justificação deste procedimento é que no **CADDYMAG** (e noutros pacotes de programas de elementos finitos), a grandeza utilizada é o  $B$  e não o  $H$ . Assim, embora neste caso se esteja a utilizar o processador para resolver uma equação de correntes induzidas em  $H$ , a grandeza que dispomos normalmente é o  $B$  e portanto interessa-nos caracterizar as perdas em função de  $B$ , ou mais concretamente em função de  $B_{max}^a$ . Aliás, essa é também a forma como é apresentada pelos fabricantes de chapa e normalmente utilizada no cálculo/projecto de dispositivos e máquinas eléctricas.

<sup>57</sup> Note-se que quando o efeito das correntes induzidas começa a ser elevado,  $H_R$  e  $H_I$  mudam de sinal na profundidade da chapa, tal como se pode ver na legenda da Fig. 4.11 e pela mudança de fase de  $\tilde{H}_z$  na Fig. 4.17 e Fig. 4.18. Isto leva a que  $B_{max}^a = \frac{\mu}{S} \int_S \sqrt{H_R^2 + H_I^2} dS$  e  $B_{max}^a = \frac{\mu}{S} \sqrt{\left(\int_S H_R dS\right)^2 + \left(\int_S H_I dS\right)^2}$  conduzam a resultados diferentes. Com efeito, uma vez que a primeira expressão antes de integrar calcula primeiro o módulo de  $\tilde{H}_z$  em cada elemento finito, i.e. a amplitude do fasor, resultava  $B_{max}^a > 1,5$  T para o problema 1D, quando se começava a fazer sentir efeito pelicular importante, o que estava incorrecto. Esta simples falta de atenção levou o autor a tirar conclusões erradas durante um certo tempo, tendo-lhe feito perder vários meses de trabalho.

página 79, Fig. 4.10 e página 82, Fig. 4.16) um valor imposto por  $\tilde{H}_s$  e superior ao que teria no problema 1D. Assim, haverá um **efeito de sobreposição** nas zonas junto a essas fronteiras verticais, e cada vez maior com a diminuição do comprimento e aumento da espessura, situação representada na Fig. 5.7b. Para além disso, este acréscimo está relacionado com a relação  $w/d$ , mas não depende só disso senão os resultados de  $P_J/P_{Bl}$  seriam constantes para a mesma relação  $w/d$  (o que não acontece, como se pode ver na Fig. 5.6): dependem da frequência e da profundidade de penetração, ou seja de  $d/\delta$ .

Assim, devido a este efeito de sobreposição, obtém-se para o problema 2D  $B_{max}^a$  igual ou superior a 1,5 T, dependendo de  $w/d$  e  $d/\delta$  (ou  $f$ ). Isto pode ser visto na Fig. 5.8, para o caso do estudo efectuado até 10 kHz (e apresentado em “4.5 Conclusão de que os factores determinantes são  $d/\delta$  e  $w/d$ ”, página 105), ou na Fig. 5.9 e Tabela 5.7 para o estudo já com mais pontos e com  $d/\delta$  desde 0,05 até 8.

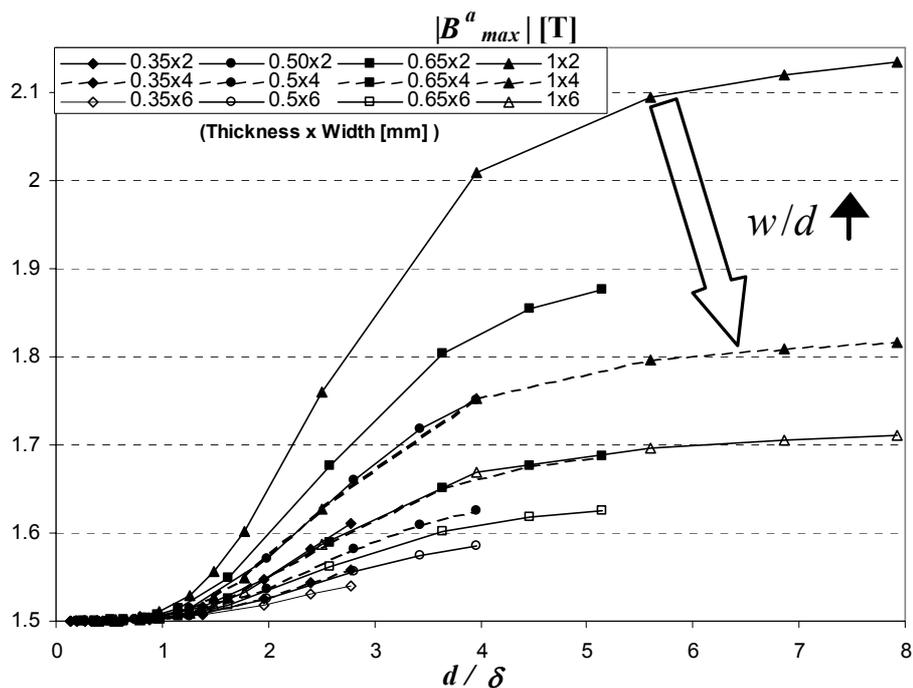


Fig. 5.8.  $B_{max}^a$  efectivamente imposto no problema 2D, para estudo até 10 kHz [Antunes2002].

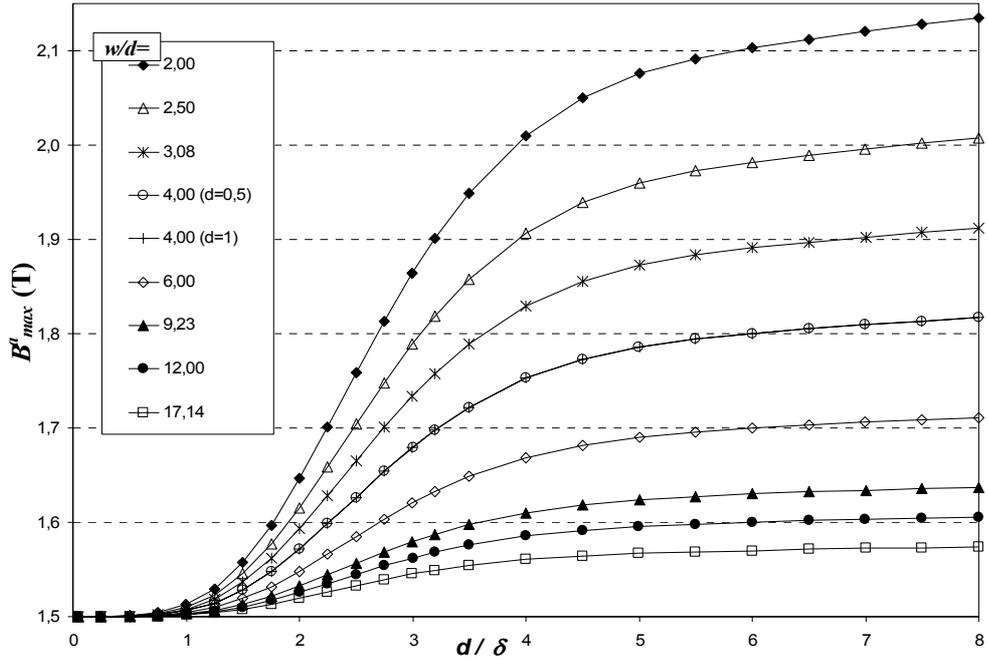


Fig. 5.9.  $B_{max}^a$  efetivamente imposto no problema 2D, para estudo com  $d/\delta$  entre 0,05 e 8.

Tabela 5.7.  $B_{max}^a$  para o problema 2D em função de  $d/\delta$  (0,05-8) e  $w/d$ .

$d/\delta \backslash w/d$	2,00	2,5	3,08	4,0 (d=0,5)	4,0 (d=1)	6,00	9,23	12,00	17,14
0,050	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000	1,50000
0,250	1,50002	1,50000	1,50000	1,49999	1,49999	1,49998	1,49998	1,49997	1,49997
0,500	1,50078	1,50061	1,50049	1,50037	1,50037	1,50024	1,50016	1,50012	1,50008
0,750	1,50400	1,50317	1,50255	1,50195	1,50195	1,50131	1,50088	1,50070	1,50052
1,000	1,51250	1,50992	1,50800	1,50613	1,50613	1,50415	1,50281	1,50225	1,50169
1,250	1,52945	1,52335	1,51882	1,51443	1,51443	1,50975	1,50660	1,50528	1,50398
1,500	1,55748	1,54552	1,53671	1,52815	1,52814	1,51902	1,51289	1,51030	1,50774
1,750	1,59711	1,57677	1,56186	1,54744	1,54744	1,53202	1,52160	1,51722	1,51296
2,000	1,64646	1,61565	1,59327	1,57154	1,57151	1,54821	1,53246	1,52581	1,51926
2,250	1,70157	1,65916	1,62838	1,59858	1,59851	1,56631	1,54438	1,53523	1,52613
2,500	1,75834	1,70423	1,66493	1,62655	1,62659	1,58508	1,55675	1,54477	1,53301
2,750	1,81321	1,74807	1,70055	1,65394	1,65394	1,60329	1,56863	1,55400	1,53948
3,000	1,86395	1,78885	1,73374	1,67942	1,67941	1,62019	1,57960	1,56234	1,54524
3,200	1,90089	1,81863	1,75792	1,69800	1,69800	1,63248	1,58743	1,56834	1,54942
3,500	1,94910	1,85751	1,78955	1,72224	1,72227	1,64849	1,59762	1,57600	1,55456
4,000	2,01026	1,90674	1,82959	1,75300	1,75300	1,66868	1,61028	1,58543	1,56067
4,500	2,05050	1,93913	1,85598	1,77323	1,77325	1,68196	1,61853	1,59147	1,56451
5,000	2,07560	1,95939	1,87253	1,78596	1,78598	1,69032	1,62371	1,59526	1,56695
5,500	2,09170	1,97247	1,88323	1,79428	1,79430	1,69589	1,62723	1,59791	1,56865
6,000	2,10311	1,98176	1,89091	1,80031	1,80031	1,69998	1,62993	1,60000	1,57007
6,500	2,11230	1,98925	1,89710	1,80520	1,80519	1,70334	1,63218	1,60177	1,57132
7,000	2,12047	1,99588	1,90260	1,80951	1,80950	1,70629	1,63417	1,60331	1,57239
7,500	2,12798	2,00195	1,90758	1,81340	1,81340	1,70892	1,63590	1,60462	1,57329
8,000	2,13495	2,00756	1,91219	1,81697	1,81713	1,71130	1,63743	1,60576	1,57405

Isto significa que os resultados anteriormente apresentados na Fig. 4.29, página 106, e Fig. 5.1, página 112 (ou Fig. 5.6, página 116), não se referem ao  $B_{ref}=1,5$  T pretendido, mas sim aos valores de  $B_{max}^a$  apresentados respectivamente na Fig. 5.8 e Fig. 5.9/Tabela 5.7.

Assim, por forma a poder comparar os valores numéricos de  $P_J$  a 2D com os de  $P_{ref}=P_{B1}$ , o valor de  $P_J$  deve ser corrigido, usando um factor de correcção  $F_{cor}$  dado por (5.5)

$$F_{cor} = \left( \frac{B_{ref}}{B_{max}^a} \right)^2 \quad (5.5)$$

e que é função de  $w/d$  ( $w$  e  $d$  usados: Tabela 5.5, página 111) e de  $d/\delta$ , tal como pode ser visto na Fig. 5.10 e<sup>58</sup> Fig. 5.11 / Tabela 5.8.

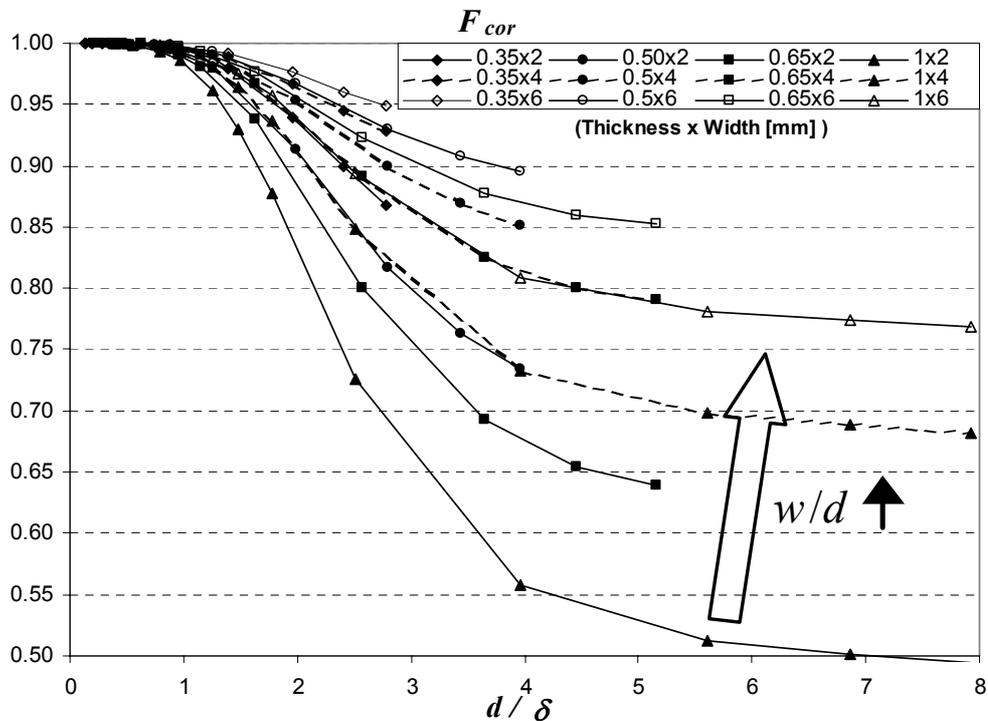


Fig. 5.10. Valores do factor de correcção  $F_{cor}$  para o problema 2D.

<sup>58</sup> Na Fig. 5.11, as curvas a ponteadas, “(2,00 Sollac)” e “(17,14 Sollac)”, referem-se a valores obtidos com malhas mais refinadas e outro material, M 400-50A, da “Sollac Méditerranée” [SollacMéditerranée2001a], que será usado em “6 GRÁFICO GENÉRICO E MODELO ANALÍTICO, página 129).

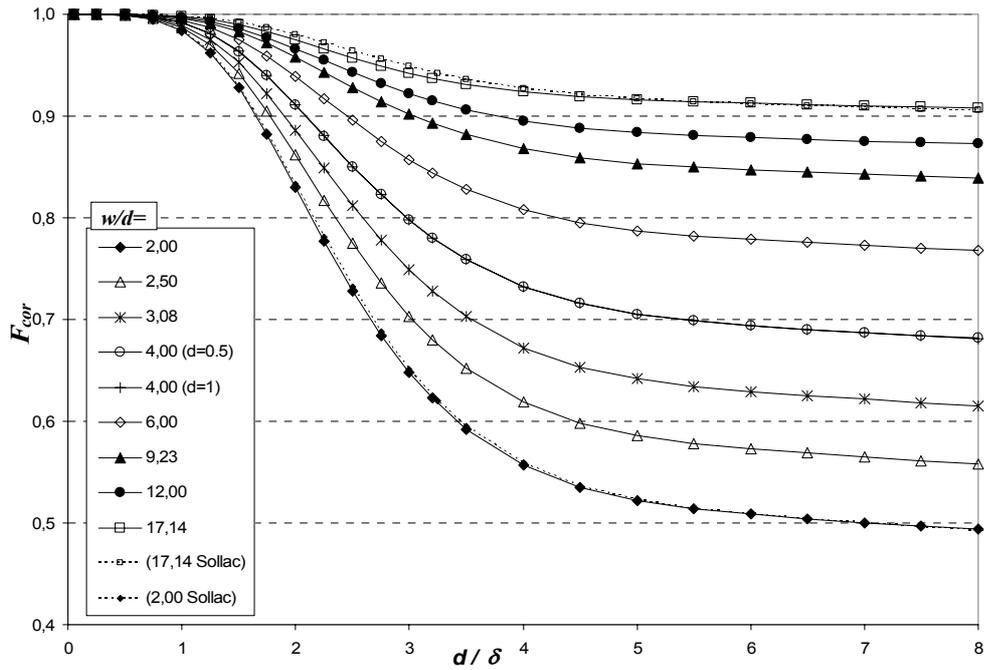


Fig. 5.11. Valores do factor de correcção  $F_{cor}$  para o problema 2D em função de  $d/\delta(0,05-8)$  e  $w/d$ .

Tabela 5.8.  $F_{cor}$  para o problema 2D em função de  $d/\delta(0,05-8)$  e  $w/d$ .

$d/\delta \backslash w/d$	2,00	2,5	3,08	4,00(0,5)	4,00(1)	6,00	9,23	12,00	17,14
0,050	1,00000	1,00001	1,00000	1,00000	1,00000	1,00001	1,00000	1,00000	1,00001
0,250	0,99998	1,00000	1,00001	1,00001	1,00001	1,00003	1,00003	1,00003	1,00004
0,500	0,99896	0,99919	0,99935	0,99951	0,99951	0,99968	0,99979	0,99984	0,99989
0,750	0,99469	0,99579	0,99661	0,99741	0,99741	0,99826	0,99883	0,99907	0,99931
1,000	0,98354	0,98690	0,98942	0,99187	0,99187	0,99449	0,99627	0,99701	0,99775
1,250	0,96186	0,96958	0,97538	0,98104	0,98103	0,98712	0,99126	0,99299	0,99472
1,500	0,92755	0,94196	0,95279	0,96349	0,96351	0,97511	0,98303	0,98640	0,98976
1,750	0,88209	0,90500	0,92236	0,93963	0,93963	0,95863	0,97181	0,97743	0,98294
2,000	0,83001	0,86196	0,88634	0,91102	0,91106	0,93869	0,95809	0,96645	0,97481
2,250	0,77711	0,81734	0,84853	0,88047	0,88055	0,91713	0,94335	0,95463	0,96604
2,500	0,72774	0,77469	0,81169	0,85045	0,85041	0,89553	0,92842	0,94288	0,95740
2,750	0,68436	0,73631	0,77804	0,82251	0,82251	0,87530	0,91441	0,93171	0,94936
3,000	0,64761	0,70313	0,74854	0,79774	0,79775	0,85713	0,90176	0,92179	0,94230
3,200	0,62268	0,68029	0,72809	0,78039	0,78039	0,84428	0,89288	0,91475	0,93722
3,500	0,59226	0,65211	0,70258	0,75857	0,75855	0,82796	0,88152	0,90587	0,93103
4,000	0,55677	0,61887	0,67216	0,73218	0,73218	0,80805	0,86772	0,89514	0,92377
4,500	0,53513	0,59837	0,65319	0,71557	0,71555	0,79534	0,85890	0,88835	0,91923
5,000	0,52227	0,58606	0,64169	0,70541	0,70539	0,78749	0,85342	0,88413	0,91637
5,500	0,51426	0,57831	0,63442	0,69888	0,69886	0,78233	0,84974	0,88121	0,91439
6,000	0,50870	0,57290	0,62927	0,69421	0,69421	0,77856	0,84692	0,87890	0,91273
6,500	0,50428	0,56860	0,62517	0,69045	0,69046	0,77550	0,84459	0,87697	0,91129
7,000	0,50040	0,56482	0,62157	0,68717	0,68717	0,77282	0,84253	0,87528	0,91005
7,500	0,49687	0,56141	0,61832	0,68422	0,68422	0,77044	0,84076	0,87385	0,90900
8,000	0,49363	0,55827	0,61535	0,68153	0,68141	0,76830	0,83918	0,87261	0,90813

Finalmente, o quociente entre os valores corrigidos das perdas por correntes induzidas (designadas agora no resto deste capítulo por  $P_{Jcor}$ ) e as perdas de referência ( $P_{ref}=P_{B1}$ ),  $P_{Jcor}/P_{ref}=P_{Jcor}/P_{B1}$ , são finalmente dadas por (5.6), sendo apresentadas na Fig. 5.12 em termos de  $d/\delta$  e na Fig. 5.13 em termos de  $f$ , em ambos os casos para o estudo até 10 kHz. Para o estudo com  $d/\delta$  entre 0,05 e 8,  $P_{Jcor}/P_{B1}$  é apresentado na Fig. 5.14 e Tabela 5.9.

$$P_{Jcor} / P_{B1} = (P_J / P_{B1}) F_{cor} \quad (5.6)$$

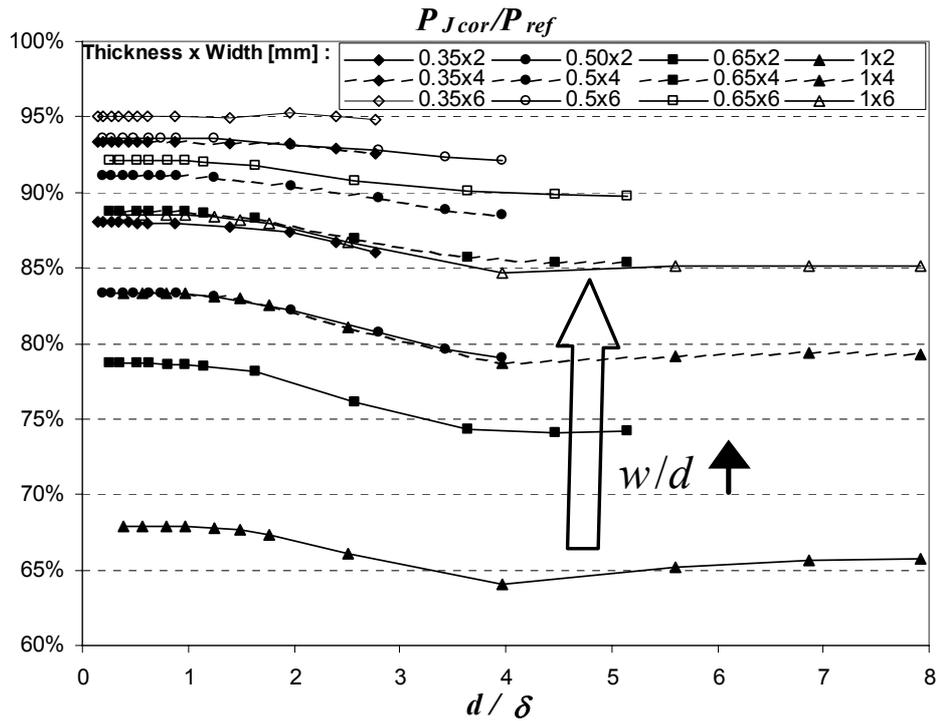


Fig. 5.12.  $P_{Jcor}/P_{ref}$  em termos de  $d/\delta$  (até 10 kHz) [Antunes2002].

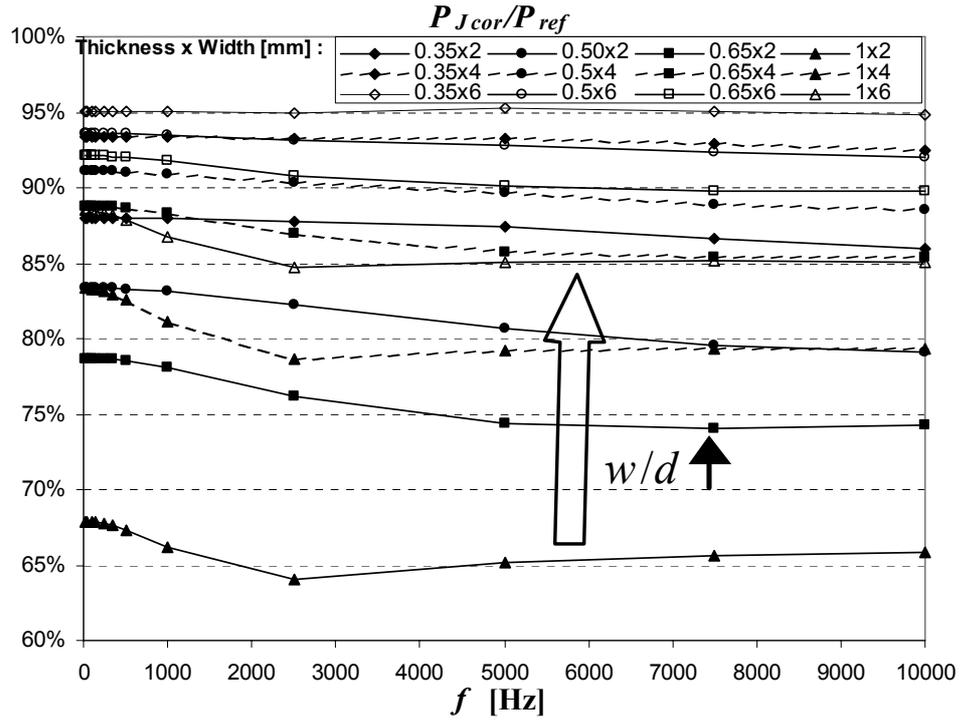


Fig. 5.13.  $P_{Jcor}/P_{ref}$  em termos da frequência, até 10 kHz [Antunes2002].

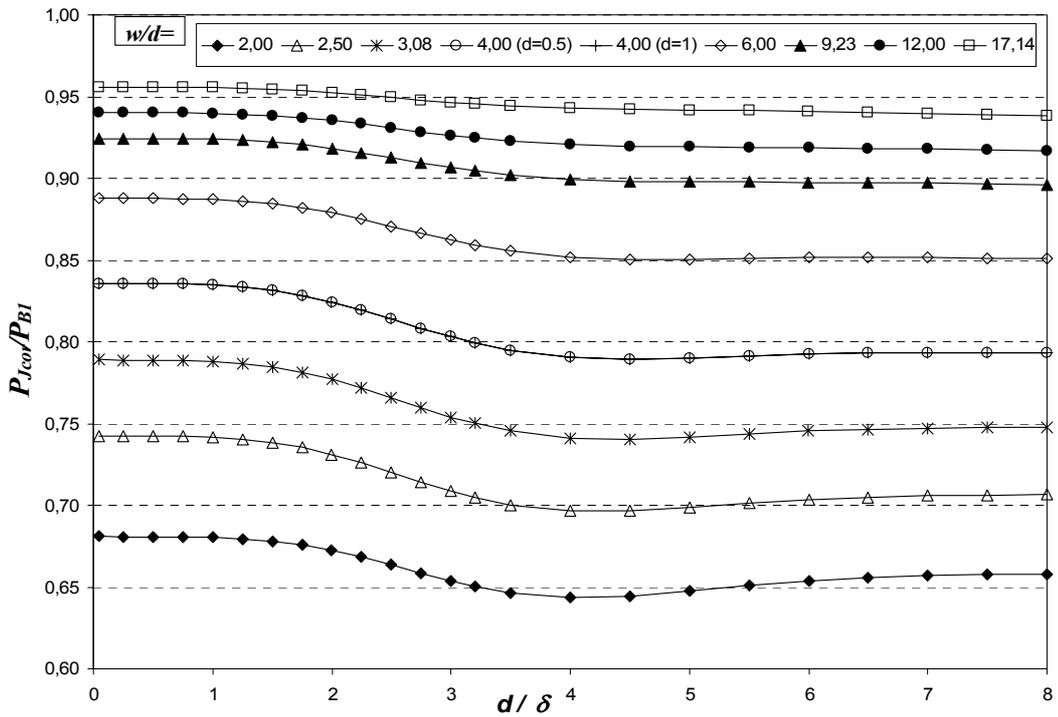


Fig. 5.14.  $P_{Jcor}/P_{BI}$  para o problema 2D em função de  $d/\delta$  (0,05-8) e  $w/d$ .

Tabela 5.9.  $P_{Jcor}/P_{B1}$  para o problema 2D em função de  $d/\delta$  (0,05-8) e  $w/d$ .

$d/\delta \backslash w/d$	2,00	2,5	3,08	4,00(0,5)	4,00(1)	6,00	9,23	12,00	17,14
0,050	0,68095	0,74238	0,78895	0,83572	0,83572	0,88788	0,92444	0,94015	0,95584
0,250	0,68087	0,74224	0,78885	0,83566	0,83566	0,88780	0,92441	0,94011	0,95579
0,500	0,68082	0,74218	0,78879	0,83559	0,83559	0,88775	0,92436	0,94007	0,95576
0,750	0,68066	0,74197	0,78856	0,83537	0,83537	0,88757	0,92424	0,93998	0,95569
1,000	0,68026	0,74143	0,78796	0,83479	0,83479	0,88712	0,92393	0,93974	0,95553
1,250	0,67942	0,74030	0,78673	0,83361	0,83361	0,88619	0,92328	0,93923	0,95518
1,500	0,67794	0,73834	0,78460	0,83157	0,83157	0,88458	0,92217	0,93837	0,95459
1,750	0,67564	0,73533	0,78137	0,82852	0,82852	0,88218	0,92050	0,93707	0,95369
2,000	0,67243	0,73119	0,77700	0,82444	0,82442	0,87898	0,91827	0,93534	0,95252
2,250	0,66833	0,72604	0,77165	0,81945	0,81945	0,87510	0,91556	0,93324	0,95109
2,500	0,66355	0,72023	0,76571	0,81394	0,81395	0,87079	0,91256	0,93092	0,94953
2,750	0,65850	0,71424	0,75966	0,80835	0,80835	0,86639	0,90948	0,92851	0,94795
3,000	0,65364	0,70863	0,75400	0,80308	0,80310	0,86222	0,90654	0,92629	0,94646
3,200	0,65019	0,70469	0,75002	0,79935	0,79935	0,85921	0,90442	0,92466	0,94539
3,500	0,64622	0,70014	0,74531	0,79485	0,79485	0,85554	0,90183	0,92269	0,94413
4,000	0,64335	0,69637	0,74104	0,79048	0,79048	0,85176	0,89908	0,92058	0,94277
4,500	0,64444	0,69648	0,74045	0,78939	0,78939	0,85045	0,89799	0,91969	0,94214
5,000	0,64756	0,69863	0,74187	0,79010	0,79010	0,85050	0,89772	0,91932	0,94171
5,500	0,65098	0,70123	0,74382	0,79136	0,79136	0,85099	0,89772	0,91910	0,94128
6,000	0,65379	0,70340	0,74546	0,79241	0,79241	0,85137	0,89761	0,91877	0,94071
6,500	0,65575	0,70490	0,74656	0,79306	0,79306	0,85150	0,89735	0,91833	0,94007
7,000	0,65698	0,70579	0,74715	0,79334	0,79334	0,85142	0,89699	0,91785	0,93943
7,500	0,65767	0,70624	0,74738	0,79334	0,79334	0,85117	0,89654	0,91731	0,93875
8,000	0,65803	0,70638	0,74735	0,79314	0,79314	0,85078	0,89601	0,91670	0,93802

Finalmente, na Tabela 5.10 apresentam-se, como exemplo, os valores obtidos a partir da solução do campo por elementos finitos, utilizados no cálculo de  $F_{cor}$  e  $P_{Jcor}/P_{B1}$  para  $w/d=4$  mm/1 mm=4 (curva “4,00(d=1)” na Fig. 5.14).

Tal como no fim de “5.3 Resultados do modelo analítico aproximado e conclusões”, página 116, também agora se colocou a questão se estes resultados permaneciam válidos para qualquer  $B_{ref}$  na zona linear. Por isso, foi também verificado numericamente que os resultados de  $F_{cor}$  e  $P_{Jcor}/P_{B1}$  são os mesmos para quaisquer outros valores de  $B_{ref}$  na zona linear da curva  $B(H)$ , ou seja desde que se possa considerar  $\mu$  constante, o que quer dizer que a aplicação do  $F_{cor}$  não afecta esta conclusão.

Tabela 5.10. Exemplo de cálculo de  $F_{cor}$  e  $P_{Jcor}/P_{BI}$  para  $w/d=4$  mm/1 mm=4 (problema 2D).

Ficheiro *.pos	$\int H_R dS$	$\int H_d dS$	$B_{max}^a$ (numérico)	$F_{cor}$	$P_{Jcor}/P_{BI}$
PDTAM003.pos	2,999995E-03	1,551281E-07	1,50000	1,000003331	83,5717%
PDTAM6_3.pos	2,999986E-03	3,287383E-06	1,49999	1,000008133	83,5660%
PDTAM099.pos	2,999976E-03	5,078504E-06	1,49999	1,000013134	83,5657%
PDTAM39.pos	3,000672E-03	2,052512E-05	1,50037	0,999505386	83,5589%
PDTAM89.pos	3,003546E-03	4,598829E-05	1,50195	0,997406356	83,5371%
PDTAM159.pos	3,011194E-03	8,044736E-05	1,50613	0,991870947	83,4792%
PDTAM248.pos	3,026403E-03	1,220397E-04	1,51443	0,981032413	83,3610%
PDTAM358.pos	3,051707E-03	1,670793E-04	1,52814	0,963511694	83,1573%
PDTAM487.pos	3,087662E-03	2,112306E-04	1,54744	0,939626395	82,8518%
PDTAM636.pos	3,133087E-03	2,496691E-04	1,57151	0,911063148	82,4420%
PDTAM805.pos	3,184796E-03	2,793039E-04	1,59851	0,880545558	81,9449%
PDTAM994.pos	3,239388E-03	2,991394E-04	1,62659	0,850410924	81,3946%
PDTAM1k2.pos	3,293399E-03	3,092142E-04	1,65394	0,82251194	80,8352%
PDTAM1k4.pos	3,344405E-03	3,108346E-04	1,67941	0,797754732	80,3096%
PDTAM1k6.pos	3,382086E-03	3,070214E-04	1,69800	0,780385083	79,9350%
PDTAM1k9.pos	3,431878E-03	2,949867E-04	1,72227	0,758546048	79,4849%
PDTAM2ka.pos	3,495946E-03	2,652154E-04	1,75300	0,732184866	79,0478%
PDTAM3k2.pos	3,538843E-03	2,328957E-04	1,77325	0,715554962	78,9388%
PDTAM3k9.pos	3,566085E-03	2,046553E-04	1,78598	0,705392947	79,0103%
PDTAM4k8.pos	3,583943E-03	1,828165E-04	1,79430	0,698862523	79,1359%
PDTAM5k7.pos	3,596752E-03	1,668145E-04	1,80031	0,69420597	79,2414%
PDTAM6k7.pos	3,607041E-03	1,551716E-04	1,80519	0,690458167	79,3062%
PDTAM7k7.pos	3,616029E-03	1,465673E-04	1,80950	0,687172521	79,3343%
PDTAM8k9.pos	3,624097E-03	1,399816E-04	1,81340	0,684219486	79,3341%
PDTAM1ak.pos	3,631746E-03	1,351134E-04	1,81713	0,68141374	79,3141%

## 5.5 Conclusões e discussão dos resultados anteriores

Neste momento é importante fazer um ponto da situação. Assim, dos resultados obtidos e apresentados anteriormente, podem extrair-se as seguintes conclusões principais:

- Foi desenvolvida e apresentada uma metodologia para calcular as perdas por correntes induzidas considerando efeito pelicular, tendo em consideração a espessura e largura das chapas;
- É importante considerar o efeito pelicular, a largura e a espessura da chapa para uma previsão correcta das perdas por correntes induzidas, e consequentemente, das perdas totais;
- O modelo analítico desenvolvido e apresentado anteriormente em “5 EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA  $d/\delta$  DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS”, página 107, permite calcular  $P_J/P_{BI}$  para qualquer  $w/d$  e  $d/\delta$  a 2D. No entanto, devido ao

mencionado “efeito de sobreposição”, tem-se  $B_{max}^a \geq B_{ref}$ . Por esta razão, a aplicação deste modelo não será fácil quando se pretende calcular as perdas para um determinado  $B_{ref}$ ;

- A relação  $P_{Jcor}/P_{B1}$  diminui<sup>59</sup> a partir do valor unitário (100%) com a diminuição de  $w/d$ ;
- Concluiu-se que as curvas com o mesmo  $w/d$  são coincidentes, tal como se pode ver por exemplo na Fig. 5.6 para as curvas com  $w/d=4$  (curvas com  $w=4$  mm e  $d=1$  mm e curva com  $w=2$  mm  $d=0.5$  mm). O mesmo se aplica à Fig. 5.14, o que significa que a coincidência de curvas com o mesmo  $w/d$  é independente do factor de correcção  $F_{cor}$ ;
- Os resultados foram apresentados na forma de uma família de curvas que fornece um factor de correcção para as perdas por correntes induzidas dependendo de todos os parâmetros analisados;
- Estes resultados permanecem válidos para qualquer valor de  $B_{ref}$ , na zona linear de funcionamento da curva  $B(H)$ .

O problema da dificuldade da aplicação do modelo analítico quando se pretende calcular as perdas para um determinado  $B_{ref}$  poderia ser contornado se fosse possível obter um outro modelo analítico para  $F_{cor}$  (representado na Fig. 5.11 e Tabela 5.8, página 123). Assim,  $P_{Jcor}/P_{B1}$  poderia ser obtido pela aplicação sucessiva dos dois modelos ou pela criação de um novo modelo resultante da multiplicação dos dois. Infelizmente não encontramos um modelo simples para  $F_{cor}$ , pelo que haverá necessidade de procurar um novo modelo global (e simples), que exprima directamente o gráfico da Fig. 5.14. Essa e outras tarefas irão ser prosseguidas nos capítulos que se seguem.

---

<sup>59</sup> Estes resultados estão qualitativamente em concordância com os apresentados por outros autores [Gyselinck1999], embora para uma chapa magnética diferente. Como se verá posteriormente na Fig. 6.4, página 133, há também uma concordância quantitativa muito elevada.

## 6 GRÁFICO GENÉRICO E MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDOS DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

No trabalho apresentado anteriormente, foi efectuada por elementos finitos uma análise de correntes induzidas para o problema a 2D numa chapa magnética (FeV 400-50HA, [UGINE]) por forma a determinar a relação  $P_J/P_{BI}$ , em que  $P_{ref}=P_{BI}$  para frequências desde 25 Hz até 10 kHz, correspondentes a  $d/\delta$  desde 0,14 a 7,93, e  $w/d$  desde 2 a 17,14. Esse estudo foi depois estendido para  $d/\delta$  desde 0,05 até 8. Infelizmente o modelo analítico apresentado em “5 EXTENSÃO DE RESULTADOS PARA  $d/\delta$  DESDE 0,05 A 8. OBTENÇÃO DE MODELO ANALÍTICO EXTRAÍDO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS”, devido ao efeito de sobreposição, não corresponde a um  $B_{ref}$  constante, mas sim a um  $B_{max}^a$  função de  $d/\delta$  e  $w/d$ .

Assim, surgiram agora **quatro novos objectivos**:

- Diminuir os erros numéricos através da utilização de uma malha de elementos finitos um pouco mais refinada.
- Analisar os resultados de  $P_J/P_{BI}$  para outros materiais magnéticos.
- Estender o estudo para frequências mais elevadas, com efeito pelicular ainda mais intenso ( $d/\delta=[0,05-30]$ ).
- Tentar obter um novo modelo analítico que considere já o efeito de sobreposição e a respectiva correcção.

Devido a ser necessário voltar a analisar centenas de casos por elementos finitos (2x264), houve a necessidade de introdução de novos comandos no **CADyPOS** e a alteração do funcionamento do **CADdyMAG** de forma a poder funcionar em modo “batch” (“fornada”) isto é de uma forma automatizada, para evitar o trabalho de ter que introduzir manualmente os dados, processar os modelos e extrair os resultados. Esta e outras alterações ao *software* foram sendo desenvolvidas gradualmente, à medida que as necessidades iam surgindo, sendo por isso referidas quando oportuno, ao longo do texto, ou mais à frente em “12 OUTROS

DESENVOLVIMENTOS: MELHORIAS AO *SOFTWARE* DE ELEMENTOS FINITOS, CADdyMAG”. Não se aumentou logo o número de nodos disponível, pois era preciso proceder a diversas modificações das estruturas de dados, pelo que se continuou limitado aos 600 nodos do início desta fase.

Agora foi considerado o material **M 400-50A** da companhia francesa “Sollac Méditerranée” [SollacMéditerranée2001b], também na zona linear de funcionamento da curva  $B(H)$ , com  $\mu=6,667 \times 10^{-3}$  H/m ( $\mu_r=5305,2$ ) e  $\sigma=4,5 \times 10^6$  S/m. Trata-se portanto de uma chapa magnética significativamente diferente da usada antes (com  $\sigma=2 \times 10^6$  S/m,  $\mu=1 \times 10^{-3}$  H/m e  $B_{ref}=1.5$  T). Agora foi considerado  $B_{max}^a = B_{ref} = 1,2$  T.

Os resultados numéricos foram obtidos com malhas de EF de 1ª ordem, com uma discretização de cerca<sup>60</sup> de 600 nodos para o problema 2D (foi modelado  $\frac{1}{4}$  da chapa devido a simetria) e 1200 nodos<sup>61</sup> para o problema 1D (foi modelado  $\frac{1}{2}$  da chapa). Os modelos para o problema 1D, usaram exactamente<sup>62</sup> as mesmas malhas que as do correspondente problema 2D, e portanto muito aproximadamente com os mesmos erros de discretização e numéricos. Para adaptar melhor as malhas à diminuição da profundidade de penetração pelicular a obter neste capítulo, com o aumento das frequências, foi aumentado o número de camadas de elementos finitos junto à superfície da chapa. A título de exemplo, apresenta-se na Fig. 6.1 a malha para o problema 1D (semi-modelo), para  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm, correspondente ao mesmo caso que foi apresentado na Fig. 4.3, mas agora com cerca de quatro vezes mais detalhe, pois utiliza 1164 nodos e 2184 elementos, para meia chapa, contra os 597 nodos e 1072 elementos, para a chapa toda.

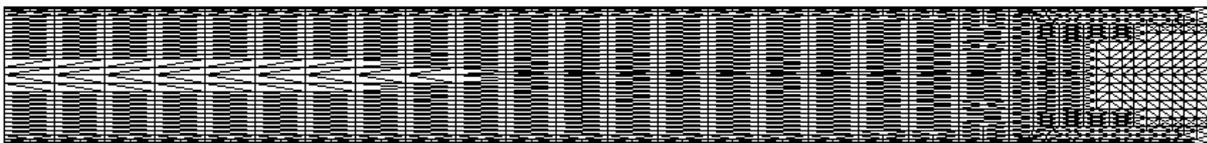


Fig. 6.1. Malha de elementos finitos para semi-modelo (problema 1D), para  $w=6$  mm e  $d=0,35$  mm, 1164 nodos, 2184 elementos. PA5BM.PRE.

<sup>60</sup> Mais exactamente 599 nodos, quando o máximo de nodos disponíveis era de 600.

<sup>61</sup> Note-se que os resultados 2D foram obtidos antes dos 1D, pelo que estes já puderam ultrapassar o número de 600 nodos, pois entretanto procedeu-se a uma actualização do processador de correntes induzidas.

<sup>62</sup> Excepto que, mais uma vez, para o problema 1D a condição de fronteira  $H_s$  é imposta apenas nas fronteiras horizontais da chapa, e é considerada meia chapa em vez de  $\frac{1}{4}$ , i.e., as malhas para o problema 1D foram obtidas das 2D por simetria em torno de  $y=0$ .

## 6.1 Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para o problema 1D com as novas malhas

Para o problema 1D foram processados 264 modelos diferentes, correspondendo a 33 valores diferentes de  $d/\delta$  e 8 valores diferentes de  $w/d$ . Sendo  $P_{J1D}$  a densidade de perdas numéricas para o problema 1D e tomando como referência a densidade de perdas analíticas,  $P_{BI}$ , o erro para as perdas por correntes induzidas numéricas é apresentado na Fig. 6.2. Pode ser visto que apesar de uma malha relativamente grosseira (menos de 1200 nodos), o erro máximo é de cerca de 0,7%, com um valor médio (do módulo dos erros) de cerca de 0,18% (embora deva ser referido que este valor médio reflecte também o facto de o número de valores tomados para  $d/\delta \leq 8$  ser maior que para  $d/\delta > 8$ ).

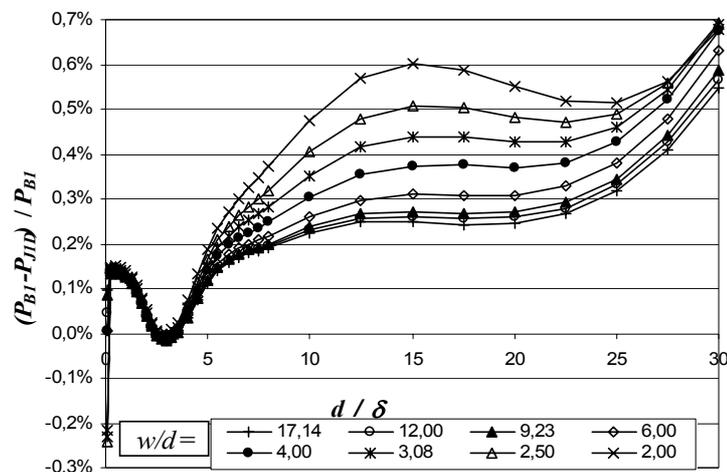


Fig. 6.2. Erro no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas a 1D,  $P_{J1D}$ .

## 6.2 Comparação entre os resultados numéricos para o problema 2D com os de $P_{BI}$

Para o caso do problema 2D, foram também (e em termos cronológicos, antes dos 1D) processados 264 modelos, correspondendo aos mesmos 33  $d/\delta$  e 8  $w/d$ .  $P_J/P_{BI}$  é apresentado na Fig. 6.3, sendo  $P_J$  as perdas numéricas para o problema 2D, já corrigidas com o  $F_{cor}$  correspondente (em “5.4 Efeito de sobreposição” foram designadas como  $P_{Jcor}$ , mas a partir de agora, por simplicidade, são designadas apenas por  $P_J$ ).

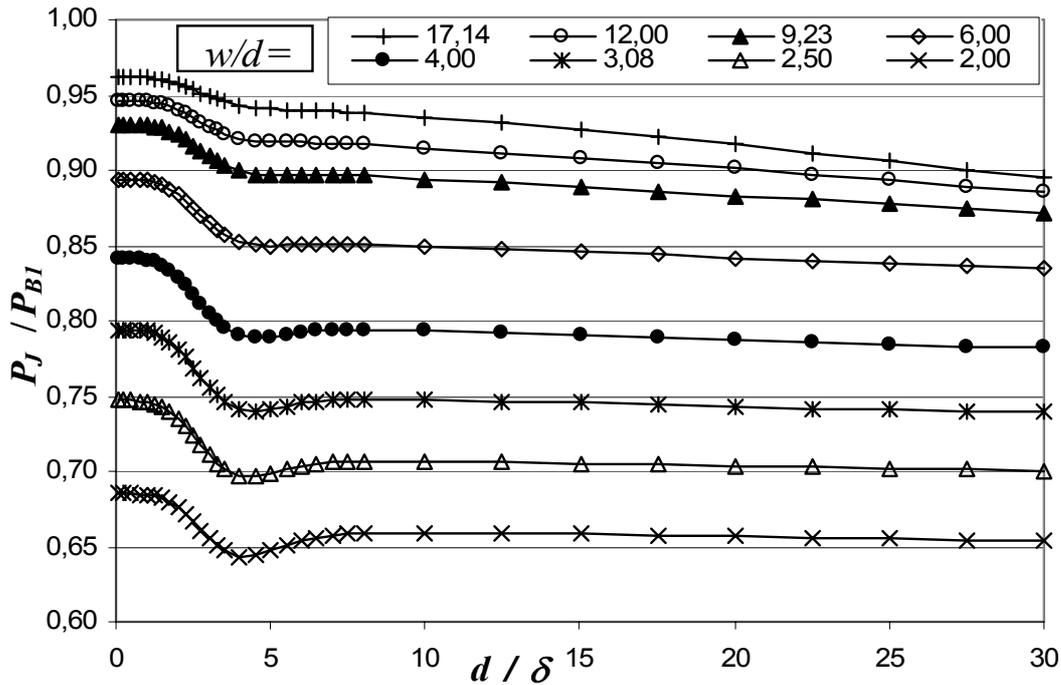


Fig. 6.3. Gráfico genérico de  $P_J/P_{BI}$  para  $w/d=2-17,14$  e  $d/\delta=0,05-30$ .

Comparando esses resultados com os obtidos anteriormente e apresentados na Fig. 5.14 pode ser visto claramente que são coincidentes<sup>63</sup>. **Isto levou-nos a suspeitar de uma conclusão muito importante: que estes resultados poderiam então ser válidos para outros materiais, ou melhor, para qualquer outra chapa magnética.** Para além disso, e na ausência de valores experimentais próprios pelas razões apontadas anteriormente (“4.3.2 Dificuldades na obtenção de dados experimentais. Experimentação numérica” Página 91), procuraram-se e encontraram-se na literatura alguns valores para o problema 2D obtidos por outros autores [Gyselinck1999], utilizando outro método e outro programa de elementos finitos [GetDP2003][Gmsh2004], para uma terceira chapa magnética. Assim, os valores de  $P_J/P_{BI}$  foram também por nós calculados numericamente para os mesmos casos apresentados por esses autores para uma terceira chapa diferente [Gyselinck1999], com  $\mu=6,2832 \times 10^{-3}$  H/m ( $\mu_r = 5000$ ),  $\sigma=3 \times 10^6$  S/m (com  $B_{ref}=1,0$  T). Na Fig. 6.4 e nas colunas I, II e III da Tabela 6.1 é apresentada uma comparação entre os nossos resultados e os de Gyselinck *et al*, podendo observar-se que as diferenças são bastante pequenas, com valor médio de 0,218%.

<sup>63</sup> A menos de uma pequena diferença inferior a 1%. Esta diferença deve-se ao facto de que na Fig. 5.14, foram utilizados 598 nodos para o semi-modelo enquanto na Fig. 6.3 são utilizados 599 nodos para  $\frac{1}{4}$  da chapa, portanto um modelo com o dobro da discretização. Com efeito, foi verificado numericamente que usando estas segundas malhas para as duas chapas diferentes e com diferentes  $B_{ref}$ , se chegava aos mesmos valores de  $P_J/P_{BI}$ , com diferenças menores do que  $1 \times 10^{-5}$ , as quais se devem obviamente a erros numéricos.

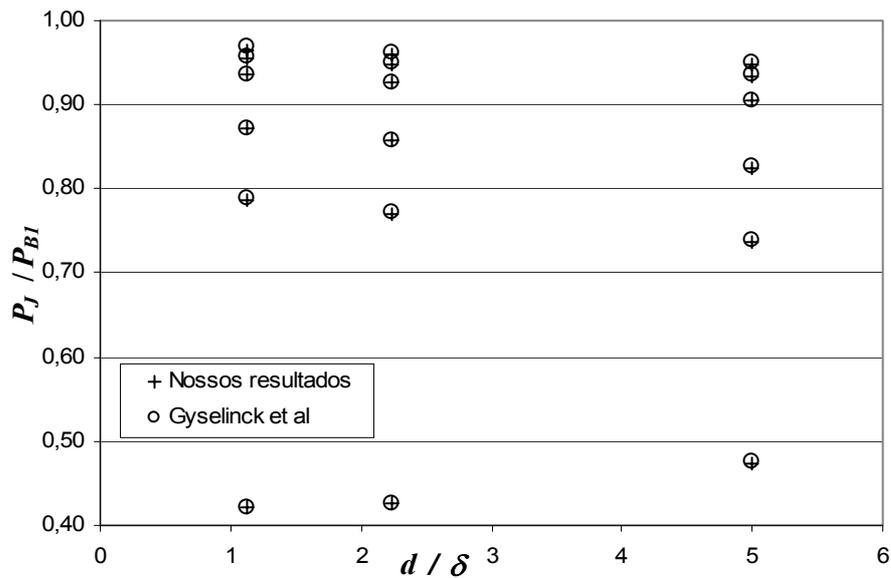


Fig. 6.4. Comparação entre os nossos resultados numéricos e os de Gyselinck *et al* [Gyselinck1999].

Tabela 6.1. Comparação entre os nossos resultados numéricos (I) e os de outros autores (II).

$w/d$	$d/\delta$	I: $P_j/P_{BI}$	II: $P_j/P_{BI}$ em [Gyselinck1999]	III: Dif.= (II-I)/II
1	1,12	42,144%	42,200%	0,132%
1	2,24	42,629%	42,700%	0,166%
1	5,00	47,278%	47,500%	0,467%
3	1,12	78,736%	78,800%	0,082%
3	2,24	77,058%	77,200%	0,183%
3	5,00	73,641%	73,900%	0,350%
5	1,12	87,142%	87,200%	0,067%
5	2,24	85,705%	85,800%	0,111%
5	5,00	82,487%	82,700%	0,258%
10	1,12	93,486%	93,600%	0,122%
10	2,24	92,615%	92,700%	0,092%
10	5,00	90,409%	90,600%	0,211%
15	1,12	95,457%	95,700%	0,254%
15	2,24	94,867%	95,100%	0,245%
15	5,00	93,273%	93,600%	0,350%
20	1,12	96,522%	96,800%	0,287%
20	2,24	96,072%	96,300%	0,237%
20	5,00	94,810%	95,100%	0,305%
Diferença média:				0,218%

Assim, podem neste momento tirar-se algumas **conclusões importantes**:

- O método e os **resultados** a 2D estão **também validados** por comparação com os de Gyselinck *et al* [Gyselinck1999].
- Os **resultados apresentados** na Fig. 6.3 são **válidos para qualquer  $w/d$  e  $d/\delta$  para qualquer chapa magnética e para qualquer  $B_{ref}$** , desde que se possa considerar na zona linear de funcionamento.

- Assim, podemos concluir que o gráfico da Fig. 6.3 representa um **gráfico genérico**, ou ábaco, que poderá ser utilizado por um projectista para corrigir o valor das perdas por correntes induzidas.
- Outra conclusão é que os valores de  $P_J/P_{BI}$  são função de  $w/d$  e  $d/\delta$ , e portanto o **mesmo ponto no gráfico** poderá ser obtido com “**infinitas**” combinações de  $d, f$  e  $w$ , para qualquer chapa.

Assim, será portanto de toda a conveniência e interesse, tentar obter um modelo analítico que permita exprimir o gráfico da Fig. 6.3, o que irá ser apresentado seguidamente. No entanto, e antes disso, vamos aqui abordar uma questão que possivelmente não terá escapado ao leitor mais atento e entendido no assunto da modelação por elementos finitos: será lícito modelar apenas  $\frac{1}{4}$  da chapa para resolver o problema 2D?

### 6.3 Será lícito modelar apenas $\frac{1}{4}$ da chapa para resolver o problema 2D?

A questão surge pelo seguinte: observem-se a Fig. 4.10 e a Fig. 4.11, na página 79; para se poder modelar apenas  $\frac{1}{4}$  do problema, é necessária a existência de linhas de simetria correspondentes a condições de fronteira de Dirichlet (com valor fixo) ou a condições de fronteira de Neumann homogéneas (em que a derivada do potencial em ordem à normal à linha é nula,  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ ).

Observe-se agora a Fig. 6.5 (editada a partir da Fig. 4.11), em que:

- Em relação ao eixo dos  $y$ , vemos claramente a existência de uma linha de simetria, pois as equipotenciais ( $H_I$  neste caso) são perpendiculares à linha. Ou seja, existe uma condição de fronteira de Neumann homogénea, representada por  $\frac{\partial H_I}{\partial x} = 0$  (a derivada do potencial em ordem à “normal ao eixo dos  $y$ ”, i.e. segundo a direcção  $x$ , é nula), e que o processador de elementos finitos considera automaticamente, pelo que se poderá modelar apenas  $\frac{1}{2}$  problema.

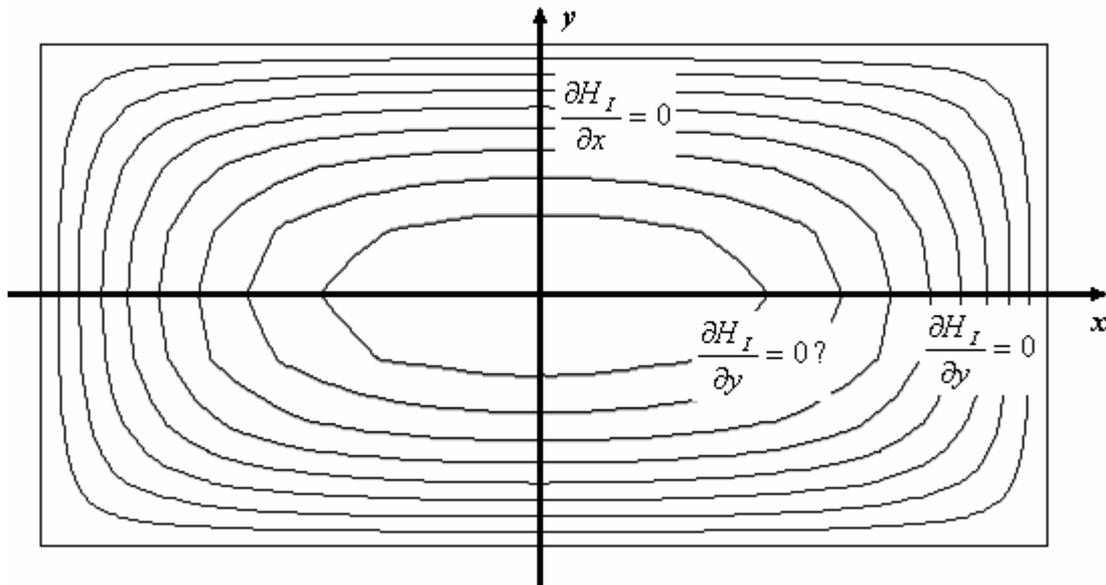


Fig. 6.5. Equipotenciais da componente imaginária de  $\tilde{H}_z$ ,  $H_I$  ( $w=2$  mm e  $d=1$  mm, 50 Hz) e linhas de simetria no problema 2D: condições de fronteira de Neumann no eixo dos  $x$  e  $y$ .

- Em relação ao eixo dos  $x$ , embora tenhamos obviamente também uma simetria, temos duas situações:
  - junto ao limite da chapa (onde está marcado  $\frac{\partial H_I}{\partial y} = 0$ ) temos uma condição de fronteira de Neumann, pois as equipotenciais são também perpendiculares ao eixo dos  $x$  nesta zona;
  - contudo na zona central da chapa (origem do sistema de eixos representado), marcada por  $\frac{\partial H_I}{\partial y} = 0?$  as equipotenciais parecem ser paralelas ao eixo dos  $x$ , e não perpendiculares pelo não termos aí uma condição de fronteira de Neumann homogénea. Assim, em princípio não será formalmente correcto considerar apenas  $\frac{1}{4}$  da chapa e teria que ser modelada  $\frac{1}{2}$ .

Para além disso, este efeito será agravado no caso em que o efeito 2D se fará sentir menos, ou seja o caso em que a relação  $w/d$  é maior. Atendendo a que devido, à limitação do processador a 600 nodos na altura em que foi feito este estudo, se optou por tentar modelar apenas  $\frac{1}{4}$  da chapa, supondo que o erro não seria muito grande em relação à modelação de  $\frac{1}{2}$  chapa, impunha-se no entanto verificar esta suposição, a partir do momento em que se passou a dispor de um número mais elevados de nodos.

Assim, pegou-se na malha usada para a modelação de  $\frac{1}{4}$  do problema 2D mais desfavorável ( $w/d=17,14$ ) efectuou-se uma simetria em torno do eixo dos  $x$  (ficando assim com uma malha igual à usada para  $\frac{1}{2}$  do problema 1D, com excepção da marcação da condição de fronteira,...) e resolveu-se o problema 2D para toda a gama de  $d/\delta$  considerada. A diferença entre os resultados obtidos para diversas grandezas ( $P_J$ ,  $F_{cor}$ ,  $B_{max}^a$  e  $P_{Jcor}$ ) pelo modelo de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  do problema, tomando aquele como referência, estão representados na Fig. 6.6, em percentagem.

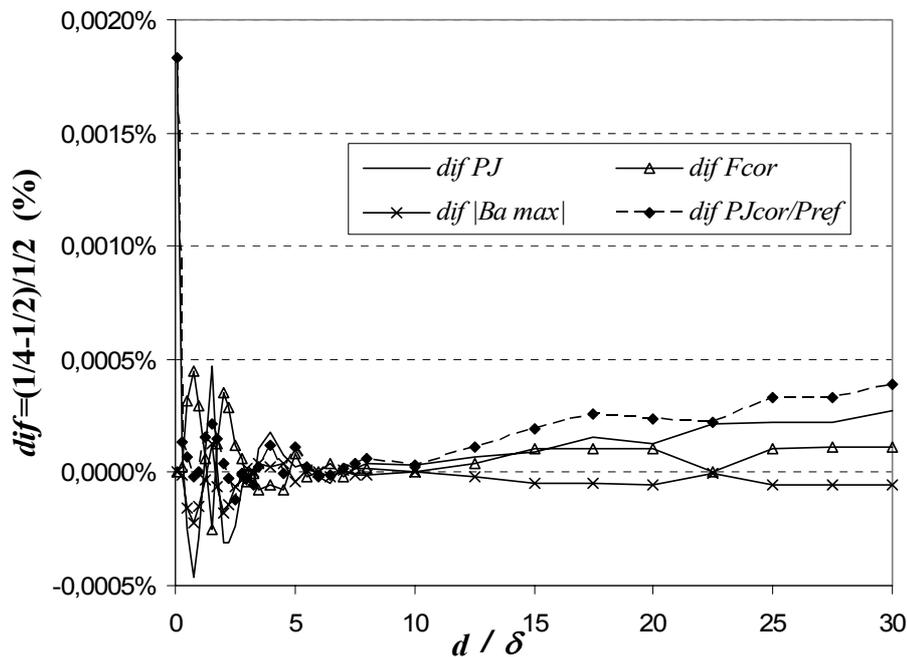


Fig. 6.6. Diferenças entre  $P_J$ ,  $F_{cor}$ ,  $B_{max}^a$  e  $P_{Jcor}$  calculados com malhas para  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  do problema.

Pelos resultados torna-se evidente que apesar de não ser formalmente correcto modelar o problema 2D apenas por  $\frac{1}{4}$  do problema em vez de  $\frac{1}{2}$ , o erro obtido é perfeitamente desprezável pelo que os resultados obtidos apenas com  $\frac{1}{4}$  do problema poderão ser usados como correctos.

## 6.4 Modelo analítico derivado de resultados numéricos

### 6.4.1 Modelo de linhas rectas

Como o gráfico da Fig. 6.3 é válido para qualquer chapa magnética nas condições apresentadas, procurou-se derivar um modelo analítico a partir dos resultados numéricos.

No gráfico da Fig. 6.3, os autores identificaram quatro zonas em  $d/\delta$ , designadas por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , para  $d/\delta$  nos intervalos  $[0,05-1,5[$ ,  $[1,5-4[$ ,  $[4-8[$  e  $[8-30]$ , respectivamente (ver “Limites das zonas” na Fig. 6.7). Usando linhas rectas na forma geral  $y=mx+b$ , o modelo analítico proposto para cada zona é dado por

$$\boxed{P_J / P_{B1} = m[(d / \delta) - (d / \delta)_0] + b} \quad (6.1)$$

em que  $m$  e  $b$  são o declive e o termo constante da equação da recta, e  $(d/\delta)_0=(0,05; 1,5; 4$  ou  $8)$  é o valor inicial de  $d/\delta$  para a zona considerada. Para cada  $w/d$ ,  $m$  e  $b$  são constantes dentro de cada zona.

### 6.4.2 Expressões analíticas para a determinação dos coeficientes da equação da recta, $m$ e $b$

Tínhamos como objectivo encontrar expressões analíticas que permitissem calcular, para cada par  $(d/\delta, w/d)$ , os valores de  $m$  e  $b$  a aplicar em (6.1). Para isso, começou-se por aproximar por rectas (linhas contínuas na Fig. 6.7) cada curva de  $w/d$  constante em cada uma das 4 zonas.

Os valores do declive e termo inicial para a aproximação às curvas  $P_J/P_{B1}$  originais, i.e., para aproximação aos dados numéricos, foram calculados e designados por “ $m^*_{num}$ ” e “ $b^*_{num}$ ”, em que “\*” representa o nome da zona:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ . Os valores de  $m^*_{num}$  são portanto os declives de cada segmento de recta a traço contínuo na Fig. 6.7 e os valores de  $b^*_{num}$  são simplesmente os valores de  $P_J/P_{B1}$  no início de cada zona (i.e., para  $d/\delta=0,05; 1,5; 4$  ou  $8$ ) extraídos de cada curva de  $w/d$ . A título de exemplo, são mostrados na Fig. 6.7 os pontos correspondentes aos termos iniciais  $b^*_{num}$  para as curvas de  $w/d$  igual a 17,14 e 2, respectivamente  $b^*_{A num}$  e  $b^*_{D num}$ .

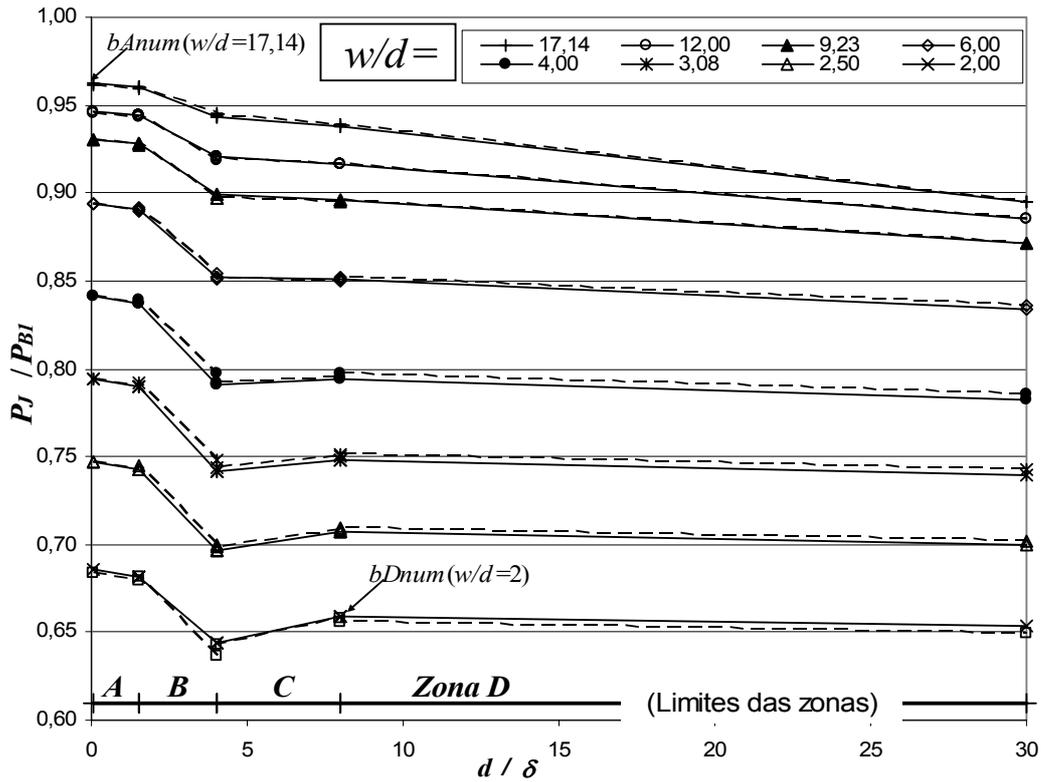


Fig. 6.7. Aproximação por rectas de  $P_j/P_{BI}$ : original (linhas contínuas) e do modelo analítico proposto (linhas a tracejado).

Os valores  $b^*_{num}$  e  $m^*_{num}$  foram de seguida representados graficamente como função de  $w/d$ , tal como pode ser visto (com linhas contínuas) na Fig. 6.8 e na Fig. 6.9.

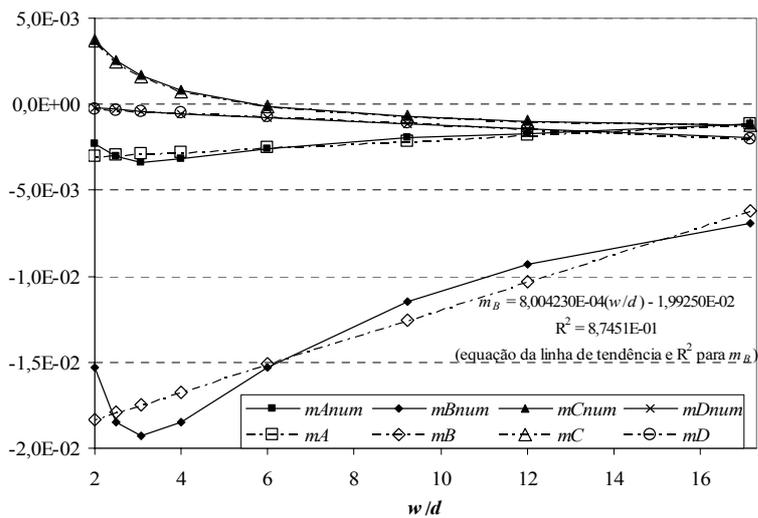


Fig. 6.8. Valores dos coeficientes numéricos  $m^*_{num}$  e analíticos  $m^*$ .

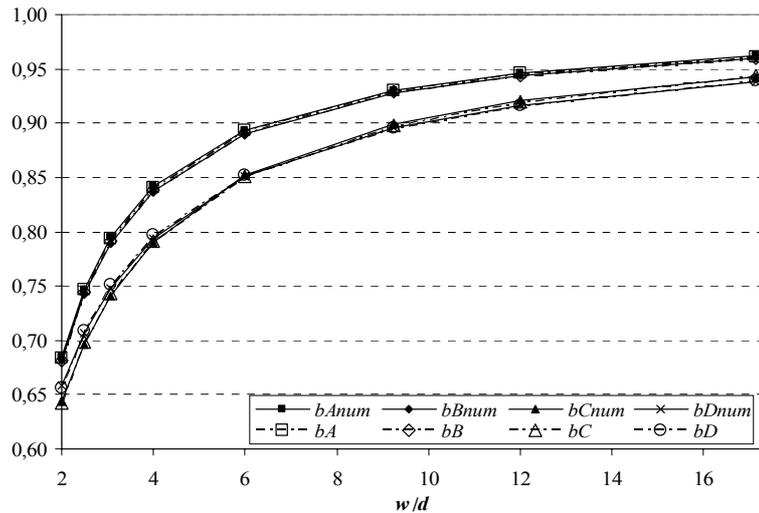


Fig. 6.9. Valores dos coeficientes numéricos  $b_{*num}$  e analíticos  $b_*$ .

Tentando encontrar expressões que permitissem calcular analiticamente uma boa aproximação aos coeficientes “ $m_{*num}$ ” e “ $b_{*num}$ ”, concluiu-se, após várias tentativas, que  $b_{*num}$  (todos os  $b_{*num}$ ) e  $m_{Cnum}$ , podem ser bastante bem aproximados por coeficientes calculados analiticamente por

$$\text{Coef} = k_1 + \frac{k_2}{(w/d)^{k_3}} \quad (6.2)$$

em que:

- *Coef* representa o “ $b_*$ ” (i.e.,  $\text{Coef}=b_A, b_B, b_C$ , ou  $b_D$ , linhas a ponto-traço na Fig. 6.9) ou “ $m_C$ ” a calcular ( $\text{Coef}=m_C$ , Fig. 6.8);
- $k_1, k_2$  e  $k_3$  são constantes que tomam os valores apresentados na Tabela 6.2 (por exemplo para  $b_B$ , virá  $\text{Coef}=b_B=0,998+0,628/(w/d)^{0,99}$ ). Os valores de  $k_1, k_2$  e  $k_3$  foram calculados no *Microsoft Excel* a partir dos dados numéricos, usando o método dos Mínimos Quadrados.

Para “ $m_{Anum}$ ”, “ $m_{Bnum}$ ”, e “ $m_{Dnum}$ ”, os correspondentes coeficientes analíticos “ $m_A$ ”, “ $m_B$ ” e “ $m_D$ ” foram calculados por *Coef*,

$$\text{Coef}' = m'(w/d) + b' \quad (6.3)$$

em que os valores de  $m'$  e  $b'$  são também apresentados na Tabela 6.2. As linhas rectas representando *Coef*' são mostradas na Fig. 6.8 (linhas a traço-ponto). Os valores de  $m'$  e  $b'$  (declive e termo constante) mais uma vez foram obtidos usando a função linha de tendência

(“trendline”) do *Microsoft Excel* (por exemplo são mostrados na Fig. 6.8 os valores devolvidos pela função linha de tendência para  $m_B$ ). Na Tabela 6.2 são também apresentadas as diferenças médias entre  $b^*$  e  $m^*$ , calculadas por (6.2) ou (6.3), e os correspondentes valores originais de  $b^*_{num}$  e  $m^*_{num}$ , extraídos dos dados numéricos.

Tabela 6.2. Constantes para o cálculo de  $Coef$  e  $Coef'$ , e diferenças médias entre  $b^*$  e  $m^*$  calculados analiticamente e os correspondentes  $b^*_{num}$  e  $m^*_{num}$  numéricos.

Valores de k1, k2 e k3, para calcular $Coef$ em (6.2)				
$Coef$	k1	k2	K3	Diferença média
$b_A$	0,998	0,628	1	0,08%
$b_B$	0,998	0,628	0,99	0,12%
$b_C$	1,0305	0,593	0,717	0,19%
$b_D$	1,0165	0,593	0,717	0,24%
$m_C$	-0,0017	-0,0118	1,13	2,96%
Valores de $m'$ e $b'$ , para calcular $Coef'$ em (6.3)				
$Coef'$	$m'$	$b'$	Diferença média	
$m_A$	1,27541E-04	-3,30073E-03	10,45%	
$m_B$	8,00430E-04	-1,99250E-02	9,01%	
$m_D$	-1,14584E-04	-4,49947E-05	8,67%	

### 6.4.3 Resultados do modelo analítico proposto

Usando o modelo proposto, dado pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3), a relação  $P_J/P_{B1}$  foi calculada analiticamente e é apresentada por linhas a tracejado na Fig. 6.10. As curvas de  $P_J/P_{B1}$  numéricas (obtidas a partir da solução por elementos finitos do problema de correntes induzidas 2D) são também apresentadas na Fig. 6.10 mas com linhas contínuas. Tal como se pode ver, o modelo analítico aproxima bastante bem os resultados dados numéricos. As suas diferenças absolutas (valor analítico menos valor numérico) são apresentadas na Fig. 6.11, e têm uma diferença média de 0,20%.

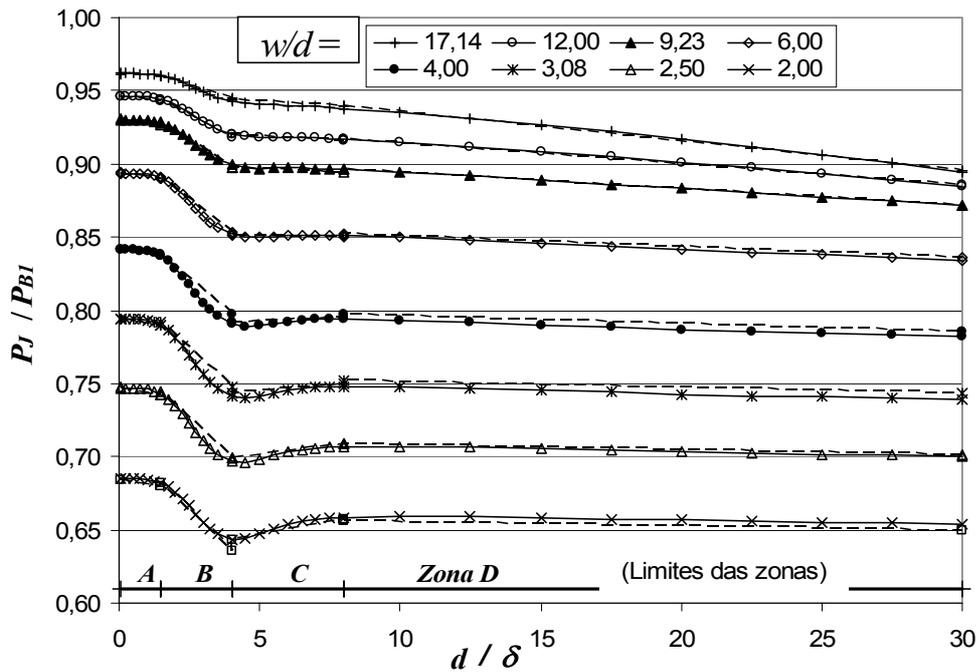


Fig. 6.10. Resultados obtidos por elementos finitos (linhas contínuas) para  $P_j/P_{BI}$  e pelo modelo analítico proposto (linhas a tracejado).

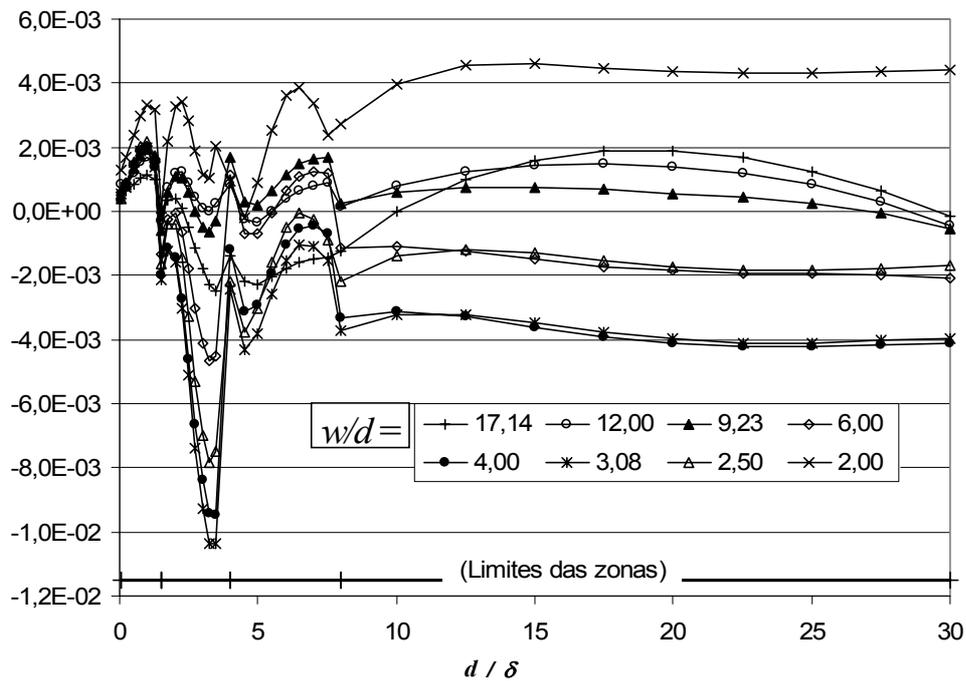


Fig. 6.11. Diferença entre  $P_j/P_{BI}$  derivado da análise por FE e obtido pelo modelo analítico.

O modelo analítico proposto apresenta também uma concordância bastante boa com os casos em [Gyselinck1999], tal como pode ser visto pela diferença mostrada na coluna V da Tabela 6.3 (os valores em *itálico* estão fora da gama do modelo).

Tabela 6.3. Comparação entre os nossos resultados numéricos (I), os de outros autores (II) e os do modelo analítico proposto (IV).

$w/d$	$d/\delta$	Zona	I: $P_j/P_{BI}$	II: $P_j/P_{BI}$ em [Gyselinc1999]	III: Dif.= (II-I)/II	IV: $P_j/P_{BI}$ mod. analít.	V: Dif.= (II-Analít.)/II	VI: Dif.= (I-Analít.)/I
1	1,12	A	42,144%	42,200%	0,132%	36,661%	13,126%	13,011%
1	2,24	B	42,629%	42,700%	0,166%	35,591%	16,650%	16,511%
1	5,00	C	47,278%	47,500%	0,467%	40,034%	15,718%	15,322%
3	1,12	A	78,736%	78,800%	0,082%	78,555%	0,311%	0,229%
3	2,24	B	77,058%	77,200%	0,183%	77,344%	-0,187%	-0,371%
3	5,00	C	73,641%	73,900%	0,350%	73,813%	0,118%	-0,233%
5	1,12	A	87,142%	87,200%	0,067%	86,955%	0,280%	0,214%
5	2,24	B	85,705%	85,800%	0,111%	85,863%	-0,073%	-0,184%
5	5,00	C	82,487%	82,700%	0,258%	82,568%	0,160%	-0,098%
10	1,12	A	93,486%	93,600%	0,122%	93,304%	0,317%	0,195%
10	2,24	B	92,615%	92,700%	0,092%	92,495%	0,221%	0,129%
10	5,00	C	90,409%	90,600%	0,211%	90,361%	0,264%	0,053%
15	1,12	A	95,457%	95,700%	0,254%	95,465%	0,245%	-0,008%
15	2,24	B	94,867%	95,100%	0,245%	94,915%	0,195%	-0,051%
15	5,00	C	93,273%	93,600%	0,350%	93,409%	0,204%	-0,146%
20	1,12	A	96,522%	96,800%	0,287%	96,580%	0,227%	-0,060%
20	2,24	B	96,072%	96,300%	0,237%	96,276%	0,025%	-0,212%
20	5,00	C	94,810%	95,100%	0,305%	95,078%	0,023%	-0,283%

#### 6.4.4 Conclusões

Foram desenvolvidos um novo gráfico genérico e um modelo analítico derivado de soluções numéricas por elementos finitos. O gráfico e/ou o modelo permitem um cálculo fácil das perdas por correntes induzidas relativamente a valores analíticos de referência a 1D, dados por  $P_{BI}$ , equação (3.37), página 56, para qualquer chapa de material ferromagnético macio isotrópico e não histerético, na zona de funcionamento linear. Tanto o gráfico como o modelo são válidos para qualquer  $w$ ,  $d$ , e  $f$ , na gama considerada de  $w/d$  de 2 a 17,14 e  $d/\delta$  de 0,05 a 30.

Estes resultados foram apresentados parcialmente no 20<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC 2002 [Pereirinha2002] (versão resumida) e no International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF2003 [Pereirinha2003c], tendo este último sido seleccionado para publicação numa próxima edição da revista COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering.

## 7 TENTATIVA DE EXTENSÃO DO GRÁFICO E MODELO PARA ZONA NÃO LINEAR

Por forma a tentar expandir para regime não linear os resultados obtidos anteriormente, sem ter que utilizar uma metodologia no domínio do tempo (i.e., utilizando um método passo a passo no tempo, o “*time-stepping*”), neste capítulo:

- Foram testadas diversas formulações para a utilização de curvas  $B-H$  efectivas. Consistem na resolução do problema no domínio da frequência através da introdução de um “material efectivo” (i.e., com uma “relutividade efectiva” ou uma “permeabilidade efectiva” equivalente), em que a curva  $B-H$  original é substituída por uma curva  $B-H$  efectiva equivalente.
- É feita referência à utilização do Método do Balanço Harmónico (“*Harmonic Balance Method*”). Corresponde a uma homogeneização no tempo.

Como se verá, a utilização de curvas  $B-H$  efectivas apenas apresenta bons resultados quando o efeito pelicular não é significativo. O Método do Balanço Harmónico apresenta melhores resultados. Este trabalho foi realizado em estreita colaboração com o Dr. Johan Gyselinck. Com efeito, foi-lhe proposta a comparação dos nossos resultados com resultados por ele obtidos utilizando os *softwares Gmsh* e *GetDP* [Gmsh2004] [GetDP2003], da Universidade de Liège, Bélgica.

Da utilização do Método do Balanço Harmónico, resultou uma comunicação apresentada pelo autor no 8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, que decorreu em Vilamoura, Portugal, de 3 a 5 de Julho de 2003, intitulada “*Harmonic balance finite element modelling of eddy currents in steel laminations*” [Gyselinck2003a].

### 7.1 Introdução (objectivos, problema e explicação da ideia)

Nos capítulos anteriores foram obtidos um gráfico e um modelo analítico que permitem um cálculo fácil das perdas por correntes induzidas, para qualquer chapa de material

ferromagnético macio isotrópico e não histerético, na zona de funcionamento linear, considerando o efeito da largura da chapa. O passo seguinte e natural, será a extensão do trabalho efectuado também ao regime não linear, ou seja, averiguar se é possível de alguma forma manter o gráfico e o modelo analítico, no caso em que existe saturação magnética.

Em meios lineares, os potenciais podem ser descritos pelos seus valores máximos, desde que a excitação seja harmónica no tempo e em regime estacionário [Paoli1998], tal como foi feito nos capítulos anteriores.

No caso dos meios não lineares, a situação é bastante mais complicada, pois a densidade de fluxo  $B$  num material ferromagnético em que se atinge a zona de saturação, varia de forma não sinusoidal, mesmo em regime permanente e que a intensidade do campo magnético  $H$  seja sinusoidal. O mesmo se passa no caso contrário: para obter um  $B$  sinusoidal, é necessário um  $H$  não sinusoidal.

Para melhor ilustrar o problema vão ser apresentadas de seguida algumas figuras, correspondentes a uma curva de magnetização definida segundo a expressão genérica [Brauer1975]

$$v = k_1 e^{k_2 B^2} + k_3 \quad (7.1)$$

em que  $e$  é o número de Neper (constante igual a 2,71828182845904 e base do logaritmo natural), e  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , são constantes determinadas pelo ajustamento da expressão (7.1) a três pontos da curva obtida experimentalmente. Para o material definido no “*TEAM Workshop 13*” [TEAM13], os valores de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  calculados por Gyselinck [Gyselinck2000] pp.3.3 são os apresentados na expressão seguinte:

$$v = 0,3774 e^{(2,97 B^2)} + 388 \quad (7.2)$$

Ao material definido pela equação (7.2) chamámos “TTJG13” (curva “Teste Tese de Johan Gyselinck (problema Team nº 13”).

Na Fig. 7.1 pode ver-se a curva de magnetização para este material no início da saturação, para valores de  $H$  baixos, e para saturação muito acentuada, para valores de  $H$  muito elevados.

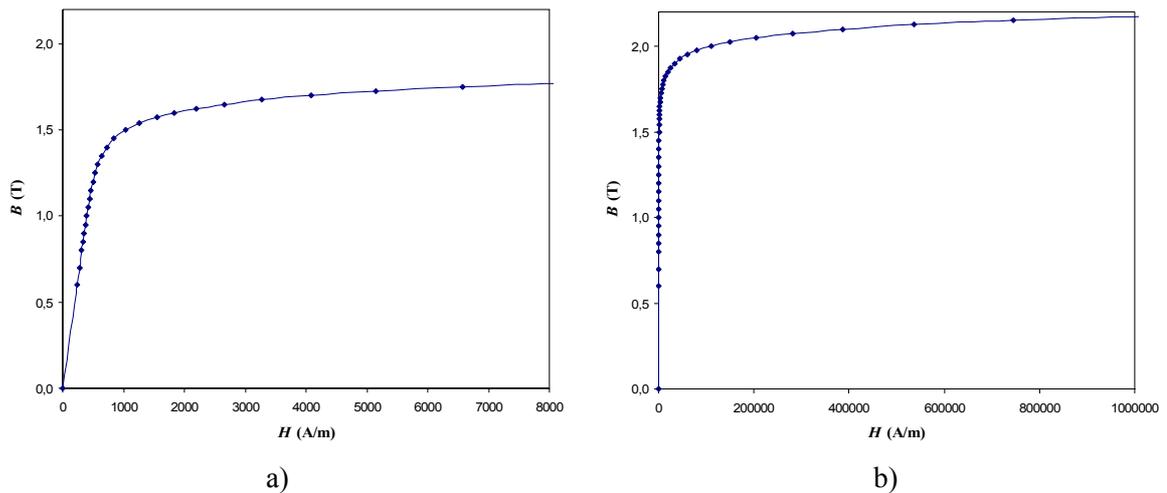
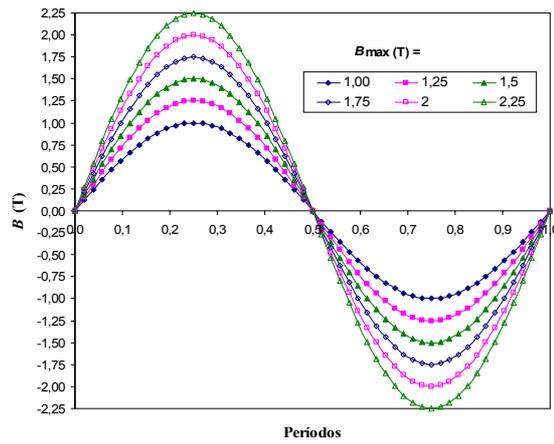
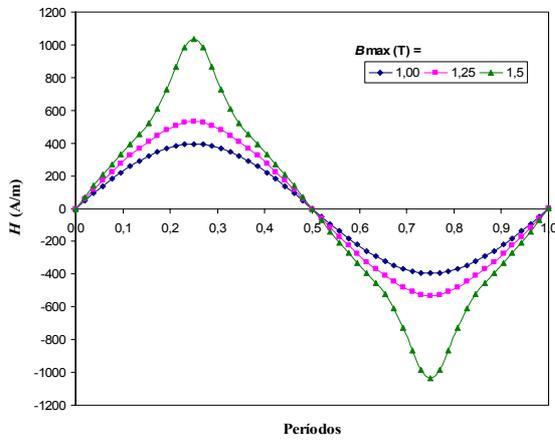


Fig. 7.1. Curva de magnetização para o material TTJG13: a) início da saturação; b) saturação muito acentuada.

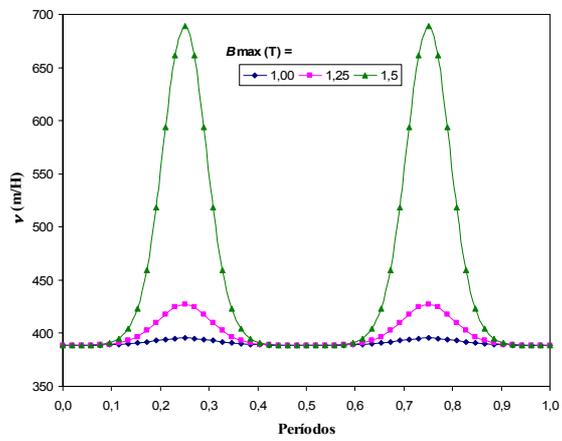
Para  $B$  sinusoidal, tal como representado na Fig. 7.2a para diversos valores de  $B_{\max}$  variando entre 1 T (início da saturação) e 2,25 T (saturação muito acentuada), representam-se na Fig. 7.2b-i as correspondentes curvas de  $H(t)$  e  $\nu(t)$  para um período  $T$  (por forma a serem independentes da frequência,  $t$  foi substituído por “Períodos”, i.e. no eixo das abcissas aparece a fracção do período). Tal como se pode observar na Fig. 7.2b, à medida que  $B_{\max}$  aumenta,  $H$  na Fig. 7.2c vai-se deformando, passando de uma curva sinusoidal ( $B_{\max} = 1$  T), para uma curva com o típico formato de “campânula de sino” bem conhecido do estudo da “corrente em vazio do transformador sem perdas” [Ras1977] pp.22-24. Obviamente, este efeito vai-se acentuando à medida que  $B_{\max}$  aumenta, tal como se pode ver nas curvas para  $H$  correspondentes a  $B_{\max} = 1,75$  T, 2 T e 2,25 T na Fig. 7.2 “d”, “f” e “h”, respectivamente. Quanto à relutividade, para  $B_{\max} = 1$  T, na (quase) ausência de saturação, o valor de  $\nu$  permanece (praticamente) constante e igual a 388 m/H, tal como pode ser visto na Fig. 7.2c. Contudo, à medida que  $B_{\max}$  vai aumentando, o valor instantâneo da relutividade varia entre o valor da zona linear, e um valor cada vez maior quando se entra na saturação, tal como se pode ver na Fig. 7.2 “c”, “e”, “g” e “i”. Note-se que para  $B_{\max} = 2,25$  T, o nível de saturação é já de tal forma elevado que os valores de  $H_{\max}$  e  $\nu$  são já, se não praticamente inatingíveis, pelo menos altamente indesejáveis.



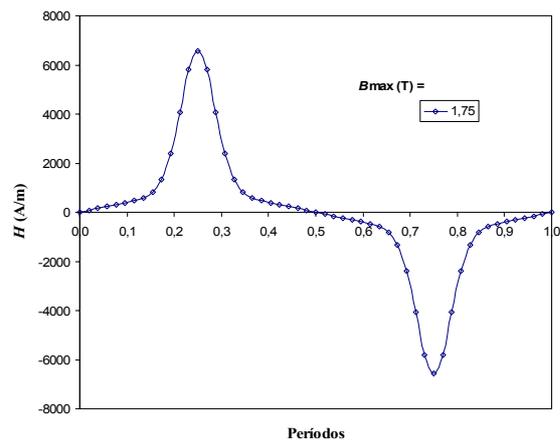
a)  $B$ (Períodos), para  $B_{\max} = 1$  T, 1,25 T, 1,5 T, 1,75 T, 2 T e 2,25 T.



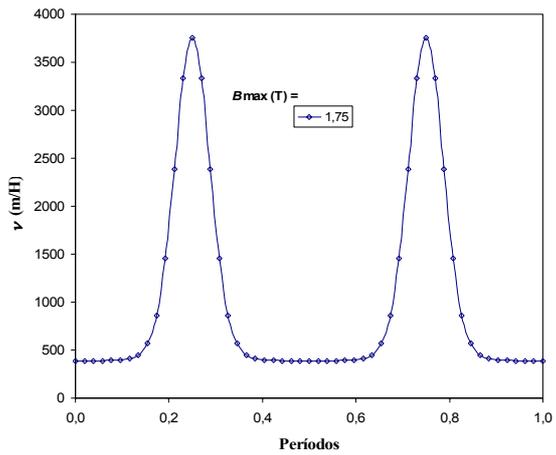
b)  $H$ (Períodos),  $B_{\max} = 1$  T, 1,25 T e 1,5 T.



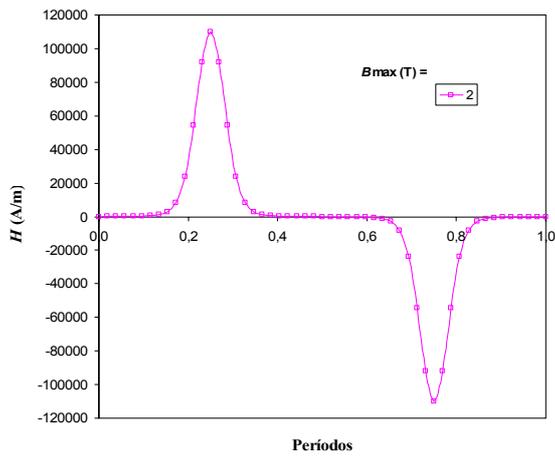
c)  $v$ (Períodos),  $B_{\max} = 1$  T, 1,25 T e 1,5 T.



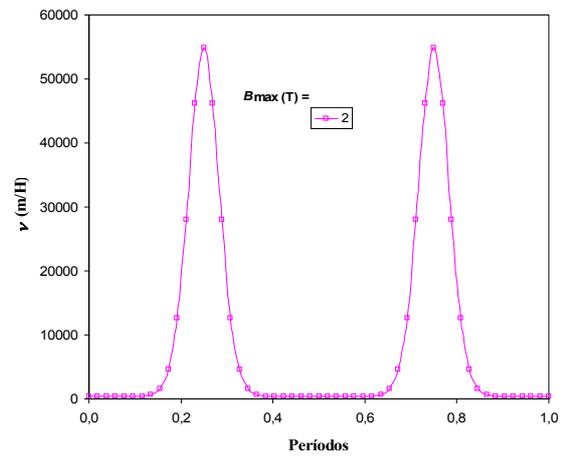
d)  $H$ (Períodos),  $B_{\max} = 1,75$  T.



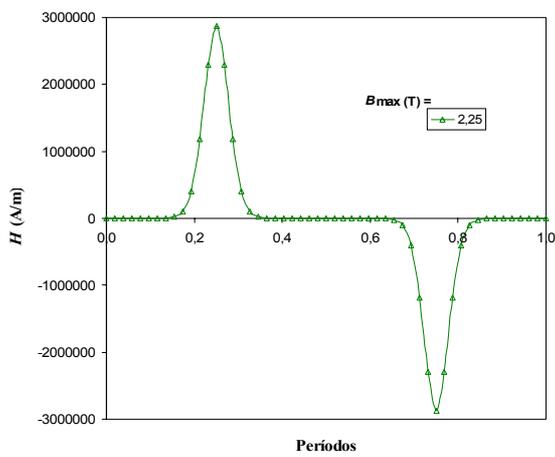
e)  $v$ (Períodos),  $B_{\max} = 1,75$  T.



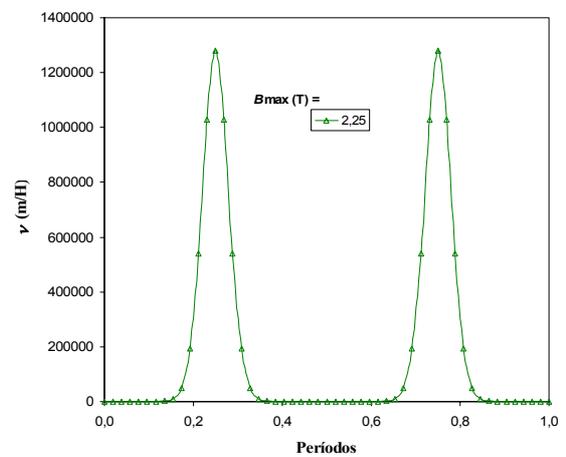
f)  $H(\text{Períodos}), B_{\max} = 2 \text{ T}$ .



g)  $v(\text{Períodos}), B_{\max} = 2 \text{ T}$ .



h)  $H(\text{Períodos}), B_{\max} = 2,25 \text{ T}$ .



i)  $v(\text{Períodos}), B_{\max} = 2,25 \text{ T}$ .

Fig. 7.2. Variação de  $B$ ,  $H$  e  $v$ , para  $B$  sinusoidal e um período, como função do  $B_{\max}$ .

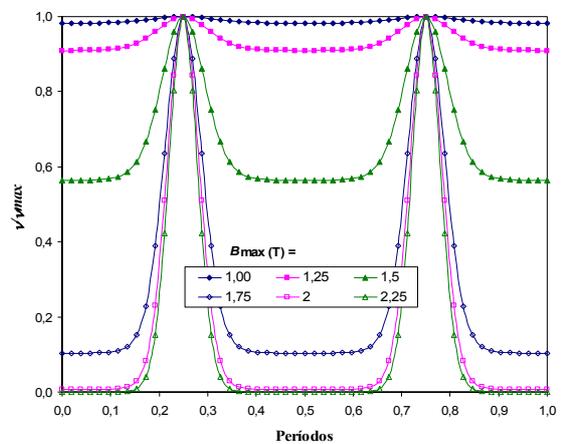
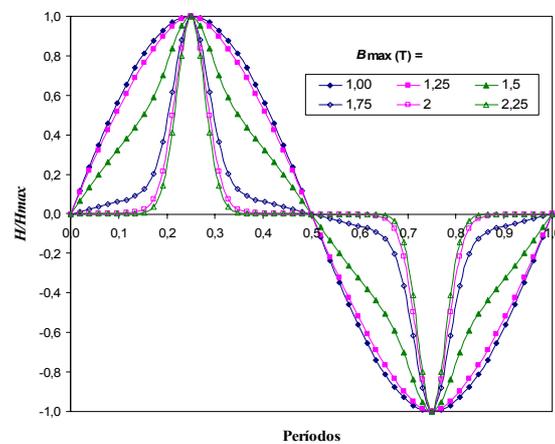


Fig. 7.3. Gráficos normalizados:  $H/H_{\max}$  e  $v/v_{\max}$  para  $B_{\max}$  de 1 T a 2,25 T.

Como as amplitudes das grandezas representadas na Fig. 7.2 variam bastante, especialmente  $H$  e  $\nu$ , estas grandezas são representadas normalizadas na Fig. 7.3, i.e. agora em função dos respectivos valores máximos considerados (cada curva corresponde a um  $B_{\max}$ ). Tendo-se imposto que  $B$  é sinusoidal, nesta figura ressaltam a deformação que  $H$  vai sofrendo e as variações de  $\nu$  à medida que a saturação vai aumentando.

É portanto evidente que o valor da relutividade magnética  $\nu$  não permanece constante, variando no tempo e em função da saturação atingida em cada ponto da chapa, i.e. em cada elemento finito.

Atendendo ao exposto anteriormente será, em princípio, obrigatória a análise do campo magnético no domínio do tempo, utilizando um **método passo a passo no tempo**, o “*time-stepping*”. No entanto, este método de resolução é computacionalmente muito pesado, pois é necessário resolver todo o problema de elementos finitos para pequenos intervalos de tempo (no mínimo umas dezenas ou centenas de vezes por período), e se estivermos interessados apenas na solução em regime permanente, é necessário resolver o problema para alguns ciclos completos, até terminar o regime transitório. Para além do problema da capacidade de memória e do uso intensivo do processador, isto coloca também o problema de um volume enorme de dados a armazenar no disco rígido do computador. No caso de excitação harmónica em regime permanente, para evitar a resolução do problema de correntes induzidas no domínio do tempo, outras alternativas têm sido tentadas, nomeadamente:

- A utilização de uma curva  $B-H$  efectiva: resolução do problema no domínio da frequência através da introdução de um “material efectivo”, i.e. com uma “relutividade efectiva” ou uma “permeabilidade efectiva” equivalente, em que a curva  $B-H$  original é substituída por uma curva  $B-H$  efectiva equivalente;
- A utilização do Método do Balanço Harmónico (“*Harmonic Balance Method*”): basicamente consiste em aproximar a solução periódica no tempo, por séries de Fourier truncadas [Gyselinck2003a]. Isto conduz a um sistema de equações algébricas não lineares, que podem ser resolvidas eficientemente pelo método de Newton-Raphson. Outras referências importantes sobre este assunto são [Lu1990], [Yamada1988], [Gyselinck2002a], [Gyselinck2002b], [Gyselinck2002c] e [Gyselinck2003b].

Começou-se por tentar aplicar o primeiro método, a substituição da curva  $B-H$  original por uma curva  $B-H$  efectiva, tal como exposto seguidamente. No entanto, como veremos as conclusões não são muito interessantes pelo que foi também tentado o segundo método, Método do Balanço Harmónico, com melhores resultados. Apesar disso, tal como se verá em 8 - *INÍCIO DA APLICAÇÃO A TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO*, na página 195, por sugestão do Prof. Dr. Gyselinck, deixar-se-á por agora um pouco de lado este objectivo, tendo-se iniciado o estudo com vista à aplicação a técnicas de homogeneização.

## 7.2 Curvas $B-H$ efectivas e procedimento para a sua obtenção

Tal como referido anteriormente, para tentar evitar a utilização da resolução do problema de correntes induzidas no domínio do tempo, poderá considerar-se a relutividade do material ferromagnético independente do tempo, através da utilização de uma curva  $B-H$  efectiva. Ou seja, a  $v = f(B_{\max}, t) = f(B_{\max}, \text{Períodos})$ , que para o caso em estudo foi apresentada na Fig. 7.2, será substituída por valores de relutividade equivalentes, constantes no período, e dependentes apenas de  $B_{\max}$ . Obviamente que, do ponto de vista da física do fenómeno, se cometem algumas incorrecções e simplificações, mas, se funcionar, conseguir-se-ão poupanças enormes. Teremos assim que encontrar uma maneira de obter curvas “ **$B-H$  efectivas**” ou de “**relutividade efectiva**” (ou “relutividade efectiva equivalente”) que, para cada material específico, permita com uma análise harmónica chegar aos mesmos resultados que com uma análise no domínio do tempo (passo a passo, “*time-stepping*”).

### 7.2.1 Formulações para curvas $B-H$ efectivas

Na literatura [Jack1990] [Luomi1986] [Du Terrail1984] [Lederer1998] [Vassent1989] [Salon1995]pp.62 encontram-se diversas variantes para esta abordagem. Em primeiro lugar há a questão de qual a grandeza que se considera sinusoidal<sup>64</sup>:  $B$  ou  $H$ ? Depois, para cada uma dessas hipóteses, há diversos critérios para definir a equivalência entre as curvas originais (válidas no tempo) e as efectivas (que deverão produzir os mesmos efeitos, i.e. serem equivalentes). Assim, entre outras, pode-se definir a **relutividade efectiva** como: a razão entre os valores eficazes (“*r.m.s*”) de  $H$  e de  $B$ ; a razão entre as componentes fundamentais de  $H$  e de  $B$ ; o valor médio da relutividade no tempo; o valor eficaz da relutividade; e a

---

<sup>64</sup> Note-se que na realidade, de uma forma geral, nem uma nem outra permanecem absolutamente sinusoidais, sendo ambas não sinusoidais no tempo. Para além disso, muitas vezes o fluxo é rotacional o que coloca questões adicionais que não vão ser consideradas agora [Luomi1986] [Jack1990].

equivalência da energia armazenada no campo magnético. De seguida apresentam-se as formulações testadas.

**Considerando  $B$  sinusoidal**<sup>65</sup>, teremos

$$B(t)=B_{\max} \text{ sen } \omega t \quad (7.3)$$

e, tal como se viu na Fig. 7.2,  $H(t)$  e  $\nu(t)$  serão funções não sinusoidais, cujos valores instantâneos dependem da curva de magnetização em corrente contínua. O valor efectivo da relutividade terá que ser calculado ao longo do período  $T$  de um ciclo completo. Assim, podem considerar-se as seguintes definições de relutividade efectiva:

- O quociente entre os valores eficazes (r.m.s.) da intensidade do campo magnético  $H$  e da indução magnética  $B$

$$\nu_{B1} = \frac{\sqrt{2}}{B_{\max}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [H(t)]^2 dt} \quad (7.4)$$

- O quociente entre as componentes fundamentais da intensidade do campo magnético  $H$  e da indução magnética  $B$

$$\nu_{B2} = \frac{1}{B_{\max}} \frac{2}{T} \int_0^T H(t) \text{sen } \omega t dt \quad (7.5)$$

- O valor médio da relutividade no tempo

$$\nu_{B3} = \frac{1}{T} \int_0^T \nu(t) dt \quad (7.6)$$

- O valor eficaz da relutividade (r.m.s.)

$$\nu_{B4} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\nu(t)]^2 dt} \quad (7.7)$$

---

<sup>65</sup> Utilizou-se  $B(t)=B_{\max} \text{ sen } \omega t$ , contrariamente a Luomi e Du Terrail [Luomi1986] [Du Terrail1984] que utilizaram  $B(t)=B_{\max} \text{ cos } \omega t$ , pelo que a equação (7.5) vem em termos de seno e não de co-seno; também (7.10) vem em função de seno, pois em vez de  $H(t)=H_{\max} \text{ cos } \omega t$  utilizou-se  $H(t)=H_{\max} \text{ sen } \omega t$ .

**Considerando  $H$  sinusoidal**, ter-se-á

$$H(t) = H_{\max} \sin \omega t \quad (7.8)$$

pelo que  $B(t)$  e  $\nu(t)$  serão funções periódicas não sinusoidais, cujos valores instantâneos dependem da curva de magnetização em corrente contínua. Agora podem considerar-se as seguintes definições de relutividade efectiva, calculadas ao longo do período  $T$  de um ciclo completo:

- O quociente entre os valores eficazes (r.m.s.) da intensidade do campo magnético  $H$  e da indução magnética  $B$

$$\nu_{H1} = \frac{\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [B(t)]^2 dt}} \quad (7.9)$$

- O quociente entre as componentes fundamentais da intensidade do campo magnético  $H$  e da indução magnética  $B$

$$\nu_{H2} = \frac{H_{\max}}{\frac{2}{T} \int_0^T B(t) \sin \omega t dt} \quad (7.10)$$

- O valor médio da relutividade no tempo

$$\nu_{H3} = \frac{1}{T} \int_0^T \nu(t) dt \quad (7.11)$$

- O valor eficaz da relutividade (r.m.s.)

$$\nu_{H4} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\nu(t)]^2 dt} \quad (7.12)$$

Ainda para  $H(t)$  sinusoidal podem encontrar-se outras definições de curvas equivalentes, agora a partir da permeabilidade magnética. Assim por exemplo, Salon [Salon1995] pp.63, sugere a utilização de uma “**permeabilidade efectiva**” definida como “a permeabilidade que

durante um ciclo dá a mesma energia armazenada no campo magnético que  $\int H \cdot B dt$ ”, ou seja

$$\mu_{H1} = \frac{\int_0^T H \cdot B dt}{\int_0^T H^2 dt} \quad (7.13)$$

Pelas razões que serão oportunamente expostas (na página 183), foram ainda consideradas,

- O valor médio da permeabilidade no tempo

$$\mu_{H2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu(t) dt \quad (7.14)$$

- O valor eficaz da permeabilidade (r.m.s.)

$$\mu_{H3} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\mu(t)]^2 dt} \quad (7.15)$$

Para a aplicação do método das curvas  $B-H$  efectivas, a metodologia será a seguinte:

- calcular a curva  $B-H$  efectiva equivalente;
- usar essa curva  $B-H$  efectiva no processador magnetodinâmico não linear, **EDDyNLIN**, para resolver o problemas de correntes induzidas para 1D e 2D, para o  $B_{\max}^a$  pretendido;
- calcular  $P_J$  para  $B_{\max}^a$  ;
- comparar os resultados com os da resolução no domínio do tempo, obtidos pelo Dr. Johan Gyselinck;
- caso haja boa concordância, tentar extrapolar o gráfico genérico obtido anteriormente, para regime não linear.

Para o cálculo da curva  $B-H$  efectiva, foi primeiro escolhida a equação (7.6), que considera o valor médio da relutividade no tempo, por ser referida como a melhor por Luomi

[Luomi1986], e também por considerar  $B$  sinusoidal, tal como os resultados a obter por Gyselinck com que compararemos os nossos.

## 7.2.2 Metodologia e exemplo de construção da curva $B-H$ efectiva com relutividade média no tempo

Para calcular a relutividade efectiva (ou equivalente) segundo a equação (7.6), ou seja, usando um valor médio da relutividade no tempo, para qualquer curva de magnetização lida do ficheiro “**MAGNETIZ.BH**”<sup>66</sup>, foi desenvolvido um programa em Fortran, designado por “**CalculaBHequiv**” que implementa a metodologia que se explica de seguida.

Porque as curvas  $B-H$  e a relutividade são simétricas, tal como se pode ver na Fig. 7.2, basta considerar um quarto de período. Para além disso, como a relutividade equivalente  $\nu_{B3}$  é calculada a partir de uma grandeza sinusoidal, o integral será resolvido em termos de  $\omega t$  em vez de  $t$ . Assim, a equação (7.6) pode ser apresentada como

$$\nu_{B3} = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \nu(\omega t) d\omega t \quad (7.16)$$

Começou-se por desenvolver uma rotina que implementa o cálculo do valor médio<sup>67</sup> de uma grandeza segundo

$$\text{valor médio grandeza } T/4 = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \text{grandeza}(t) dt = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{grandeza}(\omega t) d\omega t \quad (7.17)$$

em que *grandeza* representará o que estiver dentro do integral.

Para se fazer a integração numérica de (7.16) foi considerada a hipótese de utilizar a regra de Simpson, mais precisa, pois considera interpolação parabólica entre três pontos da curva da *grandeza* a considerar. No entanto, acabou por se implementar uma integração usando uma simples regra trapezoidal (com interpolação linear entre dois pontos) pois a perda de precisão não seria significativa: como os processadores não lineares do **CADdyMAG** (cf. Fig. 7.15) fazem interpolação linear dos valores das curvas de magnetização, isto obriga a que

<sup>66</sup> Este é o ficheiro para problemas magnéticos não lineares, contendo as curvas  $B-H$  dos materiais pretendidos. O início do **MAGNETIZ.BH** é apresentado na Fig. 7.4. Trata-se de um ficheiro em formato ASCII (ou .txt) onde o utilizador pode introduzir todos os materiais necessários.

<sup>67</sup> Aliás, para todas as relutividades e permeabilidades equivalentes das equações (7.4) até à (7.15), será sempre necessário fazer o cálculo do valor médio de uma determinada *grandeza*, à excepção de (7.13), onde não sendo preciso calcular o valor médio, isso pode ser feito, pois dividindo ambos os integrais pela mesma quantidade,  $T/4$ , o quociente será o mesmo.

as curvas lidas de **MAGNETIZ.BH** tenham que ser guardadas com um nível adequado de detalhe, nomeadamente na zona do joelho da curva  $B-H$  (embora normalmente não sejam necessários tantos pontos como os utilizados para o material TTJG13 na Fig. 7.1).

Seja  $N_{\text{int}}$  um determinado número de intervalos de integração iguais. Assim, cada intervalo de integração terá amplitude  $\Delta\omega t = \frac{\pi/2}{N_{\text{int}}}$  (cf. Fig. 7.6). A este  $N_{\text{int}}$  correspondem

$P_{\text{int}}=N_{\text{int}}+1$  pontos, em que cada ponto é um par  $(\omega t, \text{grandeza}(\omega t))$  para a *grandeza* a integrar. Durante a integração numérica, o número do ponto a considerar é dado por  $i$ , o qual varia entre 0 e  $N_{\text{int}}$ . Então, utilizando a regra trapezoidal, o cálculo numérico do integral da equação (7.17), virá

$$\text{valor médio grandeza } T/4 \approx \frac{1}{\pi/2} \sum_{i=0}^{N_{\text{int}}} \frac{\text{grandeza}_{i+1}(\omega t) - \text{grandeza}_i(\omega t)}{2} \frac{\pi/2}{N_{\text{int}}} \quad (7.18)$$

pelo que pode ser feito através de

$$\text{valor médio grandeza } T/4 \approx \frac{1}{N_{\text{int}}} \sum_{i=0}^{N_{\text{int}}} \frac{\text{grandeza}_{i+1}(\omega t) - \text{grandeza}_i(\omega t)}{2} \quad (7.19)$$

em que  $\text{grandeza}_i(\omega t)$  representa o valor da grandeza para o ponto  $i$  e  $\text{grandeza}_{i+1}(\omega t)$  representa o valor da grandeza no ponto seguinte,  $i+1$ . Como se pode ver, o termo dentro do somatório representa portanto o valor médio da *grandeza* para um determinado intervalo de integração,  $I_{\text{int}}$ , delimitado pelos pontos  $i$  e  $i+1$ .

Porque a construção das curvas  $B-H$  equivalentes não é tão imediata como se poderia supor, apresenta-se de seguida um exemplo com uma curva muito simples que mostra a construção da curva  $B-H$  efectiva segundo (7.6), ou mais exactamente, usando (7.16). Assim, para o caso concreto do cálculo do valor médio da relutividade, a equação (7.19), virá agora:

$$v_{B3} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \approx \frac{1}{N_{\text{int}}} \sum_{i=0}^{N_{\text{int}}} \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \quad (7.20)$$

Note-se ainda que este valor médio da relutividade no tempo, será função do  $B_{\text{max}}$  atingido no período, tal como se pode ver na Fig. 7.2bc (embora para outro material).

Considere-se então um material genérico designado por “ferro”, pré-existente no ficheiro **MAGNETIZ.BH**, tal como se mostra na Fig. 7.4 (informação relativa ao material “ferro”, a **negrito**).

```
Ficheiro de curvas de magnetizacao para varios materiais

*****

* Nome do material:
*      ar

* Numero de valores:
1

* n          B          H
  1          1.0        7.95775E5

*****

* Nome do material:
*      cobre

* Numero de valores:
1

* n          B          H
  1          1.0        795775.0

*****

* Nome do material:
*      ferro

* Numero de valores:
4

* n          B          H
1          0.0        0.0
2          0.5        200.0
3          1.0        500.0
4          1.2        1000.0

*****

* Nome do material:
*      ferroide
(...)
```

Fig. 7.4. Início do ficheiro **MAGNETIZ.BH**, contendo, entre outros, uma curva  $B-H$  grosseira para um material ferro (genérico).

A curva  $B-H$  para este material é dada por quatro pontos, i.e., quatro pares de valores de  $B-H$ , dos quais os dois primeiros correspondem à zona linear, tal como se pode ver também na Fig. 7.5.

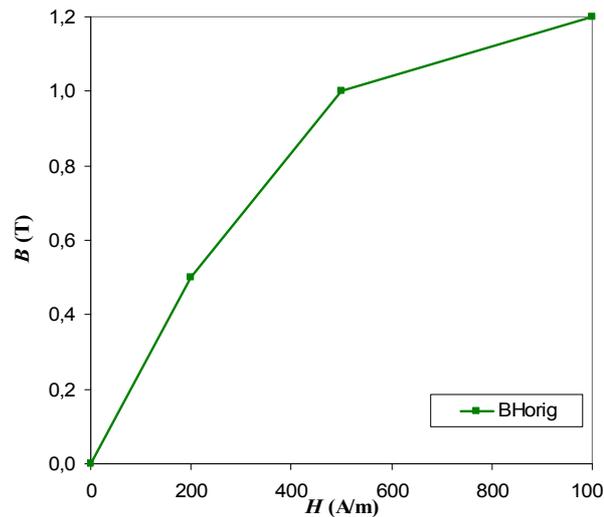


Fig. 7.5. Curva  $B$ - $H$  original para o ferro considerado.

Uma vez que se considera  $B$  sinusoidal, i.e.,  $B(t)=B_{\max} \sin \omega t$ , a cada ponto da curva de magnetização corresponde um valor de  $B_{\max}$ . Assim, vai-se calcular o valor médio da relutividade no tempo,  $\nu_{B3}$ , para cada um dos diversos valores de  $B_{\max} = 0, 0,5, 1$  e  $1,2$  T, usando (7.20). A partir destes valores médios da relutividade, calcular-se-á o correspondente  $H$  eficaz equivalente, determinando-se então a nova curva  **$B$ - $H$  eficaz** ou **equivalente**, curva  $B$ - $H_{eq}$ . Note-se, no entanto, que na realidade o cálculo não é feito para os dois primeiros pontos da curva  $B$ - $H$ : como os dois primeiros pontos da curva correspondem sempre a uma zona linear<sup>68</sup>, os valores de  $H_{eq}$  para estes pontos serão iguais aos valores de  $H$  original, i.e.  $H_{eq}(B_{\max}=0)=H(B_{\max}=0)=0$  A/m e  $H_{eq}(B_{\max}=0,5)=H(B_{\max}=0,5)=200$  A/m.

Mais detalhadamente, para se poder calcular a curva  $B$ - $H_{eq}$ , o procedimento será o seguinte:

1. Obter os dados da curva de magnetização original, por leitura do ficheiro **MAGNETIZ.BH** (para este exemplo concreto “ferro”);
2. Escolher o número de intervalos de integração,  $N_{int}$ , para o cálculo futuro da equação (7.20);
3. Calcular  $\Delta\omega t$ , a amplitude do intervalo de variação de  $\omega t$ , em rad, para cada intervalo de integração,  $I_{int}$ .  $\Delta\omega t$  é dado por

$$\Delta\omega t = \omega t_{\max} / N_{int} = (\pi/2) / N_{int} \quad (7.21)$$

<sup>68</sup> Mesmo que o primeiro ponto da curva  $B$ - $H$  não seja 0 T – 0 A/m, e a curva de magnetização não seja monótona, i.e. mesmo que se considere a curva de magnetização real para valores de indução muito baixos e o magnetismo remanescente (cf. Fig. 2.11 e Fig. 2.13, páginas 29 e 33).

4. Para cada ponto da curva de magnetização, excepto os dois primeiros, i.e., para cada  $B_{\max}$  (neste caso, apenas para  $B_{\max}=1$  T e  $B_{\max}=1,2$  T):
  - Para cada  $\omega t_i=i\Delta\omega t$  calcular o valor de  $B(\omega t_i)=B_{\max} \text{ sen } \omega t_i$
  - Para cada  $B(\omega t_i)$  calcular o valor de  $H(\omega t_i)$ , por interpolação linear da curva  $B-H$
  - Para cada  $\omega t_i$ , calcular a relutividade correspondente  $\nu(\omega t_i)=H(\omega t_i)/B(\omega t_i)$
  - Calcular o valor médio da relutividade para este  $B_{\max}$ , dado por (7.20)
  - Calcular o  $H_{eq}$  para esse  $B_{\max}$ , dado por

$$H_{eq}(B_{\max})= \nu_{B3}(B_{\max})/B_{\max} \quad (7.22)$$

(Passa ao ponto seguinte da curva de magnetização, i.e. ao  $B_{\max}$  seguinte: volta ao ponto 4, até ter calculado para o último  $B_{\max}$ )

5. Grava as curvas  $B-H$ , a original e a efectiva equivalente resultante,  $B-H_{eq}$ , num ficheiro auxiliar “\*.BHe”, em modo texto (i.e. ASCII), com um formato semelhante ao do ficheiro **MAGNETIZ.BH**. A curva resultante pode depois ser directamente importada para o **MAGNETIZ.BH**, por “*copy - past*” com qualquer programa editor de texto.

Vai-se então agora aplicar este procedimento ao cálculo de curvas  $B-H_{eq}$  para o ferro, com apenas 5 intervalos de integração. Assim,  $N_{\text{int}}=5$ , pelo que o número de pontos da discretização será  $P_{\text{int}}=N_{\text{int}}+1=6$ , com  $i$  variando entre 0 e 5. Para  $\omega t_{\max}=\pi/2=1,5708$  rad, a amplitude de cada intervalo de integração é  $\Delta\omega t=1,5708/5=0,3142$  rad.

Na Tabela 7.1 apresentam-se os resultados deste procedimento. Para melhor compreensão, apresentam-se também os dados e resultados (desnecessários) relativos aos dois primeiros pontos da curva  $B-H$ , ou seja para  $B_{\max}=0$  T e 0,5 T. Os resultados para cada  $B_{\max}$  encontram-se nas quatro últimas colunas, e concretamente para os que interessam,  $B_{\max}=1$  e 1,2 T, encontram-se nas duas últimas colunas, a negrito.

Tabela 7.1. Cálculo da curva  $B-H_{eq}$  utilizando a relatividade média no tempo, segundo equação (7.20).

$B_{\max}$ (T)=		0,0	0,5	1,0	1,2
$H_{\text{original}}$ (A/m)=		0	200	500	1000
Ponto $i$	$\omega t_i$ (rad)	$B(\omega t) = B_{\max} \text{ sen } \omega t$			
0	0,0000	0	0	0	0
1	0,3142	0	0,15451	0,30902	0,37082
2	0,6283	0	0,29389	0,58779	0,70534
3	0,9425	0	0,40451	0,80902	0,97082
4	1,2566	0	0,47553	0,95106	1,14127
5	1,5708	0	0,50000	1,00000	1,20000
Ponto $i$	$\omega t_i$ (rad)	$H(\omega t)$ – Por interpolação linear na curva $B-H$ original			
0	0,0000	0	0	0	0
1	0,3142	0	61,80340	123,60680	148,32816
2	0,6283	0	117,55705	252,67115	323,20538
3	0,9425	0	161,80340	385,41020	482,49224
4	1,2566	0	190,21130	470,63391	853,16955
5	1,5708	0	200,00000	500,00000	1000,00000
Ponto $i$	$\omega t_i$ (rad)	$v(\omega t) = H(\omega t) / B_{\max} \text{ sen } \omega t^*$			
0	0,0000	400	400	400	400
1	0,3142	400	400,00000	400,00000	400,00000
2	0,6283	400	400,00000	429,86984	458,22487
3	0,9425	400	400,00000	476,39320	496,99434
4	1,2566	400	400,00000	494,85378	747,56296
5	1,5708	400	400,00000	500,00000	833,33333
Número do $I_{\text{int}}$	$\omega t$ final do $I_{\text{int}}$ (rad)	Valor médio de $v(\omega t) = H(\omega t) / B_{\max} \text{ sen } \omega t$ , em cada intervalo de interpolação, $I_{\text{int}}$			
1	0,3142	400	400	400	400
2	0,6283	400	400,00000	414,93492	429,11243
3	0,9425	400	400,00000	453,13152	477,60960
4	1,2566	400	400,00000	485,62349	622,27865
5	1,5708	400	400,00000	497,42689	790,44815
$Somat\acute{o}rio =$		2000	2000,00000	2251,11682	2719,44883
$v_{eq} = v_{B3} = Somat\acute{o}rio / N_{\text{int}} =$		400	400,00000	450,22336	543,88977
$H_{eq} = v_{eq} * B_{\max}(I_{\text{int}}) =$		0	200,00000	450,22336	652,66772

\* Excepto (valores a itálico) para: o ponto  $i=0$ , em que a relatividade toma o valor da relatividade em  $i=1$ ; e para  $B_{\max}=0$  T, em que  $v(\omega t, B_{\max}=0) := v(\omega t, B_{\max}=0,5)$ .

Na Fig. 7.6 pode ver-se graficamente o valor de  $H(t)$ , ou melhor, de  $H(\omega t)$ , para os  $B_{\max}$  de 0,5, 1 e 1,2 T. É evidente da análise dos gráficos desta figura, aquilo que já tinha sido referido anteriormente, ou seja que para  $B_{\max}=0,5$  T está-se ainda na zona linear, enquanto que a partir de  $B_{\max} = 1$  T se começa a entrar na saturação, vendo-se que por isso  $H$  deixa de ser sinusoidal.

Na Fig. 7.7a apresentam-se os respectivos valores de  $v(\omega t, B_{\max})$ , juntamente com os valores resultantes para  $v_{B3}(B_{\max})$ , representados pelas linhas horizontais, mais finas. Na Fig. 7.7b apresentam-se novamente valores de  $H(\omega t, B_{\max})$ , agora também com os valores resultantes para  $H_{eq}(B_{\max})$ .

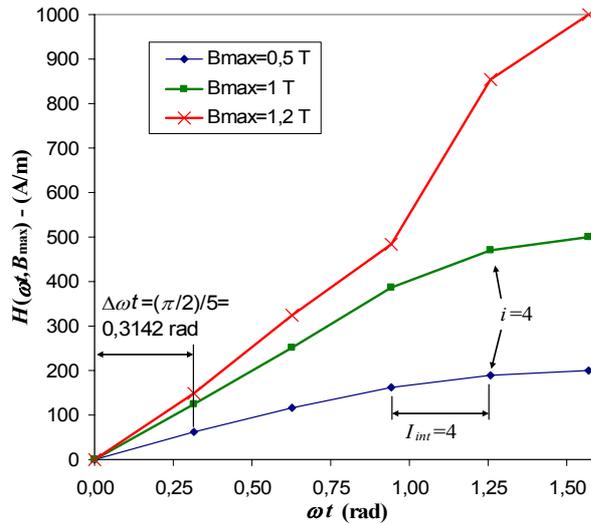


Fig. 7.6.  $H(\omega t, B_{max})$  para  $B$  sinusoidal, usando  $v_{B3}$ , com  $N_{int}=5$  e  $P_{int}=6$ .

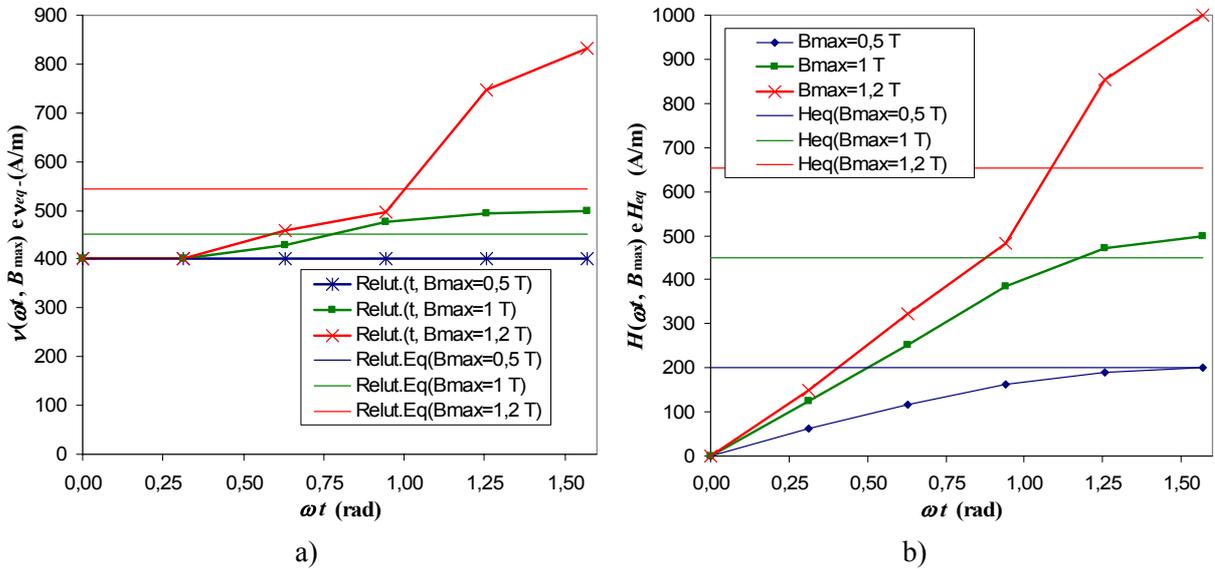


Fig. 7.7. Para  $B$  sinusoidal, usando  $v_{B3}$ , com  $N_{int}=5$ . a)  $v(\omega t, B_{max})$  e  $v_{eq}$  resultantes;  
 b)  $H(\omega t, B_{max})$  e  $H_{eq}$  resultantes.

Na Fig. 7.8 apresenta-se o ficheiro auxiliar “\*.BHe” resultante, com as curvas  $B-H$  original (Ferro=“TesteFerro”) e  $B-H$  efectiva equivalente resultante (“FerroEqRtav”). Finalmente, na Fig. 7.9 apresentam-se graficamente essas curvas.

```

Ficheiro criado pelo CalculaBHequiv V1.0, 22Out2002
*****
* Nome do material:
*   TesteFerro
*
* Numero de valores:
4
* n      B      H
.00000000E+00 .00000000E+00
.50000000E+00 .20000000E+03
.10000000E+01 .50000000E+03
.12000000E+01 .10000000E+04
*****
* Nome do material:
*   FerroEqRtav
*
* Numero de valores:
4
* n      B      H
.00000000E+00 .00000000E+00
.50000000E+00 .20000000E+03
.10000000E+01 .45022330E+03
.12000000E+01 .65266770E+03

```

Fig. 7.8. Pontos da curva  $B-H$  original para o ferro e curva  $B-H$  eficaz, para  $v_{B3}$ , com  $N_{int}=5$ .

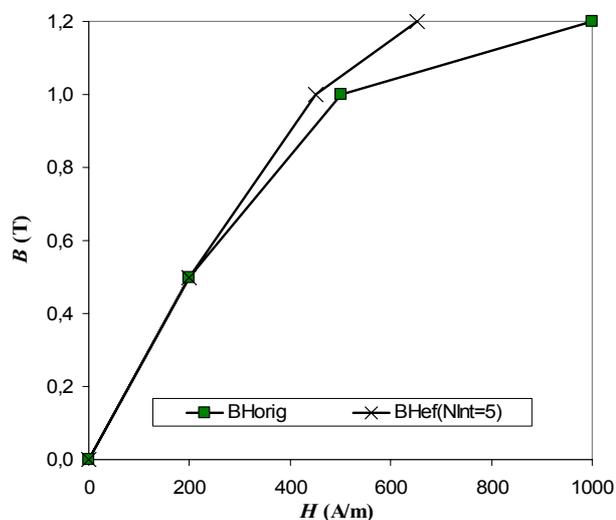


Fig. 7.9. Curva  $B-H$  original para o ferro e curva  $B-H$  eficaz, para  $v_{B3}$ , com  $N_{int}=5$ .

### 7.2.3 Número de intervalos a utilizar na rotina de integração numérica

Obviamente que o exemplo apresentado utiliza uma curva de magnetização demasiado grosseira (apenas dois pontos para a zona não linear) e que nem sequer permite grande saturação, contrariamente à utilizada no desenvolver do trabalho e apresentada na Fig. 7.1.

Por outro lado, o número de intervalos escolhidos para a integração numérica,  $N_{int}$ , é manifestamente insuficiente. Assim, por exemplo, para a curva da Fig. 7.1, o  $N_{int}$  terá que ser muitíssimo maior que cinco. Nesta fase foram feitos diversos testes para a curva da Fig. 7.5, com  $N_{int}$  variando entre 5 e 100000.

Na Fig. 7.10 apresentam-se os resultados obtidos para  $H_{eq}$  para  $B_{max}=1$  T e na Fig. 7.11 para  $B_{max}=1,2$  T, calculados por (7.22). Nestas figuras, as curvas com “SinglePrec”, foram obtidas com o programa trabalhando em precisão simples (i.e. um número real é definido por 4 bytes), as curvas com “DoublePrec”, foram obtidas com a rotina de integração numérica que resolve a equação (7.20) trabalhando em precisão dupla (i.e. um número real é definido por 8 bytes). As curvas com “DoublePrecDsin”, foram obtidas fazendo todos os cálculos do **CalculaBHequiv** em precisão dupla, nomeadamente o cálculo da função sinusoidal  $B(\omega t)$ . Pode observar-se das duas figuras, que para  $N_{int} \geq 100$  o valor de  $H_{eq}$  (resultante da integração numérica para o cálculo da relutividade média no tempo) atingiu um valor estável.

No entanto, mesmo 100 intervalos será, em princípio, um valor insuficiente para curvas  $B-H$  com muitos pontos e estendendo-se até saturação elevada. Por isso, se testou até 100000 intervalos. Pode ver-se que a partir de cerca de 10000 intervalos, a solução começa a divergir quando se utiliza precisão simples, mantendo-se no entanto estável até cerca de 100000 intervalos se se utilizar sempre precisão dupla. Assim, optou-se por esta última solução, a utilização de precisão dupla, sempre (excepto na curva inicial, lida e gravada do ficheiro **MAGNETIZ.BH**, e na curva final, gravada no ficheiro **\*.BHe**, ambas em precisão simples). Considerou-se também que 5000 intervalos de integração,  $N_{int}=5000$ , será suficiente, em termos de discretização da integração numérica, para qualquer curva; e como para a curva da Fig. 7.10 e Fig. 7.11, mesmo com precisão simples, se conseguiam valores estáveis, assumiu-se que é seguro considerar que também se obterão valores estáveis para qualquer outra curva de magnetização.

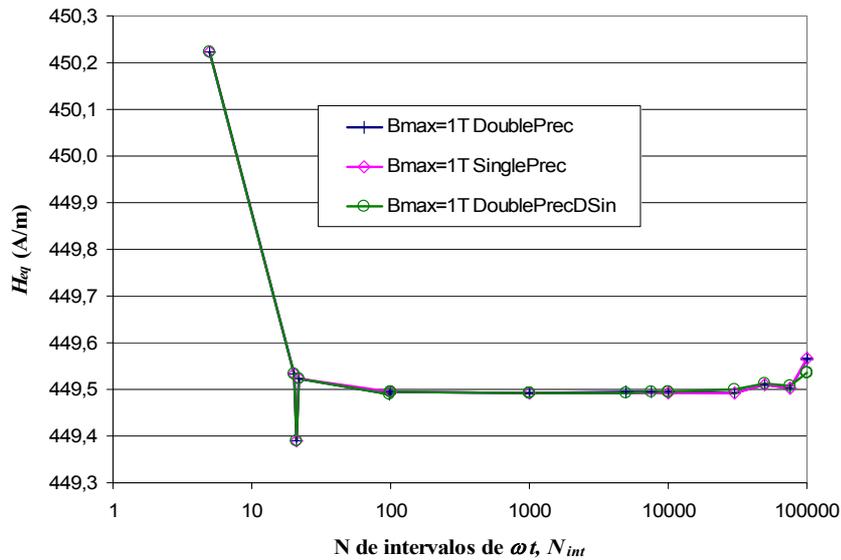


Fig. 7.10. Valores de  $H$  eficazes equivalentes para  $B_{\max}=1$  T, em função do número de intervalos de integração,  $N_{int}$ .

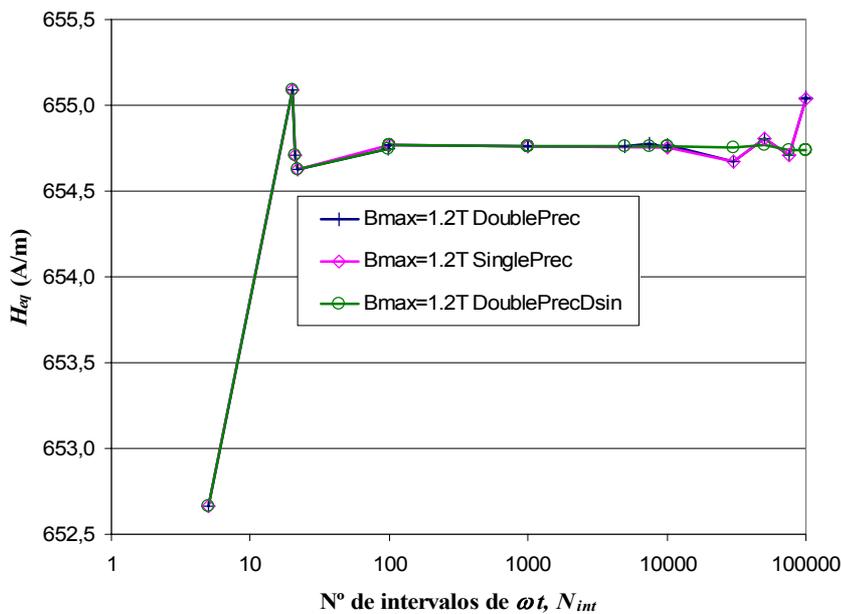


Fig. 7.11. Valores de  $H$  eficazes equivalentes para  $B_{\max}=1,2$  T, em função do número de intervalos de integração,  $N_{int}$ .

### 7.2.4 Curva $B-H$ efectiva com relatividade média no tempo, para a chapa TTJG13

Utilizando o procedimento para o cálculo do valor médio da relatividade no tempo,  $v_{B3}$ , exposto nas páginas anteriores, e implementado no programa **CalculaBHequiv**, foi calculada a curva  $B-H$  eficaz equivalente para a curva original, TTJG13 (Fig. 7.1, página 145).

Apresenta-se na Fig. 7.12 a zona inicial da curva original, “BHoriginal: TTJG13” e a curva  $B-H$  eficaz equivalente, “TTJG13EqRtav”, que resulta da consideração de  $B$  sinusoidal, do cálculo do valor médio da relutividade no tempo,  $\nu_{B3}$  usando (7.20), com  $N_{int}=5000$ , e por aplicação de (7.22).

Na Fig. 7.13 apresenta-se a totalidade das curvas.

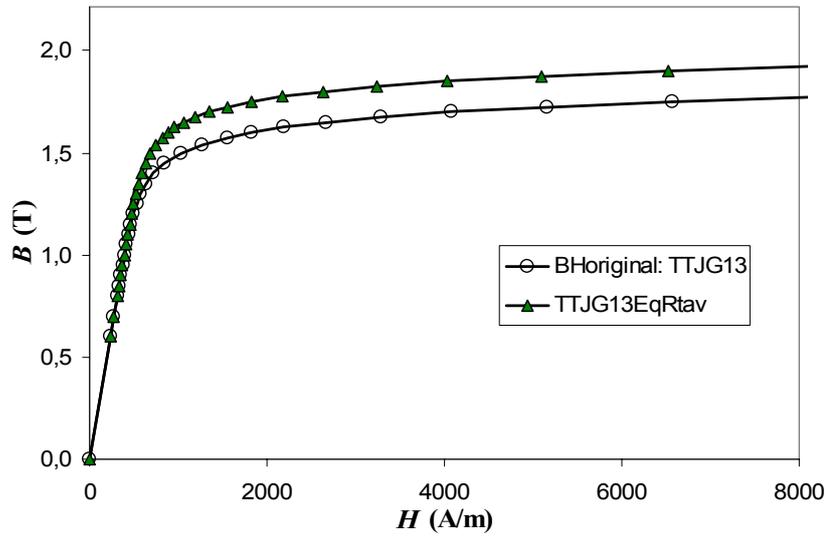


Fig. 7.12. Zonas iniciais da curva  $B-H$  original para o material do “TEAM Workshop 13”, “TTJG13”, e curva  $B-H$  eficaz, “TTJG13EqRtav”, supondo  $B$  sinusoidal e utilizando  $\nu_{B3}$ .

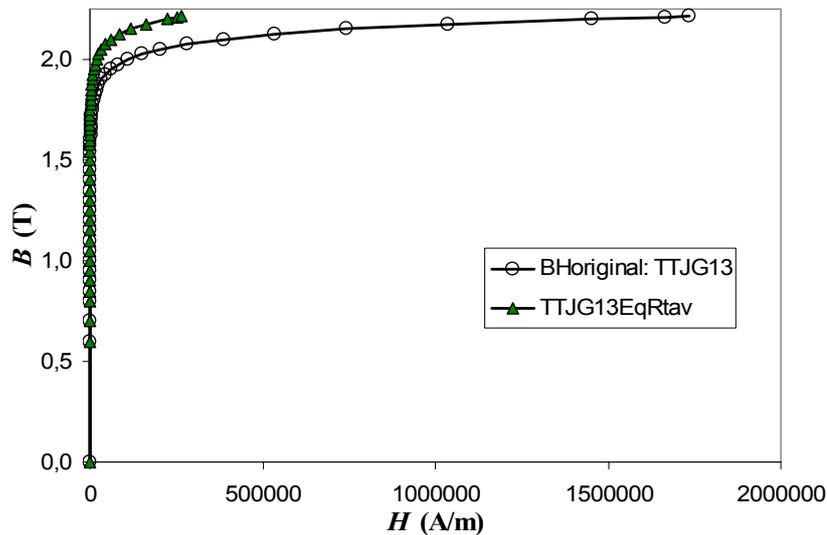


Fig. 7.13. Curva  $B-H$  original para o material do “TEAM Workshop 13”, “TTJG13”, e curva  $B-H$  eficaz, “TTJG13EqRtav”, supondo  $B$  sinusoidal e utilizando  $\nu_{B3}$ .

O objectivo seguinte foi calcular as perdas por correntes induzidas utilizando a curva  $B-H$  efectiva e fazer a comparação com os resultados obtidos por uma análise no domínio do

tempo, por *time-stepping*, realizada pelo Dr. Johan Gyselinck. Para isso foi necessário efectuar Alterações ao **CADdyMAG** para utilização de  $\tilde{H}$ , como se verá de seguida.

### 7.3 Alterações ao **EDDyNLIN** para utilização de $\tilde{H}$ e ao **CADyPOS** para cálculo das perdas por correntes induzidas em regime não linear

Para calcular as perdas por correntes induzidas utilizando a curva  $B$ - $H$  efectiva e poder fazer a comparação com os resultados obtidos por uma análise no domínio do tempo, foi necessário proceder a diversas alterações ao processador não linear de correntes induzidas do **CADdyMAG**, o **EDDyNLIN**. Este processador, em Fortran, foi originalmente preparado para resolver a equação de correntes induzidas em termos de  $\tilde{A}$ , sendo necessário alterá-lo para poder calcular também a solução da equação de correntes induzidas em  $\tilde{H}$ . Foi também necessário acrescentar um novo comando, “|Bmax|eqH”, ao **CADyPOS**.

Para alterar o **EDDyNLIN**, o compilador utilizado foi o *Fortran PowerStation 4.0* (“FPS 4.0”), do *Microsoft Developer Studio*, 1995 (permite usar *Fortran ANSI*, *Fortran 77* e *Fortran 90*). As principais alterações ao **EDDyNLIN** foram as seguintes:

- Aumentar o número de nodos permitidos;
- Poder funcionar (tal como foi feito ao **EDDyPROC**) com  $\tilde{H}$  e com condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$  a aplicar na fronteira da chapa magnética;
- Poder funcionar em modo *batch*;
- Calcular iterativamente o valor de  $\tilde{H}_s$ , por forma a obter o  $B_{max}^a$  pretendido (valor médio da indução máxima na laminação; recorde-se que “indução máxima” significa valor máximo de uma grandeza sinusoidal, variando de elemento finito para elemento finito).

Descrevem-se de seguida, um pouco mais em detalhe, estas implementações

Em primeiro lugar foi feita a passagem do limite de 600 para 10000 nodos, o que não causou qualquer tipo de problemas: visto que os processadores do **CADdyMAG** já tiravam

partido do facto da matriz global dos coeficientes ser esparsa e simétrica positiva definida e da renumeração dos nodos<sup>69</sup>, os aumentos da quantidade de memória e tempo de processamento necessários não foram significativos.

Depois, foi necessário alterar o **EDDyNLIN** para poder funcionar também com  $\tilde{H}$  (alternativamente a com  $\tilde{A}$ ). Com efeito, para utilização do processador em termos de  $\tilde{H}$ , em vez de a indução em cada elemento finito ser calculada como “ $B_{\text{calculado}} = \nabla \times \tilde{A}$ ” (cf. Fig. 7.15), temos que ter “ $B_{\text{calculado}} = \tilde{H} / \nu$ ”. Para além disso, resolvendo a equação de difusão em  $\tilde{H}$ , têm-se os valores de  $\tilde{H}$  nos nodos e não nos elementos (o que acontece em termos de  $\tilde{A}$ , em que  $B_{\text{calculado}}$  é constante em cada elemento finito). Assim, para ter o valor médio do  $\tilde{H}$  no elemento finito, é considerado o valor no seu centroide (dado pela soma dos  $\tilde{H}$  dos nodos, dividida por três)

Para aceitar condições de fronteira de Dirichlet complexas a fim de poder funcionar também com  $\tilde{H}_s$  a aplicar na fronteira da chapa magnética, as alterações foram triviais.

Quanto ao valor da condição de fronteira de Dirichlet complexa  $\tilde{H}_s$  a aplicar, a questão foi bastante mais delicada. Recorde-se que para os problemas lineares, era dada por

$$\tilde{H}_s = \frac{B_{max}^a}{\tilde{\mu}_e} = \frac{B_{ref}}{\tilde{\mu}_e} \quad (3.52)$$

Isto permitia impor, para o problema 1D, um determinado valor médio da indução máxima na laminação,  $B_{max}^a$ , igual a uma referência pretendida, designada por  $B_{ref}$  (cf. “3.4.1 Utilização de processador de EF para equação de difusão em  $A$  para o cálculo de  $H$ ”, página 67). No entanto, esta aproximação partia do pressuposto de que a permeabilidade se mantinha constante ao longo da profundidade, o que só é verdade para problemas lineares, o que não é o caso. Por isso, agora havia duas possibilidades (em qualquer dos casos utilizando a curva  $B$ - $H$  equivalente):

- Partir de um determinado valor de  $\tilde{H}_s$  e processar o modelo no **EDDyNLIN**. Depois, no **CADyPOS** calcular as perdas por correntes induzidas, usando (3.56), e calcular o valor de  $B_{max}^a$  resultante. Este valor seria depois fornecido ao Prof. Dr.

---

<sup>69</sup> Tal como referido mais detalhadamente em “10.3.2 Segunda fase: processador CARTyTERB (com criação directa de vector de coeficientes, [SV], sem criar a matriz de coeficientes, [S])”, página 244, e no “ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES”, na página 359).

Johan Gyselinck, que calcularia as perdas por correntes induzidas resultantes para esse mesmo  $B_{max}^a$ , utilizando um processador no domínio do tempo (por *time-stepping*).

- Definirem-se previamente determinados valores de  $B_{max}^a$  para os quais seriam calculadas as perdas por correntes induzidas.

### 7.3.1 Primeira possibilidade

Em primeiro lugar implementou-se no **EDDyNLIN** esta primeira possibilidade.

Isto obrigou a acrescentar um novo comando ao **CADyPOS**, “|Bmax|eqH” (que significa “|Bmax| para equação de difusão em  $\tilde{H}$ ”), para permitir efectuar o cálculo de  $B_{max}^a$  para modelos não lineares de correntes induzidas definidos em termos de  $\tilde{H}$  (em vez de em termos do vector potencial magnético,  $\tilde{A}$ , para o qual já existia o comando “|Bmax|”). Este comando funciona tanto em modo manual como em modo *batch*, permitindo gravar os resultados de “|Bmax|eqH” no ficheiro de saída do **CADyPOS**, \*.pss.

Sobre a necessidade deste comando, recorde-se que, no **CADyPOS**, para os modelos lineares, o valor de  $B_{max}^a$  era dado por

$$B_{max}^a = \frac{\mu}{S} \sqrt{\left(\int_S H_R dS\right)^2 + \left(\int_S H_I dS\right)^2} \quad (5.4)$$

Contudo, para modelos não lineares, (5.4) tem que ser alterada para

$$B_{max}^a = \frac{1}{S} \sqrt{\left(\int_S \mu H_R dS\right)^2 + \left(\int_S \mu H_I dS\right)^2} \quad (7.23)$$

pois agora a permeabilidade magnética  $\mu$ , varia de elemento finito para elemento finito (se houver saturação, obviamente). Em termos de elementos finitos, (7.23) é aproximada por

$$B_{max}^a = \frac{1}{S} \sqrt{\left(\sum_{nelems} \mu^e H_R^e \Delta^e\right)^2 + \left(\sum_{nelems} \mu^e H_I^e \Delta^e\right)^2} = \frac{1}{S} \sqrt{\left(\sum_{nelems} B_R^e \Delta^e\right)^2 + \left(\sum_{nelems} B_I^e \Delta^e\right)^2} = \quad (7.24)$$

ou seja

$$B_{max}^a = \frac{1}{S} \sqrt{\left(\sum_{nelems} \phi_R^e\right)^2 + \left(\sum_{nelems} \phi_I^e\right)^2} = \frac{1}{S} \phi_{max}^a \quad (7.25)$$

em que  $\mu^e$  representa a permeabilidade magnética no elemento<sup>70</sup>,  $\Delta^e$  representa a área do elemento finito, e  $H_R^e$ ,  $H_I^e$ ,  $B_R^e$ ,  $B_I^e$ ,  $\phi_R^e$ , e  $\phi_I^e$  representam os valores médios em cada elemento finito das componentes reais e imaginárias dos fasores intensidade do campo magnético, indução e fluxo magnético, respectivamente (nas unidades habituais: A/m, T e Wb). Finalmente  $\phi_{max}^a$ , representa o valor médio (do valor máximo) do fluxo na chapa com área da secção recta,  $S$ .

Implementadas as alterações referidas no **EDDyNLIN** e no **CADyPOS**, testou-se a correcção do seu funcionamento. Para isso, foram considerados diversos modelos utilizados anteriormente<sup>71</sup> em regime linear para a chapa “M 400-50A” (da Sollac Méditerranée), tendo-se verificado que os valores obtidos eram exactamente iguais. O resultado (após o reprocessamento desses casos pelo **EDDyNLIN**) do  $B_{max}^a$  pelo novo comando “|Bmax|eqH” do **CADyPOS** e gravado num ficheiro \*.pss, é apresentado na Fig. 7.14 por forma a mostrar o procedimento de cálculo e a sintaxe dos comandos em modo *batch*.

Nesta figura, tudo o que está a itálico corresponde a comentários. A 9ª linha, originalmente em branco, foi substituída por uma linha (enquadrada por uma janela a traço duplo) contendo o significado das grandezas apresentadas nas colunas abaixo. O que se apresenta a partir da linha “Ficheiro de comandos *batch* para o CADyPOS” é a cópia do ficheiro de comandos “**com\*.txt**”, utilizado para o cálculo das grandezas apresentadas a partir da 10ª linha, e dos comentários respectivos.

<sup>70</sup> Calculada durante o processamento, no processador **EDDyNLIN**, por interpolação da curva  $B-H$  efectiva, e escrito no ficheiro \*.pss resultante.

<sup>71</sup> Embora os valores de  $B_{max}^a$  respectivos não sejam apresentados neste trabalho, os valores de  $P_J/P_{Bl}$  que deles resultaram são apresentados na Fig. 6.3, página 132.

```

Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.3 (25-Out-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
DESCRICAO: (SE NAO APRESENTAR ALGUNS VALORES VERIFICAR SE IMPRESSORA ESTA LIGADA)
CEFC02_0.pee: Artigo final para CEFC2002:
      1D (semi-modelo, M) e 2D (1/4, Q) para d/delta entre 0.05 e 8, para chapa Sollac

Lista de ficheiros:

Da equação (3.56):  $\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS$ ; (5.4):  $\int_S H_R dS$ ,  $\int_S H_I dS$ ; (7.25):  $\phi_{max}^a$ ,  $(1/4) S$ ,  $B_{max}^a$ 
PD2BQ1k0.pos  5.442773E+007  3.098661E-004  7.214127E-006  2.066334E-006  1.500000E-006  1.377556E+000
PD2BQ4k2.pos  4.426794E+008  3.139534E-004  6.283324E-006  2.093442E-006  1.500000E-006  1.395628E+000
PD2BQ5k3.pos  6.308684E+008  3.144483E-004  6.481007E-006  2.096767E-006  1.500000E-006  1.397845E+000
PD2BQ10K.pos  1.641859E+009  3.151239E-004  8.056299E-006  2.101512E-006  1.500000E-006  1.401008E+000
PC2CQ24K.pos  9.531692E+008  7.717473E-005  1.827733E-006  5.146425E-007  3.250000E-007  1.583515E+000
PD2CQ5k3.pos  2.652327E+008  1.331660E-004  3.607863E-006  8.880990E-007  5.000000E-007  1.776198E+000

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
"CEFC02_0.pee: Artigo final para CEFC2002 (Para calcular o Bmed->Fcorreção->PJcor/Pref)
  Calcula: integral vol. de Jmax|^2, Hr e Hi, Fluxo Médio, Área modelo, |Bmax|medio Eq Difusão em H

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
5
507
311 3 |Jmax|^2
306 f F.
303 1 HrConst
306 f F.
701
303 2 HiConst
306 f F.
509
801 S

DESCRICAÇÃO (comentários)
0 cartesiano
5 magnetodinamico
507 |Bmax|, neste caso |Jmax|
311 3 |Jmax|, Quadrado da grandeza: "3", i.e. de |Jmax|
306 f F. Int vol de |Jmax|^2 em f e em F (neste caso, um ou outro: os modelos totais com etiqueta F e os
semi.modelos(M) com F
303 1 HrConst Linear->const, grandeza 1 (Hr), nome da nova grandeza: Hr cons
306 f F. Integral volumico de HrConst em f e em F (neste caso, um ou outro: os modelos totais com F e os
semi.modelos(M) com F
701 apaga ecran
303 2 HiConst Linear->const, grand. 2 (Himag), nome da nova grandeza: Hi cons
306 f F. Integral volumico de HiConst em f e em F (neste caso, um ou outro: os modelos totais com etiqueta F e
os semi.modelos(M) com F
509 Calcula |Bmax|medio para Equação de difusão em H
801 S Termina comandos

```

Fig. 7.14. Ficheiro \*.pss, com os valores de “|Bmax|eqH” para modelos não lineares de correntes induzidas definidos em termos de  $\tilde{H}$ , para verificação da correcção do processador e CADyPOS.

Feitas estas implementações, e para fazer a comparação com os resultados obtidos por uma análise no domínio do tempo, *time-stepping*, realizada pelo Dr. Johan Gyselinck, a pedido deste passou-se a implementar no **EDDyNLIN** a segunda possibilidade atrás mencionada: poder calcular iterativamente o valor de  $\tilde{H}_s$ , por forma a obter o  $B_{max}^a = B_{ref}$  pretendido e previamente definido, para os quais seriam calculadas as perdas por correntes induzidas. Esta implementação será descrita em “7.3.3 - Segunda possibilidade”. No entanto, para a perceber, veja-se primeiro como funcionam os processadores não lineares do **CADdyMAG**.

### 7.3.2 Estrutura do processador não linear EDDyNLIN

Os processadores não lineares do **CADdyMAG**, **PMAGNLIN** (para problemas magnetostáticos) e **EDDyNLIN** (para problemas magnetodinâmicos), são iterativos. Mostra-se a seguir o pseudo-código para o **EDDyNLIN**, já em modo *batch*. O que se apresenta entre “//” são comentários

```

programa EDDyNLIN;
apresentação;
le_se_modulo_batch;
repete
    le_dados_e_inicia_variáveis;
    calcula_relutividades_iniciais;
    forma_sistema_equações;
    resolve_sistema_equações;
    calcula_indução; //B_calculado =rot A ou =H/v. B1 = B0 + β (B_calculado - B0) //
    repete
        calcula_relutividades;
        forma_sistema_equações;
        resolve_sistema_equações; // Calcula A ou H //
        calcula_indução; // Bi+1 = Bi-1 + β (B_calculado - Bi-1) //
        calcula_e_mostra_valores(max_diferença_B);
    até (max_diferença_B < delta_B) ou (n_iterações > max_iterações);
    escreve_resultados;
até (não (modo_batch) ou (último_ficheiro_processado))
pára.

```

Fig. 7.15. Pseudo-código do **EDDyNLIN** *batch*.

Como se pode verificar, existem rotinas para o cálculo das propriedades iniciais e das novas propriedades em função da solução da iteração anterior (“calcula\_relutividades”). Existe também um teste de convergência, que verifica se a solução da última iteração já satisfaz os critérios de convergência ou se, pelo contrário, ainda são necessárias mais iterações para se chegar à solução do problema.

O método utilizado neste processador, para resolver o sistema de equações não linear, é o de, iterativamente, recalculando a relutividade magnética a partir das soluções anteriores e das curvas *B-H* existentes no ficheiro de dados fornecido pelo utilizador, **MAGNETIZ.BH**.

Para cada elemento finito, a partir do valor do vector potencial magnético nos seus 3 nodos, solução da iteração *i*, é calculada a indução magnética  $B_i$ . Para se calcular a relutividade magnética da iteração seguinte (*i+1*) toma-se um valor para a indução dado por

$$B_{i+1} = B_{i-1} + \beta (B_i - B_{i-1}) \quad (7.26)$$

em que  $\beta$ , com valor compreendido entre 0 e 1, é o **factor de amortecimento (factor de sub-relaxação)**. Da curva  $B-H$  é lido por interpolação linear, o valor correspondente de  $H_{i+1}$ , permitindo actualizar o valor da relutividade magnética. Esta actualização é feita com amortecimento, para se garantir uma solução estável e uma convergência mais rápida [Coimbra1995] pp.79-80.

O processo iterativo termina quando, no modelo, a diferença máxima de indução entre duas iterações consecutivas é inferior a um determinado valor, “delta\_B”, especificado pelo utilizador, ou quando se atinge o número máximo de iterações, também indicado pelo utilizador (em modo *batch*, ambos os valores são lidos do ficheiro de entrada de dados *batch* para o processador, \*.peo). O utilizador (ou o ficheiro \*.peo) tem também de especificar a indução inicial (para se calcular a relutividade na primeira iteração) e o factor de amortecimento  $\beta$ .

O factor de amortecimento e a indução inicial óptimos dependem de caso para caso. Com dispositivos muito saturados, chegou-se à conclusão, por tentativa e erro, de que os melhores valores para a indução inicial andam à volta de 0,2 T, e de que, para o factor de amortecimento  $\beta$ , valores de 0,1 (ou 0,1x, com  $x$  entre 1 e 5) proporcionam, de um modo geral, as melhores velocidades de convergência da solução. Em dispositivos menos saturados, podem utilizar-se valores um pouco mais elevados para a indução inicial e para o factor de amortecimento. O utilizador deve verificar, durante as iterações iniciais, se está a haver convergência (o programa vai mostrando no monitor as diferenças de indução das duas últimas iterações). Se verificar que não há convergência ou que esta não é satisfatória, pode abortar o programa e recomeçar de novo, com novos valores de indução inicial e/ou factor de amortecimento. Havendo divergência da solução (“max\_diferença\_B” a aumentar entre iterações sucessivas), deve baixar-se o valor do factor de amortecimento.

### 7.3.3 Segunda possibilidade

Tal como atrás mencionado, para implementar no **EDDYNLIN** a possibilidade de calcular iterativamente o valor de  $\tilde{H}_s$  por forma a obter o  $B_{max}^a$  pretendido,  $B_{ref}$ , foi também necessário efectuar mais algumas alterações significativas. Assim, funcionando normalmente em modo *batch*, para cada modelo a processar:

1. Parte-se de um valor inicial de  $\tilde{H}_s$ , eventualmente dado por (3.52);

2. Calcula-se a solução do modelo de elementos finitos (iterativamente, até que  $(\max\_diferença\_B < \delta\_B)$  ou  $(n\_iterações > \max\_iterações)$  e calcula-se o  $B_{max}^a$  resultante, através de (7.25), mas agora no próprio processador;
3. Se  $|B_{max}^a - B_{ref}| < 1 \times 10^{-4} T$ , escolhe-se um novo valor de  $\tilde{H}_s$  e volta-se ao ponto 2.

A escolha de um novo palpite para  $\tilde{H}_s$ , no ponto 3, é crítica. Se não for bem escolhido, o processador diverge, e  $B_{max}^a$  afasta-se cada vez mais de  $B_{ref}$ , ou leva demasiado tempo a convergir. Para isso, em cada iteração em que  $|B_{max}^a - B_{ref}| \geq 1 \times 10^{-4} T$  vai sendo construída uma tabela com pares de  $H_s$  ( $=|\tilde{H}_s|$ ) e o respectivo  $B_{max}^a$  resultante. Para escolher o novo  $H_s$  a utilizar na iteração seguinte foi utilizada uma interpolação por *splines* cúbicas, através da rotina DCSIEZ (com dupla precisão), da “*IMSL Math Library*” de “*FPS 4.0 Books Online*”, fornecida junto com o compilador.

Após vários testes (e muitas divergências!) concluiu-se que o truque para que o processador convergisse rapidamente ao fim de 3 a 6 iterações dos ciclos  $H_s \rightarrow B_{max}^a$ , i.e., para ter bons palpites para  $H_s$ , era:

- Ter um bom palpite para o primeiro  $H_s$ , i.e. ter um  $H_s$  inicial que não faça  $B_{max}^a \simeq 2B_{ref}$  mas sim,  $B_{max}^a \leq B_{ref}$ . Isto é conseguido facilmente, calculando o valor inicial de  $H_s$  por (3.52) ou escolhendo um valor ligeiramente inferior ao dado por (3.52). Este valor escolhido era então introduzido nas condições de fronteira de Dirichlet no modelo **\*.pro**, a processar;
- Na construção da tabela com pares de  $H_s = |\tilde{H}_s|$  e o respectivo  $B_{max}^a$  resultante (em cada iteração de  $|B_{max}^a - B_{ref}| < 1 \times 10^{-4} T$ ), era fundamental os pares serem ordenados por ordem crescente de  $B_{max}^a$  resultante, independentemente da ordem pela qual ocorriam, ou seja fazer uma “inserção ordenada” na tabela.

## 7.4 Cálculo das perdas por correntes induzidas com curva $B-H$ efectiva TTJG13EqRtav e comparação com *time-stepping*

Utilizando o **EDDyNLIN** com as alterações indicadas em “7.3 - Alterações ao EDDyNLIN para utilização de  $\tilde{H}$  e ao CADyPOS para cálculo das perdas por correntes induzidas em regime não linear”, pôde-se então calcular as perdas por correntes induzidas com a curva  $B-H$  efectiva, “TTJG13EqRtav” (apresentada na Fig. 7.12 e Fig. 7.13).

Decidiu-se começar por considerar os seguintes casos:

- $B_{max}^a = 1 \text{ T}$  e  $1,5 \text{ T}$  (zona quase linear e início da saturação, como se pode ver na Fig. 7.12);
- $f = 50 \text{ Hz}$  e  $1000 \text{ Hz}$ ;
- $\sigma = 6 \times 10^6 \text{ S/m}$ ;
- $d = 0,5 \text{ mm}$  (espessura);
- $w = 2 \text{ mm}$  e  $5 \text{ mm}$  (largura da chapa);
- Fazer a análise a 1D e 2D.

Para o caso 1D, visto que o problema é unidimensional, em vez de modelar  $wd = 2 \times 0,5 \text{ mm}^2$ , ou  $wd = 5 \times 0,5 \text{ mm}^2$ , escolheu-se modelar apenas uma tira muito estreita, com  $wd = 0,025 \times 0,5 \text{ mm}^2$ . Isto permitiu utilizar uma discretização muito elevada para a malha (quase 2000 nodos para uma malha muito estreita), guardada no ficheiro PU.pre.

Apresentam-se nas figuras seguintes, alguns dos ficheiros utilizados para o cálculo das perdas em modo *batch*. Nessas figuras, os comentários e instruções são mostrados a itálico para mais fácil leitura e distinção (embora nos ficheiros originais, tal não aconteça pois são ficheiros em modo texto, sem formatação).

Assim, na Fig. 7.16, apresenta-se o ficheiro CMAG03U2.pee para o **CADyEXE**, permitindo fazer a entrada de dados em modo *batch*. Este ficheiro faz com que o **CADyEXE** abra a malha PU.pre e crie dois novos modelos a serem processados, ambos com a curva  $B-H$  equivalente TTJG13EqRtav: o PUE.pro (com  $|H_s| = 300 \text{ A/m}$ , para  $B_{ref} = 1,0 \text{ T}$ ), e o PUD.pro (com  $|H_s| = 500 \text{ A/m}$ , para  $B_{ref} = 1,5 \text{ T}$ ). O resultado desta introdução de dados, para futura consulta e verificação foi guardado num ficheiro CMAG03U2.pse, não apresentado.

```

Ficheiro de propriedades e ficheiros para batch com o CADyEXE.
DESCRICAO: a partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav
  "CMAG03U2.pee: Teste 2 a 1D para COMPUMAG2003.
    Para comparar com Gyselinck. w/d=1/0.5 mm (malha:1/4)
    3 linhas de comentários (CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

naolinear          {linear/naolinear}
magnetodinamico   {electrocondutivo, electrostatico, magnetodinamico, magnetostatico, termico}
cartesiana        {cartesiana/cilindrica}
4 {PAUSA: S/N/(1,2,3,4,..9) - SIM,NAO ou tempo=algarismo (segundos)}
S {Gravar por cima: S/N, caso o ficheiro *.PRO ja exista}
2 {Numero de Ficheiros *.pre a "CadyExecutar"}

* Condições Fronteira: n°; etiquetas e valores (se =-1E-20=>a alterar)
01 {para cada etiq lê o 1º valor, excepto para magnetodinâmico que lê os 2 primeiros}
   C.F.real        C.F.imag
H          -1E-20          -1E-20

* Materiais: n°; Etiq, Propried e Fontes (se =-1E-20=>a alterar. Tolerante a desalinhamto):
01 {para cada etiq lê 1,2,3 ou 4 valores consoante o tipo de campo e linearidade}
   Relativ [m/H]   Jreal[A/m2]   JImag[A/m2]   Condutiv [S/m]
f TTJG13EqRtav   0.00000000E+00   0.00000000E+00   6.00000000E+06

Lista de ficheiros (só dados "a alterar" entre modelos):
FichPRE  FichPRO    CF:H(Real)  CF:H(Imag)  Texto descritivo do modelo
PU.pre   PUE.pro       300.000    0.000 [P/ Bref=1.0 T Teste 1D para COMPUMAG: Bsin,RelTAv, TTJG13EqRtav]
PU.pre   PUD.pro       500.000    0.000 [P/ Bref=1.5 T Teste 1D para COMPUMAG: Bsin,RelTAv, TTJG13EqRtav]

=====
INSTRUÇÕES:
(...)

```

Fig. 7.16. Ficheiro CMAG03U2.pee para o CADyEXE: faz entrada de dados em modo *batch*, para preparação dos ficheiros \*.pro a processar para o problema 1D.

Na Fig. 7.17, apresenta-se um extracto de um dos ficheiros resultantes, o PUE.pro, onde se podem ver os dados introduzidos automaticamente em modo *batch* (os comentários para o utilizador aparecem em *itálico*).

```

Ficheiro "PUE.pro" criado pelo CADyEXE versao 4.0.1 de 2002.04.09 (em modo BATCH)
modelo nao linear
modelo magnetodinamico (de correntes induzidas)
simetria cartesiana

* Nome do modelo:
PU - 1D malha mais refinada, p/ comparar com Gyselinck(COMPUMAG0

* Texto descritivo do modelo:
w/d=0.025/0.5 mm. Malha 1D, adapt. ef. pelic. COMPUMAG03

* Nome do problema:
PUE.pro

* Texto descritivo do problema:
P/ Bref=1.0 T Teste 1D para COMPUMAG: Bsin,RelTav, TTJG13EqRtav

* Numero de pontos do modelo:
1944

* Numero de elementos do modelo:
3136

* Lista de pontos:
n      x      y      cond.fr. potencial(re) potencial(im)
1  0.00000000E+00  0.00000000E+00 H  3.00000000E+02  0.00000000E+00
2  3.12500000E-06  4.88281250E-07 .
3  3.12500000E-06  0.00000000E+00 H  3.00000000E+02  0.00000000E+00
4  0.00000000E+00  4.88281250E-07 .
5  6.25000000E-06  4.88281250E-07 .
(...)
1943  2.18750000E-05  5.00000000E-04 H  3.00000000E+02  0.00000000E+00
1944  2.50000000E-05  5.00000000E-04 H  3.00000000E+02  0.00000000E+00

* Lista de elementos:
n1  n2  n3 etiq  propriedade  fonte(amplitude)  fonte(fase)  condutividade
100  91  101 f  TTJG13EqRtav  0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.00000000E+06
246  247  238 f  TTJG13EqRtav  0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.00000000E+06
423  428  424 f  TTJG13EqRtav  0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.00000000E+06
(...)
1564 1554 1555 f  TTJG13EqRtav  0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.00000000E+06
1547 1554 1555 f  TTJG13EqRtav  0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.00000000E+06

```

Fig. 7.17. Extracto de um dos ficheiros resultantes, o PUE.pro.

Os ficheiros \*.pro foram então processados pelo processador **EDDyNLIN**, em modo *batch*. Para isso foi usado o ficheiro CMAG03U2.peo, com a lista dos ficheiros \*.pro a processar, as respectivas condições e o nome dos ficheiros \*.pos de saída, tal como se pode ver na Fig. 7.18. Assim, por exemplo, o ficheiro PUE.pro dá origem a dois modelos, ambos para  $B_{ref}=1$  T: PUEA50.pos, para  $f=50$  Hz, e PUEA1k0.pos, para  $f=1000$  Hz.

```

Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: Eddyproc (é um comentário)
"CMAG03U2.peo: Teste 0 a 1D para COMPUMAG2003.
Para comparar com Gyselinck. w/d=0.025/0.5 mm.
(CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

1 Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
4 Numero de Ficheiros *.pro a Processar
1.0E-4 14 dígitos Critério paragem: delta_B<=0.xxxx T (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)
100 max_iteracoes: inteiro, 3 dígitos (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)

Lista de ficheiros (proc. de correntes induzidas, não linear). Respeitar À DIREITA
F.Relax Freqüência Bref(<0: Hs inic) FicheiroPRO FicheiroPOS
0.3000 5.00000000E+01 1.000000000000 PUE.pro PUEA50.pos
0.3000 1.00000000E+03 1.000000000000 PUE.pro PUEA1k0.pos
0.3000 5.00000000E+01 1.500000000000 PUD.pro PUDA50.pos
0.3000 1.00000000E+03 1.500000000000 PUD.pro PUDA1k0.pos

=====
CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações".
não alterar número de linhas
Respeitar alinhamentos (à direita)

```

Fig. 7.18. Ficheiro CMAG03U2.peo com lista com a lista dos ficheiros \*.pro a processar, as respectivas condições e o nome dos ficheiros \*.pos de saída (para problema 1D).

Os resultados do processamento dos quatro modelos indicados em CMAG03U2.peo, Fig. 7.18, são apresentados no ficheiro CMAG03U2.pso, Fig. 7.19. Pode ver-se que apresenta já o resultado das modificações ao **EDDyNLIN** para obter a solução para um  $B_{max}^a = B_{ref}$  (descritas no sub-capítulo anterior). Assim, para a resolução de cada problema, com um determinado  $H_s$  inicial, foi utilizado um factor de sub-relaxação,  $\beta=0,3$ , apresentado como “F.Relax” na Fig. 7.19. A frequência e o  $B_{ref}$  pretendido são também apresentados na mesma linha, juntamente com o nome dos ficheiros de entrada, \*.pro, e os ficheiros de saída, \*.pos. A linha seguinte é uma linha de cabeçalho para cada modelo:

“Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)”

pelo que nas linhas seguintes são apresentados, para esse modelo, o valor de  $B_{max}^a$  resultante de cada  $H_s$  indicado, bem como o número de iterações (“Num. iteracoes”) necessárias para resolver o problema de correntes induzidas e a ordem (“Hs num.”) em que foi utilizado o  $H_s$  indicado. Podem portanto intuir-se da Fig. 7.19 os três ciclos iterativos:

- o mais interno, para o cálculo da solução da equação de correntes induzidas;
- o do cálculo do  $H_s$  para cada ficheiro por forma a atingir o  $|B_{max}^a - B_{ref}| < 1 \times 10^{-4} T$  (ciclo não representado na Fig. 7.15); e
- o ciclo exterior, do processamento sucessivo em modo *batch* dos ficheiros \*.pro.

```

Ficheiro criado pelo EDDYNLIN batch Vers 2.0 de 11-10-2002
Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: Eddylin (é um comentário)
"CMAG03U2.peo: Teste 0 a 1D para COMPUMAG2003.
Para comparar com Gyselinck. w/d=0.025/0.5 mm.
(CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

1 Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
4 Numero de Ficheiros *.pro a Processar
.10000000E-03 14 digitos Critério paragem: delta_B<=0.xxxx T (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)
100 max_iteracoes: inteiro, 3 digitos (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)

Lista de ficheiros (proc. de correntes induzidas, não linear). Respeitar À DIREITA
F.Relax Freqüência Bref(<0: Hs inic) FicheiroPRO FicheiroPOS
.3000 .50000000E+02 1.000000000000 PUE.pro PUEA50.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.7649514 300.0000 (100. .169271E-02 2.)
.9961361 392.1818 (100. .710487E-03 3.)
.9999636 393.7285 ( 75. .904799E-04 4.)
Inducao maxima: 1.0067840

.3000 .10000000E+04 1.000000000000 PUE.pro PUEA1k0.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.3320954 300.0000 (100. .168377E-02 2.)
.9999988 898.1376 ( 85. .971556E-04 4.)
1.0058604 903.3550 (100. .352073E-02 3.)
Inducao maxima: 1.6051480

.3000 .50000000E+02 1.500000000000 PUD.pro PUDA50.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
1.2447433 500.0000 (100. .208497E-02 2.)
1.4121340 602.5339 ( 78. .828505E-04 3.)
1.4718549 659.7044 ( 54. .917912E-04 4.)
1.4994494 690.9885 ( 49. .629425E-04 5.)
1.4998715 691.6481 ( 19. .587702E-04 6.)
1.5000366 691.8507 ( 11. .839233E-04 7.)
Inducao maxima: 1.5031640

.3000 .10000000E+04 1.500000000000 PUD.pro PUDA1k0.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.5536379 500.0000 (100. .283682E-02 2.)
1.4110209 1354.6762 ( 83. .883341E-04 3.)
1.4585218 1448.9677 ( 86. .889301E-04 4.)
1.4961224 1537.7905 ( 67. .953674E-04 5.)
1.4999859 1547.9712 ( 52. .834465E-04 6.)
Inducao maxima: 1.7241000

```

Fig. 7.19. Ficheiro CMAG03U2.pso com os resultados do processamento dos quatro modelos indicados em CMAG03U2.peo, Fig. 7.18, para 1D.

Assim, por exemplo, o ficheiro PUE.pro, foi processado para 50 Hz:

- inicialmente com  $H_s=300$  A/m (Hs num. =2). Após ter sido atingido o  $max\_iteracoes=100$ , o problema de correntes induzidas ainda não tinha convergido:

$max\_diferença\_B=0,169271E-02$  T é maior do que o critério de paragem utilizado,  $delta\_B=0,1E-3$  T. O  $B_{max}^a=Bmaxmedio$  resultante foi de 0,7649514 T;

- Utilizando a interpolação (neste caso extrapolação) por *splines* cúbicas, o novo palpite foi  $H_s=392,1818$  A/m; após 100 iterações a  $max\_diferença\_B=0,710487E-03$  T também ainda não convergiu para o problema não linear, mas encontra-se perto, tal como acontece para  $B_{max}^a=0,9961361$  T;
- O palpite seguinte,  $H_s=393,7285$  A/m, faz com que o problema de correntes induzidas convirja após 75 iterações, pois  $max\_diferença\_B=0,904799E-04$ , ou seja, é menor que  $delta\_B=0,1E-3$  T. Também  $B_{max}^a$  já se encontra dentro da gama pretendida pois  $B_{max}^a=0,9999636$  T e  $B_{ref}=1$  T, pelo que  $|B_{max}^a - B_{ref}| < 1 \times 10^{-4}$  T.

Finalmente, na Fig. 7.20, apresenta-se o ficheiro CMAG03U2.pss, com os dados do pós-processamento dos quatro modelos para o problema 1D. Os valores a negrito, correspondem a “Int vol de  $|J_{max}|^2$ ”, ou seja, tal como referido na Fig. 7.14, ao resultado do cálculo numérico de  $\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS$  usando a equação (3.55). Estes valores são depois utilizados para calcular as perdas por correntes induzidas, com a equação (3.56):

$$P_J = \frac{\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS}{2\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{nelems} (\tilde{J}_{max}^2)_i \Delta_i}{2\sigma} \quad (\text{W/m}) \quad (3.56)$$

```

Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.3 (25-Out-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
A partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav
CMAG03U2.pes: Teste 2 a 1D para COMPUMAG2003.
Para comparar com Gyselinck. w/d=1/0.5 mm.

Lista de ficheiros:

PUEA50.pos    9.245425E+002    1.249954E-008    1.250000E-008    9.999635E-001
PUEAlk0.pos   2.761942E+005    1.249999E-008    1.250000E-008    9.999988E-001
PUDA50.pos    2.077418E+003    1.875046E-008    1.250000E-008    1.500037E+000
PUDAlk0.pos   6.199456E+005    1.874982E-008    1.250000E-008    1.499986E+000

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS. (Cópia do Ficheiro de comandos COMCMAG1.txt)
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para COMPUMAG2003, a partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav; calcular o Bmed
Calcula: integral vol. de  $J_{max}|^2$ , Fluxo Médio, Área modelo,  $|B_{max}|_{medio}$  Eq Difusão em H

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
5
507
311 3  $|J_{max}|^2$ 
306 f F.
509
801 S

DESCRICAÇÃO (comentários)
0 cartesiano
5 magnetodinamico
507  $|B_{max}|$ , neste caso  $|J_{max}|$ 
311 3  $|J_{max}|$ , Quadrado da grandeza: "3", i.e. de  $|J_{max}|$ 
306 f F. Int vol de  $|J_{max}|^2$  em f e em F (neste caso, um ou outro: os modelos totais com F e os semi.modelos (M) com F
509 Calcula  $|B_{max}|_{medio}$  para Equação de difusão em H
801 S Termina comandos

```

Fig. 7.20. Ficheiro CMAG03U2.pss com os dados do pós-processamento dos quatro modelos considerados para o problema 1D.

Para o caso 2D, os procedimentos foram similares, apenas com a excepção de que agora as malhas tinham as relações  $w/d$  pretendidas:  $2 \times 0,5 \text{ mm}^2$  e  $5 \times 0,5 \text{ mm}^2$ . Apresentam-se agora apenas os ficheiros relativos ao processamento, CMAG03F1.pso, na Fig. 7.21, e ao pós-processamento, CMAG03F1.pss, na Fig. 7.22.

```

Ficheiro criado pelo EDDYNLIN batch Vers 2.0 de 11-10-2002
Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: Eddynlin, a partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav
"CMAG03F1.peo: 2D para COMPUMAG2003.
Para comparar com Gyselinck. w/d=2/0.5 mm (malha:1/4)
(CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

1 Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
4 Numero de Ficheiros *.pro a Processar
.10000000E-03 14 dígitos Critério paragem: delta_B<=0.xxxx T (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)
100 max_iteracoes: inteiro, 3 dígitos (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)

Lista de ficheiros (proc. de correntes induzidas, não linear). Respeitar À DIREITA
F.Relax Freqüência Bref(<0: Hs inic) FicheiroPRO FicheiroPOS
.3000 .50000000E+02 1.000000000000 PFE.pro PFEA50.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.7660219 300.0000 (100. .168651E-02 2.)
.9961904 391.6337 (100. .721455E-03 3.)
.9999307 393.1562 ( 75. .940561E-04 4.)
Inducao maxima: 1.0053930

.3000 .10000000E+04 1.000000000000 PFE.pro PFEA1k0.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.3798528 300.0000 (100. .168544E-02 2.)
.9812557 789.7797 (100. .323141E-02 3.)
.9987605 805.3366 (100. .202835E-03 4.)
1.0000014 806.4423 ( 62. .990629E-04 5.)
Inducao maxima: 1.5693760

.3000 .50000000E+02 1.500000000000 PFD.pro PFDA50.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
1.2461895 500.0000 (100. .210679E-02 2.)
1.4121569 601.8347 ( 77. .967979E-04 3.)
1.4719388 659.0864 ( 54. .979900E-04 4.)
1.4994431 690.3011 ( 52. .925064E-04 5.)
1.4999156 690.9690 ( 20. .963211E-04 6.)
Inducao maxima: 1.5025630

.3000 .10000000E+04 1.500000000000 PFD.pro PFDA1k0.pos
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 1.)
.6323638 500.0000 (100. .285399E-02 2.)
1.3563230 1186.0261 (100. .170803E-02 3.)
1.4432983 1336.5974 ( 65. .933409E-04 4.)
1.4915578 1446.7967 ( 41. .938177E-04 5.)
1.4999812 1468.4999 ( 13. .987053E-04 7.)
1.5001645 1468.9302 ( 34. .984669E-04 6.)
Inducao maxima: 1.7146130

```

Fig. 7.21. Ficheiro CMAG03F1.pso com resultados do processamento para 2D.

Na Fig. 7.22, os valores a negrito, correspondem também a “Int vol de  $|J_{max}|^2$ ”, i.e. ao cálculo numérico de  $\int_S \tilde{J}_{max}^2 dS$ , utilizado em (3.56). Repare-se que nesta figura, tal como na Fig. 7.19, aparecem os valores da “Indução máxima” necessária para obter o  $B_{max}^a$  pretendido, podendo observar-se que à medida que a frequência vai aumentando, o efeito pelicular também aumenta, pelo que o valor máximo (i.e., o maior valor) da indução máxima no

modelo vai-se distanciando de  $B_{max}^a$ . Isto acontece porque, devido ao efeito pelicular,  $B$  deixa de ser constante na profundidade (cf. Fig. 3.4, página 62). Contudo a saturação atenua este distanciamento.

```
Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.3 (25-Out-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
A partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav
"CMAG03F0.peo: 2D para COMPUMAG2003.
Para comparar com Gyselinck. w/d=2/0.5 mm.

Lista de ficheiros:

PFEA50.pos    1.555943E+004  2.499827E-007  2.500000E-007  9.999307E-001
PFEAlk0.pos   4.647539E+006  2.500004E-007  2.500000E-007  1.000001E+000
PFDA50.pos    3.498272E+004  3.749789E-007  2.500000E-007  1.499916E+000
PFDA1k0.pos   1.081718E+007  3.749953E-007  2.500000E-007  1.499981E+000

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para COMPUMAG2003, a partir de 8Nov02, Chapa TTJG13EqRtav; calcular o Bmed
Calcula: integral vol. de Jmax|^2, Fluxo Médio, Área modelo, |Bmax|medio Eq Difusão em H

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
5
507
311 3 |Jmax|^2
306 f F.
509
801 S

DESCRICAÇÃO (comentários)
(...)
```

Fig. 7.22. Ficheiro CMAG03F1.pss com os dados do pós-processamento dos quatro modelos considerados para o problema 2D.

Então, dividindo os valores a negrito (da equação (3.56), em W/m), pela área da superfície recta da chapa,  $S$ , obtêm-se as perdas em  $W/m^3$  tal como é dado na equação (3.32),

$$P_J = \frac{1}{S} \int_S \frac{J_{max}^2}{2\sigma} dS \quad (W/m^3) \quad (3.32)$$

Finalmente, os resultados para as perdas por correntes induzidas, obtidas utilizando a curva B-H efectiva TTJG13EqRtav, para os modelos 1D e 2D, são apresentados na Tabela 7.2, juntamente com os resultados obtidos por Johan Gyselinck para 1D, utilizando um *time-stepping*.

Tabela 7.2. Perdas por correntes induzidas para 1D e 2D, por TTJG13EqRtav, e para 1D, por *time-stepping*.

$B_{ref}$	Frequência (Hz)	1D – TTJG13EqRtav $P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	2D - TTJG13EqRtav $w/d=2/0,5$ mm $P_J$ (W/m <sup>3</sup> )	1D – <i>Time stepping</i> : $p_{j,av}$ (W/m <sup>3</sup> )
1,0	50	<b>6,16362E+03</b>	5,18648E+03	<b>6,163E+03</b>
1,0	1000	1,84129E+06	1,54918E+06	2,3149E+06
1,5	50	<b>1,38495E+04</b>	1,16609E+04	<b>1,3881E+04</b>
1,5	1000	4,13297E+06	3,60573E+06	6,0949E+06

Da comparação dos resultados para 1D, com saturação, podem tirar-se as seguintes conclusões:

- há uma muito boa concordância para os resultados (a negrito) a baixa frequência, 50 Hz, em que o efeito pelicular não se faz sentir acentuadamente.
- Contudo, para 1000 Hz, em que o efeito pelicular já será significativo, as diferenças aumentam.

Os resultados a 1000 Hz são de certa forma inesperados.

Como não havia concordância a 1D, o Prof. Johan Gyselinck não implementou o *time-stepping* para os casos 2D, o que não era trivial.

Assim, após terem sido revistos os cálculos e procedimentos utilizados, decidiu-se experimentar a utilização das outras formulações para as curvas *B-H* efectivas (equações (7.4) até à (7.15)), para ver se os resultados obtidos seriam melhores. Passa-se a descrever esses procedimentos.

## 7.5 Implementação e resultados das outras formulações para curvas *B-H* efectivas

Devido às discrepâncias entre os resultados da utilização da curva efectiva *B-H* TTJG13EqRtav, a 1000 Hz, em que o efeito pelicular já será significativo, e os obtidos por uma análise no domínio do tempo, decidiu-se experimentar utilizar outras formulações para as curvas *B-H* efectivas, para ver se os resultados obtidos seriam melhores.

Sem entrar em detalhes, visto que a metodologia já foi exposta em “7.2 Curvas *B-H* efectivas e procedimento *para* a sua obtenção”, procedeu-se a alterações ao **CalculaBHequiv**, para implementar o cálculo das curvas efectivas com todas as formulações para as curvas *B-H*

efectivas (equações (7.4) até à (7.15), página 150 e seguintes). A nova versão do programa chama-se **CalcBHeq**.

Para acelerar o processo de cálculo, considerou-se agora o número de intervalos para a integração numérica,  $N_{int}=200$ , com base na Fig. 7.10 e Fig. 7.11. Para verificação da correcção do novo **CalcBHeq** (em que houve alterações significativas ao fluxograma, por forma a otimizar o processo de cálculo das curvas  $B-H$  equivalentes) e da validade da utilização de  $N_{int}=200$ , recalculou-se também a curva segundo a relutividade média no tempo, agora designada por TTJG13eqBsRa. Como as diferenças entre esta e a anterior TTJG13EqRtav eram desprezáveis, considerou-se que  $N_{int}=200$  será suficiente.

As novas curvas foram designadas segundo a seguinte chave:

“nome da curva original”+ “qual a grandeza sinusoidal”+ “explicação da grandeza”.

Assim, o nome da curva original será “TTJG13” e a grandeza sinusoidal será representada por “Bs” ou “Hs” (“B sinusoidal” ou “H sinusoidal”). Apresentam-se na Tabela 7.3 os nomes com que as curvas ficaram armazenadas no ficheiro **MAGNETIZ.BH**, o nome com que aparecem nas figuras seguintes, a designação utilizada nas equações (7.4) a (7.15) e um breve comentário.

Tabela 7.3. Nomes das novas curvas  $B-H$  efectivas equivalentes.

	Nome da curva em <b>MAGNETIZ.BH</b>	Nome da curva nas figuras seguintes	Nome em (7.4) - (7.15)	Explicação/ Comentário
	TTJG13	TTJG13	-	Curva original
Grandeza sinusoidal: $H$	TTJG13eqBsH2	BsH2	$v_{B1}$	“H2”: usa $H^2(t)$
	TTJG13eqBsHc	BsHc	$v_{B2}$	“Hc”: componentes fundamentais de $H$
	TTJG13eqBsRa	BsRa	$v_{B3}$	“Ra”: Relut. média; “a”=“average”
	TTJG13eqBsR2	BsR2	$v_{B4}$	“R2”: usa $v^2(t)$
Grandeza sinusoidal: $B$	TTJG13eqHsB2	HsB2	$v_{H1}$	“B2”: usa $B^2(t)$
	TTJG13eqHsBc	HsBc	$v_{H2}$	“Bc”: componentes fundamentais de $B$
	TTJG13eqHsRa	HsRa	$v_{H3}$	“Ra”: Relut. média; “a”=“average”
	TTJG13eqHsR2	HsR2	$v_{H4}$	“R2”: usa $v^2(t)$
	TTJG13Mu_aHs	Mu_aHs	$\mu_{H2}$	“Mu”= $\mu$ ; “a”=“average”
	TTJG13_Mu2Hs	Mu2Hs	$\mu_{H3}$	“Mu”= $\mu$ ; “2”= $\mu^2(t)$
	TTJG13MuWSHs	MuWSHs	$\mu_{H1}$	“Mu”= $\mu$ ; “WS”=“Energy Stored”

A razão para a tentativa de utilização de permeabilidades equivalentes,  $\mu_{H1}$ ,  $\mu_{H2}$ , e  $\mu_{H3}$ , é que em regime não linear, “relutividade eficaz” não é o inverso de “permeabilidade eficaz”<sup>72</sup>. Para tornar isto claro, basta considerar um exemplo muito simples. Sendo

$$v(t) = \frac{1}{\mu(t)} = \frac{H(t)}{B(t)} \quad (7.27)$$

se considerarmos apenas três intervalos de integração ( $N_{int}=3$ ), iguais, para os quais os valores no seu ponto médio, são  $v(t)= 1000, 2000$  e  $4000$  m/H, teremos que  $\mu(t)= 0,001, 0,0005$  e  $0,00025$  H/m, respectivamente. Ora, o seu valor médio, ou seja da relutividade equivalente, dado por (7.20), será:

$$v_{B3}=(1000+2000+4000)/3= 2333,3(3) \text{ m/H.}$$

Em contrapartida, o valor médio da permeabilidade, dado por (7.14), será:

$$\mu_{H2}=(0,001+0,0005+0,00025)/3= 0,000583(3) \text{ H/m.}$$

Assim, o inverso de  $\mu_{H2}$ , é  $1/\mu_{H2}=1/0,000583(3)=1714$  m/H, que obviamente é bastante diferente de  $v_{B3}= 2333,3(3)$  m/H. Ou seja, tal como tínhamos dito,

$$v_{eq} \neq \frac{1}{\mu_{eq}} \quad (7.28)$$

Por isso, enquanto para  $B$  sinusoidal, será natural e lícito calcular o  $H_{eq}$  para cada  $B_{max}$  (i.e. para cada valor de  $B$  da curva  $B-H$  original) usando

$$H_{eq}(B_{max})= v_{B3}(B_{max})/B_{max} \quad (7.22)$$

já não será correcto, no nosso entender, para o caso de  $H$  sinusoidal, em que se usa  $H_{max}$  (i.e. cada valor de  $H$  da curva  $B-H$  original), calcular cada  $H_{eq}$  usando

$$B_{eq}(H_{max})= H_{max}/v_{eq}(H_{max}) \quad (7.29)$$

mas sim

$$B_{eq}(H_{max})= \mu_{eq}(H_{max})H_{max}= \mu_{eq}H_{max} \quad (7.30)$$

---

<sup>72</sup> Tal como em regime não linear, coenergia não é o simétrico de energia magnética, não sendo indiferente a sua utilização, por exemplo no cálculo de forças electromagnéticas [Pereirinha1996a] [Pereirinha1996b].

Por isso se quis considerar também as curvas  $B-H$  eficazes, dadas por (7.14), e (7.15), pois as curvas  $B-H$  eficazes resultantes serão diferentes e, conseqüentemente, os resultados com elas obtidos.

Aliás este raciocínio está também de acordo com a definição da equação (7.13).

Apresentam-se então finalmente na Fig. 7.24 os valores das novas curvas  $B-H$  efectivas equivalentes<sup>73</sup>, mencionadas na Tabela 7.3. Na Fig. 7.23 apresenta-se a zona mais inicial das curvas.

Apesar de talvez um pouco estranhas, estas curvas estão qualitativamente de acordo com as apresentadas em [Du Terrail1984], [Vassent1989] e [Paoli1998].

A partir do momento em que as curvas  $B-H$  eficazes são calculadas e introduzidas no **MAGNETIZ.BH**, passam a ser utilizadas pelo processador como uma curva  $B-H$  normal.

Na Fig. 7.25 apresentam-se os valores das relutividades em função de  $B$ , calculadas por  $\nu(\text{ponto da curva } B-H) = H(\text{ponto da curva } B-H) / B(\text{ponto da curva } B-H)$ . Os resultados apresentados estão de acordo com as correspondentes (existentes) em [Luomi1986]. Na Fig. 7.26 apresentam-se os mesmo valores das relutividades agora em função de  $H$ .

---

<sup>73</sup> A partir do último ponto da curva  $B-H$ , o **CalcBHeq** usa a mesma inclinação do último troço. Como na curva original o maior valor de  $B$  era de 2,213 T, e aparecem valores de  $B$  significativamente superiores para algumas curvas efectivas, isto poderá dever-se a que o maior valor de  $B$  na curva original não era suficientemente elevado. Se for necessário processar modelos com saturação muito elevada, poderá ser necessário recalculas as curvas apresentadas, depois de se ter prolongado a curva  $B-H$  original.

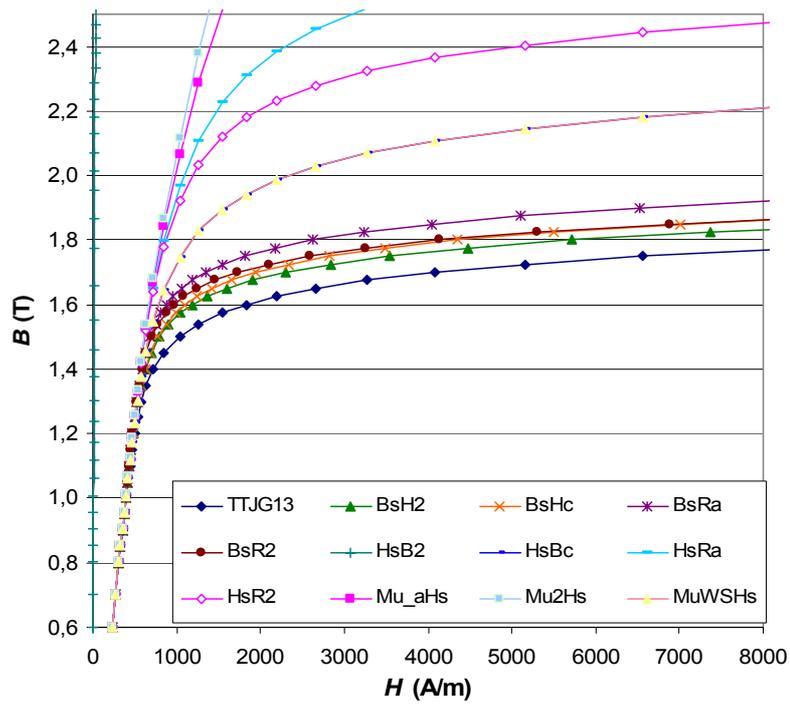


Fig. 7.23. Zona inicial das curvas  $B$ - $H$  eficazes equivalentes para a curva  $B$ - $H$  original “TTJG13”.

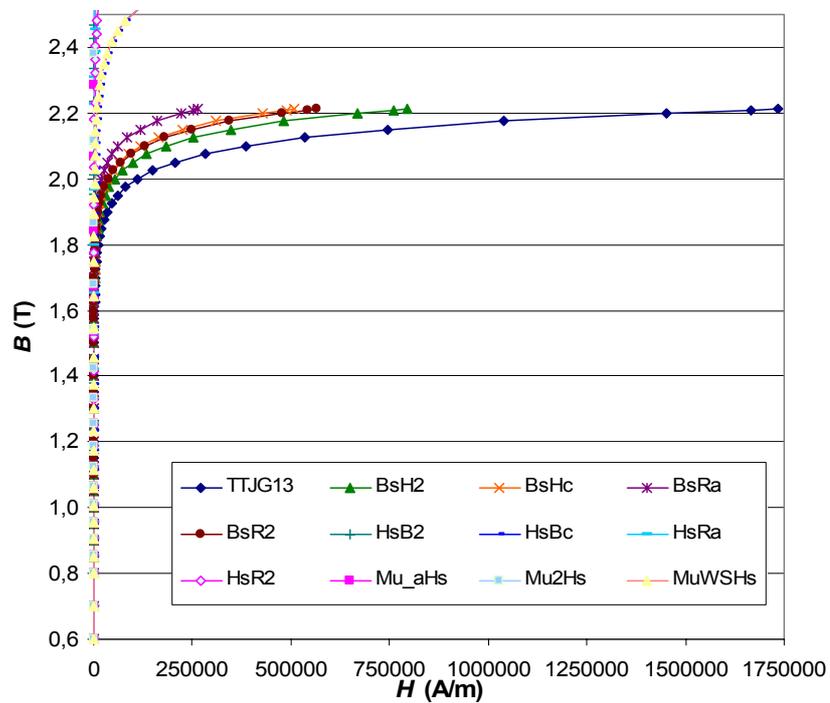


Fig. 7.24. Curvas  $B$ - $H$  eficazes equivalentes para a curva  $B$ - $H$  original “TTJG13”.

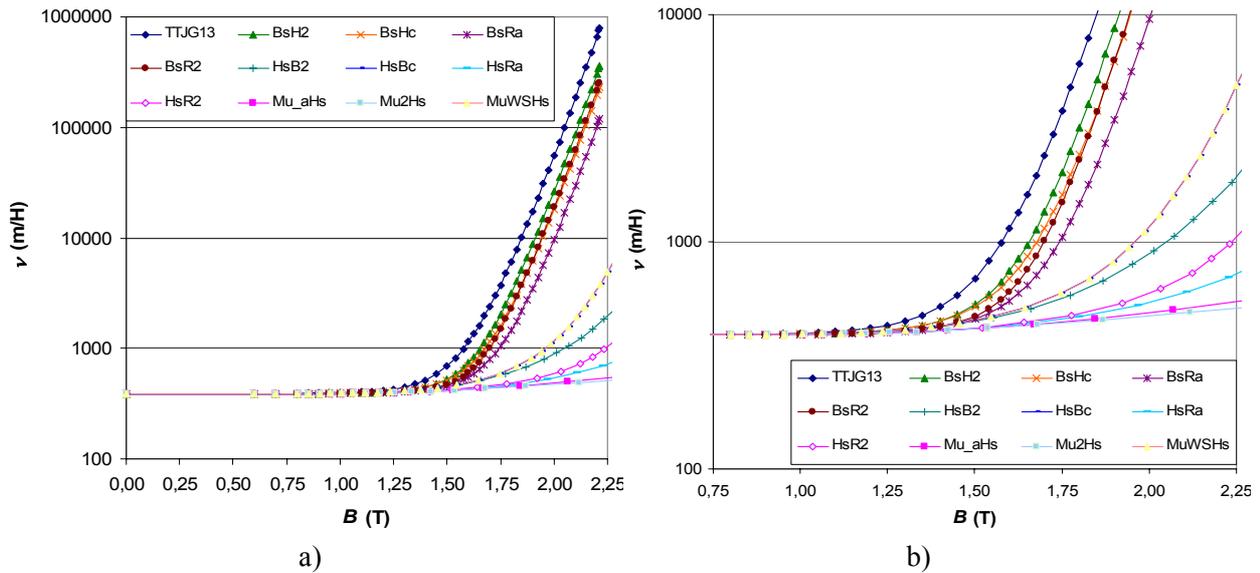


Fig. 7.25. a) Relutividades em função de  $B$  para as curvas  $B-H$  original e eficazes. b) ampliação da escala vertical.

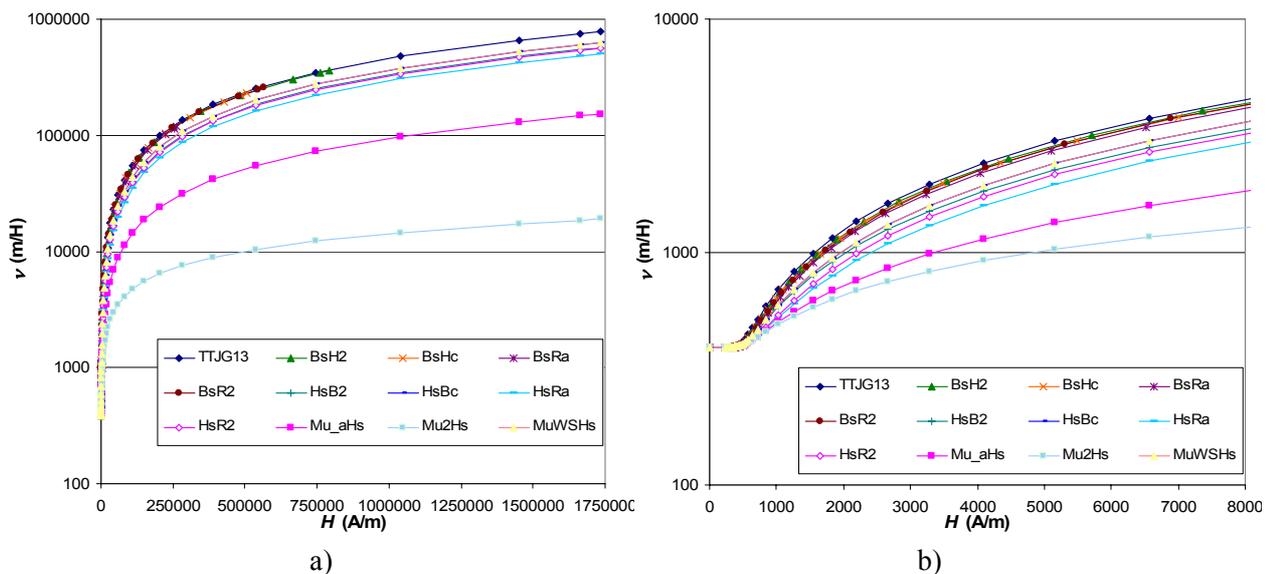


Fig. 7.26. a) Relutividades em função de  $H$ , para as curvas  $B-H$  original e eficazes. b) zona inicial.

O facto de todas as curvas das relutividades resultantes se situarem abaixo da curva original, TTJG13, i.e. a curva para corrente contínua, ou curva estática, deve-se ao seguinte: para cada  $B_{\max}$ , i.e. para cada ponto da curva  $B-H$  na saturação, se se tivesse sempre  $B=\text{cte}$  (i.e. ponto estático, obtido em corrente contínua), a relutividade seria a desse ponto  $B-H$  da curva. Mas, com grandezas variáveis no tempo, para chegar àquele valor de  $B_{\max}$ , parte-se de uma zona linear e vai-se entrando na saturação até chegar aquele limite. Assim, para o

instante em que  $B(t)=B_{\max}$ , será  $\nu(t(B_{\max}))= \nu(B_{\max})$ ; mas durante o resto do tempo é inferior: logo o valor da relutividade eficaz resultante para cada ponto da curva  $B-H$  é mais baixo.

Na Fig. 7.25b e Fig. 7.26b pode ver-se o valor inicial de  $\nu$ , constante para todas as formulações e igual a 388 m/H (cf. equação (7.2), página 144), aumentando depois com a saturação e consoante a formulação utilizada para o cálculo da curva  $B-H$  eficaz.

## **7.6 Resultados das perdas por correntes induzidas com curvas $B-H$ efectivas e comparação com *time-stepping***

As perdas por correntes induzidas para os casos indicados na página 172 e na Tabela 7.2, bem como para um valor de indução um pouco superior,  $B_{ref}=1,75$  T, foram então calculadas usando o mesmo procedimento que para os casos da Tabela 7.2, mas agora utilizando todas as curvas  $B-H$  efectivas apresentadas na Fig. 7.24. O valor das perdas por correntes induzidas para  $B_{ref}=1,75$  T, obtidas por *time-stepping*, é  $1,8903E+4$  W/m<sup>3</sup> para 50 Hz, e  $8,50115E+6$  W/m<sup>3</sup> para 1000 Hz.

Os resultados deste cálculo foram comparados com os valores obtidos por *time stepping*, sendo o quociente entre perdas por curva B-H equivalente e perdas por *time stepping*, apresentados na Fig. 7.27 para a frequência de 50 Hz e na Fig. 7.28 para a frequência de 1000 Hz.

Das figuras podem tirar-se as seguintes conclusões:

- para 50 Hz, em que o efeito pelicular é baixo, todas as curvas  $B-H$  conduzem sensivelmente aos mesmos resultados, e com elevada precisão: o erro máximo em relação ao *time stepping* é inferior a 0,3 %;
- para 1000 Hz, embora as diferenças entre os resultados das diversas curvas seja bastante mais significativa, o erro mínimo é de 15 %, o que é significativo (para além disso, o erro máximo é de 35 %).

Repare-se ainda que a mesma ordem de resultados é obtida também utilizando as curvas originais!

### 50 Hz

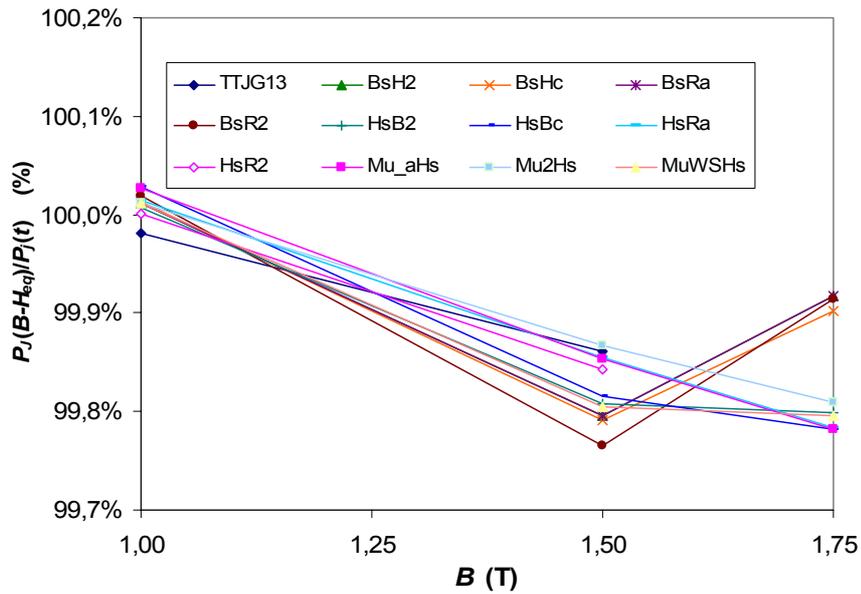


Fig. 7.27. Relação entre as perdas por correntes induzidas para 1D calculadas por curvas  $B-H$  equivalentes e por *time-stepping*, para 50 Hz.

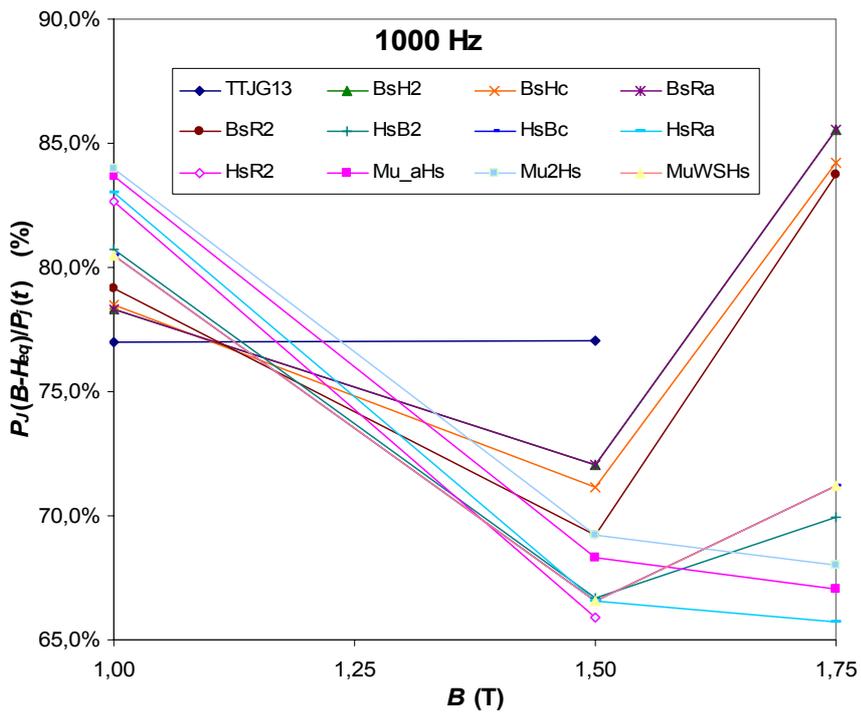


Fig. 7.28. Relação entre as perdas por correntes induzidas para 1D calculadas por curvas  $B-H$  equivalentes e por *time-stepping*, para 1000 Hz.

Assim, os resultados apresentados são algo inesperados, pelo menos à primeira vista, fazendo ressaltar duas questões:

- Quererá isto dizer que as curvas equivalentes não servem para nada, tendo sido um esforço inútil o seu cálculo, uma vez que se obtêm sensivelmente os mesmos resultados com a curva original?
- Porque é que para 1000 Hz, há já uma diferença significativa entre os resultados obtidos pelas curvas  $B-H$  equivalentes e os obtidos pelo *time-stepping*?

A resposta à primeira questão, no nosso entender, é que não. Ou seja, que são muito importantes. O facto de os resultados para as perdas darem sensivelmente o mesmo terá a ver com a metodologia utilizada. Com efeito, pense-se em toda a sequência de fenómenos desde a criação do campo magnético, até ao aparecimento das perdas, e que poderíamos representar pelo esquema:

$$J \rightarrow H_s \rightarrow H \rightarrow (\text{curva } B-H) \rightarrow B \rightarrow \text{“... até que } B_{max}^a = B_{ref}\text{”} \rightarrow \partial B / \partial t \rightarrow \nabla \times E \rightarrow J_{ind} \rightarrow P_J$$

Dito por palavras, quererá dizer o seguinte: uma determinada densidade de corrente  $J$ , dará origem a um campo magnético que na superfície da chapa será  $H_s$  e no seu interior,  $H$ . Para cada elemento finito, haverá um valor de  $B$  correspondente ao valor médio do  $H$  nesse elemento finito (i.e., no seu centroide), calculado por interpolação linear da curva  $B-H$  equivalente em questão. A estes valores de  $B$  em cada elemento finito, corresponderá um determinado  $B_{max}^a$ . No entanto, como o objectivo é calcular as perdas para um dado  $B_{max}^a = B_{ref}$ , o valor de  $H_s$  a impor foi recalculado iterativamente até que  $B_{max}^a$  seja muito aproximadamente igual a  $B_{ref}$ , pelo que o  $B$  em cada elemento finito será função de  $B_{ref}$ . Por outro lado, da primeira equação de Maxwell, (3.9), da variação de  $B$  no tempo, resultará um campo eléctrico  $E$  rotacional, que por sua vez num material condutor dará origem a uma corrente induzida  $J_{ind}$  na chapa ferromagnética. Esta densidade de corrente induzida traduz-se então em perdas por correntes induzidas. A questão é que, como o  $B_{max}^a$  é sempre igual a  $B_{ref}$  ( $\pm 10^{-4}$  T), o  $B$  em cada elemento finito, não variará muito qualquer que seja a curva efectiva utilizada, pelo que as  $J_{ind}$  não variarão muito e conseqüentemente as perdas serão da mesma ordem de grandeza para todas as curvas  $B-H$  consideradas.

**O que será muito diferente de curva para curva, é qual o  $H$  (ou o  $H_s$ ) que será necessário para dar origem a esse  $B_{max}^a$ , ou se quisermos, qual a densidade de corrente  $J$  que é necessário fornecer à bobine que gera o campo.** Assim, consoante os objectivos (cálculo de perdas por correntes induzidas provocadas por uma determinada densidade de

corrente fornecida, forças electromotrizes induzidas, cálculo de indutâncias, etc.), dever-se-á escolher com cuidado qual a curva equivalente a utilizar. Este assunto terá que ser mais aprofundado em trabalhos futuros.

Quanto à segunda questão, refira-se em primeiro lugar que para baixa frequência a indução é aproximadamente constante ao longo da profundidade da chapa, não havendo por isso diferenças entre os resultados obtidos para as diferentes curvas. Já para 1000 Hz, em que há efeito pelicular<sup>74</sup> mais significativo,  $B_{max}$  varia ao longo da espessura da chapa, e de forma diferente de acordo com a curva utilizada, pelo que há maior diferença entre as várias curvas. Mas, no nosso entender, a principal razão da discrepância entre os resultados obtidos pelas curvas  $B-H$  equivalentes e os obtidos pelo *time-stepping*, é que na resolução do problema no domínio da frequência, as perdas por correntes induzidas são consideradas à *posteriori*, enquanto na metodologia utilizada no *time-stepping* pelo Prof. Johan Gyselinck, as perdas e os seus efeitos são considerados logo na solução, o que conduz a resultados diferentes, quando há efeito pelicular, que é também afectado pela saturação, que na realidade varia ao longo do período.

Com efeito, tal como se pode ver nas figuras seguintes, as curvas em função do tempo, nomeadamente a curva de  $H_s$ , Fig. 7.30, mostram esta distorção.

Na Fig. 7.29 apresenta-se a variação de  $B^a$  no tempo, para 1000 Hz, onde se pode ver que o valor máximo de  $B^a$ , é  $B_{max}^a=1,75$  T.  $B^a$  é o **valor instantâneo médio de  $B$  para toda a chapa**.

Na Fig. 7.30 pode observar-se a variação no tempo do  $H_s$  necessário para impor  $B^a$  para  $B_{max}^a=1,75$  T. Na Fig. 7.31 é apresentada a curva de  $B^a-H_s$ . Não se confunda com uma curva  $B-H$ , pois esta é uma curva local (isto é para cada e qualquer ponto do material ferromagnético), enquanto a curva  $B^a-H_s$  representa a variação do  $B$  médio instantâneo, para a chapa com 0,5 mm de espessura, em função  $H_s$  necessário para impor esse  $B^a$ , por forma a que  $B_{max}^a=1,75$  T para TTJG13.

Finalmente, sempre para 1000 Hz, na Fig. 7.32 apresenta-se o valor instantâneo das perdas, cujo valor médio será  $8,50115E+6$  W/m<sup>3</sup>.

---

<sup>74</sup> Refira-se que existindo saturação deixa de se poder usar, pelo menos de forma totalmente correcta, a equação (3.40) para calcular a profundidade de penetração pelicular.

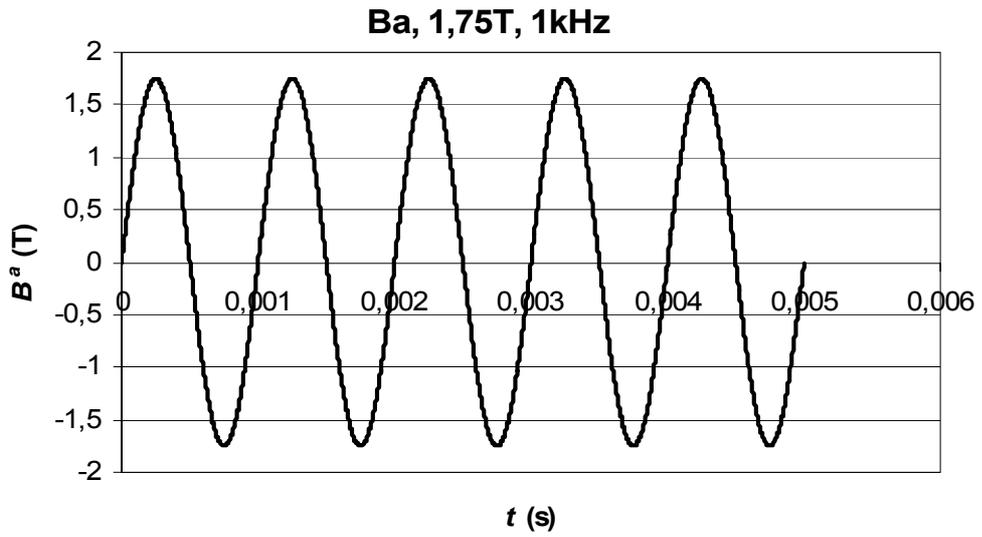


Fig. 7.29. Variação no tempo de  $B^a$  para TTJG13.

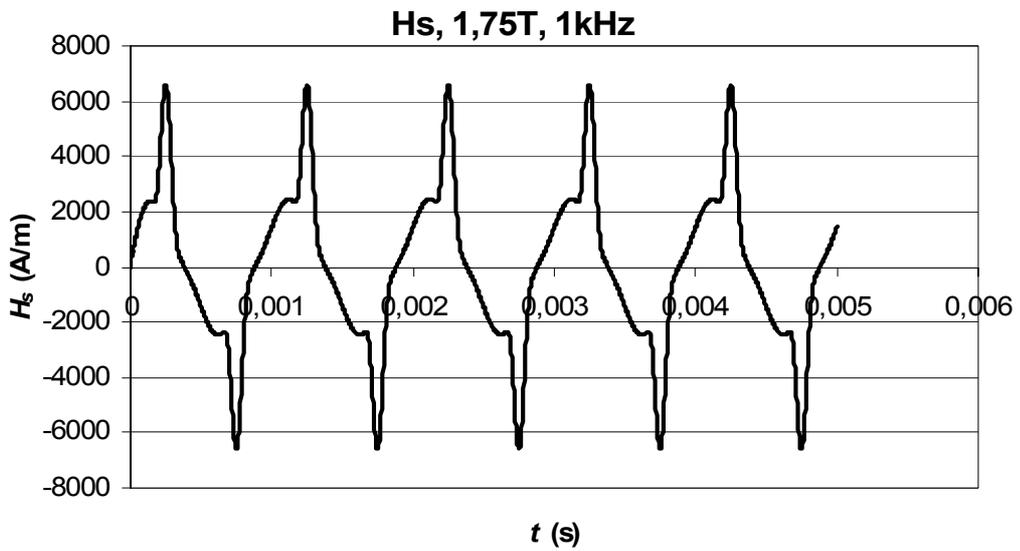


Fig. 7.30. Variação de  $H_s$  para impor  $B^a$  para  $B_{max}^a = 1,75$  T para TTJG13.

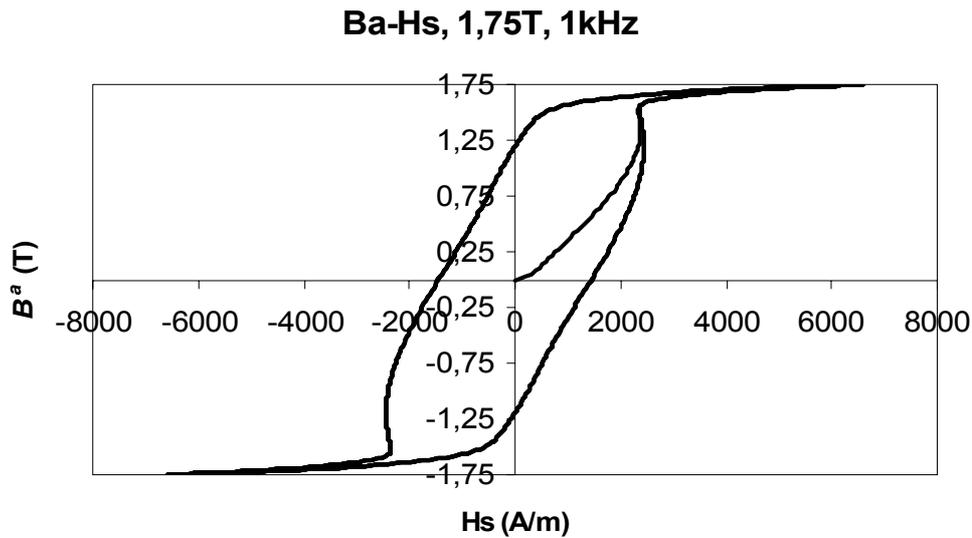


Fig. 7.31. Curva  $B^a$ - $H_s$  resultante da análise no domínio do tempo.

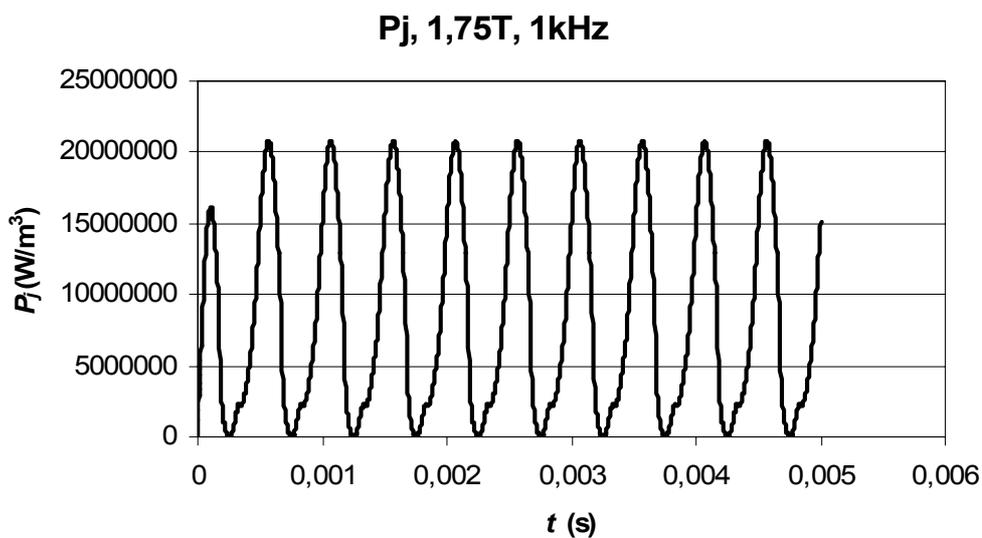


Fig. 7.32. Valor instantâneo da densidade de perdas.

## 7.7 Conclusões

As discrepâncias entre as diversas curvas de relutividade equivalente e/ou  $B$ - $H$  equivalente tinham também sido já assinaladas por outros autores [Luomi1986] [Paoli1998]. Estes autores concluem que este método dá bons resultados para as perdas por correntes induzidas, por comparação com o *time-stepping*, com muito menos esforço computacional. No entanto, essas conclusões são para soluções a 50 Hz, o que está perfeitamente de acordo com os nossos resultados. Para frequências superiores, ou melhor, quando se fizerem sentir simultaneamente

a saturação e o efeito pelicular significativo, já os resultados não serão correctos, o que mais uma vez chama a atenção para a necessidade da aplicação cuidadosa deste método, e da nossa parte a necessidade de investigar mais aprofundadamente este assunto.

Também Jack [Jack1990] acaba por referir muito brevemente, que esta aproximação “não é possível quando no caso de problemas mais gerais com correntes induzidas produzindo efeitos peliculares parciais ou totais; e Du Terrail [Du Terrail1984] diz que só pode ser utilizado nos casos “onde os harmónicos mais elevados podem ser desprezados”. No entanto, não foi encontrada na literatura nenhuma explicação clara para esse facto. No nosso entender, dever-se-á a que quando o material não está todo com o mesmo nível de saturação devido ao efeito pelicular, a curva  $B-H$  equivalente é distorcida.

De qualquer forma, o desenvolvimento do **CalcBHeq**, permite ao **CADdyMAG** dispor desde esta altura da possibilidade do cálculo destas curvas equivalentes  $B-H$ , para utilização no processador não linear **EDdyNLIN**, entrando em consideração com este fenómeno para pelo menos a frequência industrial (o pré-existente, utilizava as curvas DC, ou se existissem, as curvas dadas pelo fabricante, para 50 Hz). Para frequências superiores, ou melhor, com efeito pelicular e simultaneamente saturação, tanto quanto pudemos concluir, deverá ser utilizada a resolução no domínio do tempo ou o método do balanço harmónico.

Uma outra coisa que poderá ser ainda testada na aplicação das curvas  $B-H$  equivalentes é a sua utilização conjuntamente com a introdução de uma relutividade ou permeabilidade equivalente complexa, ou curvas  $B-H$  complexas, com a inclusão das perdas por histerese na fase dessa curva.

## 7.8 Método do Balanço Harmónico

Como os resultados das curvas  $B-H$  equivalentes não deram bons resultados para a situação em que existem simultaneamente saturação e efeito pelicular importantes, passou-se a experimentar o método do Balanço Harmónico. Este trabalho foi maioritariamente desenvolvido pelo Prof. Dr. Johan Gyselinck, tendo dado bons resultados para 1D, tendo sido apresentado pelo segundo autor, e autor desta dissertação, no 8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, que decorreu em Vilamoura, Portugal, de 3 a 5 de Julho de 2003, com o título “*Harmonic balance finite element modelling of eddy currents in steel laminations*” [Gyselinck2003a]. A metodologia não é apresentada nesta dissertação.

No entanto, ainda não se testou a implementação para 2D (por forma a tentar estender o ábaco e modelo de para a zona não linear) por problemas de implementação e outras prioridades. Com efeito, a tentativa de aplicação do efeito de extremidade das chapas à formulação desenvolvida pelos Drs. Johan Gyselinck e Patrick Dular parece ter mais potencial. Assim, por proposta do Dr. Johan Gyselinck iniciou-se o estudo de técnicas de homogeneização, utilizando uma condutividade eléctrica equivalente, para a aplicação deste efeito tal como se verá em “8 INÍCIO DA APLICAÇÃO A TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO”.

## 8 INÍCIO DA APLICAÇÃO A TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO

Neste capítulo estuda-se o efeito da largura da chapa ferromagnética na densidade local de perdas por correntes induzidas, em função de *dte*, “*distance to edge*”, i.e. da **distância à fronteira lateral da chapa**.

Para chapas ferromagnéticas com diversas larguras, e tomando como referência a expressão analítica para a densidade volúmica de perdas para uma chapa magnética de largura “infinita”, podem ser obtidas curvas da densidade relativa de perdas, em função de *dte*: quer usando uma intensidade do campo magnético na fronteira da chapa,  $H_s$ , constante, quer usando a indução média na secção recta do corte da chapa,  $B_{\max}^a$ . É demonstrado que, no primeiro caso, esta função é independente da relação  $w/d$  e que, portanto, poderá ser mais adequada para aplicação em técnicas de homogeneização.

Os resultados do trabalho descrito neste capítulo foram apresentados, pelo autor, com o título "*Study of the Local Eddy Current Loss Density near the Edges in Steel Laminations of Finite Width*" no Compumag 2003, 14<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, que teve lugar em Saratoga Springs, Nova Iorque, EUA, de 13 a 17 de Julho de 2003 [Pereirinha2003b].

### 8.1 Introdução

Quando se realizam análises por elementos finitos de dispositivos electromagnéticos contendo “pacotes” de chapas ferromagnéticas, é impossível modelar cada chapa separadamente. Consequentemente, é difícil a incorporação precisa das perdas no ferro no modelo de elementos finitos e em particular da componente de perdas por correntes induzidas, pois estas perdas dependem dos trajectos da corrente em cada chapa individual. Apesar dessa dificuldade, as perdas por correntes induzidas podem ser consideradas de forma aproximada através de técnicas de homogeneização. No cálculo linear no domínio da frequência, o efeito pelicular pode ser “facilmente” incluído naquelas formulações, por forma a considerar os seus

efeitos directamente<sup>75</sup> na própria solução de elementos finitos. Estas técnicas foram apresentadas anteriormente para modelos de elementos finitos a 2D [Gyselinck1999] e a 3D [Dular2003].

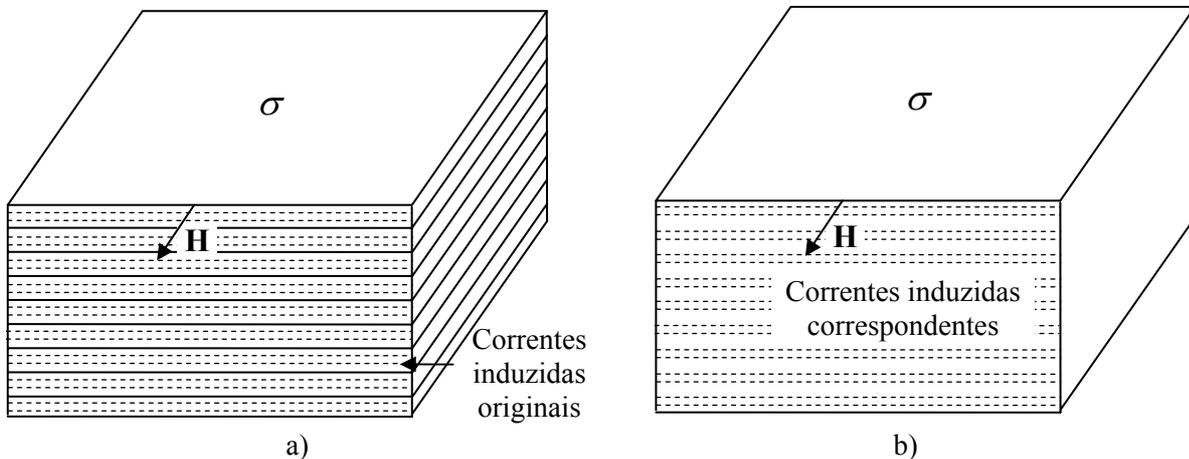


Fig. 8.1. Princípio da aplicação de técnicas de homogeneização a um pacote de chapas ferromagnéticas: a) “pacote” de chapas empilhadas; b) substituição por bloco maciço equivalente.

Basicamente, o princípio da aplicação de técnicas de homogeneização a um pacote de chapas ferromagnéticas, separadas electricamente pelas suas camadas de isolamento, consiste na substituição do pacote por um bloco maciço equivalente. A técnica consiste em considerar o bloco maciço (Fig. 8.1b) como tendo uma densidade de correntes induzidas correspondente às correntes induzidas nas chapas ferromagnéticas da Fig. 8.1a. Esta densidade de correntes induzidas é calculada a partir do valor médio da indução ao longo da espessura da chapa,  $B_{\max}^a$ , sendo depois directamente introduzida na formulação magnetodinâmica fraca (“*weak formulation*”) expressa em termos de  $A$ - $V$  (potencial vector magnético – potencial escalar eléctrico). Esta técnica permite inclusive a consideração de efeito pelicular para problemas no domínio da frequência, ou seja que supõem o funcionamento na zona linear. Um aspecto curioso e importante é que, apesar da consideração de um bloco maciço, é possível através de pós processamento calcular com elevada precisão a distribuição da indução e da densidade de corrente que se teria no caso de um pacote de chapas individuais.

Segundo Dular *et al* [Dular2003], a técnica poderá ser estendida também para regime não linear, através de uma análise multi-harmónica.

<sup>75</sup> Ao contrário da aplicação *a posteriori*, como em [Hollaus1999], que apenas pode ser efectuada se as correntes induzidas não tiverem um efeito perceptível na solução [Krahenbuhl2004].

A técnica referida para a zona linear, foi recentemente testada mais em pormenor em [Krahenbuhl2004] por forma a avaliar os limites do modelo desenvolvido, tendo sido concluído que é preciso algum cuidado, pois o modelo apenas funciona perfeitamente se o efeito pelicular global não prevalece dentro das chapas exteriores. Neste caso, poderá haver duas formas de lidar com a situação e que, segundo Krahenbuhl, deverão ainda ser investigadas: resolver directamente determinadas equações de diferenças na direcção perpendicular à chapa, ou aplicar o **método da impedância da superfície** (“*surface impedance method*”) às chapas exteriores, em associação com a técnica de homogeneização da Fig. 8.1 para as outras chapas.

Por forma a também tentar considerar os efeitos de extremidades (“*edge effects*”) na técnica de homogeneização a 3D, os modelos a 2D das chapas podem ser estudados [Antunes2002] [Pereirinha2002]. Efectivamente, os efeitos de extremidades devidos à largura finita das chapas, estudados nos capítulos anteriores desta dissertação, são ignorados nas técnicas de homogeneização referidas na página anterior, pois estas são baseadas nos modelos 1D das chapas, nos quais apenas a variação ao longo da espessura da chapa é considerada (de acordo com a equação (3.37) página 56). Neste capítulo vai-se estudar a influência da largura da chapa, ou melhor, da relação entre a largura e a espessura,  $w/d$ , na densidade local de perdas, tendo-se concluído que se poderá vir a calcular uma condutividade equivalente a ser aplicada para a inclusão do efeito da largura das chapas na técnica de homogeneização para o modelo 3D (por agora, limitado ao caso linear<sup>76</sup>).

A ideia é portanto, a partir da solução do problema de correntes induzidas a 2D (chapa de largura finita) e do cálculo da densidade local de perdas para uma chapa ferromagnética, calcular um  $\sigma_{eq}$  a aplicar nos limites da chapa, por forma a considerar o efeito de extremidades, tal como se pode ver na Fig. 8.2a. Este  $\sigma_{eq}$  poderia então ser aplicado ao bloco maciço por técnicas de homogeneização, tal como se representa na Fig. 8.2b.

---

<sup>76</sup> Refira-se que mesmo nas publicações mais recentes daqueles autores [Krahenbuhl2004], a inclusão destas técnicas de homogeneização directamente na formulação de elementos finitos, continua apenas a ser efectuada para regime linear.

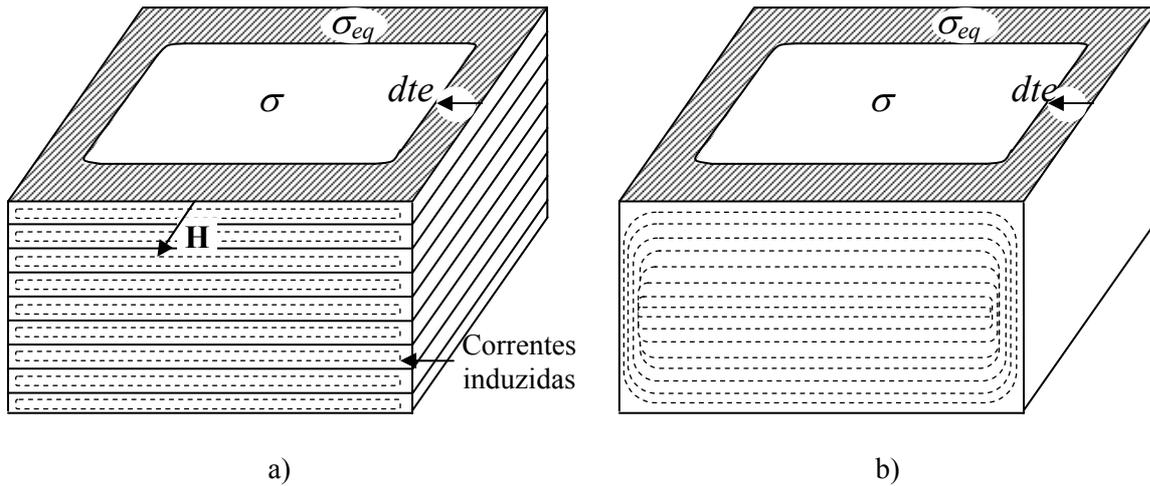


Fig. 8.2. Princípio da aplicação da condutividade equivalente para consideração do efeito de extremidades: a) bloco de chapas; b) possível aplicação ao bloco maciço por técnicas de homogeneização.

## 8.2 Formulação

Para a análise do problema 2D na laminação, ou seja, a consideração do efeito das extremidades, considere-se a chapa ferromagnética da Fig. 8.3 (idêntica às anteriormente apresentadas na Fig. 3.1 e Fig. 4.1).

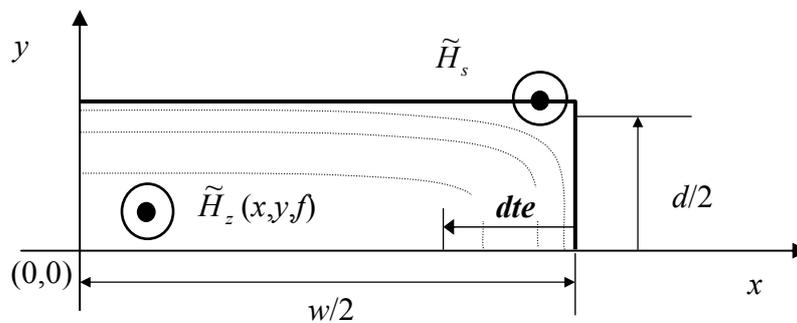


Fig. 8.3.  $\tilde{H}_z$ ,  $\tilde{H}_s$  e correntes induzidas para  $1/4$  de uma chapa ferromagnética, com indicação da origem de  $dte$  (distância à fronteira do modelo, "distance to edge").

Recorde-se que a equação harmónica de difusão a 2D, expressa em termos de  $\tilde{H}_z$ , componente  $z$  do fasor  $\tilde{H}$ , é

$$\nabla^2 \tilde{H}_z - j\omega\mu\sigma\tilde{H}_z = 0 \quad (3.28)$$

em que  $\omega=2\pi f$  é a pulsação,  $\mu$  a permeabilidade magnética e  $\sigma$  a condutividade eléctrica. O valor constante de  $\tilde{H}$  na fronteira da chapa,  $\tilde{H}_s$ , pode ser imposto ou flutuante. Neste último caso, é imposto o valor médio (do valor máximo) da indução,  $B_{\max}^a$ .

No caso de uma chapa de largura infinita, tal como visto anteriormente, a expressão analítica da densidade volúmica de perdas, em  $W/m^3$ , pode ser dada tanto em termos do valor médio da indução  $B_{\max}^a$ , pela equação (3.37),

$$P_{B1} = \frac{\sigma\pi^2 d^2 f^2 (B_{\max}^a)^2}{6} F_{sk} \quad (3.37)$$

como em termos da amplitude da intensidade do campo magnético à superfície da laminação,  $H_s$ , pela equação (3.44)

$$P_{H1} = \frac{H_s^2}{d\sigma\delta} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \quad (3.44)$$

sendo a profundidade de penetração pelicular  $\delta = \sqrt{1/\pi f \sigma \mu}$ , equação (3.40), e  $\lambda = d/\delta$ , equação (3.39). O efeito pelicular para (3.37) é incluído no factor de efeito pelicular,  $F_{sk}(f)$ , adimensional

$$F_{sk} = \frac{3}{\lambda} \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\cosh \lambda - \cos \lambda} \quad (3.38)$$

O cálculo da frequência  $f$  que impõe o  $\lambda = d/\delta$  pretendido foi feito pela equação (5.1), que permite calcular o valor exacto da frequência para o  $d/\delta$  que se deseje

$$f = \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \frac{1}{d^2 \pi \mu \sigma} \quad (5.1)$$

Para obter a solução do problema de correntes induzidas a 2D pelo método dos elementos finitos, o procedimento é diferente consoante se trate da situação em que se impõe um determinado  $B_{\max}^a$  ou se impõe um determinado  $H_s$ .

Para o caso em que se impõe  $B_{\max}^a$ , o procedimento foi simples, uma vez que já se tinha implementado, tal como exposto anteriormente em “7.3.3 - Segunda possibilidade”, a capacidade de o processador não linear de correntes induzidas **EDDyNLIN** resolver iterativamente o problema de correntes induzidas em termos de  $H$  até atingir um determinado  $B_{\max}^a = B_{ref}$  pretendido. Assim, bastou utilizar este processador com uma “curva” de magnetização dada por uma recta, visto que se pretende trabalhar na zona linear (em vez de usar uma curva com saturação).

O caso em que se impõe um determinado  $H_s$  foi ainda mais simples, bastando resolver o problema de correntes induzidas, em termos de  $H$ , com o processador linear de correntes induzidas, **EDDyPROC**.

O cálculo da **densidade local de perdas por correntes induzidas** para uma chapa ferromagnética é que teve que ser alterado em relação ao efectuado nos capítulos anteriores. Com efeito, o procedimento utilizado anteriormente para o cálculo das perdas por correntes induzidas em  $W/m^3$ ,  $P_J$ , tal como exposto em “3.4.3 Procedimento de cálculo das perdas por correntes induzidas por elementos finitos a partir da solução de  $H$ ”, página 71, consistia basicamente no cálculo de

$$\int_S \tilde{J}_{\max}^2 dS = \sum_{i=1}^{nelems} (\tilde{J}_{\max}^2)_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{nelems} (J_{\max}^2)_i \Delta_i \quad (3.55)$$

ou seja na integração de  $J_{\max}^2$  para a superfície da secção recta da laminação ( $S=wd$ ). Esta integração era aproximada através do somatório (para o número de elementos finitos,  $nelems$ ), do produto de  $J_{\max}^2$  para o elemento  $i$ ,  $(J_{\max}^2)_i$ , pela área desse mesmo elemento,  $\Delta_i$ . O resultado é depois utilizado para calcular (3.32)

$$P_J = \frac{1}{S} \int_S \frac{J_{\max}^2}{2\sigma} dS \quad (W/m^3) \quad (3.32)$$

pelo que o valor  $P_J$  representa um valor médio da densidade de perdas para toda a superfície da secção recta da laminação,  $S=wd$ , tal como se pode ver na Fig. 8.4 (embora aí apenas para um quarto da superfície total da chapa, ou seja para  $S/4$ ). A divisão por  $S$  em (3.32) é feita por forma a que a densidade de perdas venha em  $W/m^3$ .

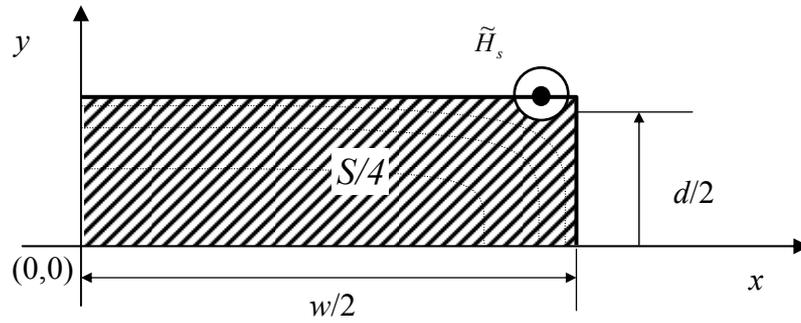


Fig. 8.4. Superfície de integração considerada anteriormente para o cálculo da densidade de perdas por correntes induzidas,  $P_J$ .

Neste capítulo, para consideração do efeito de extremidades para técnicas de homogeneização, a densidade de perdas tem outro significado. Assim, vai-se considerar a distância aos limites da chapa, i.e. a distância à fronteira do modelo (“*distance to edge*”),  $dte$ , com origem na fronteira lateral, tal como se pode ver na Fig. 8.3 (e também na Fig. 8.5). Para cada  $dte$ , o **valor médio das perdas por correntes induzidas ao longo da espessura  $d$** ,  $P_{Jd}$ , em  $W/m^3$ , é calculado a partir da solução de elementos finitos, por

$$P_{Jd} = \frac{1}{d} \int_d \frac{J_{max}^2}{2\sigma} dy \quad (8.1)$$

Ou seja, para cada  $dte$ , o integral de linha de  $P_{Jd}$  é calculado ao longo das linhas paralelas ao eixo dos  $yy$ , indicadas a ponteadado na Fig. 8.5 (apenas representado  $d/2$ ).

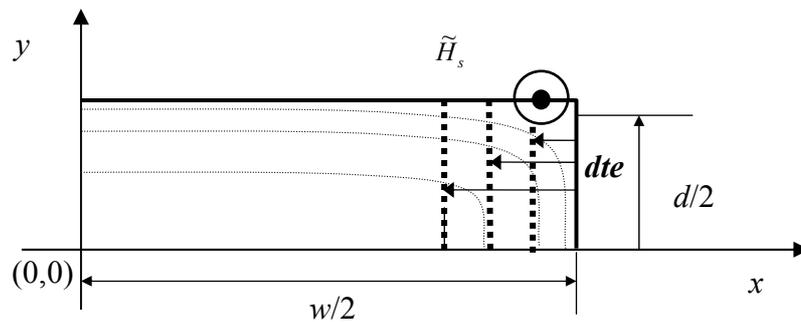


Fig. 8.5. Percursos de integração para a densidade de perdas por correntes induzidas,  $P_{Jd}$ .

Em termos de elementos finitos, sendo  $N_{int}$  o número de intervalos considerados para a integração numérica do integral de linha, e portanto com  $\Delta y = d/N_{int}$ , aquele integral é calculado através de

$$\int_d \frac{J_{max}^2}{2\sigma} dy \approx \frac{1}{2\sigma} \sum^{N_{int}} (J_{max}^2)_i \Delta y \quad (8.2)$$

em que  $(J_{max}^2)_i$  representa  $J_{max}^2$  para o elemento  $i$  ao qual corresponde cada  $\Delta y$ .

De forma similar ao caso anterior, equação (3.32), a divisão por  $d$  em (8.1) é feita para que a densidade de perdas venha também em  $W/m^3$ . Com efeito, repare-se que as unidades de  $J_{max}^2 / 2\sigma$  são dadas por

$$\text{Unidades de } \frac{J_{max}^2}{2\sigma} = \frac{(A/m^2)^2}{(S/m)} = \frac{A^2 m}{m^4 S} = \frac{A^2}{m^3 S} = A \frac{A\Omega}{m^3} = \frac{V}{\Omega} \frac{A\Omega}{m^3} = \frac{VA}{m^3} = \frac{W}{m^3} \quad (8.3)$$

ou seja, serão  $W/m^3$ , tendo portanto a dimensão de uma densidade volúmica de potência. Calcular o integral de (8.2), implica multiplicar  $J_{max}^2 / 2\sigma$  por  $dy$ , que sendo um comprimento terá como unidade m. Fica-se assim com  $W/m^2$ . Para poder comparar situações (em função de  $dte$ ) com diferentes espessuras de chapas, é conveniente voltar a ter a densidade volúmica de perdas, ou seja, calcular o valor médio desta densidade de perdas ao longo de  $\int_d dy$ , pelo que se deverá dividir por  $d$  o valor obtido. Dito de outra forma, ao dividir-se  $W/m^2$  por m na equação (8.1), fica-se com  $W/m^3$ ; logo, para cada  $dte$ , o valor médio das perdas por correntes induzidas ao longo da espessura  $d$ ,  $P_{Jd}$ , é dado em  $W/m^3$ .

Para calcular o integral de (8.1) foi preciso alterar o comando 3.5 do **CADyPOS**, comando “integral lin.”, que calcula o integral linear de uma grandeza ao longo de uma linha indicada por dois pontos, de forma a que este comando pudesse também funcionar em modo *batch* e gravar o resultado do integral no ficheiro de resultados do pós-processamento, \*.pss.

### 8.3 Exemplo de aplicação

Para testar a ideia, foi considerada uma chapa ferromagnética com  $\sigma=4,5 \times 10^6$  S/m,  $\mu=6,667 \times 10^{-3}$  H/m ( $\nu=150$  m/H) e  $d=0,5$  mm. Tal como se descreve de seguida, foram testadas as duas metodologias já referidas: impor o valor médio da indução,  $B_{max}^a$ , ou impor a amplitude da intensidade do campo magnético à superfície da laminação,  $H_s$ .

### 8.3.1 Para $B_{\max}^a$ constante

Para  $B_{\max}^a$  constante na superfície do corte da secção recta da laminação (quatro vezes a área da superfície a tracejado na Fig. 8.4) escolheu-se o valor de  $B_{\max}^a = B_{ref} = 1$  T. Foi considerado  $w/d$  igual a 3 e 12 (ou seja  $w$  igual a  $3d$  e  $12d$ ) e quatro frequências diferentes, entre 42,4413 Hz e 4,24413 kHz (a que corresponderá  $\lambda = d/\delta$  igual a 1, 3, 6 e 10).

Na Fig. 8.6 apresenta-se o ficheiro CMG032KA.pso (semelhante ao anteriormente apresentado na Fig. 7.21), relativo ao processamento dos quatro casos para  $w/d=12$ . O mais importante<sup>77</sup> neste ficheiro, é verificar que de facto se obtém o valor de  $B_{\max}^a = B_{ref}$  pretendido, pois  $B_{\max}^a = \text{“Bmaxmedio”} = 1,000000$  T.

---

<sup>77</sup> Podem também ver-se duas outras coisas relevantes: a primeira é que, excepto para  $f=0,42441300E+02$  Hz, a  $max\_diferença\_B$  é ligeiramente superior a  $delta\_B=0,1E-3$  T, o que indica que deveria ter sido utilizado um valor do factor de amortecimento (factor de sub-relaxação) mais baixo que o 0,25 utilizado (cf. “7.3.2 - Estrutura do processador não linear EDDyNLIN”). No entanto isto não é grave, primeiro, porque tendo forçado o cálculo como estando na zona linear, o valor da relutividade em cada elemento finito é sempre constante; e, segundo, porque a diferença máxima, que poderá ocorrer apenas para um único elemento finito, também é baixa:  $0,168519E-01$  T.

O segundo aspecto relevante, e que seria mais grave, é o valor de “indução máxima” que se obtém para os modelos com frequências mais elevadas e portanto com efeito pelicular mais acentuado. Pode-se ver que estes valores de indução máxima – que ocorrem junto aos limites horizontais da chapa – são irrealistas e obrigariam portanto à utilização de processadores não lineares, levantando todas as questões e problemas observados no capítulo anterior. No entanto, como as perdas irão ser comparadas com as correspondentes perdas analíticas, os resultados dos rácios serão válidos, desde que se esteja na zona linear, o que para as frequências mais elevadas obriga a que  $B_{\max}^a$  seja significativamente mais baixo que 1 T. Isto remete-nos novamente para a página 90, acerca da necessidade de se utilizarem outros materiais caso se pretendam induções elevadas para frequências elevadas.

```

Ficheiro criado pelo EDDYNLIN batch Vers 2.0 de 11-10-2002
Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: Eddynlin (é um comentário)
De CMAG03KA.peo: 1.0T, 2D para COMPUMAG2003-2hipotese Ba=cte.
Gyselinc. (malha=1/4)
w/d=6.0/0.5mm=12 (CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

1 Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
4 Numero de Ficheiros *.pro a Processar
.10000000E-03 14 dígitos Critério paragem: delta B<=0.xxxx T (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)
100 max_iteracoes: inteiro, 3 dígitos (LINHA SÓ PARA EDDYNLIN)

Lista de ficheiros (proc. de correntes induzidas, não linear). Respeitar À DIREITA
F.Relax Freqüência Bref(<0: Hs inic) FicheiroPRO FicheiroPOS
.2500 .42441300E+02 1.0000000000000 PKB42C.PRO PKB42C.POS
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 0.)
.9823399 150.0000 (100. .278592E-02 2.)
1.0000000 152.6966 (100. .128388E-03 3.)
Inducao maxima: 1.0179670

.2500 .38197200E+03 1.0000000000000 PKB381G.PRO PKB381G.POS
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 0.)
.5399866 150.0000 (100. .278479E-02 2.)
1.0000000 277.7847 (100. .405455E-02 3.)
Inducao maxima: 1.8512080

.2500 .15278900E+04 1.0000000000000 PKB1K5M.PRO PKB1K5M.POS
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 0.)
.2502746 150.0000 (100. .271171E-02 2.)
1.0000000 599.3417 (100. .937152E-02 3.)
Inducao maxima: 3.9899340

.2500 .42441300E+04 1.0000000000000 PKB4K2U.PRO PKB4K2U.POS
Bmaxmedio com Hs (Num. iteracoes, MaxDiferB, Hs num.)
.0000000 .0000 ( 0. .000000E+00 0.)
.1518392 150.0000 (100. .270462E-02 2.)
1.0000000 987.8870 (100. .168519E-01 3.)
Inducao maxima: 6.5610940

```

Fig. 8.6. Ficheiro CMG032KA.pso com resultados do processamento para  $w/d=12$  e  $B_{\max}^a = 1$  T.

Na Fig. 8.7 apresenta-se o ficheiro de comandos para o pós-processamento dos modelos, com os comentários a itálico. O integral de linha da equação (8.1) é calculado pelo comando “305” que corresponde ao comando 3.5 “Integral lin.” do CADyPOS, com  $N_{\text{int}}=2000$  (após vários testes com diferentes valores para  $N_{\text{int}}$ , intervalos de integração, concluiu-se que 2000 dava bons resultados, sendo significativamente mais rápido do que com valores mais elevados).

```

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para COMPUMAG2003: Sigma Equivalente...
Calcula: int.vol. Jmax^2, Fluxo Médio, Área modelo, |Bmax|medio Eq Dif.H, Int linha J^2

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
5
507
311 3 |Jmax|^2
306 f F.
509
602 4
106
305 2000 0.000000E+00 2.500000E-04 0.000000E+00 0.000000E+00
305 2000 6.250000E-04 2.500000E-04 6.250000E-04 0.000000E+00
305 2000 1.250000E-03 2.500000E-04 1.250000E-03 0.000000E+00
305 2000 1.875000E-03 2.500000E-04 1.875000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.500000E-03 2.500000E-04 2.500000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.531250E-03 2.500000E-04 2.531250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.562500E-03 2.500000E-04 2.562500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.593750E-03 2.500000E-04 2.593750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.625000E-03 2.500000E-04 2.625000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.656250E-03 2.500000E-04 2.656250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.687500E-03 2.500000E-04 2.687500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.718750E-03 2.500000E-04 2.718750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.750000E-03 2.500000E-04 2.750000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.781250E-03 2.500000E-04 2.781250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.812500E-03 2.500000E-04 2.812500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.843750E-03 2.500000E-04 2.843750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.875000E-03 2.500000E-04 2.875000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.890625E-03 2.500000E-04 2.890625E-03 0.000000E+00
305 2000 2.906250E-03 2.500000E-04 2.906250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.921875E-03 2.500000E-04 2.921875E-03 0.000000E+00
305 2000 2.937500E-03 2.500000E-04 2.937500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.947917E-03 2.500000E-04 2.947917E-03 0.000000E+00
305 2000 2.958333E-03 2.500000E-04 2.958333E-03 0.000000E+00
305 2000 2.968750E-03 2.500000E-04 2.968750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.976563E-03 2.500000E-04 2.976563E-03 0.000000E+00
305 2000 2.984375E-03 2.500000E-04 2.984375E-03 0.000000E+00
305 2000 2.992188E-03 2.500000E-04 2.992188E-03 0.000000E+00
305 2000 3.000000E-03 2.500000E-04 3.000000E-03 0.000000E+00
801 S

DESCRICOAO (comentários)
0 cartesiano
5 magnetodinamico
507 |Bmax|, neste caso |Jmax|
311 3 |Jmax|^2, Quadrado da grandeza: "3", i.e. de |Jmax|
306 f F. Int vol de |Jmax|^2 em materiais com etiquetas f ou F
509 Calcula |Bmax|medio para Equação de difusão em H :cuidado: põe (5ª) grandeza na pilha
602 4 grandeza corrente: 4 (volta a trabalhar com Jmax^2)
106 níveis de cores (da grandeza corrente)
305 2000 x1 y1 x2 y2 - Calcula o integral de linha com 2000 intervalos, desde o ponto x1,y1
até x2,y2
801 S Termina comandos

```

Fig. 8.7. Ficheiro de comandos COMCMGKA.txt para pós-processamento dos modelos indicados na Fig. 8.6.

Na Fig. 8.8 apresentam-se os resultados do pós-processamento, para o primeiro modelo, PKB42C.pos ( $f=42,441300$  Hz). Para cada modelo, a 1ª linha contém o nome do ficheiro \*.pos respectivo, o valor do integral de superfície de  $J_{max}^2$  (dado pelo comando “integral volúmico” do CADyPOS), o fluxo médio e a área do modelo e o  $B_{max}^a$  calculados no CADyPOS.

```

Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.3 (25-Out-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
Modelo Linear
CMG032KA.pes: 2D para COMPUMAG2003, Sigma Equivalente.
Ba=1T. Artigo com Gyselinck.

Lista de ficheiros:

PKB42C.POS  2.125583E+004  7.500001E-007  7.500000E-007  1.000000E+000
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 7.498416E+006
2000 6.250000e-004 2.500000e-004 6.250000e-004 0.000000e+000 7.463028E+006
2000 1.250000e-003 2.500000e-004 1.250000e-003 0.000000e+000 7.462504E+006
2000 1.875000e-003 2.500000e-004 1.875000e-003 0.000000e+000 7.450277E+006
2000 2.500000e-003 2.500000e-004 2.500000e-003 0.000000e+000 6.913702E+006
2000 2.531250e-003 2.500000e-004 2.531250e-003 0.000000e+000 6.749765E+006
2000 2.562500e-003 2.500000e-004 2.562500e-003 0.000000e+000 6.579457E+006
2000 2.593750e-003 2.500000e-004 2.593750e-003 0.000000e+000 6.409428E+006
2000 2.625000e-003 2.500000e-004 2.625000e-003 0.000000e+000 6.290205E+006
2000 2.656250e-003 2.500000e-004 2.656250e-003 0.000000e+000 6.006422E+006
2000 2.687500e-003 2.500000e-004 2.687500e-003 0.000000e+000 5.750879E+006
2000 2.718750e-003 2.500000e-004 2.718750e-003 0.000000e+000 5.423576E+006
2000 2.750000e-003 2.500000e-004 2.750000e-003 0.000000e+000 5.092192E+006
2000 2.781250e-003 2.500000e-004 2.781250e-003 0.000000e+000 4.765829E+006
2000 2.812500e-003 2.500000e-004 2.812500e-003 0.000000e+000 4.285913E+006
2000 2.843750e-003 2.500000e-004 2.843750e-003 0.000000e+000 4.093735E+006
2000 2.875000e-003 2.500000e-004 2.875000e-003 0.000000e+000 3.728761E+006
2000 2.890625e-003 2.500000e-004 2.890625e-003 0.000000e+000 3.827193E+006
2000 2.906250e-003 2.500000e-004 2.906250e-003 0.000000e+000 3.786908E+006
2000 2.921875e-003 2.500000e-004 2.921875e-003 0.000000e+000 3.989492E+006
2000 2.937500e-003 2.500000e-004 2.937500e-003 0.000000e+000 4.449308E+006
2000 2.947917e-003 2.500000e-004 2.947917e-003 0.000000e+000 4.502828E+006
2000 2.958333e-003 2.500000e-004 2.958333e-003 0.000000e+000 4.969301E+006
2000 2.968750e-003 2.500000e-004 2.968750e-003 0.000000e+000 5.672324E+006
2000 2.976563e-003 2.500000e-004 2.976563e-003 0.000000e+000 5.730887E+006
2000 2.984375e-003 2.500000e-004 2.984375e-003 0.000000e+000 5.912427E+006
2000 2.992188e-003 2.500000e-004 2.992188e-003 0.000000e+000 6.510025E+006
2000 3.000000e-003 2.500000e-004 3.000000e-003 0.000000e+000 8.056121E+006

PKB381G.POS  1.513007E+006  7.500000E-007  7.500000E-007  1.000000E+000
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 5.047499E+008
(...)

PKB1K5M.POS  1.350304E+007  7.500000E-007  7.500000E-007  1.000000E+000
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 4.286260E+009
(...)

PKB4K2U.POS  6.216972E+007  7.500001E-007  7.500000E-007  1.000000E+000
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 1.947158E+010
(...)

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para COMPUMAG2003, Hipótese de paper 2: Sigma Equivalente...
Calcula: integral vol. de Jmax|^2, Fluxo Médio, Área modelo, |Bmax|medio Eq Difusão em H,
Int linha J^2
(...)

```

Fig. 8.8. Ficheiro CMG032KA.pss com alguns resultados do pós-processamento com  $w/d=12$  e para

$$B_{\max}^a = 1 \text{ T.}$$

Nas linhas seguintes da Fig. 8.8, iniciadas por “2000”, os valores da última coluna representam o valor do integral de linha da equação (8.2). São também apresentadas as duas primeiras linhas resultantes do pós-processamento para os outros 3 modelos.

Na Fig. 8.9 apresentam-se algumas imagens obtidas no **CADyPOS** para o modelo PKB42C.pos. A Fig. 8.9a resultou da captura de imagem (por *PrintScreen*) durante a execução das instruções do ficheiro de comandos COMCMGKA.txt no modelo PKB42C.pos,

concretamente a efectuar o (último) cálculo do integral de linha da equação (8.2). As linhas verticais brancas representam a localização dos percursos dos integrais de linha. Os níveis de cores representam os valores  $J_{max}^2$  na chapa. As figuras seguintes não foram obtidos com o ficheiro de comandos COMCMGKA.txt, mas sim com um ficheiro de comandos próprio para esse fim, não apresentado. Assim, na Fig. 8.9b pode ver-se a malha, com 1386 nodos e 2591 elementos finitos, na c) e d) apresentam-se os níveis de cores de  $J_{max}$  e  $J_{max}^2$ , respectivamente, na e) apresentam-se novamente as linhas verticais, agora a vermelho, dos percursos dos integrais de linha.

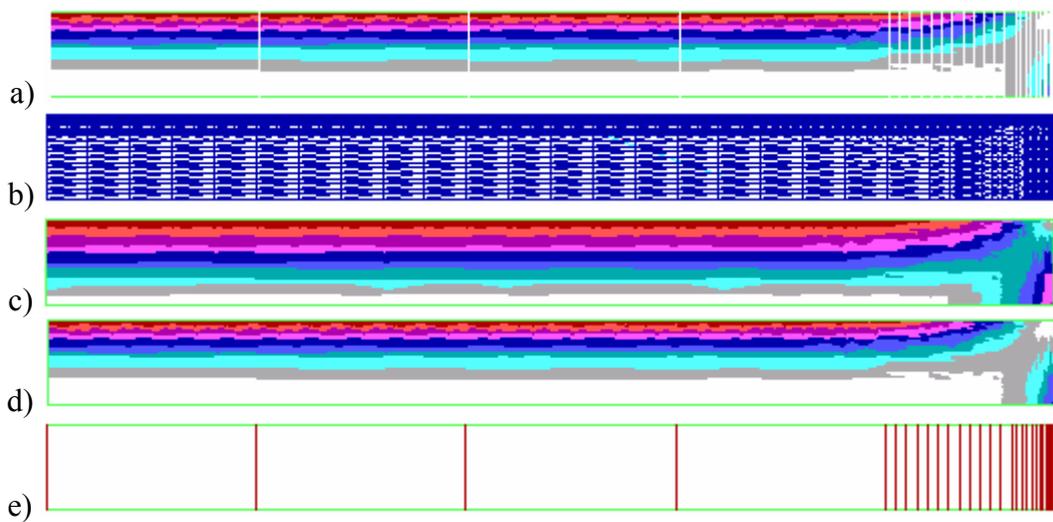


Fig. 8.9. Pós-processamento do modelo PKB42C.pos ( $w/d=12$ ,  $f=42,441300$  Hz): a) em modo *batch* a calcular os integrais de linha da equação (8.2); b) malha, 1386 n./ 2591 e.; c) níveis de cores de  $J_{max}$ ; d) níveis de cores de  $J_{max}^2$ ; e) localização dos 28 integrais de linha.

A distribuição de níveis de cores na Fig. 8.9acd ser um pouco irregular deve-se ao seguinte: sendo a densidade de corrente induzida mais elevada junto ao exterior da chapa, e tratando-se de valores médios em cada elemento finito, o valor de  $J_{max}$  e  $J_{max}^2$  em elementos finitos triangulares contíguos poderá cair em gamas diferentes de valores (i.e. diferentes cores), podendo adivinhar-se a influência dos elementos finitos.

Quanto a resultados globais para  $B_{max}^a$  constante, após testar várias combinações possíveis, concluiu-se que a melhor forma de os apresentar, era calcular  $P_{Jd}/P_{BI}$ , (ou seja o quociente entre  $P_{Jd}$ , equação (8.1), e a densidade de perdas  $P_{BI}$ , equação (3.37)), e representá-

-los em função do quociente  $dte/d$ , por forma a tornar os resultados independentes da espessura concreta da chapa. Estes resultados são então os apresentados na Fig. 8.10.

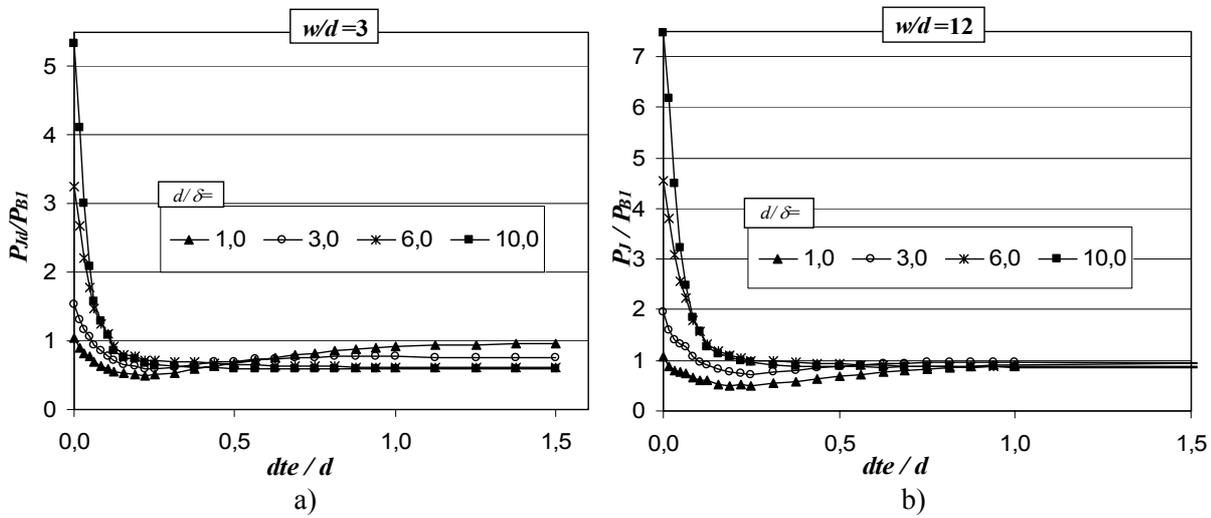


Fig. 8.10. Resultados para  $B_{\max}^a$  constante, igual a 1 T. a)  $w/d=3$ ; b)  $w/d=12$ .

Na Fig. 8.10a, como  $w/d=3$  e foi modelada apenas metade de  $w$ , o máximo  $dte/d$  será 1,5. Para a Fig. 8.10b, como  $w/d=12$ , o máximo  $dte/d$  já será 6, mas representam-se apenas os resultados para  $dte/d \leq 1,5$  pois a partir daí praticamente não variam. Conforme se pode ver para ambos os casos, à medida que  $dte/d$  vai diminuindo (i.e. que nos vamos aproximando da extremidade lateral da chapa),  $P_{Jd}$ , que representa a densidade local de perdas por correntes induzidas, começa por diminuir, aumentando muito quando  $dte/d$  tende para zero. Isto deve-se à posição relativa das linhas de integração em relação às correntes induzidas, tal como se pode deprender da Fig. 8.5. Contudo, pode-se ver que, infelizmente, os resultados dependem da largura da chapa, ou seja da relação  $w/d$  e também que  $P_{Jd}/P_{B1} \neq 1$  na zona central da chapa. Isto poderá tornar mais difícil a implementação em técnicas de homogeneização.

### 8.3.2 Para $H_s$ constante

Para  $H_s$  constante, foram consideradas 5 diferentes larguras  $w$ , variando entre  $2d$  (chapa muito estreita) e  $25d$  (chapa em que o efeito de extremidades será pequeno). Para cada uma delas, foram também consideradas 21 frequências diferentes, variando entre 0,42 Hz e 4,2 kHz, a que corresponderá  $\lambda = d/\delta$  variando entre 0,1 e 10, dando portanto origem a 105 modelos processados. Visto que neste capítulo se está a estudar o caso linear, escolheu-se  $H_s=150$  A/m, pois o valor concreto de  $H_s$  não é relevante, uma vez que a densidade local de perdas vai ser comparada com a densidade de perdas média  $P_{H1}$ , para o mesmo valor de  $H_s$ .

Apresentam-se de seguida a título de exemplo, alguns dos ficheiros utilizados para a obtenção dos resultados para  $w/d=12$ .

Na Fig. 8.11 apresenta-se o ficheiro CMG032KA.pso, com a informação relativa ao processamento dos casos para  $w/d=12$  para as 21 frequências consideradas. Os comentários são apresentados em itálico.

```

Ficheiro criado pelo EDDYPROC batch Vers.3.0.0 de 22-03-2002
Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: Eddyproc (é um comentário)
Para Testes... 3 linhas de comentários
3 linhas de comentários
3 linhas de comentários (CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações")

1 Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
21 Numero de Ficheiros *.pro a Processar

Lista de ficheiros (Frequencia, só para proc. de correntes induzidas). Respeitar alinhamentos:
Frequência FicheiroPRO FicheiroPOS
.42441300E+00 PKC004A.PRO PKC004A.POS
.10610300E+02 PKC10B.PRO PKC10B.POS
.42441300E+02 PKC42C.PRO PKC42C.POS
.95493000E+02 PKC95D.PRO PKC95D.POS
.16976500E+03 PKC169E.PRO PKC169E.POS
.26525800E+03 PKC265F.PRO PKC265F.POS
.38197200E+03 PKC381G.PRO PKC381G.POS
.51990600E+03 PKC519H.PRO PKC519H.POS
.67906100E+03 PKC679I.PRO PKC679I.POS
.85943700E+03 PKC859J.PRO PKC859J.POS
.10610300E+04 PKC1K0K.PRO PKC1K0K.POS
.12838500E+04 PKC1K2L.PRO PKC1K2L.POS
.15278900E+04 PKC1K5M.PRO PKC1K5M.POS
.17931500E+04 PKC1K7N.PRO PKC1K7N.POS
.20796200E+04 PKC2K0O.PRO PKC2K0O.POS
.23873200E+04 PKC2K3P.PRO PKC2K3P.POS
.27162400E+04 PKC2K7Q.PRO PKC2K7Q.POS
.30663900E+04 PKC3K0R.PRO PKC3K0R.POS
.34377500E+04 PKC3K4S.PRO PKC3K4S.POS
.38303300E+04 PKC3K8T.PRO PKC3K8T.POS
.42441300E+04 PKC4K2U.PRO PKC4K2U.POS

```

Fig. 8.11. Ficheiro CMG032K0.pso relativo ao processamento para  $w/d=12$  e  $H_s=150$  A/m.

Na Fig. 8.12 apresenta-se o ficheiro de comandos *batch* COMCMGK0.txt com o integral de linha calculado para 21 *dte* diferentes (em tudo semelhante a COMCMGKA.txt, à excepção de que neste era calculado para 28 *dte*).

```

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para COMPUMAG2003, Sigma Equivalente...
Calcula: integral vol. de  $J_{max}|^2$ , Fluxo Médio, Área modelo,  $|B_{max}|_{medio}$  Eq Difusão em H,
Int linha  $J^2$ 

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0 5
507
311 3  $|J_{max}|^2$ 
306 f F.
509
602 4
305 2000 0.000000E+00 2.500000E-04 0.000000E+00 0.000000E+00
305 2000 6.250000E-04 2.500000E-04 6.250000E-04 0.000000E+00
305 2000 1.250000E-03 2.500000E-04 1.250000E-03 0.000000E+00
305 2000 1.875000E-03 2.500000E-04 1.875000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.500000E-03 2.500000E-04 2.500000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.531250E-03 2.500000E-04 2.531250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.562500E-03 2.500000E-04 2.562500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.593750E-03 2.500000E-04 2.593750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.625000E-03 2.500000E-04 2.625000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.656250E-03 2.500000E-04 2.656250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.687500E-03 2.500000E-04 2.687500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.718750E-03 2.500000E-04 2.718750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.750000E-03 2.500000E-04 2.750000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.781250E-03 2.500000E-04 2.781250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.812500E-03 2.500000E-04 2.812500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.843750E-03 2.500000E-04 2.843750E-03 0.000000E+00
305 2000 2.875000E-03 2.500000E-04 2.875000E-03 0.000000E+00
305 2000 2.906250E-03 2.500000E-04 2.906250E-03 0.000000E+00
305 2000 2.937500E-03 2.500000E-04 2.937500E-03 0.000000E+00
305 2000 2.968750E-03 2.500000E-04 2.968750E-03 0.000000E+00
305 2000 3.000000E-03 2.500000E-04 3.000000E-03 0.000000E+00
801 S

DESCRIPÇÃO (comentários)
0 cartesiano
5 magnetodinamico
507  $|B_{max}|$ , neste caso  $|J_{max}|$ 
311 3  $|J_{max}|^2$ , Quadrado da grandeza: "3", i.e. de  $|J_{max}|$ 
306 f F. Int vol de  $|J_{max}|^2$  em materiais com etiquetas f ou F
509 Calcula  $|B_{max}|_{medio}$  para Equação de difusão em H :cuidado: põe (5ª) grandeza na pilha
602 4 grandeza corrente: 4 (volta a trabalhar com  $J_{max}^2$ )
305 2000 x1 y1 x2 y2 - Calcula o integral de linha com 2000 intervalos, desde o ponto x1,y1
até x2,y2
801 S Termina comandos

```

Fig. 8.12. Ficheiro de comandos COMCMGK0.txt para pós-processamento dos modelos indicados na Fig. 8.11.

Na Fig. 8.13 apresentam-se os resultados do pós-processamento, para o primeiro modelo, PKC004.pos, para 0,424413 Hz. A 1ª linha contém o nome do ficheiro \*.pos respectivo, o valor do integral de superfície (dado pelo comando “integral volúmico”) de  $J_{max}^2$ , o fluxo médio, a área do modelo e o  $B_{max}^a$  calculados no CADyPOS. Nas linhas seguintes, iniciadas por “2000”, os valores da última coluna representam o valor do somatório da equação (8.2). O ficheiro original contém também os resultados para cada uma das restantes 20 frequências consideradas, dos quais são apenas apresentadas as duas primeiras linhas resultantes do pós-processamento para mais dois modelos, PKC10B.pos (10,6103 Hz) e PKC4K2U.pos (4244,13 Hz).

Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.3 (25-Out-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.

Modelo Linear

CMAG03k0.pes: Teste 2 a 1D para COMPUMAG2003, Sigma Equivalente.

Para comparar com Gyselinck.  $w/d=1/0.5$  mm.

Lista de ficheiros:

```
PKC004A.POS  2.130016E+000  7.499894E-007  7.500000E-007  9.999858E-001
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 7.529001E+002
2000 6.250000e-004 2.500000e-004 6.250000e-004 0.000000e+000 7.492914E+002
2000 1.250000e-003 2.500000e-004 1.250000e-003 0.000000e+000 7.492443E+002
2000 1.875000e-003 2.500000e-004 1.875000e-003 0.000000e+000 7.476691E+002
2000 2.500000e-003 2.500000e-004 2.500000e-003 0.000000e+000 6.900818E+002
2000 2.531250e-003 2.500000e-004 2.531250e-003 0.000000e+000 6.732647E+002
2000 2.562500e-003 2.500000e-004 2.562500e-003 0.000000e+000 6.558397E+002
2000 2.593750e-003 2.500000e-004 2.593750e-003 0.000000e+000 6.384357E+002
2000 2.625000e-003 2.500000e-004 2.625000e-003 0.000000e+000 6.261579E+002
2000 2.656250e-003 2.500000e-004 2.656250e-003 0.000000e+000 5.974691E+002
2000 2.687500e-003 2.500000e-004 2.687500e-003 0.000000e+000 5.716078E+002
2000 2.718750e-003 2.500000e-004 2.718750e-003 0.000000e+000 5.387114E+002
2000 2.750000e-003 2.500000e-004 2.750000e-003 0.000000e+000 5.053962E+002
2000 2.781250e-003 2.500000e-004 2.781250e-003 0.000000e+000 4.726575E+002
2000 2.812500e-003 2.500000e-004 2.812500e-003 0.000000e+000 4.247678E+002
2000 2.843750e-003 2.500000e-004 2.843750e-003 0.000000e+000 4.054110E+002
2000 2.875000e-003 2.500000e-004 2.875000e-003 0.000000e+000 3.689991E+002
2000 2.906250e-003 2.500000e-004 2.906250e-003 0.000000e+000 3.744155E+002
2000 2.937500e-003 2.500000e-004 2.937500e-003 0.000000e+000 4.396797E+002
2000 2.968750e-003 2.500000e-004 2.968750e-003 0.000000e+000 5.597162E+002
2000 3.000000e-003 2.500000e-004 3.000000e-003 0.000000e+000 7.935292E+002
```

```
PKC10B.POS  1.327963E+003  7.491385E-007  7.500000E-007  9.988513E-001
(...)
```

```
PKC4K2U.POS  1.433332E+006  1.138794E-007  7.500000E-007  1.518392E-001
2000 0.000000e+000 2.500000e-004 0.000000e+000 0.000000e+000 4.489203E+008
```

(...)

801 S

DESCRICAO (comentários)

0 cartesiano

5 magnetodinamico

Fig. 8.13. Ficheiro CMG032K0.pss com resultados do pós-processamento ( $w/d=12$  e  $H_s=150$  A/m).

Finalmente, na Fig. 8.14 e Fig. 8.15 apresentam-se os resultados obtidos para  $H_s$  constante, também representados pelo quociente entre  $P_{Jd}$  (equação (8.1)) e a densidade de perdas  $P_{HI}$  (equação (3.44)), em função do quociente  $dte/d$ , por forma a tornar os resultados independentes da espessura concreta da chapa.

Na Fig. 8.14, o quociente  $P_{Jd}/P_{HI}$  é apresentado sob a forma de curvas para diferentes  $d/\delta$ . Na Fig. 8.14a, para  $w/d=3$ , das 21 frequências calculadas, foram seleccionadas as 10 curvas representadas. No entanto, como o gráfico fica bastante sobrecarregado, optou-se por apenas representar quatro curvas nos restantes gráficos da mesma figura. O que se pode concluir dos diversos gráficos da Fig. 8.14, é que, contrariamente ao que acontecia quando se resolvia o problema para  $B_{\max}^a$  constante,  $P_{Jd}/P_{HI}$  é igual a 1 a partir de uma certa distância da fronteira da chapa (i.e. para  $dte \geq 1,5$ ), pelo que aqui o problema poderá ser tratado como um

problema 1D, tal como acontece nas técnicas de homogeneização cujo princípio foi exposto na página 196 e aparece representado na Fig. 8.1.

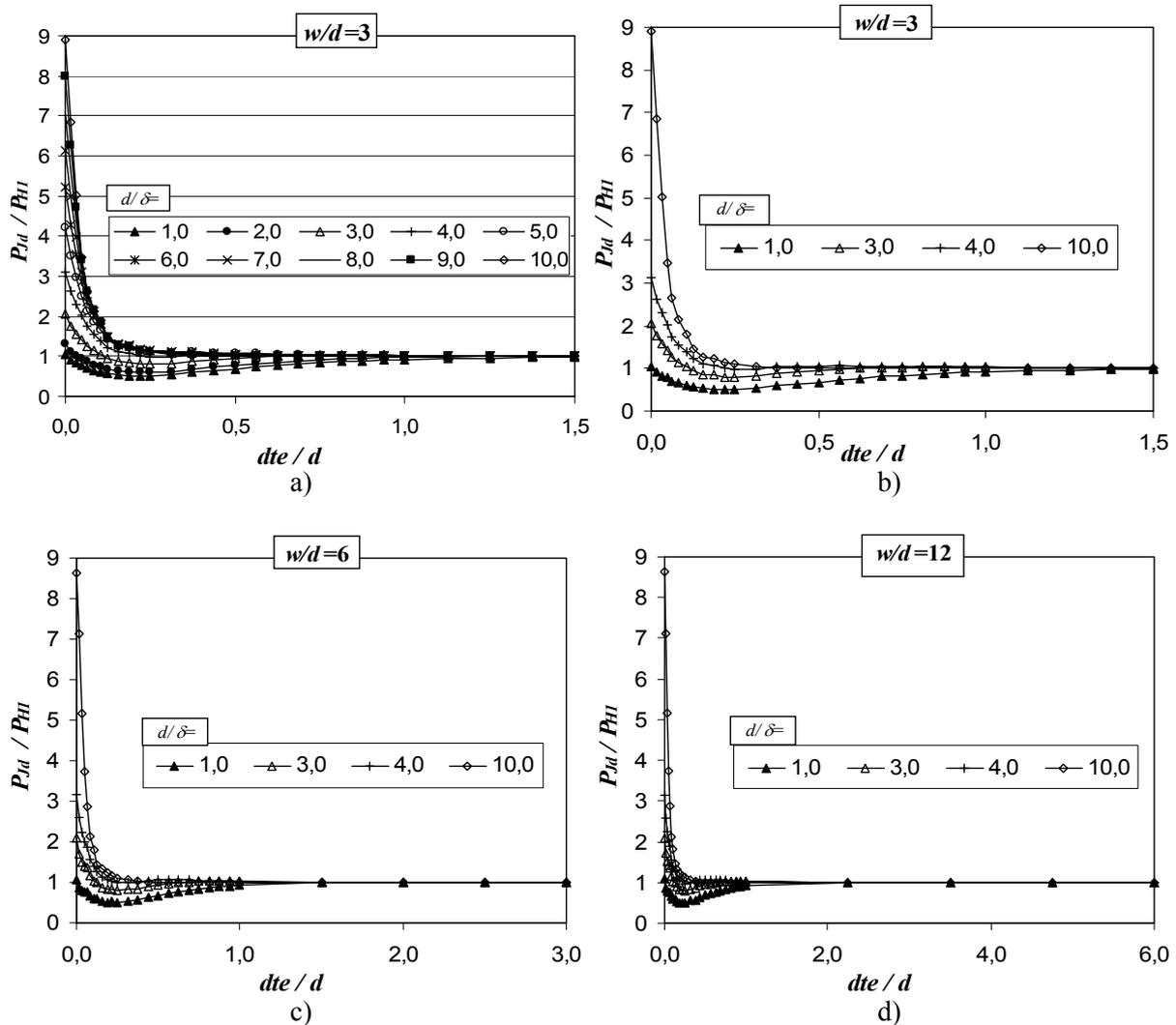


Fig. 8.14.  $P_{Jd}/P_{Hl}$  para  $H_s = 150$  A/m, constante. a)  $w/d=3$ , com curvas para 10 valores de  $d/\delta$ ; b)  $w/d=3$ , para 4 valores de  $d/\delta$ ; c)  $w/d=6$ ; d)  $w/d=12$ .

Para além disso, como se pode observar nos vários gráficos da Fig. 8.15, para cada  $d/\delta$  (ou seja, para cada frequência), as curvas de  $P_{Jd}/P_{Hl}$  são independentes de  $w/d$ , mesmo para  $dte < 1,5$ . Isto parece ser bastante importante, uma vez que permitirá ter curvas únicas para cada espessura da chapa e frequência, sendo portanto, em princípio, mais adequado utilizar estes resultados para o cálculo de condutividades equivalentes para implementação em técnicas de homogeneização.

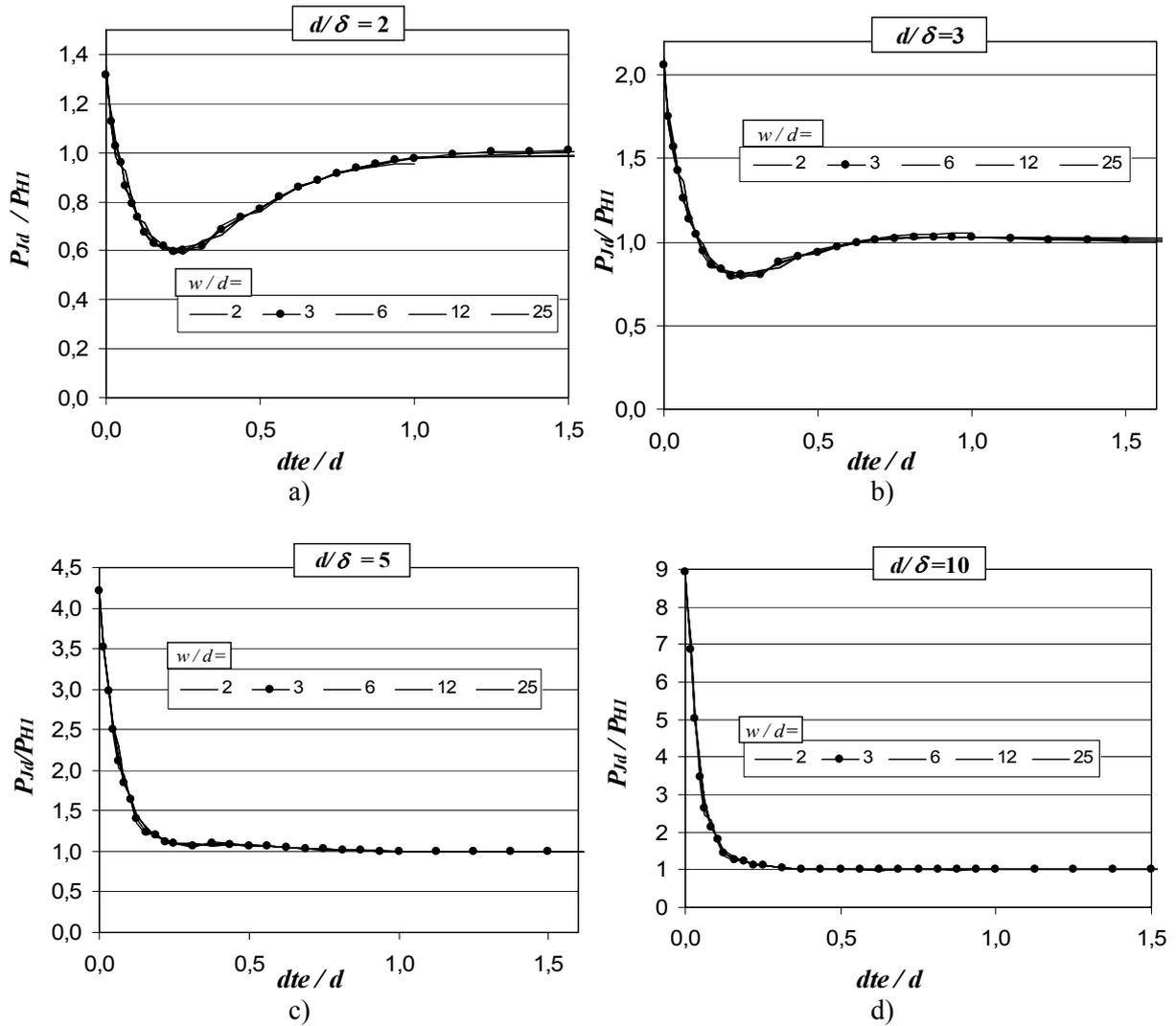


Fig. 8.15.  $P_{Jd}/P_{HI}$  para  $H_s = 150$  A/m, constante. a)  $d/\delta = 2$ ; b)  $d/\delta = 3$ ; c)  $d/\delta = 5$ ; d)  $d/\delta = 10$ .

## 8.4 Conclusões

Dos resultados apresentados, podem extrair-se as seguintes conclusões:

- Devido ao efeito de extremidades, a densidade local de perdas por correntes induzidas,  $P_{Jd}$ , obtidas dos resultados da modelação a 2D por elementos finitos, começa a variar à medida que  $dte$  diminui;
- Usando a metodologia com  $B_{\max}^a$  constante, de forma geral, obtém-se  $P_{Jd}/P_{BI} \neq 1$  e dependendo de  $w/d$  e  $d/\delta$ , o que poderá dificultar a sua aplicação em técnicas de homogeneização;
- Usando a metodologia com  $H_s$  constante conduz a  $P_{Jd}/P_{HI}$  dependendo apenas de  $d/\delta$  para  $dte < 1,5d$ , e  $P_{Jd}/P_{HI} = 1$  para  $dte \geq 1,5d$ ;

- Ambas as metodologias poderão ser relacionadas com condutividades equivalentes,  $\sigma_{eq}$ , especialmente a que utiliza  $H_s$  constante, e que se espera poderem vir a ser utilizadas em técnicas de homogeneização.

Com efeito, em relação a esta última conclusão, pensa-se que um  $\sigma_{eq}$  poderá ser aplicado junto à fronteira do bloco maciço através de técnicas de homogeneização, tal como se representou na Fig. 8.2. Os valores de  $\sigma_{eq}$  poderão ser obtidos de tabelas pré-calculadas que de alguma forma incorporarão os resultados das metodologias de que foram apresentados alguns resultados na Fig. 8.10, Fig. 8.14 e Fig. 8.15, ou por expressões que exprimam os mesmos resultados. Assim, espera-se que a condutividade equivalente  $\sigma_{eq}$  (S/m) seja algo semelhante a

$$\sigma_{eq} = \frac{P_J}{\pi^2 d^2 f^2 B_{\max}^a F_{sk\_eq} / 6} = f\left(\frac{P_{Jd}}{P_{B1}}, \sigma\right) \quad (8.4)$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{P_J} \frac{H_s^2}{d \delta_{eq}} \frac{\sinh \lambda_{eq} - \sin \lambda_{eq}}{\cosh \lambda_{eq} + \cos \lambda_{eq}} = f\left(\frac{P_{Jd}}{P_{H1}}, \sigma\right) \quad (8.5)$$

para  $B_{\max}^a$  constante e para  $H_s$  constante, respectivamente. O índice *eq* significa que as grandezas afectadas têm significados similares aos anteriormente definidos, mas que virão alterados pela imposição de  $\sigma_{eq}$ .

Contudo, os estudos preliminares entretanto efectuados, indicam duas dificuldades ainda não resolvidas: as técnicas de homogeneização implementadas em [Dular2003], utilizam uma metodologia baseada em  $B_{\max}^a$ , e em que a consideração dos efeitos de extremidades será em princípio mais difícil, de acordo com os resultados anteriormente apresentados, visto que  $P_{Jd}/P_{B1} \neq 1$  na zona central da chapa; por outro lado, a alteração do valor da condutividade, vai alterar o valor da densidade de corrente induzida em toda a chapa e não apenas junto à extremidade.

O assunto da aplicação concreta a técnicas de homogeneização permanece portanto em aberto. Nos capítulos seguintes, vão-se abordar os fenómenos térmicos, importantes também na modelação e projecto de dispositivos electromagnéticos e, em particular, das máquinas eléctricas.

## 9 TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MODELAÇÃO TÉRMICA POR ELEMENTOS FINITOS

Na presente dissertação, foi abordada até aqui a questão do cálculo das perdas no ferro, especialmente a consideração das perdas por correntes induzidas, em chapas estreitas e considerando efeito pelicular. No entanto, um dos principais objectivos desse estudo é a sua cada vez melhor inclusão na consideração dos fenómenos térmicos em máquinas eléctricas. Por essa razão, e apesar do assunto das perdas em materiais ferromagnéticos continuar um assunto em aberto, abordam-se já<sup>78</sup> as questões térmicas e a sua modelação por elementos finitos. Assim, neste capítulo será:

- Feita uma introdução aos fenómenos térmicos do ponto de vista físico;
- Apresentada a formulação para a resolução de problemas térmicos através da aplicação do método dos elementos finitos.

### 9.1 Introdução

Se existe vida no planeta Terra, isso deve-se, embora não exclusivamente, à transferência de energia, “calor”, do Sol por radiação. Com efeito, se o Sol, em média a 150 milhões de km de distância, e cuja luz viaja até à Terra em cerca de oito minutos, se apagassem instantaneamente, a vida na Terra extinguir-se-ia muito rapidamente pois o nosso planeta tornar-se-ia num astro gelado. Mas mesmo sem ser tão dramático, a “simples” diminuição das manchas solares pode levar a um arrefecimento acentuado da temperatura do nosso planeta, como ocorreu no período da Pequena Glaciação (de 1400 a 1850 da nossa era)<sup>79</sup>, no qual houve uma estranha frigidez na Europa (e também noutras regiões), onde, por exemplo, o rio Tamisa, em Londres, ou a laguna de Veneza congelaram com alguma regularidade. Por outro lado, um aumento da actividade solar, e conseqüentemente da radiação solar recebida na Terra,

---

<sup>78</sup> Em paralelo com a continuação do estudo das perdas que continua a ser objecto da nossa investigação, nomeadamente em colaboração com o Prof. Dr. Johan Gyselinck, de Liège e Bruxelas, e com o Eng. Alfredo de Blas, de Barcelona.

<sup>79</sup> Mais concretamente de 1645 a 1715 d.c., coincidindo com o período designado como **Mínimo de Maunder**, em que as manchas solares se tornaram extremamente raras: durante um período de 30 anos dentro do Mínimo de Maunder, os astrónomos observaram apenas cerca de 50 manchas solares (“*sunspots*”), contra as típicas 40000 a 50000 ([http://en.wikipedia.org/wiki/Maunder\\_Minimum](http://en.wikipedia.org/wiki/Maunder_Minimum)).

provocará um aumento da temperatura no planeta como tem ocorrido nos últimos cem anos, apesar de, segundo um relatório da NASA, o aumento da luminosidade ser responsável apenas por cerca de metade desse aumento de temperatura até 1940, e menos que isso a partir daí, com o aumento dos gases de efeito de estufa. Para além deste efeito, temos ainda as tempestades eléctricas na Terra provocadas pelas erupções solares (“*flares*”) e pelas ejeções de massa coronal. Os “*flares*” expõem muita energia sob a forma de raios X que, viajando à velocidade da luz, atingem a Terra em poucos minutos, causando perturbações e podendo avariar os sistemas de comunicação e de navegação via rádio. As ejeções de massa coronal (uma nuvem de plasma), mais lentas, demoram normalmente entre um e três dias a atingir a Terra, mas são ainda mais perigosas, podendo desactivar satélites e até sobrecarregar as redes eléctricas, provocando “apagões” generalizados nas redes de energia eléctrica [Suplee2004]pp10;28-33.

A transferência de calor tem portanto um papel muito importante em praticamente todos os processos ambientais, e, pensando agora numa escala menor, também nos processos industriais e nas áreas, vitais, da produção e conversão de energia. Com efeito, os fenómenos térmicos são uma questão importante, e até fundamental, para muitas máquinas. É neste âmbito, bem como no do rendimento e optimização das máquinas, que se enquadra o tema principal desta dissertação, o cálculo das perdas em materiais ferromagnéticos.

No entanto, os fabricantes têm normalmente concentrado esforços na melhoria do projecto electromagnético tendo tendência a abordar o projecto térmico superficialmente [Staton2001], talvez por uma menor sensibilidade da comunidade electrotécnica a esta questão do que, por exemplo, a comunidade mecânica. Por isso é também nosso objectivo aprofundar os nossos conhecimentos e tecnologia de elementos finitos para esta área. Vamos abordar de seguida os fenómenos de transferência de calor.

## **9.2 Fenómenos de Transferência de Calor**

Pode-se definir calor como “energia transferida em virtude de uma diferença de temperatura” [Rohsenow1985]pp.1.2. Sempre que existem diferenças de temperatura, o calor flui das zonas mais quentes para as zonas mais frias, i.e., das zonas de maior temperatura para as zonas de temperaturas mais baixas. Esta transferência de calor pode ser feita de três formas: por condução, por convecção e por radiação, que serão abordadas seguidamente.

### 9.2.1 Condução

A **condução** é a transferência de calor que ocorre a nível molecular entre duas partes de um corpo a diferentes temperaturas ou entre dois corpos em contacto físico. O processo de condução tem lugar ao nível molecular e envolve a transferência de energia das moléculas com maior energia para as com menor energia. A condução ocorre tanto nos sólidos, como nos líquidos e nos gases; no entanto, nos fluidos a convecção tem normalmente muito maior importância.

A um nível macroscópico, o fluxo de calor (i.e. a taxa de transferência de calor por unidade de área normal à direcção do deslocamento de calor) numa direcção  $x$  devido a condução e por unidade de superfície (e de tempo),  $F_x$ , em  $\text{W}/\text{m}^2$ , é descrito pela Lei de Fourier de condução de calor [Incropera1996] pp.3-4;45 [Rohsenow1985] pp.1.2-1.3,

$$F_x = -k \frac{dT}{dx} \quad (9.1)$$

em que  $k$  é a condutividade térmica em  $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  e  $T$  a temperatura absoluta<sup>80</sup> em K. Sendo  $F_x$  uma grandeza orientada, um vector, e não apenas um valor escalar, o sinal menos é necessário porque o calor é sempre transferido na direcção das temperaturas decrescentes.

O fluxo de calor por condução em  $W$ ,  $\phi_{hcond\_x}$ , atravessando, na direcção do eixo dos  $x$ , uma superfície com área  $S$ , supondo que  $F$  é perpendicular à superfície considerada, será dado por

$$\phi_{hcond\_x} = FS = -kS \frac{dT}{dx} \quad (9.2)$$

Generalizando para 3D, ter-se-á

$$\mathbf{F} = -k\nabla T = -\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + k \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}\right) \quad (9.3)$$

sendo  $\mathbf{F}$  o vector de fluxo de calor por condução, em  $\text{W}/\text{m}^2$ , e  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  os versores das direcções respectivas.

Valores para a condutividade térmica  $k$  podem facilmente ser encontrados em tabelas como a de [Holman1983] pp.8.

---

<sup>80</sup> O símbolo  $T$  é também empregue na presente dissertação para representar o período de grandezas periódicas, segundo pensamos sem riscos de confusão.

## 9.2.2 Radiação

A radiação, ou mais correctamente, a **radiação térmica**, consiste na radiação electro-magnética emitida por um corpo (sólido, líquido, e ainda por alguns gases) em virtude da sua temperatura e à custa da sua energia interna. O grosso da radiação térmica ocorre nos comprimentos de onda de 0,1 a 100  $\mu\text{m}$ . Contrariamente à condução e à convecção, a radiação não necessita de um meio material para se propagar. Com efeito, a radiação ocorre melhor no vazio e o seu valor depende das diferenças de temperatura. Ao nível macroscópico, o cálculo da radiação térmica é baseado na **Lei de Stefan-Boltzmann**. Este relaciona o fluxo de energia emitido por um **corpo radiante ideal** (“**corpo negro ideal**”<sup>81</sup>) com a quarta potência da temperatura [Incropera1996] pp.3-4, [Rohsenow1985] pp.1.4-1.5 [Dodd2002]

$$e_b = \sigma T^4 \quad (9.4)$$

em que  $e_b$  é a **potência emissiva** (ou **poder emissivo**, “*emissive power*”), em  $\text{W}/\text{m}^2$ ,  $\sigma$  a **constante Stefan-Boltzmann**, igual a  $5,669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ , e  $T$  a temperatura absoluta, em K. Como em geral as superfícies de engenharia não são corpos radiantes ideais, a lei anterior é modificada para

$$e'_b = \varepsilon \sigma T^4 \quad (9.5)$$

em que  $e'_b$  é o fluxo de calor emitido por radiação por uma superfície real, em  $\text{W}/\text{m}^2$ , e  $\varepsilon$  é a **emissividade**, com  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Esta propriedade fornece uma medida da eficiência da emissão de energia de uma superfície comparativamente com um corpo negro ideal.

Para calcular o fluxo de calor entre duas superfícies com áreas  $S_1$  e  $S_2$  em  $\text{m}^2$ , é necessário considerar o calor emitido e absorvido pelas superfícies. O fluxo de calor por radiação por unidade de superfície, em  $\text{W}/\text{m}^2$ , emitido pela superfície 1 e absorvido pela superfície 2,  $q''_{rad}$ , será dada por

$$q''_{rad} = \varepsilon_1 \sigma \mathcal{F}_{1-2} (T_1^4 - T_2^4) \quad (9.6)$$

---

<sup>81</sup> Um corpo teórico que absorve (em todas temperaturas) toda a radiação que incide nele. Um corpo negro ideal também se comporta como um irradiador ideal, emitindo mais energia do que um corpo comum. Essa “potência emissiva” é a “emissividade” e no caso do corpo negro, vale 1.

em que  $\varepsilon_1$  é a **emissividade** da superfície 1,  $\mathcal{F}_{1-2}$  é um factor que quantifica quão bem a superfície 2 é vista pela superfície 1 ( $\mathcal{F}_{1-2} \leq 1$ ),  $T_1$  é a temperatura da superfície 1, e  $T_2$  a temperatura da superfície 2, ambas em K.

O fluxo total de calor transmitido por radiação,  $q_{rad}$ , em W, será dado por

$$q_{rad} = S_1 \varepsilon_1 \sigma \mathcal{F}_{1-2} (T_1^4 - T_2^4) \quad (9.7)$$

Se a superfície 1 estiver totalmente envolvida pela superfície 2,  $\mathcal{F}_{1-2} = 1$ , e se designarmos agora as suas temperaturas por  $T_s$  e  $T_a$  respectivamente, a equação (9.6) toma a forma mais usual:

$$q_{rad}'' = \varepsilon_1 \sigma (T_s^4 - T_a^4) \quad (9.8)$$

em que  $T_s$  representa a temperatura da superfície a considerar, e  $T_a$  a temperatura da superfície do meio ambiente. Assim, nas mesmas condições, o **fluxo total de calor transmitido por radiação**, será dado por

$$q_{rad} = S_1 \varepsilon_1 \sigma (T_s^4 - T_a^4) \quad (9.9)$$

Valores típicos para a emissividade  $\varepsilon$  podem ser encontrados por exemplo em [Rohsenow1985] pp.4.27.

### 9.2.3 Convecção

A **convecção** é o processo de transferência de calor devido ao movimento de fluidos. Trata-se de uma transferência de energia ocorrendo dentro do fluido devido aos efeitos combinados da condução e do deslocamento do conjunto do próprio fluido. Pode ser classificada como **convecção natural** e **convecção forçada**.

Na convecção natural, o movimento do fluido é devido inteiramente às forças de impulsão resultantes das variações de densidade no fluido, enquanto que na convecção forçada, o deslocamento do fluido é devido a uma causa externa, normalmente um ventilador, uma bomba ou ventos [Incropera1996] pp.3-4, [Rohsenow1985] pp.1.4-1.5 [Dodd2002].

Independentemente da natureza particular do processo de convecção, a forma conveniente de apresentar a taxa de transferência de calor por convecção, i.e. o **fluxo de calor por convecção por unidade de superfície**,  $q_{conv}''$ , é através de

$$q_{conv}'' = h_c(T_s - T_f) \quad (9.10)$$

conhecida como a **Lei de Newton do Arrefecimento** (“*Newton’s law of cooling*”), em que  $h_c$  é o **coeficiente de convecção** em  $W/(m^2 \cdot K)$ ,  $T_s$  a temperatura da superfície, e  $T_f$  a temperatura média do fluido (também por vezes representada por  $T_a$ , temperatura ambiente, ou por  $T_\infty$ , i.e. a temperatura no infinito), ambas em K. O fluxo total de calor transmitido por convecção,  $q_{conv}$ , em W será dado por

$$q_{conv} = Sh_c(T_s - T_f) \quad (9.11)$$

em que  $S$  será a área da superfície de contacto. Quando o dispositivo a arrefecer está imerso no fluido, por exemplo rodeado de uma grande quantidade de ar, a temperatura  $T_f$  deve ser uma temperatura "afastada", medida longe da superfície do dispositivo considerado, fora da sua influência [Rohsenow1985]. Quando a ventilação se processa com o fluido confinado a um espaço reduzido (uma conduta de arrefecimento, um permutador de calor, uma camada fina de ar entre duas paredes, etc.), a temperatura  $T_f$  deve ser a temperatura média do fluido.

Uma tarefa difícil é o cálculo dos valores correctos para o coeficiente de convecção (natural ou forçada), que depende sobretudo da geometria da superfície e das propriedades físicas do fluido, sendo normalmente obtido com recurso a tabelas como a de [Incropera1996] pp.8 ou [Rohsenow1985] pp.4.25, a expressões como em [Dodd2002], [Incropera1996] pp.314-315 (usando os números de **Nusselt**, **Reynolds** e **Prandtl**), [Rohsenow1985], [Holman1986] e [Pinto1992], ou ainda com o recurso a *software* próprio de dinâmica de fluidos. Quando a convecção é forçada, o coeficiente de convecção depende também da velocidade e características do fluxo do fluido de refrigeração (se o fluxo é laminar ou turbulento, por exemplo). Apresenta-se a seguir uma expressão experimental simplificada para o cálculo do valor do coeficiente de convecção forçada, obtida a partir do valor do coeficiente de convecção natural [Holman1986] [Pinto1994b]:

$$h_{cf} = h_{cn} \left(1 + 1.3 \sqrt{v_f}\right) \quad (9.12)$$

em que  $h_{cf}$  é o **coeficiente de convecção forçada**,  $W/(m^2 K)$ ,  $h_{cn}$  é o **coeficiente de convecção natural**,  $W/(m^2 K)$ , e  $v_f$  é a **velocidade do fluido**, em m/s.

### 9.3 Modelação Térmica por Elementos Finitos

Feita uma introdução aos fenómenos térmicos, aborda-se seguidamente a formulação para a resolução de problemas térmicos através da aplicação do método dos elementos finitos.

#### 9.3.1 Modelos matemáticos para o problema térmico

O modelo clássico de difusão de calor para regime transitório é descrito por [Holman1986] [Coulomb1985] pp.42 [Incropera1996] pp.55 [Ozisik1977] pp.23

$$\rho c \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot (-k \nabla T) = q \quad (9.13)$$

em que  $\rho$  é a densidade específica em  $kg/m^3$ ,  $c$  o **calor específico** (também chamado **capacidade calorífica específica**), em  $J/(kg \cdot K)$ , e  $q$  a densidade de fontes térmicas em  $W/m^3$ . Refira-se também que, nalguns autores, em vez de  $\rho c$  aparece  $\rho_c = \rho c$ , em  $J/(m^3 \cdot K)$ .

O problema térmico de transferência de calor em regime permanente é dado pela seguinte equação às derivadas parciais [Holman1986], [Coulomb1985]:

$$\nabla \cdot (-k \nabla T) = q \quad (9.14)$$

Em materiais isotrópicos, a equação (9.13) simplifica-se [Coimbra1995] pp.55 para

$$\rho c \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T = q \quad (9.15)$$

e a (9.14), para regime estacionário, fica

$$-k \nabla^2 T = q \quad (9.16)$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 T = -\frac{q}{k}} \quad (9.17)$$

que é uma típica equação de Poisson.

O problema pode ser resolvido com a aplicação de condições de fronteira, dependentes do tipo de problema, nas superfícies dos limites do modelo, da fronteira entre materiais, e onde as temperaturas forem conhecidas. Assim, sendo  $n$  a direcção normal à superfície, apontando para fora, é costume considerar diferentes espécies de condições de fronteira [Coulomb1985] pp.42 [Incropera1996] pp.60-62 [Ozisik1977] pp.28-34:

- Condição de fronteira de Dirichlet (também designada por condição de fronteira de 1ª espécie): quando a temperatura é conhecida na superfície (dos limites do modelo ou entre materiais)

$$T = \text{constante} \quad (9.18)$$

- Condição de fronteira de Neumann (também designada por condição de fronteira de 2ª espécie): quando o fluxo de calor<sup>82</sup>,  $-k \frac{dT}{dn}$ , é constante e conhecido nas superfícies (cf. (9.1)). Pode ser de dois tipos:

- Tem-se uma superfície perfeitamente isolada (ou adiabática), pelo que não há trocas com o exterior. Neste caso tem-se uma condição de fronteira de Neumann homogénea,

$$-k \frac{dT}{dn} = 0 \quad (9.19)$$

- O fluxo de calor é calculado (ou medido) de forma exterior ao modelo. Neste caso tem-se uma condição de fronteira de Neumann não homogénea,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = F_n \quad (9.20)$$

em que  $F_n$  é o fluxo de calor na direcção da normal à superfície.

- Condição de fronteira de convecção (condição de fronteira de 3ª espécie): quando a parede da superfície, com temperatura  $T_s$ , está em contacto com um fluido gasoso ou líquido, de temperatura média  $T_f$ . Neste caso, da equação (9.10), o calor transferido por convecção será dado por

---

<sup>82</sup> Recorde-se que o sinal menos significa que o calor é sempre transferido na direcção das temperaturas decrescentes. Ou seja, se o valor ou módulo do vector fluxo de calor é  $k \frac{dT}{dn}$ , a direcção do vector fluxo de calor implica o sinal menos.

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c (T_s - T_f) \quad (9.21)$$

- Condição de fronteira de radiação (condição de fronteira não linear): para as trocas de calor entre a peça e o meio por radiação, da equação (9.8), teremos

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_a^4) \quad (9.22)$$

Quanto à densidade de fontes térmicas  $q$  (em  $\text{W}/\text{m}^3$ ), pode ter diversas origens, sendo o seu valor obviamente dado pela soma de todas as suas componentes. As que nos interessam mais directamente neste trabalho, são de dois tipos: as perdas por efeito de Joule nos condutores, e as perdas no ferro, constituídas pelas perdas por correntes induzidas (clássicas), perdas por histerese e perdas em excesso.

As perdas no ferro já foram abordadas de forma mais ou menos extensa nos capítulos anteriores.

As perdas por efeito de Joule nos condutores (i.e. a densidade de perdas,  $q$ , em  $\text{W}/\text{m}^3$ ) podem ser dadas por

$$\boxed{q = \rho_0 J^2} \quad (9.23)$$

em que  $\rho_0$  é a resistividade eléctrica, em  $\Omega \cdot \text{m}$ , à temperatura de referência  $T_0$ , em K. Se for necessário considerar a variação da resistividade com a temperatura [Pinto1994a] [Pinto1994b], serão dadas por

$$\boxed{q = \rho_0 (1 + \alpha' (T - T_0)) J^2} \quad (9.24)$$

em que  $\alpha'$  é o coeficiente de expansão linear em  $\text{K}^{-1}$ .

Para além destas perdas, pode ser necessário incluir também perdas mecânicas por atrito e perdas dieléctricas [Coimbra1995] pp.58: por exemplo, em cabos eléctricos isolados de muito alta tensão (para cima de 400 kV), as perdas no dieléctrico começam a ter algum significado face às perdas por efeito Joule nos condutores. Esta densidade de perdas no dieléctrico ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) é dada por

$$P_{diele} = 2 \pi f \varepsilon \operatorname{tg}(\delta) E^2 \quad (9.25)$$

em que  $\varepsilon$  é permitividade eléctrica (F/m),  $\text{tg}(\delta)$  é a tangente de perdas do dieléctrico, e  $E$ , o campo eléctrico (V/m).

### 9.3.2 Sistemas globais de equações algébricas em notação matricial

Para poder resolver a equação do modelo térmico é normalmente necessário recorrer a métodos numéricos. Assim, aplicando o método de Bubnov-Galerkin à equação para regime transitório, (9.13), e existindo fontes térmicas por efeito Joule cuja resistividade eléctrica do material varia linearmente<sup>83</sup> com a temperatura, obter-se-á um sistema global de equações algébricas que em notação matricial<sup>84</sup> será [Pinto1992] [Pinto1993] [Pinto1994a] [Pinto1994b] [Coimbra1995] pp.67

$$[\mathbf{M}][\mathbf{T}'] + ([\mathbf{S}] + [\mathbf{H}] + [\mathbf{R}] + [\mathbf{G}])[\mathbf{T}] = [\mathbf{J}] + [\mathbf{F}] + [\mathbf{P}] + [\mathbf{E}] - [\mathbf{Q}] \quad (9.26)$$

em que:

- $[\mathbf{M}]$  matriz relativa às capacidades térmicas,
- $[\mathbf{T}']$  vector das derivadas das temperaturas nodais em ordem ao tempo,  $dT/dt$ ,
- $[\mathbf{S}]$  matriz relativa às condutividades térmicas,
- $[\mathbf{H}]$  matriz referente à transferência térmica por convecção,
- $[\mathbf{R}]$  matriz referente à transferência térmica por radiação,
- $[\mathbf{G}]$  matriz de dependência da resistividade com a temperatura, (será nula se for utilizada (9.23) em vez de (9.24) para as perdas por efeito de Joule nos condutores),
- $[\mathbf{T}]$  vector das temperaturas nodais,  $T$ ,
- $[\mathbf{J}]$  vector das perdas por efeito de Joule nos condutores, parte independente<sup>85</sup> da temperatura (nota: a parte dependente passou para o primeiro membro, como  $[\mathbf{G}]$ ),
- $[\mathbf{F}]$  vector das fontes térmicas por perdas no ferro (e se existirem, também dieléctricas e mecânicas); pré-calculadas, normalmente num processador de correntes induzidas,

<sup>83</sup> Dentro das gamas de variação de temperatura esperadas.

<sup>84</sup> Note-se que nas referências de [Pinto...], normalmente não aparecem as matrizes coluna  $[\mathbf{J}]$  e  $[\mathbf{Q}]$  (nem  $[\mathbf{J}^e]$   $[\mathbf{Q}^e]$ ), aparecendo no entanto em [Coimbra1995] pp.63-69. Isto deve-se a que, como se poderá ver por exemplo na equação (10) de [Pinto1994b], o autor considera  $[\mathbf{F}] := [\mathbf{F}] + [\mathbf{J}] + [-\mathbf{Q}]$ .

<sup>85</sup> Sendo a densidade de perdas por efeito de Joule dada por  $q = \rho_0 (1 + \alpha'(T - T_0)) J^2$ , pode separar-se esta numa parte independente da temperatura,  $(1 - \alpha' T_0) \rho_0 J^2$  a ficar no segundo membro da equação, no vector  $[\mathbf{J}]$ , e numa parte dependente da temperatura,  $\rho_0 J^2 \alpha' T$ , a passar para o primeiro membro na matriz  $[\mathbf{G}]$ .

- $[\mathbf{P}]$  vector referente à transferência térmica por convecção (condição de fronteira),
- $[\mathbf{E}]$  vector referente à transferência térmica por radiação (condição de fronteira),
- $[\mathbf{Q}]$  vector dos fluxos de calor impostos como condição fronteira.

Para cada elemento finito, a equação do modelo térmico, (9.26), vem [Pinto1994b] [Coimbra1995] pp.67-69:

$$[\mathbf{M}^e][\mathbf{T}'^e] + ([\mathbf{S}^e] + [\mathbf{H}^e] + [\mathbf{R}^e] + [\mathbf{G}^e])[\mathbf{T}^e] = [\mathbf{J}^e] + [\mathbf{F}^e] + [\mathbf{P}^e] - [\mathbf{Q}^e] \quad (9.27)$$

em que:

- $[\mathbf{M}^e]$  matriz (3×3) de coeficientes relativa à capacidade térmica,
- $[\mathbf{T}'^e]$  vector (3×1) das derivadas das temperaturas nodais em ordem ao tempo,  $dT/dt$ ,
- $[\mathbf{S}^e]$  matriz (3×3) de coeficientes relativa à condução,
- $[\mathbf{H}^e]$  matriz (3×3) de coeficientes relativa à convecção,
- $[\mathbf{R}^e]$  matriz (3×3) de coeficientes relativa à radiação,
- $[\mathbf{G}^e]$  matriz (3×1) de coeficientes relativa à dependência da resistividade com a temperatura,
- $[\mathbf{T}^e]$  vector (3×1) das temperaturas nos nodos do elemento (incógnita),
- $[\mathbf{J}^e]$  vector (3×1) das perdas de Joule nos condutores, parte independente da temperatura (nota: a parte dependente passou para o primeiro membro, como  $[\mathbf{G}]$ ),
- $[\mathbf{F}^e]$  vector (3×1) das fontes térmicas constantes (independentes da temperatura), pré-calculadas,
- $[\mathbf{P}^e]$  vector (3×1) das fontes de convecção,
- $[\mathbf{Q}^e]$  vector (3×1) dos fluxos de calor impostos como condição de fronteira.

Para uma análise a 2D e elementos finitos triangulares de 1ª ordem, portanto com 3 nodos,  $i$ ,  $j$ , e  $k$ , estas matrizes são dadas [Coimbra1995] pp.67-69 [Pinto1994b] (e também [Pinto1992]pp.29-43 [Pinto1994a]), por:

$$[\mathbf{M}^e] = \rho c \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

$$S_{ij}^e = \frac{k}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (9.29)$$

$$[\mathbf{H}^e] = \frac{h_{cij} l_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{h_{cjk} l_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h_{cki} l_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

$$[\mathbf{R}^e] = \frac{h'_{rij} l_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{h'_{rjk} l_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h'_{rki} l_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

$$[\mathbf{G}^e] = -\rho_0 J^2 \alpha' \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

$$[\mathbf{T}^e] = \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

$$[\mathbf{J}^e] = (1 - \alpha' T_0) \rho_0 J^2 \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

$$[\mathbf{F}^e] = f_t \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.35)$$

$$[\mathbf{P}^e] = \frac{h_{cij} l_{ij} T_f}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{h_{cjk} l_{jk} T_f}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{h_{cki} l_{ki} T_f}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

$$[\mathbf{Q}^e] = \Phi_{cij} \frac{l_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Phi_{cjk} \frac{l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \Phi_{cki} \frac{l_{ki}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.37)$$

sendo (repetem-se algumas definições para clareza e comodidade de leitura):

- $b_i, b_j, c_i, c_j$ : coeficientes para o cálculo de  $S_{ij}$ , para o par de nodos  $i$  e  $j$ . Os coeficientes  $b_i$  e  $c_i$  são dados por

$$b_i = y_j - y_k \quad (9.38)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (9.39)$$

sendo os outros coeficientes  $S_{**}$ , para as outras combinações de nodos ( $S_{jk}, S_{ki}, S_{ii}, S_{jj},$  e  $S_{kk}$ ), calculados da mesma forma por permutação circular dos índices  $i, j,$  e  $k$ . As coordenadas do nodo  $i$  são dadas por  $x_i$  e  $y_i$

- $c$  calor específico, também chamado capacidade calorífica específica (J/kg·K)
- $f_i$  somatório de todas as fontes de calor pré-calculadas (por exemplo em processador de correntes induzidas) e introduzidas no pré-processador, W/m<sup>3</sup>
- $h_{c\ ij}$  coeficiente de convecção na aresta  $ij$  (entre nodos  $i$  e  $j$ ) do elemento finito, W/(m<sup>2</sup>·K)
- $h'_r$  coeficiente devido a que a modelação do fenómeno da radiação térmica introduz no modelo térmico uma forte componente não linear. Para se conseguir estabelecer o modelo pretendido, [Pinto1992]pp.29-43, considera-se então este coeficiente [Bathe1995]pp.408, em W/(m<sup>2</sup>·K):

$$h'_r = h_r (T^2 + T_f^2)(T + T_f) \quad (9.40)$$

- $h_r$  coeficiente de transferência de calor por radiação [W/(m<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>)]
- $h'_{r\ ij}$   $h'_r$  para a aresta entre os nodos  $i$  e  $j$  [W/(m<sup>2</sup>·K)]
- $J$  densidade de corrente eléctrica no elemento finito (A/m<sup>2</sup>)
- $k$  valor da condutividade térmica no elemento finito considerado [W/(m K)]
- $l_{ij}$  o comprimento da aresta  $ij$  do elemento finito (m)
- $T_f$  a temperatura do fluido (K)
- $\alpha'$  coeficiente de expansão linear (K<sup>-1</sup>)
- $\Delta$  área do elemento finito (m<sup>2</sup>)
- $\Phi_{c\ ij}$  fluxo de calor imposto como condição de fronteira na aresta  $ij$  (W/m<sup>2</sup>)
- $\rho$  densidade específica da chapa magnética (kg/m<sup>3</sup>)

- $\rho_0$  resistividade eléctrica ( $\Omega \cdot m$ ) à temperatura de referência  $T_0$

Para a análise em regime permanente, a aplicação do método de Bubnov-Galerkin à equação (9.14), dará agora origem ao seguinte sistema global de equações algébricas em notação matricial [Pinto1993] [Pinto1992] [Coimbra1995] pp.67-69:

$$([\mathbf{S}]+[\mathbf{H}]+[\mathbf{R}]+[\mathbf{G}]) [\mathbf{T}] = [\mathbf{J}]+[\mathbf{F}]+[\mathbf{P}]+[\mathbf{E}]-[\mathbf{Q}] \quad (9.41)$$

semelhante ao anterior, com a diferença de que desaparece o termo relativo à variação da temperatura com o tempo (com efeito, podia também ser obtida por simples retirada do termo relativo à dependência com o tempo na equação (9.26)).

Para resolver os problemas térmicos, correspondentes às equações (9.26) e (9.41) o nosso grupo utilizava, até este ponto, os processadores térmicos de elementos finitos [Pinto1994a] do nosso pacote de programas **CADdyMAG**. Estes processadores térmicos originais corriam num computador (do Centro de Informática da Universidade de Coimbra) VAX, da Digital Equipment Corporation (DEC), com sistema operativo VMS. Por forma a poder ter um pacote de elementos finitos que integrasse também os fenómenos térmicos em computador pessoal, PC, foi necessário proceder primeiro à conversão do processador original para regime permanente (sem radiação), “**TP21GN\_ALFAS**”, para PC em ambiente *Windows*, tal como se aborda de seguida em “10 CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/*WINDOWS*”. O processador para regime transitório ainda não foi convertido.

## 10 CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/*WINDOWS*

Neste capítulo será:

- Exposta a conversão efectuada do nosso processador térmico original (para regime permanente), “TP21GN\_Alfas”, do ambiente VAX/VMS para PC/*Windows*, bem como os diversos testes e optimizações efectuadas. O objectivo foi dotar o **CADdyMAG** também de um processador térmico funcionando em PC/*Windows*, mais rápido e com muito maiores capacidade de processamento;
- Apresentado o problema tomado como referência e que serviu para verificação das soluções. Este problema, resolvido inicialmente com o processador original, já durante os trabalhos de doutoramento, foi apresentado pelo autor com o título “*Steady-state finite element thermal simulation of a linear induction motor*”, nas 7<sup>as</sup> Jornadas Hispano Lusas de Ingeniería Eléctrica, que tiveram lugar em Madrid, Espanha, de 3 a 6 Julho de 2001.

### 10.1 Formulação e fluxograma do processador térmico original (“TP21GN\_ALFAS.exe”)

O processador térmico de regime permanente, sem considerar radiação (pois este fenómeno não é relevante para os casos em estudo no presente trabalho), é expresso pela equação seguinte [Pinto1994b] [Coimbra1995] pp.67-69

$$([S]+[H]+[G]) [T]= [J]+[F]+[P]-[Q] \quad (10.1)$$

que se obtém retirando os termos relativos à radiação, [R] e [E], da equação (9.41).

Para cada elemento finito, a equação (10.1) converte-se em

$$([S^e]+[H^e]+[G^e])[T^e] = [J^e]+[F^e]+[P^e]-[Q^e] \quad (10.2)$$

Cada uma das matrizes e vectores apresentados nas duas equações anteriores têm o significado apresentado em “9.3.2 Sistemas globais de equações algébricas em notação matricial”. Assim, para o processador em questão, utilizando elementos finitos triangulares de 1ª ordem, ou seja com 3 nodos, e sendo  $max\_pts$  o número máximo de nodos permitidos para o modelo, ter-se-á que:  $[S]$  em (10.1) é uma matriz de ordem  $(max\_pts \times max\_pts)$ , enquanto que  $[S^e]$ , em (10.2), é uma matriz  $(3 \times 3)$ , pois cada elemento tem apenas 3 nodos. Também, por exemplo,  $[T]$  é um vector com  $max\_pts$ , enquanto  $[T^e]$  é um vector com 3 pontos; ou, dito doutra forma,  $[T]$  é uma matriz vector com  $(max\_pts \times 1)$ , enquanto  $[T^e]$  é uma matriz vector com  $(3 \times 1)$  coeficientes, correspondentes aos 3 nodos do elemento finito.

Efectuando as somas matriciais da equação (10.1), agora já só para o número de pontos do problema concreto,  $n\_ptos$ , fica-se com

$$[S] [T]=[F] \quad (10.3)$$

em que<sup>86</sup>  $[S]:=([S]+[H]+[G])$  tem dimensão  $(n\_ptos \times n\_ptos)$ , e  $[F]:=([J]+[F]+[P]-[Q])$  tem dimensão  $(n\_ptos \times 1)$ . Assim,  $[S]$  representa agora a matriz global dos coeficientes e  $[F]$  a matriz total das fontes. Da mesma forma, da equação (10.2), a equação matricial relativa a um elemento finito com três nodos, torna-se agora

$$[S^e] [T^e]=[F^e] \quad (10.4)$$

em que  $[S^e]:=([S^e]+[H^e]+[G^e])$  e  $[F^e]:=([J^e]+[F^e]+[P^e]-[Q^e])$ .

É importante referir que o processador térmico ordena os nodos (e os respectivos valores de condições de fronteira e os dados dos elementos finitos por eles constituídos), aquando do seu carregamento para a memória, por forma a que no vector de temperaturas  $[T]$  da equação (10.3) surjam primeiro todos os potenciais (neste caso temperaturas) desconhecidos (i.e. “livres”) e só depois os conhecidos. Sendo  $n\_pot\_livres$  o número de potenciais livres (i.e. o número de nodos onde a temperatura é desconhecida), também as matrizes  $[S]$  e  $[F]$  em (10.3) são depois construídas de acordo com esse ordenamento dos nodos, pelo que essa equação pode ser particionada da seguinte forma:

---

<sup>86</sup> As variáveis usadas dentro do código em Fortran não são exactamente estas. No entanto, porque poderiam dar azo a algumas confusões, usam-se aqui as indicadas.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}}_{(n\_ptos \times n\_ptos)(n\_ptos \times 1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{desc} \\ \mathbf{T}_{conh} \end{bmatrix}}_{(n\_ptos \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{desc} \\ \mathbf{F}_{conh} \end{bmatrix}}_{(n\_ptos \times 1)} \quad (10.5)$$

em que:

$[\mathbf{S}_{11}]$  sub-matriz dos coeficientes correspondentes aos potenciais livres, de dimensão  $(n\_pot\_livres \times n\_pot\_livres)$

$[\mathbf{S}_{12}]$  e  $[\mathbf{S}_{21}]$  sub-matrizes dos coeficientes correspondentes à ligação entre os nodos com potencial livre aos nodos com potencial fixo (i.e. entre os nodos com potencial desconhecido e o nodos com potencial conhecido), de dimensões  $[(n\_ptos - n\_pot\_livres) \times n\_pot\_livres]$  e  $[n\_pot\_livres \times (n\_ptos - n\_pot\_livres)]$ , respectivamente. Note-se que  $[\mathbf{S}_{21}] = [\mathbf{S}_{12}]^T$

$[\mathbf{S}_{22}]$  sub-matriz dos coeficientes correspondentes aos potenciais fixos ou conhecidos, de dimensão  $[(n\_ptos - n\_pot\_livres) \times (n\_ptos - n\_pot\_livres)]$

$[\mathbf{T}_{desc}]$  sub-matriz vector dos potenciais livres, i.e. as temperaturas desconhecidas, de dimensão  $n\_pot\_livres$

$[\mathbf{T}_{conh}]$  sub-matriz vector dos potenciais fixos, i.e. as temperaturas conhecidas, de dimensão  $n\_pot\_livres$

$[\mathbf{F}_{desc}]$  sub-matriz vector das fontes correspondentes aos potenciais livres (e incluindo as condições de fronteira por convecção), de dimensão  $n\_pot\_livres$

$[\mathbf{F}_{conh}]$  sub-matriz vector das fontes (e incluindo as condições de fronteira por convecção) correspondentes aos potenciais fixos, i.e. as temperaturas conhecidas, de dimensão  $n\_pot\_livres$

Refira-se que normalmente o número de potenciais conhecidos é muito menor que o dos desconhecidos pelo que o número de potenciais desconhecidos,  $n\_pot\_livres$ , não é muito menor que o número total de potenciais,  $n\_ptos$ .

Desenvolvendo o sistema da equação (10.5) em ordem aos potenciais desconhecidos, fica-se com

$$[\mathbf{S}_{11}] [\mathbf{T}_{desc}] + [\mathbf{S}_{12}] [\mathbf{T}_{conh}] = [\mathbf{F}_{desc}] \quad (10.6)$$

ou seja

$$[\mathbf{S}_{11}] [\mathbf{T}_{desc}] = [\mathbf{F}_{desc}] - [\mathbf{S}_{12}] [\mathbf{T}_{conh}] \quad (10.7)$$

Na prática, a construção das matrizes deste sistema linear é feita percorrendo todos os elementos finitos e calculando para cada um deles a contribuição: das suas fontes, da geometria do elemento finito e das propriedades físicas do material que o constitui, das condições de fronteira existentes nas suas arestas, e dos eventuais potenciais conhecidos em cada um dos seus três nodos, para as matrizes globais  $[S_{11}]$ ,  $[F_{desc}]$  e  $[S_{12}]$ . Este é um processo algo complexo, embora bem descrito na literatura<sup>87</sup>, pelo que se omite aqui a descrição morosa da sua construção.

Fazendo  $[A]=[S_{11}]$  e  $[B]=[F_{desc}]-[S_{12}][T_{conh}]$ , tem-se que a equação a resolver, (10.7), constitui um sistema linear de equações algébricas na forma genérica

$$[A][X]=[B] \quad (10.8)$$

em que  $[A]$  é a matriz dos coeficientes, de dimensão  $(n_{pot\_livres} \times n_{pot\_livres})$ ,  $[X]$  é o vector das incógnitas, de dimensão  $n_{pot\_livres}$ , e  $[B]$  o vector dos valores conhecidos do lado direito, de dimensão  $n_{pot\_livres}$ .

Assim, o processador original [Pinto1992], designado por “TP21GN\_ALFAS” (em que “alfas” significa que utiliza os  $\alpha'$ , segundo a equação (9.24), para corrigir a resistividade com a temperatura), que permite resolver a equação do modelo térmico em regime permanente, equação (9.14), com convecção, tem o fluxograma indicado na Fig. 10.1.

A extensão \*.ter que aparece na figura era só utilizada nos processadores térmicos em VAX/VMS. Eram ficheiros de dados criados pelo pré-processador, CADyPRE, aos quais eram acrescentadas (num outro pré-processador só para problemas térmicos, já não utilizado) a indicação das arestas dos elementos finitos onde havia convecção e, se houvesse, radiação. Actualmente, os ficheiros \*.pre, gerados no pré-processador CADyPRE (após a conversão para Windows efectuada pelo autor no decorrer dos trabalhos de doutoramento), já incluem as arestas de convecção e/ou radiação, se existirem, pelo que a extensão \*.ter caiu em desuso.

---

<sup>87</sup> Por exemplo para o campo magnetostático, utilizando o **Método de Galerkin**, em [Salon1995] pp.12-16 e em [Chari2000]pp.326-330. Nas páginas seguintes desta última referência, é também apresentado um exemplo para um problema magnetostático não linear e outro para um problema com ímanes permanentes.

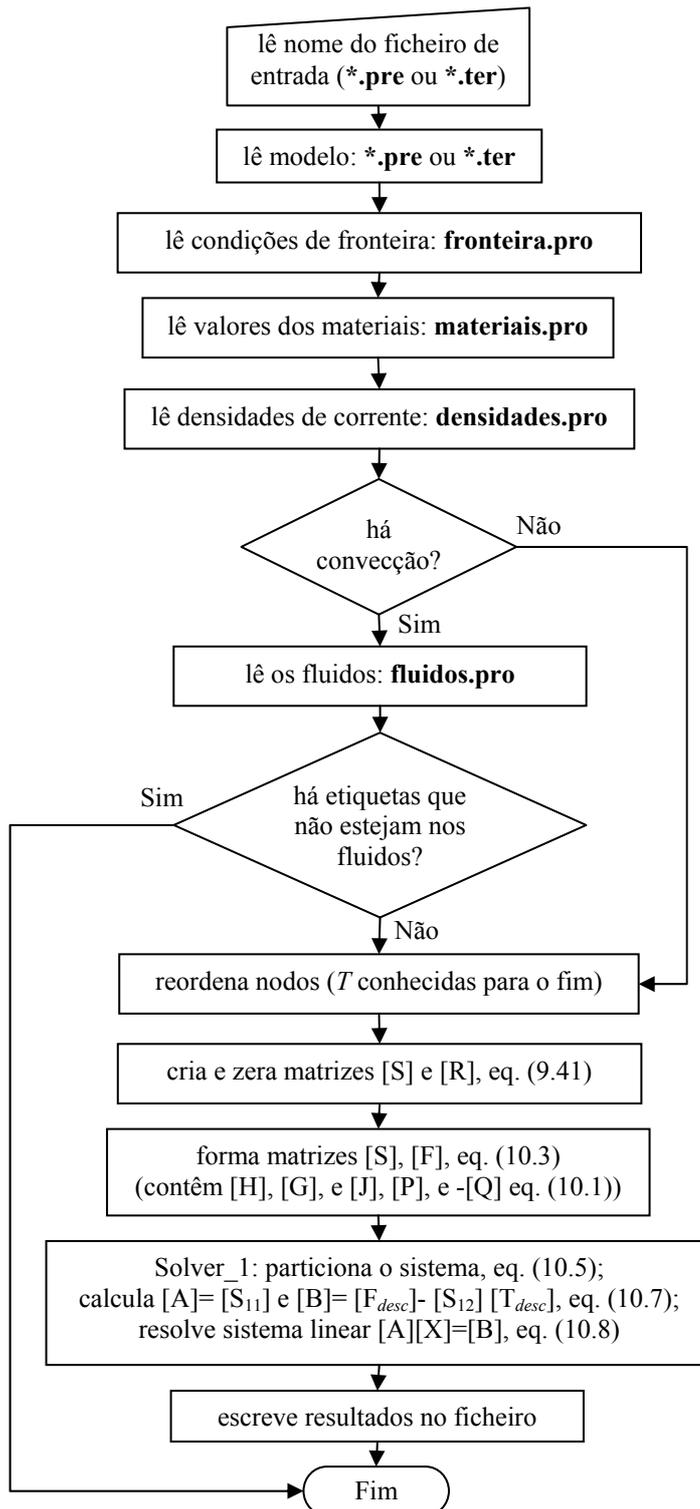


Fig. 10.1. Fluxograma do processador térmico original para VAX/VMS, para regime permanente e sem radiação, designado por “TP21GN\_ALFAS”.

## 10.2 Problema de referência para verificação do novo processador

Para testar e validar o processador depois de convertido, utilizou-se parte de um problema anteriormente resolvido e apresentado pelo autor desta dissertação em conferência internacional [Pinto2001], correspondente a um estudo em regime permanente de um motor de indução linear bloqueado, existente no Lab. de Máquinas Eléctricas (actualmente no Lab. de Accionamentos) do Departamento de Engenharia Electrotécnica do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, ISEC.

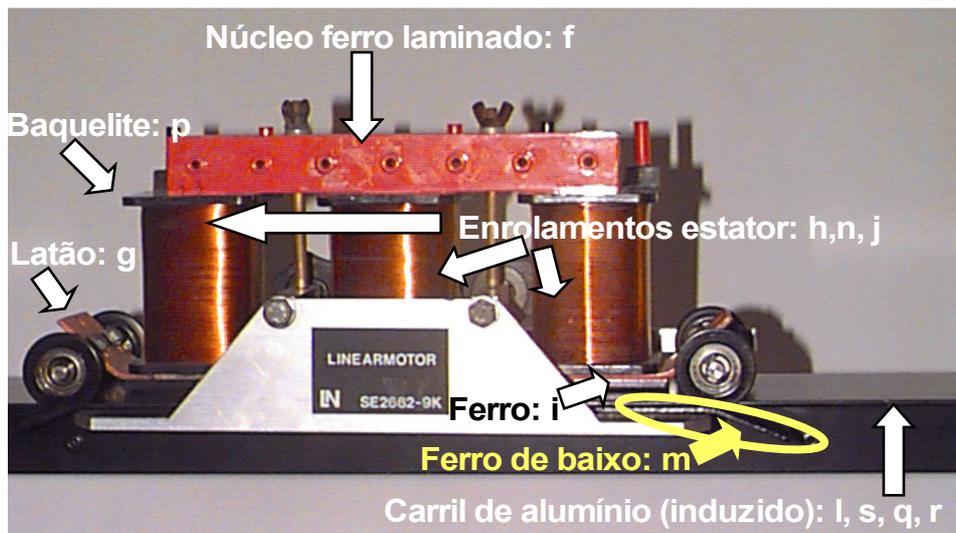


Fig. 10.2. Motor de indução linear.

Devido à simetria térmica, basta modelar metade do dispositivo. A malha de elementos finitos é apresentada na Fig. 10.3, para um entreferro de 8 mm entre o “Carril de alumínio” e o “Ferro de baixo: m”.

Na Fig. 10.4 apresentam-se as temperaturas obtidas para o modelo para o caso escolhido como problema de referência: com entreferro de 8 mm e corrente nos enrolamentos igual a 1,25 A (no trabalho original, o estudo era feito também para outro entreferro de 4 mm e dois outros valores de corrente).

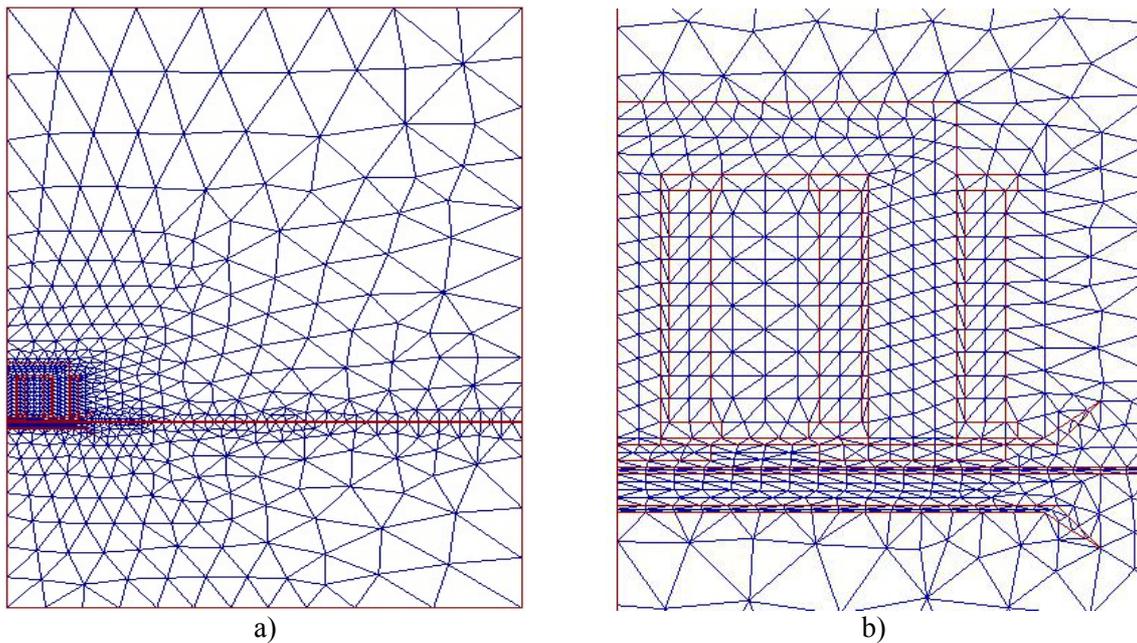


Fig. 10.3. Motor de indução linear, para entreferro de 8 mm: a) malha de elementos finitos (1047 nodos, 2009 elementos finitos); b) zoom da malha.

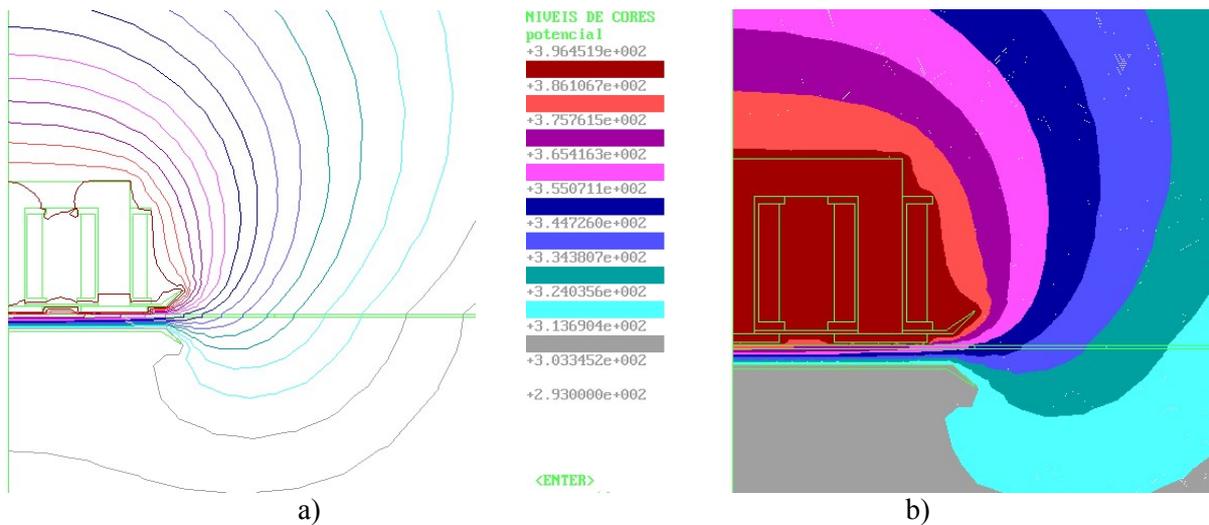


Fig. 10.4. Para entreferro de 8 mm e  $I = 1,25$  A nos enrolamentos do estator, zoom de: a) linhas isotérmicas espaçadas de 5 K; b) distribuição de temperaturas (“potencial”), em K, por níveis de cor.

O processador térmico, ao contrário dos outros processadores do **CADdyMAG**, lê os dados do problema dos seguintes ficheiros:

- **\*.pre**: malha de elementos finitos, com indicação das fronteiras onde há convecção (“lados de convecção”, i.e. arestas de elementos finitos na fronteira entre um sólido e um fluido, com convecção);
- **materiais.pro**: valores das propriedades dos materiais;

- **densidades.pro**: valores das densidades de corrente;
- **fluidos.pro**: valores dos coeficientes de convecção (e radiação) e temperaturas dos fluidos;
- **fronteira.pro**: valores das condições de fronteira de Dirichlet (potenciais fixos).

Apresentam-se de seguida os ficheiros de entrada dos dados do problema para o caso em questão (entreferro de 8 mm e  $I=1,25$  A).

Ficheiro dos MATERIAIS

7JLEEE - MADRID, Motor de Indução Linear.

\* Numero de pontos dos materiais:  
13

\* Características:

temp.	condut.ter.	resist.ele.	alfa(T0=293K)	calor esp.	dens.esp.	eti.	comentario/descricao
K	W/(K.m)	Ohm.m	1/K	J/(K.Kg)	Kg/m3	mat.	
0.29300E+03	<b>3.86000E+02</b>	<b>1.72400E-08</b>	3.93000E-03	3.83000E+02	8.95400E+03	n	bob. central, cobre
0.29300E+03	<b>3.86000E+02</b>	<b>1.72400E-08</b>	3.93000E-03	3.83000E+02	8.95400E+03	h	bob. da esqu. cobre
0.29300E+03	<b>3.86000E+02</b>	<b>1.72400E-08</b>	3.93000E-03	3.83000E+02	8.95400E+03	j	bob. da direita, cobre
0.29300E+03	<b>1.11000E+02</b>	<b>1.78650E+06</b>	0.00000E+00	3.85000E+02	8.52200E+00	g	Latão
0.29300E+03	<b>0.52000E+02</b>	<b>5.97988E+05</b>	0.00000E+00	4.60000E+02	7.70000E+03	i	ferro base das colunas
0.29300E+03	<b>0.52000E+02</b>	<b>9.75228E+04</b>	0.00000E+00	4.60000E+02	7.70000E+03	m	ferro de baixo (magnetic keeper)
0.29300E+03	<b>2.04000E+02</b>	<b>1.38949e+06</b>	4.46000E-03	8.96000E+02	2.70700E+03	l	aluminio baixo LIM
0.29300E+03	<b>2.04000E+02</b>	<b>6.16619e+04</b>	4.46000E-03	8.96000E+02	2.70700E+03	s	Aluminio a seguir
0.29300E+03	<b>0.52000E+02</b>	<b>7.39200e+02</b>	0.00000E+00	4.60000E+02	7.70000E+03	f	ferro nucleo alfa 5.20000E-03 Tese Dr.AP
0.29300E+03	<b>2.04000E+02</b>	<b>2.65500E-08</b>	4.46000E-03	8.96000E+02	2.70700E+03	q	Aluminio a seguir
0.29300E+03	<b>2.04000E+02</b>	<b>2.65500E-08</b>	4.46000E-03	8.96000E+02	2.70700E+03	r	Aluminio fim do carril
0.29300E+03	<b>0.02580E+00</b>	<b>0.00000E+00</b>	0.00000E+00	1.00600E+03	1.20000E+00	a	Ar
0.29300E+03	<b>1.40000E+00</b>	<b>0.00000E+00</b>	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	p	Baquelite isolante das bobines

$I=1,25$  A, 50Hz, 8mm 30/04/2001

A PARTIR DA LINHA ANTERIOR JÁ NÃO É LIDO

Nota: os materiais "g, i, m, l, s, f" têm as perdas por correntes induzidas e histerese introduzidas na resistividade, tendo  $J=1$ , no ficheiro densidades.

alfas: ferro 5.20000E-03 TESE DR.AP  
latão 1.50000E-03 J. Chatelain, Tomo I, Tabela 1.33.  
J. Chatelain, Tomo I, Tabela 1.33. Esta tabela tem valores ligeiramente diferentes para resistividade, cond. térmica

Fig. 10.5. Ficheiro **materiais.pro** com propriedades dos materiais, contendo também as perdas por efeito de Joule e por histerese para o problema em questão.

O ficheiro **materiais.pro** tem as diversas propriedades dos materiais utilizadas para o problema, tal como se pode ver na Fig. 10.5. Tratando-se de um problema em regime permanente, apenas são usadas três colunas das “\* *Características*”: as relativas à condutividade térmica (segunda coluna), à resistividade (terceira coluna) e à etiqueta dos materiais (sétima coluna). Chama-se também a atenção para que, sendo o formato dos ficheiros apresentados nas figuras seguintes (da Fig. 10.5 à Fig. 10.8) comum também ao processador térmico em regime transitório e aos modelos também com radiação, aparecem nestes ficheiros dados que apenas seriam utilizados para aqueles problemas, sendo portanto ignorados no processador para regime permanente e sem radiação. Assim, para maior clareza de leitura, nas quatro figuras seguintes, aparece a itálico, tudo o que são comentários, e a negrito, os dados que são efectivamente usados para o problema em questão.

Note-se que, tal como é indicado nesta figura, o texto apresentado a partir da linha “*I=1,25 A, 50Hz, 8mm 30/04/2001*”, inclusive, é apenas comentário para o utilizador. Assim, aparece a indicação acerca da forma como as perdas no ferro por correntes induzidas e histerese (i.e. as fontes térmicas constantes da equação (9.35)) são introduzidas no modelo: os materiais "g, i, m, l, s, f" da Fig. 10.2 têm a densidade de perdas por correntes induzidas e histerese ( $W/m^3$ ) introduzidas na resistividade (valores sublinhados), tendo  $J=1 A/m^2$  no ficheiro **densidades.pro**. Com efeito, observando a equação (9.23),  $q = \rho_0 J^2$ , percebe-se que é possível fazer a introdução de perdas no modelo usando um subterfúgio: fazer  $J=1 A/m^2$  e forçando  $\rho_0$  a tomar o valor das perdas que se querem introduzir, neste caso a densidade de perdas por efeito de Joule ( $W/m^3$ ), devidas às correntes induzidas no ferro e no alumínio do carril, e também as perdas no ferro do núcleo, da base das colunas e do “*magnetic keeper*”.

Note-se também que, na impossibilidade actual de aplicar as perdas exactas em cada elemento finito, estas são aplicadas em cada material em valor médio: para cada etiqueta diferente (correspondendo a um material diferente), foi calculado o valor total das perdas, dividiu-se pelo volume (ou melhor, pela área, tratando-se de um problema a 2D) e esse valor médio das perdas foi aplicado a cada etiqueta. Por isso aparecem quatro etiquetas diferentes para o carril de alumínio (l, s, q, r), pois foram considerados quatro valores médios das perdas (que são máximos por baixo do motor de indução linear, etiquetas l e s, e desprezadas nos limites do modelo, etiquetas q e r).

Os valores dos “alfas”, coeficiente de dilatação linear,  $\alpha'$ , apesar de aparecerem no ficheiro da Fig. 10.5, nesta fase eram introduzidos directamente no código fonte do processador térmico em regime permanente. Isto obrigava a recompilar um novo processador

para cada problema que tivesse materiais com etiquetas ou materiais diferentes. Esta situação foi corrigida na conversão para PC/*Windows*.

Apresenta-se na Fig. 10.6 o conteúdo do ficheiro **densidades.pro**.

```

Ficheiro das DENSIDADES

Motor de Indução Linear, 7JLEEE, Abr 2001

* Inicio do calculo:
0.000E+00

* Fim do calculo:
2.400E+04

* Passo de integracao:
6.000E+01

* Numero de valores de densidades:
11

* Caracteristicas:

```

Tempo	dens.cor.	eti.	
0.000E+00	1.660E+06	n	Bobina central, direita, I= 1,25 A
0.000E+00	1.660E+06	h	Bobina direita, esquerda
0.000E+00	1.660E+06	j	Bobina direita, direita
0.000E+00	1.000E+00	f	ferro nucleo
0.000E+00	1.000E+00	i	ferro base das colunas
0.000E+00	1.000E+00	m	ferro de baixo (magnetic keeper)
0.000E+00	1.000E+00	g	latão
0.000E+00	1.000E+00	l	aluminio baixo LIM
0.000E+00	1.000E+00	s	aluminio a seguir (2º troço)
0.000E+00	0.000E+00	q	aluminio a seguir: 3º troço do carril
0.000E+00	0.000E+00	r	aluminio a seguir: fim do carril

Fig. 10.6. Ficheiro **densidades.pro** com as densidades de corrente nas bobinas e com  $J=1 \text{ A/mm}^2$  nos materiais onde se pretende introduzir as densidades de perdas térmicas calculadas no modelo magnetodinâmico.

Neste ficheiro **densidades.pro**, aparecem os valores das densidades de corrente nas três bobinas ( $J=1,66 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ ) e, tal como referido anteriormente, aparece  $J=1 \text{ A/m}^2$  nos materiais onde queremos introduzir as perdas anteriormente calculadas no modelo electromagnético, e  $J=0$  onde são desprezadas (aluminios com etiquetas q e r).

O conteúdo do ficheiro **fluidos.pro** é o que se segue.

```

Ficheiro criado pelo modulo FLUIDOS

Motor de Indução Linear: Aquecimento.
7JLEEE

* Numero de fluidos diferentes:
1

* Fluidos:
coefic.conveccao  temperatura      coefic.radiacao  etiq.  nome
W/(m2.K)          K                W/(m2.K)        corr.  fluido
0.100000000E+02  0.293000000E+03  4.500000000E-08  F      ferros f i m

0.100000000E+02  0.293000000E+03  4.500000000E-08  B      bobinas
0.100000000E+02  0.293000000E+03  4.500000000E-08  P      baquelite
0.100000000E+02  0.293000000E+03  4.500000000E-08  A      alumínio

```

Fig. 10.7. Ficheiro **fluidos.pro** com o valor dos coeficientes de convecção e temperaturas dos fluidos.

Neste ficheiro é introduzido o valor do coeficiente de convecção<sup>88</sup>, da equação (9.21),  $h_c=10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$  e da temperatura média do fluido, neste caso ar,  $T_f = 293 \text{ K}$  (aparece na figura como “temperatura”).

Finalmente apresenta-se o ficheiro com a condição de fronteira de Dirichlet a aplicar nos limites do modelo, i.e. a temperatura ambiente.

```

Ficheiro criado pelo modulo FRONTEIRA

* Numero de etiquetas diferentes:
1

* Condiçoes Dirichelet:
temperatura-K  etiq.
0.293000000E+03  T    20§C

```

Fig. 10.8. Ficheiro **fronteira.pro** contendo os valores das condições de fronteira de Dirichlet a aplicar.

<sup>88</sup> Aparecem os valores para quatro etiquetas de convecção diferentes porque se pretendia, na altura da resolução do problema original em VAX, para as 7JLEEE, considerar diferentes valores dos coeficientes de convecção para os ferros, as bobinas, a baquelite e o alumínio. No entanto devido a um *bug* no programa (que embora tendo sido detectado na altura, não foi possível determinar e corrigir a sua origem) o problema teve que ser resolvido apenas com um coeficiente de convecção igual para todos os materiais em contacto com o ar. Assim o coeficiente de convecção indicado com a etiqueta F inicialmente apenas para os “ferros f i m”, acabou por ter que ser aplicado também às bobinas, à baquelite e ao alumínio. Este *bug* só foi possível localizar e corrigir já em ambiente *Windows*, usando as ferramentas de *debugging* do Fortran PowerStation 4.0, do *Microsoft Developer Studio*.

Apresentado o caso de referência que será usado para verificação da correcta conversão do processador térmico de regime permanente do ambiente VAX/VMS para PC/*Windows*, passa-se então a apresentar a referida conversão.

## **10.3 Importação do código para PC, recompilação e testes de novos “solvers”**

### **10.3.1 Primeira fase: processador CADyTER (com criação da matriz global de coeficientes, [S])**

O primeiro passo foi importar o código em Fortran 77 do computador VAX/VMS para um PC/*Windows* e para o compilador a utilizar, também o *Fortran PowerStation 4.0* (“FPS 4.0”), do *Microsoft Developer Studio*, 1995. Esta importação não causou problemas. No entanto, ao tentar recompilar o código existente no novo processador para ambiente *Windows*, surgiu um problema: para a resolução do sistema de equações, o programa do VAX usava uma rotina exterior (“*external f04atf*”) que devia ser ligada (“*linked*”) com o código desenvolvido em Fortran e cujo código fonte não estava disponível nem existia no *Microsoft Fortran PowerStation 4.0*. Foi portanto necessário encontrar outra forma para a resolução do sistema de equações da equação (10.7), posto na forma da equação (10.8). Optou-se por testar e usar as rotinas para resolução de sistemas lineares disponíveis na “*IMSL Math Library*” de “*FPS 4.0 Books Online*”, fornecidas junto com o compilador.

No total, foram testadas seis rotinas, como será descrito nas páginas seguintes, para as cinco primeiras (a sexta, DLSLXD, só será descrita em “10.3.2 Segunda fase: processador CARTyTERB (com criação directa de vector de coeficientes, [SV], sem criar a matriz de coeficientes, [S]”). Todas as rotinas usam dupla precisão (i.e. definidas usando 8 bytes e precisas até ao 14º ou 15º dígito decimal), tal como indicado pela primeira letra do nome da rotina, “D”.

Tabela 10.1. Rotinas para resolução de sistemas de equações lineares (da *IMSL Math Library* de *FPS 4.0 Books Online*) testadas para processador térmico em regime permanente para PC.

Nome da rotina na <i>IMSL Math Library</i>	Descrição
DLSLRG	Resolve um sistema real genérico de equações lineares <u>sem</u> refinamento iterativo ( <i>real general system of linear equations without iterative refinement</i> ).
DLSARG	Resolve um sistema real genérico de equações lineares <u>com</u> refinamento iterativo ( <i>real general system of linear equations with iterative refinement</i> ).
DLSADS	Resolve um sistema real simétrico positivo de equações lineares com refinamento iterativo ( <i>real symmetric positive definite system of linear equations with iterative refinement</i> ).
DLSASF	Resolve um sistema real simétrico de equações lineares com refinamento iterativo ( <i>real symmetric system of linear equations with iterative refinement</i> ).
DLSLXG	Resolve um sistema real esparso de equações lineares por eliminação Gaussiana ( <i>sparse system of linear algebraic equations by Gaussian elimination</i> ), com ou sem refinamento iterativo.
DLSLXD	Resolve um sistema real esparso simétrico positivo definido de equações lineares por eliminação Gaussiana ( <i>sparse system of symmetric positive definite linear algebraic equations by Gaussian elimination</i> ), com ou sem refinamento iterativo.

O “refinamento iterativo”, referido na Tabela 10.1, pode normalmente aumentar a precisão de uma solução numérica “bem condicionada”, usando no interior da rotina uma precisão que é o dobro da dos dados de entrada. Neste caso, sendo a matriz  $[A]$ , equação (10.8), de dupla precisão, a rotina funcionará em quádrupla precisão. No entanto, só funciona se a matriz não estiver demasiado mal acondicionada. Caso esteja, o processador resolve o sistema mas devolve a mensagem: “*Error — Matrix is too ill-conditioned; Iterative refinement can often improve the accuracy of a well-posed numerical solution*”.

O novo processador para PC/*Windows* foi então compilado (usando de cada vez apenas uma das rotinas referidas na Tabela 10.1) para um máximo de 1300 nodos, 2600 elementos, e 400 lados com convecção.

Tal como referido anteriormente, para a análise comparativa das diversas rotinas, bem como do seu bom funcionamento e do processador convertido para PC/*Windows*, foi utilizado o problema apresentado em “10.2 Problema de referência para verificação do novo processador”, anteriormente resolvido no processador “TP21GN\_ALFAS” em VAX/VMS. Trata-se da análise térmica em regime permanente de um motor de indução linear, bloqueado.

A malha original, “tt.pre”, tinha 1047 nodos, 2009 elementos e 270 lados (de elementos finitos) com convecção.

Os resultados da resolução do problema original com os novos processadores compilados para utilizar cada uma das rotinas de resolução de sistemas de equações (“solvers”), começando pelas mais genéricas e indo passando para outras que tirassem partido das particularidades do sistema da equação (10.8), são apresentados na Tabela 10.2. Os tempos de resolução referem-se ao computador de trabalho na altura, um Pentium II a 350 MHz, com 512 MB de RAM e sistema operativo *Windows 98*.

Tabela 10.2. Resultados da comparação de rotinas para resolução de sistemas lineares (da *IMSL Math Library*), testadas para processador térmico em regime permanente para PC/*Windows*.

Modelo .pos	Solver nº – Rotina da IMSL (aplicação)	Tempo total (s)	Observações
TT8SE01	1 – DLSLRG (Matrizes gerais)	26,2	Resultados iguais aos anteriormente obtidos no VAX/VMS
TT8SE02	2 – DLSARG (Matrizes gerais – precisão elevada, “PE”)	26,4	PE “não altera” o tempo de cálculo. Resultados gravados, com “precisão simples”, <u>exactamente</u> iguais aos do Solver 1
TT8SE03	3 – DLSADS (Matrizes positivas definidas – PE)	14,3	Resultados <u>exactamente</u> iguais aos do Solver 1
TT8SE04	4 – DLSASF (Matrizes simétricas – PE)	6,0	Não dá erro de “ <i>matrix is too-ill conditioned for iterative refinement</i> ”
TT8SE05	5 - DLSLXG (Matrizes esparsas – PE). Seleccionado parâmetro para definir “refinamento iterativo”	3,7	O solver devolveu a mensagem: “ <i>matrix is too-ill conditioned for iterative refinement</i> ”. Mas como os resultados gravados (precisão simples) dão iguais aos anteriores, não é um problema.
TT8SE06	5b – DLSLXG (Matrizes esparsas). Sem “refinamento iterativo”	3,5	Resultados iguais aos anteriores

Nome dos modelos: TT: Testes (processador) Térmico; 8 mm; SE: Sem (tirar partido da) Esparsidade.

Os quatro primeiros processadores, utilizando os *solvers* indicados, deram exactamente os mesmos resultados que os do problema original (sendo a temperatura guardada com oito dígitos, apenas num ou noutra nodo o oitavo dígito variava para o algarismo imediatamente anterior ou seguinte). Assim, destas, a melhor rotina seria a DLSASF que tira partido do facto da matriz dos coeficientes, matriz  $[S_{11}]$ , equação (10.7), ser uma matriz simétrica, pelo que é a mais rápida a resolver a equação matricial. No entanto, o processador original não tirava partido da esparsidade da matriz  $[S_{11}]$ , tal como se pode depreender da análise do fluxograma da Fig. 10.1, página 233. Também nenhum dos quatro primeiros “solvers” tira partido da esparsidade. Assim, foi testada uma outra rotina, a DLSLXG, que resolve sistemas de equações lineares algébricas com matriz de coeficientes esparsa, por eliminação Gaussiana. Para isso, foi preciso alterar o código do processador para, após ter construído o sistema de

equações lineares a resolver na forma  $[A][X]=[B]$ , converter  $[A]=[S_{11}]$  para a forma de entrada de dados da rotina DLSLXG. Assim, neste processador, é primeiro criada a matriz  $[S_{11}]$  da qual são extraídos apenas os coeficientes não nulos e armazenados num vector  $[S_{esp}]$ . Por simplicidade de leitura, e porque esta não foi a solução final adoptada, não se apresentam aqui mais detalhes sobre essa conversão. Esta rotina foi utilizada com e sem refinamento iterativo (5 – DLSLXG e 5b – DLSLXG, respectivamente) e, apesar de a matriz estar mal condicionada, os resultados davam o mesmo que os anteriores. Isto dever-se-á a que os dados originais estavam guardados em disco com precisão simples, sendo também os resultados guardados em precisão simples pelo que, funcionando o processador em precisão dupla, os erros numéricos serão truncados na solução guardada em disco. Assim, a utilização do refinamento iterativo (precisão quádrupla dentro da rotina de resolução do sistema linear) não deverá adicionar maior precisão nos resultados finais guardados, tal como se concluiu dos resultados e se refere na Tabela 10.2 para esta rotina DLSLXG.

Assim, sendo as soluções iguais às originais obtidas no VAX/VMS, concluiu-se que, nesta primeira fase, a melhor rotina a utilizar seria esta última, a 5b-DLSLXG, sem tentar fazer refinamento iterativo, pois era a mais rápida.

Foi também nesta fase corrigido o *bug* referido na nota de rodapé 88, página 232, permitindo assim usar os diferentes valores de coeficientes de convecção que se pretendam.

Concluiu-se assim uma parte da primeira fase da importação e testes do processador térmico em regime permanente para PC/*Windows*, tendo-se designado este processador 5b-DLSLXG por **CADyTER**.

No entanto, o número máximo de nodos e elementos permitidos por este processador, iguais aos do VAX/VMS (1300 nodos, 2600 elementos finitos e 400 lados com convecção), era manifestamente insuficiente pelo que o **segundo objectivo** era obviamente **aumentar o número de nodos disponíveis**.

Assim, começou-se por simplesmente aumentar as variáveis que indicavam o número máximo de nodos e elementos permitidos pelo processador, respectivamente para  $max\_pts=6000$  nodos e  $max\_els=12000$  elementos. No entanto, como se pode ver na Fig. 10.1, página 233, o processador começava por criar as matrizes  $[S]$  e  $[R]$ , da equação (9.41), ambas com dimensão “ $max\_pts \times max\_pts$ ” (fixa independentemente do número de nodos do modelo), guardando reais em dupla precisão, i.e. 8 bytes. Assim, só estas duas matrizes ocupavam  $(6000 \text{ nodos})^2 \times (8 \text{ bytes}) \times 2 = 576 \times 10^6$  bytes (aproximadamente 549, 3

MB de memória<sup>89</sup>)! Ou seja, só para a matriz [S] continuavam a ser necessários mais de  $288 \times 10^6$  bytes, isto para além das outras estruturas de dados do processador (contra os “apenas”  $27 \times 10^6$  bytes necessários para a matriz [S] do processador original com os seus 1300 nodos máximos). Este processador não conseguia correr no computador, apesar dos seus 512 MB de RAM.

Foi ainda assim criado um processador para um máximo de 3000 nodos /6000 elementos, o qual resolveu o mesmo problema da Tabela 10.2 em cerca de 4 segundos (em vez dos 3,5 necessários para o processador de 1300 nodos; a diferença está no tempo necessário para criar e manipular as matrizes maiores), sendo os resultados iguais.

Contudo, 3000 nodos continuava a ser muito pouco e o processador continuava a usar demasiada memória (cerca de  $200 \times 10^6$  bytes). Assim, este processador de 3000 nodos não foi guardado e tiveram que se adoptar outras estratégias, que se apresentam de seguida. Resta apenas referir que embora a malha original usada nesta fase, tt.pre, tivesse sido previamente renumerada no CADyPRE (já desde o problema original no processador para VAX/VMS), nenhum dos processadores apresentados na Tabela 10.2 tirava partido desta renumeração dos nodos.

### **10.3.2 Segunda fase: processador CARTyTERB (com criação directa de vector de coeficientes, [SV], sem criar a matriz de coeficientes, [S])**

O primeiro passo no sentido de aumentar as capacidades e otimizar o processador foi retirar as estruturas de dados relativas à radiação<sup>90</sup>. Aproveitando o espaço que deixou de ser utilizado pela matriz [R], conseguiu-se aumentar o número máximo de nodos e elementos para 4500 e 9000, respectivamente. A este processador chamou-se “6-DLSLXG”, que ocupa cerca de 180 MB de memória, tal como se poderá ver em “Memória efectiva” na Tabela 10.4, página 258, para tt\_6.pos, pois só a matriz [S] ocupa agora  $(4500 \text{ nodos})^2 \times (8 \text{ bytes}) = 162 \times 10^6$  bytes.

---

<sup>89</sup> Há muitas vezes confusão entre “milhões de bytes” e o espaço utilizado por uma determinada quantidade de informação em memória, RAM ou disco, normalmente em MB. Com efeito, armazenar  $1 \times 10^6$  bytes ocupa ligeiramente menos de 1 MB, pois  $1 \text{ MB} = 1024 \text{ kB} = 2^{20} \text{ bytes} = 1048576 \text{ bytes}$ . Assim, neste trabalho, quando nos referimos a valores fornecidos por programas, indicam-se os valores por ele apresentados, normalmente em MB. Caso se trate de “milhões de bytes”, indicam-se como “ $10^6$  bytes”.

<sup>90</sup> A radiação já estava desactivada desde o processador original para VAX/VMS, TP21GN\_Alfas, mas as suas estruturas de dados continuavam a ser geradas (para facilitar a inclusão futura da radiação), ocupando muito espaço de memória.

De seguida usou-se uma outra rotina, a sexta e última a ser testada (cf. Tabela 10.1), a DLSDLXD. Esta é semelhante à DLSDLXG, mas tira partido da simetria da matriz. Assim, tal como no processador 6-DLSDLXG é primeiro criada a matriz  $[S]$ , depois  $[S_{11}]$ , mas depois apenas os coeficientes diferentes de zero da matriz triangular inferior de  $[S_{11}]$  é que são armazenados em  $[S_{esp}]$ . Foi assim criado o processador 7-DLSDLXD cujas limitações de memória são sensivelmente as mesmas de 6-DLSDLXG (172 MB em vez de 180 MB), mas cujo tempo de processamento é cerca de metade pois tira partido da simetria da matriz na resolução do sistema linear, tal como se poderá também ver na Tabela 10.4 (tt\_7.pos).

Ainda assim, isto não é satisfatório, pois tanto num caso, como noutro, o grande problema é que tem que ser criada primeiro a matriz  $[S]$ , depois  $[S_{11}]$ , e só depois  $[S_{esp}]$ .

Teve então que se adoptar outra estratégia: tirar directamente partido da esparsidade e da simetria da matriz, sem criar a matriz global  $[S]$ , mas criando e armazenando directamente apenas os dados relevantes num vector  $[SV]$ . Isto permitirá usar muito menos espaço de memória para cada problema, gerir melhor a memória do computador e, portanto, poder manipular modelos de maiores dimensões, com mais nodos. Simultaneamente, na resolução do sistema global de equações, ao não se manipularem a esmagadora maioria dos zeros da matriz de coeficientes, obtém-se um tempo de processamento muito menor.

Vai-se então agora abordar a **questão do armazenamento dos coeficientes** tirando directamente da **esparsidade** e **simetria da matriz**, e também a da **renumeração dos nodos** da malha de elementos finitos.

Existem vários métodos de armazenamento dos coeficientes relevantes tirando partido da esparsidade das matrizes, sendo os três mais populares os seguintes: listas ligadas, método de armazenamento de banda, e método de armazenamento de perfil [Silvester1993] pp.86, [Coimbra1995] pp.90, [Salon1999] pp.607. Enquanto as **listas ligadas** guardam única e exclusivamente os coeficientes não nulos das matrizes, os outros dois guardam também alguns zeros. Assim, o **método de armazenamento de banda** guarda tudo o que estiver dentro de uma determinada banda que vai desde o “coeficiente não nulo mais afastado da diagonal principal”, até à diagonal principal (se tirar partido da simetria da matriz, guardando apenas coeficientes da matriz triangular inferior), ou até ao seu simétrico (se não tirar partido da simetria e guardar coeficientes de toda a matriz). O **método de perfil** (usado no **CADdyMAG**) guarda todos os coeficientes desde o primeiro não nulo de cada linha até ao elemento da diagonal principal (se tirar partido da simetria) ou até ao seu simétrico (se não

tirar partido da simetria da matriz). Este último tipo de método para armazenamento, embora armazene mais coeficientes que o das listas ligadas (e menos que o de banda), tem a vantagem de ser mais fácil de programar que o primeiro e que, sendo usado com técnicas de renumeração de nodos [Salon1999] pp.607, o número de elementos zero a armazenar e manipular é baixo uma vez que todos os elementos diferentes de zero ficam concentrados junto da diagonal da matriz.

Veja-se então em que consiste a renumeração de nodos. A **renumeração de nodos** é uma técnica muito comum na aplicação do método dos elementos finitos, por forma a tirar partido da esparsidade da matriz dos coeficientes [S]: como apenas são diferentes de zero os coeficientes da matriz correspondentes aos nodos directamente ligados por arestas de elementos finitos, em qualquer modelo com mais do que umas centenas de nodos, a esmagadora maioria dos elementos da matriz são zeros. Com efeito, se o nodo  $i$  está ligado ao nodo  $j$  (i.e., pertence a um mesmo elemento finito que o nodo  $j$ ), então, na matriz de coeficientes, os elementos  $(i,j)$  e  $(j,i)$  são diferentes de zero. Os elementos da matriz de coeficientes (matriz  $S(i,j)$ , cf. equação (9.29), página 226), que não estão ligados correspondem a zeros da matriz. Assim, se os nodos de cada elemento finito tiverem numeração muito afastada, a largura da **banda**<sup>91</sup> da matriz de coeficientes é muito larga, obrigando a armazenar muitos elementos iguais a zero. Se, pelo contrário, os nodos de cada elemento da malha tiverem uma numeração próxima, a largura da banda da matriz de coeficientes é reduzida. Assim, é possível tirar partido desse facto de forma a diminuir drasticamente o número de dados a armazenar e manipular. Veja-se o seguinte exemplo, cuja malha será apresentada um pouco mais à frente, na Fig. 10.13:

O número total de coeficientes da matriz [S] é igual à ordem da matriz ( $n\_ptos \times n\_ptos$ ), i.e.  $n\_ptos^2$ . Assim, a matriz [S] para uma malha com  $n\_ptos=4102$  nodos terá 16826404 coeficientes. Tirando partido da esparsidade (segundo o método de perfil) e da simetria da matriz, a malha criada no pré-processador **CADyPRE** tinha 6212655 coeficientes a guardar antes de renumerar (com banda<sup>92</sup> de 6975 coeficientes, i.e. 85%). Depois de renumerar, esse

---

<sup>91</sup> A **banda da matriz** refere-se ao método de armazenamento de banda, indicada no pré-processador apenas para controlo, uma vez que o **CADyMAG** utiliza o método de armazenamento de perfil. Assim, a banda da matriz indicada refere-se ao caso que não tira partido da simetria da matriz (tal como ilustrado em [Salon1999] pp.616) ou seja, a banda é igual à maior distância de um coeficiente diferente de zero até à diagonal principal e até ao seu simétrico.

<sup>92</sup> A percentagem indicada pelo **CADyPRE** para a banda é calculada por  $\text{round}[\text{banda}/(2n\_ptos - 1) \times 100\%]$ . Assim a matriz [S] de ordem  $1047 \times 1047$  do problema de referência que tinha já sido renumerada, apresentava uma banda de “123”, indicando “6 %” no pré-processador:  $123/(2 \times 1047 - 1) \times 100\% = 5,876\%$ , que arredondado para as unidades dá 6%. Para mais esclarecimentos ver o anexo “ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES”, na página 359.

valor passou para apenas 356043 coeficientes (banda de 251 coeficientes, i.e. 3%). Note-se, no entanto, que, como o sistema linear a resolver no processador térmico utiliza  $[S_{11}]$  em vez de  $[S]$ , o número de coeficientes de  $[S_{11}]$  a guardar no vector  $[SV]$ , respectivamente de 6111769 coeficientes (no caso não renumerado, tt4, Tabela 10.4) e de 351151 (para o caso renumerado, tt4r, Tabela 10.4), será ligeiramente inferior aos indicados no pré-processador: 6212655 e 356043.

Apresenta-se de seguida na Tabela 10.3, para as cinco malhas de elementos finitos utilizadas neste sub-capítulo “10 CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/WINDOWS”, o número de coeficientes e espaço de memória que seriam necessários para guardar todos os coeficientes da matriz  $[S]$ , tirando ou não partido da esparsidade e da renumeração dos nodos, e os que foram efectivamente utilizados no processador para guardar os coeficientes relevantes de  $[S_{11}]$  (com nodos renumerados no pré-processador, e tirando partido da simetria e esparsidade, pelo método de perfil) em  $[SV]$  e  $[S_{esp}]$ .

Tabela 10.3. Número total de coeficientes da matriz  $[S]$ , número de coeficientes de  $[S]$  a armazenar considerando esparsidade e simetria (sem e com renumeração de nodos, método de perfil), e coeficientes no processador térmico em  $[SV]$  e  $[S_{esp}]$ .

Modelo.pre, Nodos / elem.	Pré-processador			Processador (c/ renumeração)	
	Nº total de coef. de $[S]=\text{nodos}^2$	Nº de coef. de $[S]$ a armazenar considerando esparsidade e simetria; banda (%)		Nº de coef. de $[S_{11}]$ para $[SV]$	Nº de coef. de $[SV]\neq 0$ para $[S_{esp}]$
		sem renumeração	com renumeração		
tt.pre, 1047 / 2009	1096209	n.d.	41934; 123 (6%)	41049	3854
RAM ( $10^6$ Bytes) =	8,769672	n.d.	0,335472	0,328392	0,030832
tt4 e tt4r, 4102 / 8036	16826404	6212655; 6975 (85%)	356043; 251 (3%)	351151	15458
RAM ( $10^6$ Bytes) =	134,611232	49,701240	2,848344	2,809208	0,123664
tt9 / tt9r, 9971 / 19744	99420841	n.d.	1760918; 475 (2%)	1735006	37906
RAM ( $10^6$ Bytes) =	795,366728	n.d.	14,087344	13,880048	0,303248
tt16 e tt16r, 16239/32144	263705121	104161852; 30687 (94%)	2845676; 485 (1%)	2823373	61913
RAM ( $10^6$ Bytes) =	2109,640968	833,294816	22,765408	22,586984	0,495304
tt19 e tt19r, 19971/39502	398840841	22223697; 30511 (76%)	3152574; 439 (1%)	3128516	76390
RAM ( $10^6$ Bytes) =	3190,726728	177,789576	25,220592	25,028128	0,61112

n.d.: dados não disponíveis.

Nesta segunda fase, para expandir as capacidades do processador térmico tirando partido da esparsidade da matriz dos coeficientes, tentou-se utilizar a mesma metodologia dos diversos processadores já existentes no **CADdyMAG**, nomeadamente do **CARTyPRO**, e

inclusive utilizar o seu código fonte. Passa-se agora a descrever muito sucintamente a metodologia utilizada no **CARTyPRO**:

- O método utilizado para guardar a matriz de coeficientes é o método de perfil considerando a simetria da matriz dos coeficientes [Coimbra1995] pp.90. Neste método, tal como mencionado anteriormente, só se guardam os elementos da matriz de coeficientes que estiverem entre o primeiro elemento diferente de zero e a diagonal principal. Estes elementos de [S] são armazenados num vector (uma matriz coluna) chamado [SV]. Os restantes elementos da matriz, sendo zeros estruturais ou iguais aos outros já armazenados (devido à simetria da matriz), são ignorados. Para se aceder aos elementos da matriz armazenados no vector de coeficientes [SV], são ainda necessários dois vectores auxiliares (matrizes colunas). Um, o vector [LEFT], guarda o número da coluna do primeiro elemento diferente de zero de cada linha da matriz. O outro, o vector [ILINHA], contém o índice desse elemento no vector de coeficientes [SV]. Assim, o índice do elemento  $(i,j)$  da matriz de coeficientes [S] no vector [SV] é dado por

$$ILINHA(i) + j - LEFT(i) \quad (10.9)$$

ou seja, o coeficiente  $S(i,j)$  de [S] fica armazenado no vector [SV] na posição  $ILINHA(i) + j - LEFT(i)$ :

$$S(i, j) = S(j, i) = SV( ILINHA(i) + j - LEFT(i) ) \quad (10.10)$$

Para clarificar o conceito apresenta-se o seguinte exemplo. Considere-se a equação  $[S][T]=[F]$ , (10.3), página 230. Supondo que para um problema concreto tínhamos a matriz [S] apresentada na Fig. 10.9, na qual os coeficientes a guardar são apenas os apresentados dentro de parêntesis curvos (no processador **CARTyPRO**, os valores dos coeficientes da matriz [S], representados por letras, são reais com precisão simples, i.e. ocupando 4 bytes), pois tirando partido da simetria da matriz, basta apenas guardar os coeficientes da diagonal principal e os relevantes que estiverem abaixo dela. Os vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA] a guardar relativamente à matriz [S] são também apresentados na mesma figura.

$$[S] = \begin{bmatrix} (a) & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (b) & c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (d) & e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (f) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (\dots) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (\dots) \end{bmatrix} \Rightarrow [SV] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ \vdots \end{bmatrix}; [LEFT] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \end{bmatrix}; [ILINHA] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Fig. 10.9. Exemplo de matriz de coeficientes [S] e respectivos vectores a guardar, [SV], [LEFT] e [ILINHA], tirando partido da esparsidade da matriz [S].

Assim, se quisermos saber o valor, por exemplo, dos coeficientes  $S(3,2)=d$  e  $S(3,3)=e$ , bastará calcular:

$$S(3,2)=SV(ILINHA(3)+2+LEFT(3))=SV(4+2-2)=SV(4)=d$$

$$S(3,3)=SV(ILINHA(3)+3+LEFT(3))=SV(4+3-2)=SV(5)=e$$

- Para resolver o sistema global de equações lineares<sup>93</sup>, o **CARTyPRO** utiliza uma única matriz triangular inferior armazenada pelo método de perfil descrito atrás, e o sistema global de equações é resolvido através de uma simples **decomposição triangular de Choleski**, seguida de **eliminação progressiva** ("*forward elimination*") e **substituição para trás** ("*back substitution*") [Salon1999] pp.609.
- É também importante referir que para se tirar todo o partido desta técnica, nomeadamente em termos de espaço de memória e tempo de cálculo, é fundamental criar directamente os vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA] sem previamente criar a matriz [S], tal como se percebe de forma inequívoca da análise da Tabela 10.3 e Fig. 10.9. Isto já era feito pelos diversos processadores do **CADdyMAG** (excepto o térmico, **CADyTER**), introduzindo directamente a contribuição de cada elemento finito na posição respectiva do vector [SV] (e também em [F], equação (10.3)), em vez de o fazer primeiramente para [S] e depois transferir [S] para [SV].

<sup>93</sup> Sobre a resolução de sistemas de equações, existem muitas obras na literatura, inclusive directamente dedicadas ao Método dos Elementos Finitos em Engenharia Electrotécnica. Uma obra recente e que faz uma revisão geral, incluindo os métodos utilizados pelo **CARTyPRO**, é [Salon1999], que no capítulo 11 aborda mais ou menos os mesmos tópicos que [Silvester1990] [Silvester1996], livro(s) de referência para a área, mas apresentando-se mais desenvolvido. Também na Internet é possível encontrar informação sobre a resolução de sistemas de equações, mesmo em português, por exemplo em [Alves1997] (<http://www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/>).

O objectivo era portanto utilizar o mesmo procedimento no processador térmico. No entanto, devido a diversas diferenças<sup>94</sup>, não foi possível importar directamente o código do **CARTyPRO** para o processador térmico, nem adaptá-lo facilmente, pelo se teve que alterar a estrutura do processador térmico e modificar significativamente o seu código. Por exemplo, o **CARTyPRO** (e os outros processadores para PC) não faz a separação entre potenciais conhecidos e desconhecidos, ao contrário do que acontece com o processador térmico, tal como referido na equação (10.5), página 231, a qual, recorde-se dá origem ao sistema linear de equações a resolver, indicado na equação (10.7)

$$[S_{11}][T_{desc}] = [F_{desc}] - [S_{12}][T_{conh}] \quad (10.7)$$

ou seja, fazendo  $[F_{desc}] - [S_{12}][T_{conh}] = [B]$  e  $[S_{11}] = [A]$ , na forma genérica  $[A][X] = [B]$  (equação (10.8), página 232).

Tal como referido para o **CARTyPRO** em relação a  $[S]$ , também no processador térmico para armazenar  $[S_{11}]$  directamente na forma de um vector  $[SV]$ , tirando partido da esparsidade e simetria da matriz e sem chegar a criar  $[S_{11}]$ , é necessário calcular directamente a contribuição que cada elemento finito teria para  $[S_{11}]$  e enviá-la directamente para a posição respectiva em  $[SV]$ , e, simultaneamente, calcular e armazenar as contribuições de cada elemento finito para  $[B] = [F_{desc}] - [S_{12}][T_{conh}]$  em  $[A][X] = [B]$ . Aqui, o facto de se ter previamente separado os potenciais desconhecidos dos conhecidos no processador térmico, torna este procedimento significativamente mais simples e rápido que o procedimento equivalente no **CARTyPRO** e restantes processadores do **CADdyMAG**.

Exposto o objectivo de tirar partido da esparsidade da matriz  $[S]$  sem a criar, e as razões e a forma de o fazer, vai-se então apresentar mais concretamente a sua implementação para a sexta rotina da *IMSL Math Library* a ser testada, *DLSLXD* (cf. Tabela 10.1). Os resultados das cinco primeiras tinham sido já mostrados na Tabela 10.2. Recorde-se que, tanto esta,

---

<sup>94</sup> O processador térmico para VAX/VMS e os restantes processadores para PC/DOS, embora seguindo muito aproximadamente a mesma metodologia e filosofia de estruturas de dados, embora sob a orientação do Prof. Doutor Carlos Lemos Antunes, foram desenvolvidos por duas pessoas distintas, os Profs. Doutores José Américo Dias Pinto e António Paulo Dias Coimbra, respectivamente, e com diversos anos de intervalo. Por estas razões, havia algumas discrepâncias entre os nomes das variáveis utilizadas, o tipo de precisão utilizada (dupla e simples, respectivamente), algumas estruturas de dados diferentes, etc., que tornavam a importação do código difícil. Por exemplo, outro problema era que a reordenação por ordem crescente dos vértices de cada elemento finito feita dentro pelo **CARTyPRO**, causava problemas graves no processador térmico, devido à existência neste de arestas de elementos finitos com convecção.

como a quinta, a DLSLXG, tiram partido da esparsidade da matriz dos coeficientes (embora a DLSLXG não tire partido da simetria da matriz). Estas rotinas têm como entrada um vector de coeficientes, que designámos por  $[S_{esp}]$  e que, ao contrário do vector  $[SV]$ , apenas guardam os coeficientes diferentes de zero, sendo  $nAdif0$  o número de coeficientes diferentes de zero. Para isso utiliza também dois vectores auxiliares, de inteiros,  $[jrow]$  e  $[jcol]$ , ambos com dimensão  $nAdif0$ , que indicam respectivamente a linha e coluna da posição do coeficiente na matriz original  $[S]$ , de cada um dos coeficientes armazenados em  $[S_{esp}]$ .  $[S_{esp}]$  tem também dimensão  $nAdif0$ , contendo números reais com dupla precisão.

Para clarificar todos os conceitos apresentados anteriormente para as várias matrizes e vectores, bem como as diferenças entre o processador térmico e os outros processadores (por exemplo o **CARTYPRO**), tome-se o exemplo da Fig. 10.10, referente a um problema (fictício) com apenas cinco potenciais livres (i.e. desconhecidos e a calcular), cujos coeficientes, segundo a equação (10.7), seriam representados na matriz  $[S_{11}]$ , simétrica (por isso se representam apenas os coeficientes da matriz triangular inferior). Os coeficientes da diagonal principal são os coeficientes próprios de cada nodo, enquanto os outros são os mútuos: o coeficiente  $b \neq 0$  significa que o nodo 1 está ligado ao nodo 2,  $f \neq 0$  significa que o nodo 4 está ligado ao nodo 2, etc.). Os vectores  $[SV]$ ,  $[LEFT]$ , e  $[ILINHA]$  a guardar relativamente à matriz  $[S_{11}]$  são também mostrados na mesma figura. Na Fig. 10.11 são apresentados os vectores  $[S_{esp}]$ ,  $[jrow]$  e  $[jcol]$  relativos ao exemplo da Fig. 10.10 (para mais esclarecimentos ver o “ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES”, na página 359).

$$[\mathbf{S}_{11}] = \begin{bmatrix} (a) & & & & \\ (b & c) & & & \\ 0 & (d & e) & & \\ 0 & (f & 0 & g) & \\ (h & 0 & i & 0 & j) \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{SV}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ 0 \\ g \\ h \\ 0 \\ i \\ 0 \\ j \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{LEFT}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{ILINHA}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Fig. 10.10. Exemplo de matriz de coeficientes  $[\mathbf{S}_{11}]$  e respectivos vectores  $[\mathbf{SV}]$ ,  $[\mathbf{LEFT}]$ , e  $[\mathbf{ILINHA}]$ , tirando partido da esparsidade e simetria de  $[\mathbf{S}_{11}]$ .

$$[\mathbf{S}_{esp}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{jrow}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{jcol}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fig. 10.11. Vector de coeficientes  $[\mathbf{S}_{esp}]$ ,  $[\mathbf{jrow}]$  e  $[\mathbf{jcol}]$  para a matriz  $[\mathbf{S}_{11}]$  da Fig. 10.10.

A razão da utilização de  $[\mathbf{SV}]$  para depois criar  $[\mathbf{S}_{esp}]$ , em vez de criar esta directamente, deve-se ao facto de que o algoritmo utilizado em  $[\mathbf{SV}]$  utiliza uma metodologia já por nós testada nos outros processadores (embora o algoritmo tivesse que ser alterado). Para além disso, a utilização directa de  $[\mathbf{S}_{esp}]$ , embora ocupe menos espaço de memória, poderá conduzir a tempos de processamento superiores, nomeadamente no tempo necessário para a construção directa de  $[\mathbf{S}_{esp}]$ . Com efeito, embora neste método de perfil sejam guardados significativamente mais coeficientes que nas listas ligadas com o vector  $[\mathbf{S}_{esp}]$ , no método de perfil a localização, para cada elemento finito, da posição onde deve ser colocada a contribuição de cada nodo  $(i,i)$ , ou par de nodos  $(i,j)$ , no vector de coeficientes  $[\mathbf{SV}]$  é imediata: basta calcular

a localização do coeficiente  $S(i,j)$ , pela equação (10.10). Em contrapartida, se pretendêssemos construir directamente  $[S_{esp}]$  sem previamente criar  $[SV]$ , para introduzir a contribuição do par de nodos  $(i,j)$  em  $[S_{esp}]$ , teríamos que previamente percorrer  $[jrow]$  e  $[jcol]$  até encontrarmos os índices  $(i,j)$  para saber qual a posição de  $[S_{esp}]$  onde deveríamos colocar essa contribuição. Por exemplo, para saber onde se deve colocar a contribuição relativa aos nodos 5 e 3, teria que percorrer-se o vector  $[jrow]$  até encontrar o índice 5, que aparece a partir da 8ª posição e depois procurar em  $[jcol]$  (para acelerar a busca, já só a partir dessa 8ª posição) onde aparece o índice 3, que vai aparecer na 9ª posição. Assim concluir-se-ia que  $S(5,3) = S_{esp}(9) = i$ , tal como se pode ver na Fig. 10.11. Este processo de busca ordenada com muitos milhares de coeficientes, sobretudo porque tem que ser feito para cada par de nodos, é definitivamente mais lento que o cálculo directo de  $S(i,j)$  pela equação (10.10), pelo que o tempo de construção directa de  $[S_{esp}]$  será superior ao de  $[SV]$ . Assim, apesar de não terem sido feitos testes, o tempo global do processador com construção directa de  $[S_{esp}]$  poderá ser superior ao tempo com construção de  $[SV]$  seguida de construção de  $[S_{esp}]$ .

Atendendo a que como se verá na Tabela 10.4, os tempos de processamento e a memória utilizada são perfeitamente aceitáveis, decidiu-se utilizar esta metodologia de construção de  $[SV]$  seguida da construção de  $[S_{esp}]$ . No entanto, se for necessário, poderá haver aqui possibilidades de optimização do código, nomeadamente em termos de espaço de memória.

Resumindo, o fluxograma do novo processador térmico para PC/*Windows*, para regime permanente e sem radiação, que foi designado por “**CARTyTERB.exe**”, e que tira partido directamente da esparsidade e simetria, sem criação de  $[S]$ , com construção directa de  $[SV]$  seguida da construção de  $[S_{esp}]$ , e utilizando a rotina DLSLXD, é o seguinte:

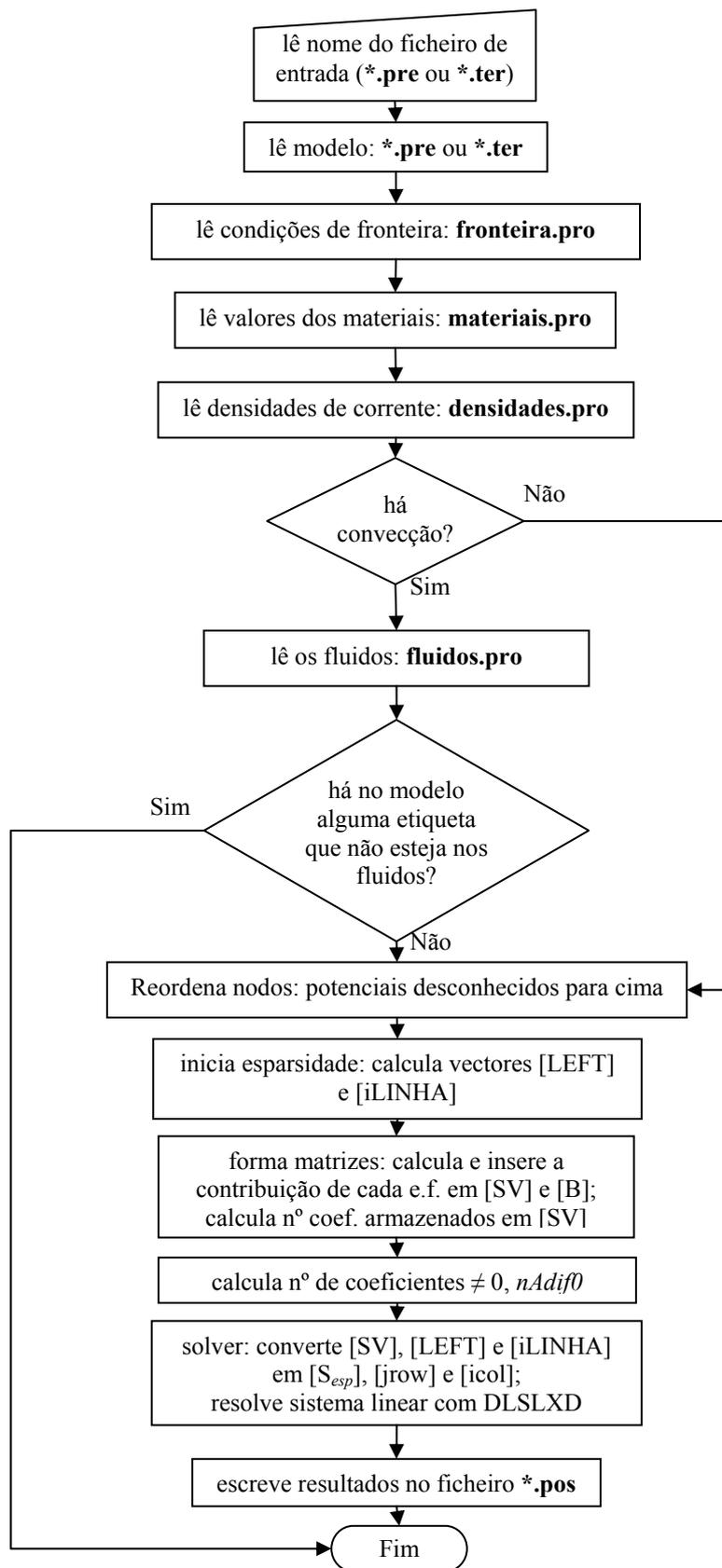


Fig. 10.12. Fluxograma do processador térmico para PC/*Windows*, para regime permanente e sem radiação, tirando partido directamente da esparsidade e simetria, “CARTyTERB”.

Para testar o novo processador utilizando a rotina DLSLXD (com três variantes), bem como o melhor processador que utilizava a rotina DLSLXG, “6-DLSLXG”, foram consideradas diversas situações para o mesmo problema da modelização térmica do motor de indução linear, anteriormente apresentado em “10.2 Problema de referência para verificação do novo processador”, página 234:

- Seis modelos diferentes, com 1047, 4102, 9971, 16239 e 19971 nodos e cujas malhas de elementos finitos se encontram na Fig. 10.3 (página 235), Fig. 10.13, Fig. 10.14 e Fig. 10.15;
- Para a malha com 4102 nodos, foram examinadas duas situações: sem renumerar os nodos no pré-processador, e com os nodos renumerados (casos tt4 e tt4r, cujos resultados se mostram na Tabela 10.4);
- O problema térmico foi resolvido para cada uma das seis malhas anteriores por quatro processadores distintos, referidos na Tabela 10.4:
  - “6 – DLSLXG” (página 244): utiliza a melhor rotina da primeira fase, DLSLXG (cf. Tabela 10.2, página 242). Já não cria  $[\mathbf{R}]$ , mas cria a matriz  $[\mathbf{S}_{11}]$  antes de criar o vector  $[\mathbf{S}_{esp}]$ . Para 4500 nodos, 9000 elementos;
  - “7 – DLSLXD”: processador utilizando a rotina DLSLXD, que também já não cria  $[\mathbf{R}]$ , mas criando a matriz  $[\mathbf{S}_{11}]$  antes de criar o vector  $[\mathbf{S}_{esp}]$ . Para 4500 nodos, 9000 elementos;
  - “8 – DLSLXD [SV] dir., 6M5”: processador utilizando a rotina DLSLXD, sem criar a matriz  $[\mathbf{S}_{11}]$ , armazenando directamente os coeficientes em  $[\mathbf{SV}]$ , sendo depois inseridos em  $[\mathbf{S}_{esp}]$ . “6M5” é a dimensão de  $[\mathbf{SV}]$ , o que significa que pode armazenar até  $6,5 \times 10^6$  de coeficientes. Para 20000 nodos, 40000 elementos;
  - “9 – DLSLXD [SV] dir., 3M5” igual ao anterior, mas sendo “3M5” a dimensão de  $[\mathbf{SV}]$ , significa que pode armazenar até  $3,5 \times 10^6$  de coeficientes. Para 20000 nodos, 40000 elementos.

Recorde-se que embora a rotina DLSLXG tire partido da esparsidade, não tira partido da simetria da matriz dos coeficientes, necessitando por isso do armazenamento de todos os coeficientes de  $[\mathbf{S}_{11}]$ , contrariamente a DLSLXD, que apenas utiliza os da matriz triangular inferior.

Podem ver-se de seguida as malhas de elementos finitos para os modelos com 4102, 9971, 16239 e 19971 nodos (comparem-se as malhas com a do problema original, com 1047 nodos, apresentada na Fig. 10.3, página 235). Para poder criar estas malhas e para ampliar as capacidades do pré-processador, foi preciso converter este também para *Windows*, tal como se descreverá em 12.3 Pré-processador, página 307, e, nomeadamente, incluir-lhe a capacidade de trabalhar com convecção e poder fazer refinamentos automáticos da malha, mantendo a convecção. A malha com 19971 nodos é pouco convencional pois tem zonas sem grande interesse (ar, afastado do motor de indução linear) mais refinadas. Isto deve-se a que foi obtida por refinamento de algumas zonas da malha de 16239 nodos, até atingir cerca de 20000 nodos, o limite pretendido para o processador.

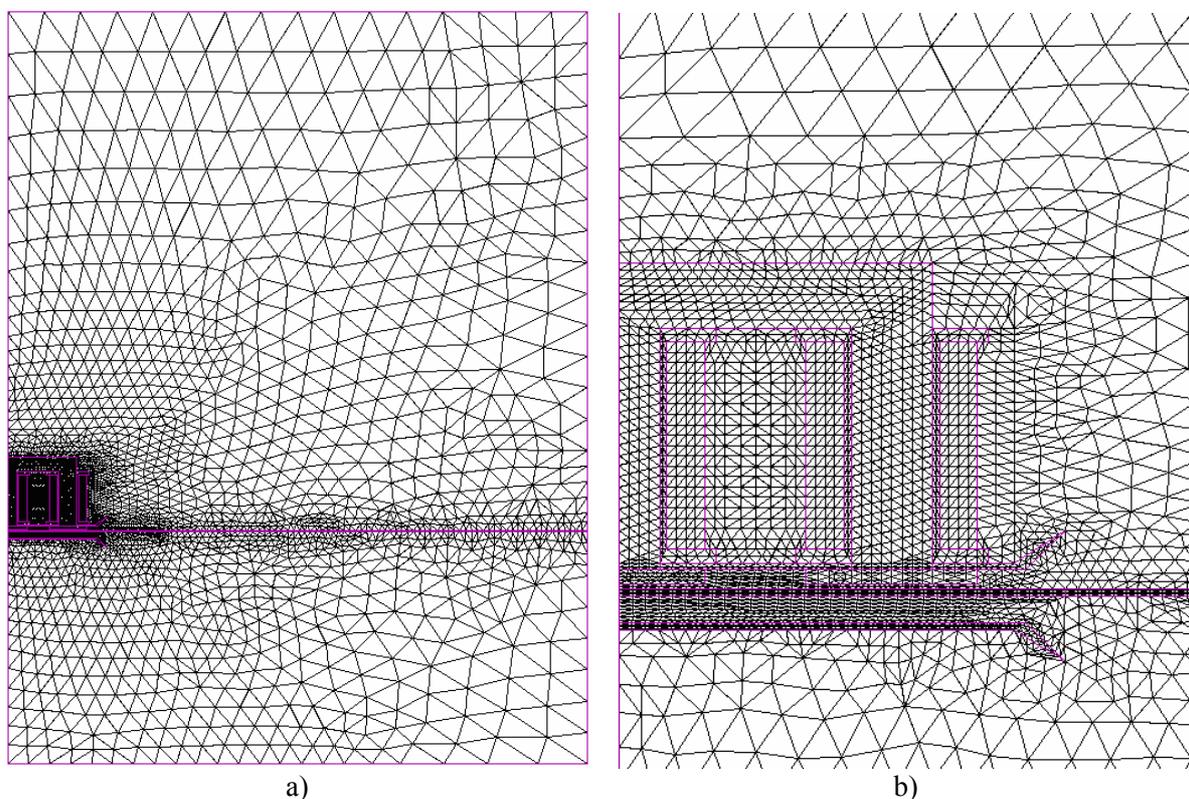


Fig. 10.13. Malha para os modelos tt4 (sem renumerar) e tt4r (nodos renumerados):  
a) malha para motor de indução linear (semi-modelo) com 4102 nodos, 8036 elementos e 540 lados de elementos finitos com convecção; b) zoom na zona do motor.

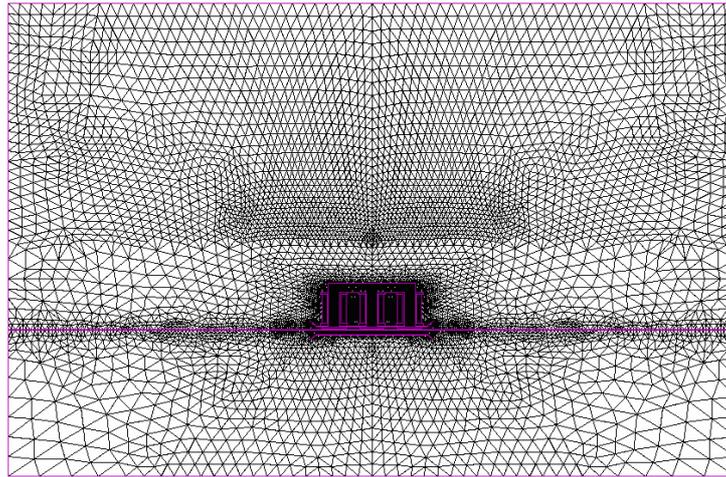


Fig. 10.14. Modelo tt9r: malha para motor de indução linear (semi-modelo) com 9971 nodos, 19744 elementos e 1080 lados de elementos finitos com convecção.

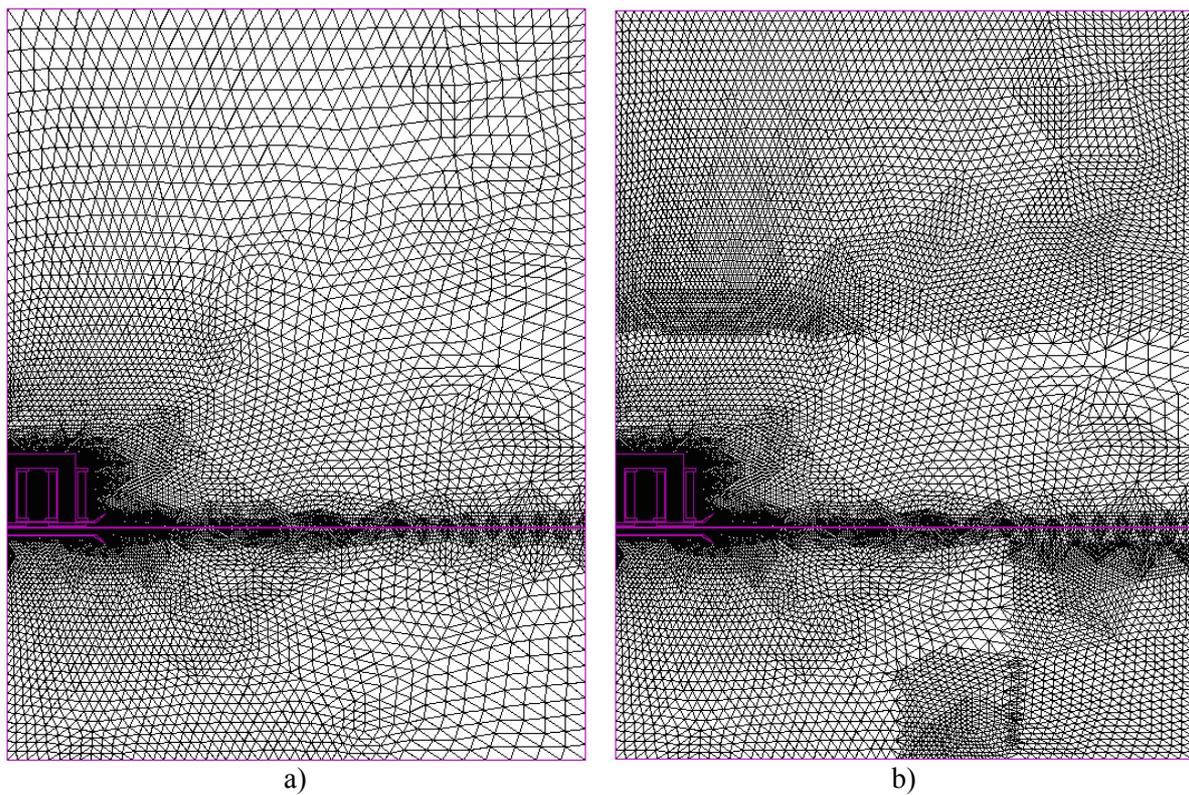


Fig. 10.15. Malhas para motor de indução linear (semi-modelos): a) modelo tt16r: 16239 nodos, 32144 elementos e 1080 lados com convecção; b) modelo tt19r 19971 nodos, 39502 elementos e 1080 lados com convecção.

Os resultados do processamento dos seis casos, com cada um dos 4 processadores em estudo nesta fase, são apresentados na Tabela 10.4. Foi utilizado um Pentium II, a 350 MHz com 512 MB de RAM e *Windows 98*. Os casos indicados com “\*”, correspondem a situações em que o processador não conseguiu resolver o problema, por falta de memória (excepto o

caso de “9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5” para o problema tt4, em que a razão foi que, devido a não terem sido renumerados os nodos, o número de coeficiente a armazenar em [SV] era de 6111769 nodos, portanto muito superior aos  $3,5 \times 10^6$  permitidos).

Tabela 10.4. Comparação do processamento das seis malhas usadas para o motor de indução linear, com cada um dos 4 processadores em estudo nesta fase, para incorporação no processador térmico em regime permanente para PC/Windows.

Modelo *.pre Nodos, elem. lados convecção	Modelo *.pos	Processador	Nº de coef. para [SV]	Nº de coef. [S <sub>esp</sub> ]	Memória efectiva (MB)	Tempo (s)
tt(.pre) 1047, 2009 270 (renumerada)	tt_6	6 – DLXLXG	n.c.	6697	180	18,64
	tt_7	7 – DLXLXD	n.c.		172	9,3
	tt_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	41049	3854	53	2,6
	tt_9	9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5			29,5	2,5
tt4 4102, 8036 540 (não renumerada)	tt4_6	6 – DLXLXG	n.c.	26885	<b>307</b>	<b>96,1</b>
	tt4_7	7 – DLXLXD	n.c.		296	25,6
	tt4_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	6111769	15458	53,6	5,2
	tt4_9	9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5	>3M5		*	*
tt4r 4102, 8036 540 (renumerada)	tt4r_6	6 – DLXLXG	n.c.	26885	*	*
	tt4r_7	7 – DLXLXD	n.c.		296	23,8
	tt4r_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	351151	15458	53,6	4,5
	tt4r_9	9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5			30,3	3,7
tt9r 9971, 19744 1080 (renumerada)	tt9r_6	6 – DLXLXG	n.c.	*	*	*
	tt9r_7	7 – DLXLXD	n.c.	*	*	*
	tt9r_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	1735006	37906	55,1	9
	tt9r_9	9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5			37906	31,5
tt16r 16239, 32144 1080 (renumerada)	tt16r_6	6 – DLXLXG	n.c.	*	*	*
	tt16r_7	7 – DLXLXD	n.c.		*	*
	tt16r_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	2823373	61913	57,2	14,4
	tt16r_9	9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5			31,5	12,7
tt19r 19971, 39502 1080 (renumerada)	tt19r_6	6 – DLXLXG	n.c.	*	*	*
	tt19r_7	7 – DLXLXD	n.c.		*	*
	tt19r_8	8 – DLXLXD [SV] dir., 6M5	3128516	76390	58,4	15,9
	tt19r_9	<b>9 – DLXLXD [SV] dir., 3M5</b>			<b>34,8</b>	<b>15,4</b>

\*: processador abortou: falta de memória. n.c.: [SV] “não criado” (criada [S<sub>11</sub>], passou-se desta para [S<sub>esp</sub>]).

Os tempos de processamento e a memória efectivamente utilizada<sup>95</sup> são também representados na Fig. 10.16 e o número dos coeficientes da matriz de coeficientes a armazenar em [SV] e em [Sesp] são mostrados na Fig. 10.17. Os números de coeficientes são iguais aos da Tabela 10.3, página 247. No entanto, a memória agora apresentada, na Fig. 10.16b, é a efectivamente usada para resolver cada um dos problemas.

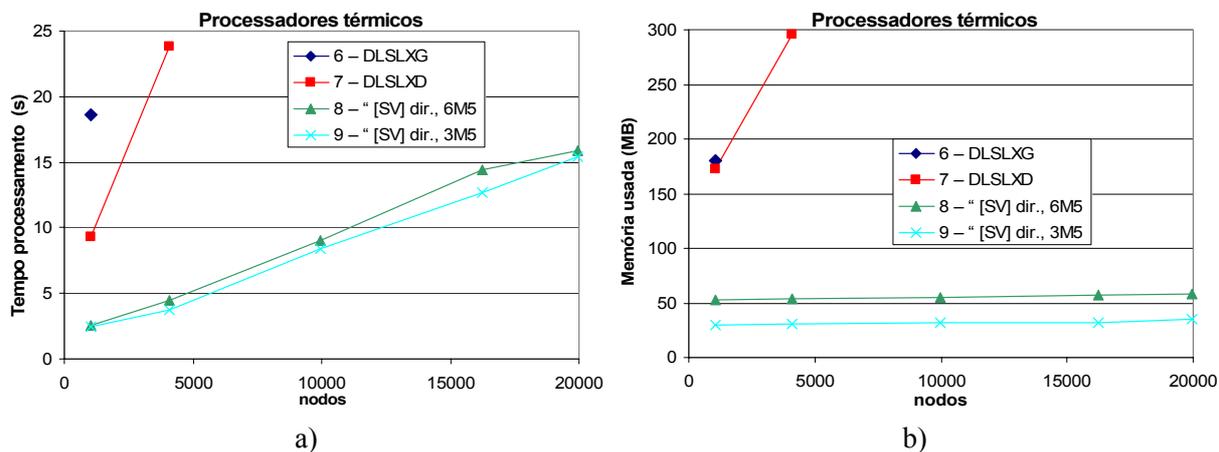


Fig. 10.16. Resultados do processamento dos cinco casos com renumeração de nodos das malhas do motor de indução linear, com os 4 processadores:  
a) tempos de processamento; b) memória efectivamente usada.

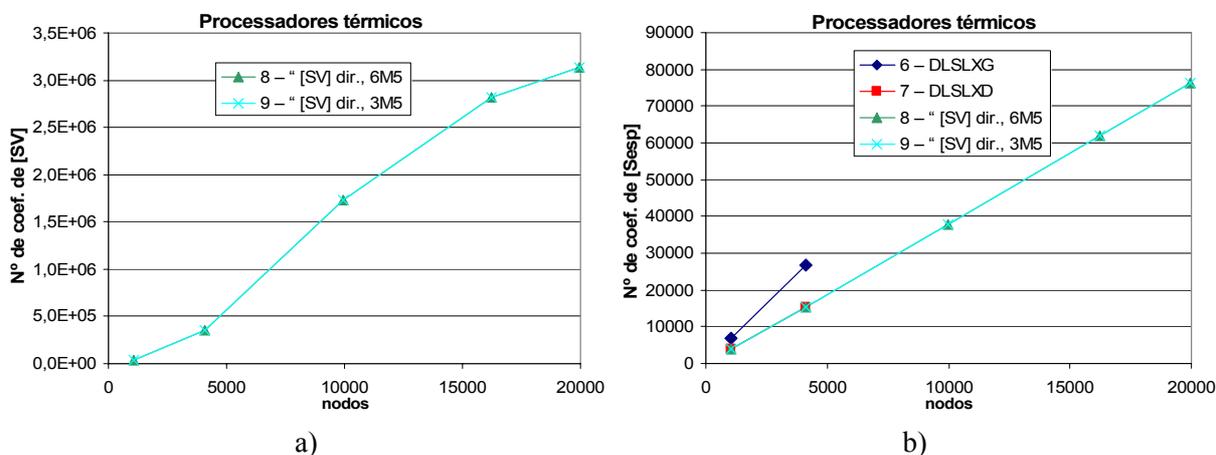


Fig. 10.17. Evolução do número de coeficientes a armazenar: a) em [SV]; b) em [S<sub>esp</sub>].

<sup>95</sup> A "memória efectivamente utilizada" é a que foi medida, através do programa utilitário "SpyGuru", versão 1.6.3.0, como sendo utilizada pelos processadores térmicos durante a sua execução. A memória "committed", i.e. a soma das diversas estruturas de dados definidas no programa pode ser muito maior. Por exemplo para o processador "6 - DLXLG" a memória "committed" era de 693 MB, enquanto para o "9 - DLXLG [SV] dir., 3M5" já era "apenas" de 41,2 MB. No entanto, como uma boa parte das matrizes e vectores auxiliares correm dentro de rotinas do programa, o espaço por elas ocupado é libertado após a saída da rotina, pelo que a memória efectiva pode ser significativamente menor, como se pode observar pelos valores da penúltima coluna da Tabela 10.4.

Quanto à verificação da correcção e exactidão da solução obtida pelos diversos processadores para os vários modelos, colocou-se um problema: o pós-processador do **CADdyMAG**, o **CADyPOS**, não permite mais de 2200 nodos. Por isso, não foi possível verificar visualmente a solução. Para verificar que o novo processador a reter, “9 – DLSLXD [SV] dir., 3M5”, resolvia bem o problema e que não havia *bugs*, foi adoptado o seguinte procedimento: consideraram-se três pontos distintos, P1, P2 e P3 em zonas diferentes dos modelos, tal como indicado na Fig. 10.18.

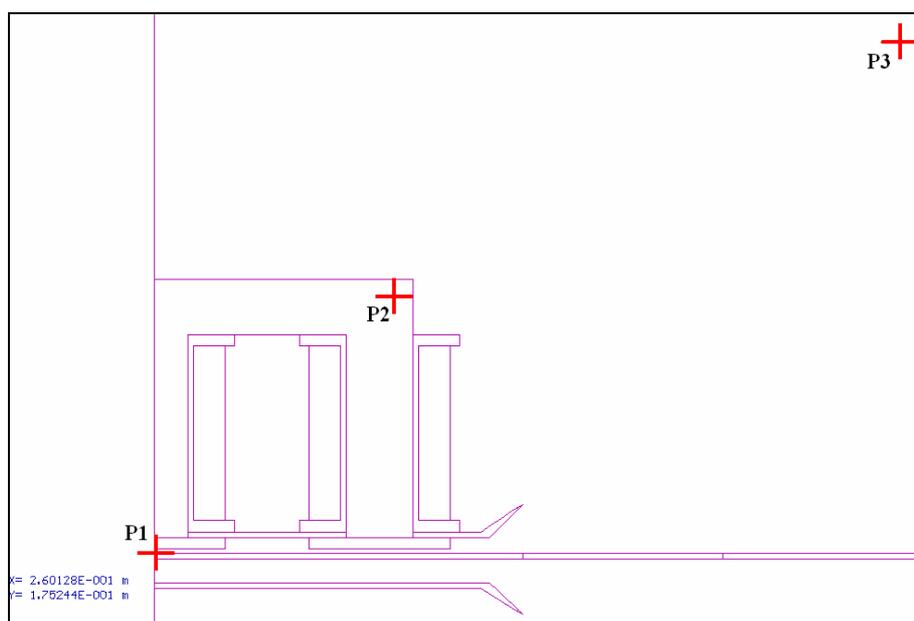


Fig. 10.18. Pontos onde foram comparadas as temperaturas calculadas pelo novo processador com as do problema original (as coordenadas indicadas no canto inferior esquerdo são do ponto P3).

Nos processadores do **CADdyMAG**, a solução de cada problema de elementos finitos (neste caso os valores da temperatura nos nodos da malha), é escrita no ficheiro de resultados, **\*.pos**. Como estes três pontos são nodos da malha, o valor da temperatura em cada um deles foi lido directamente nos ficheiros de texto respectivos (tt\_9.pos, tt4r\_9.pos, tt9r\_9.pos, tt16r\_9.pos e tt19r\_9.pos). Verificou-se que:

- Os valores da temperatura para os três pontos do modelo com 1047 nodos, tt\_9.pos, eram exactamente iguais aos valores originais;
- Para os outros casos com mais nodos, as diferenças entre a temperatura obtida nos três pontos e a do problema original, “10.2 Problema de referência para verificação do novo processador” estão de acordo com o esperado, pois são as seguintes:

Tabela 10.5. Diferenças entre as temperaturas nos pontos P1, P2 e P3, do novo processador térmico e do problema original.

Modelo.pos	$T_{P1}-T_{P1original}$ (K)	$T_{P2}-T_{P2original}$ (K)	$T_{P3}-T_{P3original}$ (K)
tt4r_9	-0,37	-1,1	-0,44
tt9r_9	-0,37	-1,1	-0,44
tt16r_9	-0,55	-1,64	-0,64
tt19r_9	-0,55	-1,64	-0,64

- Para além disso foi ainda verificado no **CADyPOS** que a solução obtida pelo novo processador para todo o modelo com 1047 nodos, tt\_9.pos era igual à do problema de referência.

Concluiu-se assim que o novo processador estava a funcionar correctamente.

Da análise dos diversos resultados apresentados anteriormente, pode concluir-se facilmente que a utilização da rotina DLXLXD com o armazenamento directo da contribuição de cada elemento finito no vector  $[SV]$ , sem a criação prévia da matriz  $[S_{11}]$ , permite a resolução de modelos com cerca de 20000 nodos, em cerca de 15 segundos, mesmo usando um computador já desactualizado. Este é sensivelmente o tempo utilizado pela rotina DLSADS para matrizes positivas definidas num dos primeiros processadores desenvolvidos (14,3 s, para o processador “3- DLSADS” com um máximo de 1300 nodos, Tabela 10.2) para o problema original com 1047 nodos, e pouco mais de metade do tempo necessário para o Solver “1 – DLXLRG” para matrizes gerais, 26,2 s. Para além disso, em termos de memória utilizada, o processador final, para 20000 nodos e  $3,5 \times 10^6$  coeficientes de  $[SV]$ , utiliza apenas cerca de 35 MB de RAM o que é irrelevante para as capacidades dos computadores actuais. Recorde-se que no VAX/VMS e nos “processadores da primeira fase” eram necessários 27 MB para a matriz  $[S]$  para um processador apenas com um máximo de 1300 nodos. Assim, considerou-se que este processador correspondia perfeitamente às necessidades actuais e aos objectivos estabelecidos para o **CADdyMAG** nesta altura, i.e. 20000 nodos, pelo que se adoptou o “9 – DLXLXD  $[SV]$  dir., 3M5” como o processador térmico do **CADdyMAG**, com o nome “**CARTyTERB**”. Este processador permite portanto a utilização de 20000 nodos, 40000 elementos finitos e 4000 lados de elementos com convecção.

Foram também efectuados diversos testes que indicam que os  $3,5 \times 10^6$  coeficientes são suficientes para malhas com um pouco mais de 20000 nodos, desde que obviamente se tenha o cuidado de renumerar os nodos da malha de elementos finitos no pré-processador. Caso contrário, o número de coeficientes a armazenar pelo método de perfil em  $[SV]$  será enorme.

A título de exemplo, refira-se que se não fosse feita a renumeração dos nodos no pré-processador, e mesmo armazenando em [SV] apenas a matriz triangular inferior de [S<sub>11</sub>] (i.e. tirando partido da sua simetria), teríamos<sup>96</sup>:

- o que acontece para o modelo tt4 (cf. Tabela 10.4), em que para os 4102 nodos foi necessário armazenar mais de  $61 \times 10^6$  coeficientes (banda da matriz: 85%);
- para o modelo tt16 com 16239 nodos (que depois de renumerado originou tt16r) teriam que ser armazenados cerca de  $102 \times 10^6$  coeficientes (banda da matriz: 94%);
- e para o modelo tt19 com 19971 nodos (que depois de renumerado originou o tt19r) teriam que ser armazenados cerca de  $220 \times 10^6$  coeficientes (banda da matriz: 76%)

Antes de dar por terminado o assunto da conversão do processador térmico para PC/Windows, é conveniente referir ainda que:

- o processador foi alterado para ler directamente os alfas a partir do ficheiro **materiais.pro**. Caso contrário, de cada vez que se quisesse mudar as etiquetas dos materiais com “alfas” (i.e., os materiais onde se quer considerar a variação da resistividade com a temperatura) era preciso recompilar um novo processador;
- tendo os ficheiros de dados e resultados do **CADdyMAG** o formato texto (ASCII), o tamanho dos modelos começa a ser significativo. Por exemplo o ficheiro tt19r.pre tem 1,5 MB e o ficheiro pos tt19r\_9.pos tem 3,0 MB. Isto pode começar a causar problemas quando se pretendem analisar centenas<sup>97</sup> de casos para cada projecto, como tem acontecido. A solução natural seria gravar os ficheiros em modo binário em vez de modo texto; no entanto, isto implica que deixa de se poder utilizar um simples editor de texto para visualizar o conteúdo dos ficheiros **\*.pre**, **\*.pro** e **\*.pos** (o que é muito útil sobretudo em fases de alterações e debugging do programa), e poderá dar ainda origem a um problema complicado: sendo neste momento o código dos diferentes módulos do **CADdyMAG** realizado em diferentes linguagens e compiladores, não há a garantia de que a escrita e leitura seja 100% compatível, pois a definição de números reais não é forçosamente a mesma.

---

<sup>96</sup> Estes valores para [S<sub>11</sub>] não aparecem na Tabela 10.3, página 247, pois aqui já só aparecem os valores para [S<sub>11</sub>] das malhas renumeradas.

<sup>97</sup> Para chegar aos resultados apresentados nos capítulos 3 a 6 foram modelados 952 casos distintos (correspondendo a ficheiros **\*.pos**), para o capítulo 7 137 casos, para o capítulo 8 172 casos e para os capítulos 10 e 11, 156 casos distintos (apenas os casos resolvidos com o **CADdyMAG**), embora muitos correspondam a testes que não foram utilizados nos resultados finais. Ou seja, mais de 1400 modelos distintos analisados. Felizmente que a maior parte dos ficheiros **\*.pos**, os dos capítulos 3 a 6, tinham apenas pouco mais de uma centena de kB.

Expõe-se de seguida o estudo efectuado, utilizando já o novo processador **CARTyTERB**, para resolver um problema (que já se nos tinha colocado) existente na modelização térmica de máquinas eléctricas com diversos isolamentos e geometrias não triviais: a diferença de dimensões envolvidas e o número muito elevado de nodos necessário para modelar correctamente os diversos elementos.



# 11 MÉTODO PARA CÁLCULO DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE DE BARRA DE ALTERNADOR: HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA

Neste capítulo é exposta a metodologia desenvolvida (utilizando já o novo processador, **CARTyTERB**) para o cálculo de condutividades térmicas equivalentes, usando malhas grosseiras, para barras de máquinas eléctricas com diversos materiais isolantes. Esta homogeneização térmica permitirá resolver problemas térmicos muito mais rapidamente e com muito menor número de nodos que modelando todos os materiais, ou, o que será ainda mais útil, poder resolver correctamente problemas completos considerando correctamente as barras utilizadas.

A metodologia desenvolvida foi apresentada pelo autor na *16th International Conference On Electrical Machines - ICEM'2004*, que decorreu em Cracóvia (Kracow), na Polónia, de 5 a 8 de Setembro de 2004, com o título “*Equivalent thermal conductivity of insulating materials for high voltage bars in slots of electrical machines*”.

É também estudada com algum detalhe a metodologia para o cálculo do fluxo de calor por elementos finitos de 1ª ordem e os cuidados a ter nesse cálculo.

## 11.1 Introdução

Um dos maiores problemas térmicos das máquinas eléctricas é a determinação e localização da temperatura máxima nos enrolamentos, em regime permanente, a qual é responsável pelo seu envelhecimento térmico e degradação. Por isso é importante determinar essas temperaturas máximas no projecto térmico das máquinas eléctricas.

Na modelação térmica de máquinas eléctricas por elementos finitos, devem ser considerados todos os diferentes materiais atravessados pelo fluxo de calor, nomeadamente os isolamentos dos enrolamentos. Outros autores apresentaram uma equação explícita para o cálculo da condutividade térmica equivalente para um conjunto de condutores paralelos [Matagne1990] e uma aproximação estatística para o cálculo da temperatura dos condutores dentro das ranhuras de máquinas eléctricas [Chaveau2002[PP521]]. Noutro estudo

[Dodd2002], a bobina real do actuador (“motor”) de um altifalante (“*voice coil loudspeaker motor*”) foi substituída por uma bobina concentrada equivalente.

Um problema diferente surge naquelas máquinas eléctricas em que os condutores nas ranhuras da máquina são barras de média ou alta tensão contendo várias camadas estreitas de materiais isolantes. Com efeito, apesar do espantoso desenvolvimento das capacidades dos computadores e dos programas de elementos finitos, continua a ser problemática a modelação dos diferentes materiais na análise de problemas térmicos para máquinas completas: devido à grande diferença de dimensão dos vários componentes envolvidos (por exemplo isolantes com décimas de milímetros numa máquina que pode ter metros de diâmetro), será necessário um enorme número de nodos para a discretização do problema através de uma malha de elementos finitos.

O objectivo do trabalho que se segue foi desenvolver um método que permita substituir as várias camadas de isolantes por uma única camada de um material com condutividade térmica equivalente, permitindo a utilização de um número muito inferior de elementos finitos e sem perda de precisão significativa, nomeadamente no valor máximo da temperatura nas barras.

## **11.2 Caso estudado e metodologia**

### **11.2.1 Dados e resultados para o problema original**

Como caso de estudo, foi considerada a barra apresentada na Fig. 11.1a, pertencente a um alternador trifásico de média tensão (1 MVA, 6,3 kV), accionado por uma turbina hidráulica de 250 r.p.m. O enrolamento do estator da máquina é a duas camadas, havendo portanto duas barras em cada ranhura (ou cava, como também é conhecida) do estator. Cada uma das barras (que constitui um dos lados – de ida ou de volta – de um enrolamento de uma fase) é composta por 9x2 condutores de cobre (“1” na Fig. 11.1a). Cada um dos condutores da barra é individualmente isolado com uma camada de 0,2 mm de papel e algodão (“2” e “3” na mesma figura) e é ligado aos outros condutores com uma camada de 0,4 mm de betume (“4” na mesma figura). A barra é constituída ainda por uma camada final de 2,5 mm de micanite moldada (“5” ainda na Fig. 11.1a). Foi também considerada uma camada com 0,25 mm de

resina<sup>98</sup> de impregnação, entre a barra e a ranhura da máquina (“6” na figura). A condutividade térmica e a espessura de cada isolante, bem como do cobre e da resina de impregnação, são apresentadas na Tabela 11.1 onde se pode ver que as condutividades térmicas dos isolantes variam entre 0,17 e 0,7 W/(m·K).

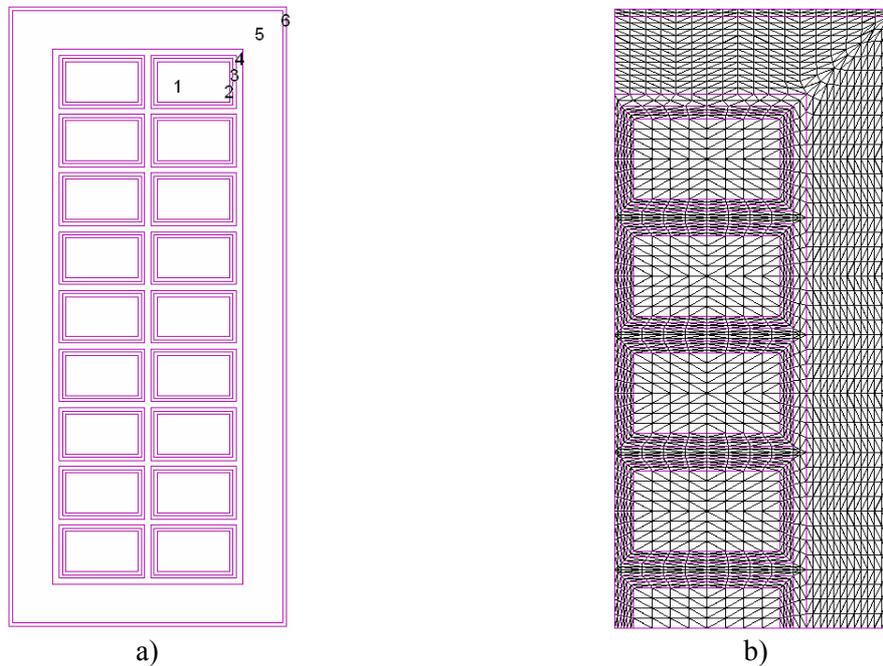


Fig. 11.1. a) Barra de alternador com 9×2 condutores envolvidos por vários isolantes; b) malha de elementos finitos original (2035 nodos/ 3920 elementos) para ¼ da barra numa ranhura da máquina.

Tabela 11.1. Materiais da barra do alternador e propriedades respectivas relevantes.

Material	Condutividade térmica, $k$ [W/(m·K)]	Espessura (mm)	Número na Fig. 11.1a
Cobre	386,000	$2,6 \times 4,5 = 11,7 \text{ mm}^2$ (cada condutor)	1
Papel	0,170	0,17	2
Algodão	0,240	0,24	3
Betume	0,700	0,4	4
Micanite	0,240	2,5	5
Resina	0,200	0,25	6

Para a corrente nominal de 91,64 A, circulando em dois condutores em paralelo<sup>99</sup> (i.e., a corrente em cada condutor é de 45,82 A), a densidade de corrente é  $J = 3,916 \times 10^6 \text{ A/m}^2$

<sup>98</sup> Inicialmente estudou-se a possibilidade de considerar convecção no espaço entre a barra e a ranhura. No entanto através de contactos com o Eng. Mário Contin, da WEG, Brasil (<http://www.weg.com.br>), chegou-se à conclusão de que, para melhorar as características térmicas e mecânicas, o costume é utilizar-se uma resina de impregnação com a condutividade térmica igual a 0,2 W/(m.K) e com 0,25 mm de espessura, correspondentes à tolerância da ranhura: para as dimensões da barra considerada, a tolerância será 0,25 mm para cada lado, ou seja 0,5 mm no total.

<sup>99</sup> Cada barra tem 9x2 condutores, estando os dois condutores na mesma horizontal (par) em paralelo, e cada “par horizontal” em série com os outros pares da mesma barra.

(3,916 A/mm<sup>2</sup>). Tratando-se de um problema a 2D, da equação (9.23), página 223, as fontes térmicas para ¼ da barra,  $q'$ , em W/m (i.e. por metro de comprimento na direcção  $z$ ), são dadas por

$$q' = \frac{\Delta_{cobre} \rho_0 J^2}{4} \quad (11.1)$$

em que  $\Delta_{cobre}$  é a área total de cobre da secção recta de uma barra, em m<sup>2</sup>. Sendo  $\Delta_{cobre} = 9 \times 2 \times 11,7 \text{ mm}^2 = 210,6 \text{ mm}^2$  e  $\rho_0 = 1,72 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ , as fontes térmicas para ¼ da barra são  $q' = 13,91942 \text{ W/m}$ .

Devido à existência de simetria, pode ser analisada apenas ¼ da barra. Para a discretização de ¼ da barra original foi usada uma malha com 2055 nodos e 3920 elementos finitos de primeira ordem, tal como se pode ver na Fig. 11.1b. Este modelo será designado por “barra original”.

Como em cada ranhura há duas barras com um espaçador entre elas, e supondo uma análise térmica de metade da máquina com 48 ranhuras, seriam necessários cerca de 400.000 nodos<sup>100</sup> apenas para fazer uma discretização a 2D das ranhuras do estator!

A ideia é, portanto, substituir os diferentes isolantes por um único material equivalente (“*bulk material*”), com uma **condutividade térmica equivalente**  $k_e$ , e utilizando um número muito menor de nodos e de elementos para a malha de elementos finitos correspondente, ou seja fazer uma **homogeneização térmica** da barra.

Tal como referido, para a densidade de fontes térmicas foi utilizada a expressão (9.23) em vez da (9.24), pelas razões que serão oportunamente referidas.

Como condição de fronteira foi considerada uma temperatura de referência no limite da ranhura,  $T_{ref} = 373,15 \text{ K}$  (100°C).

O problema térmico de condução em regime permanente foi resolvido utilizando o processador térmico de elementos finitos de primeira ordem **CARTyTERB**, exposto no final do capítulo anterior. A distribuição da temperatura obtida para a barra original, nas condições acima referidas, é apresentada na Fig. 11.2a e a distribuição do vector fluxo de calor **F** pode ser vista na Fig. 11.2b.

---

<sup>100</sup> Considerando [(2000 nodos) x (4 partes) x (2 barras na ranhura) + (200 nodos espaçador)] x 48/2 ranhuras = 388800, aproximadamente 400000 nodos.

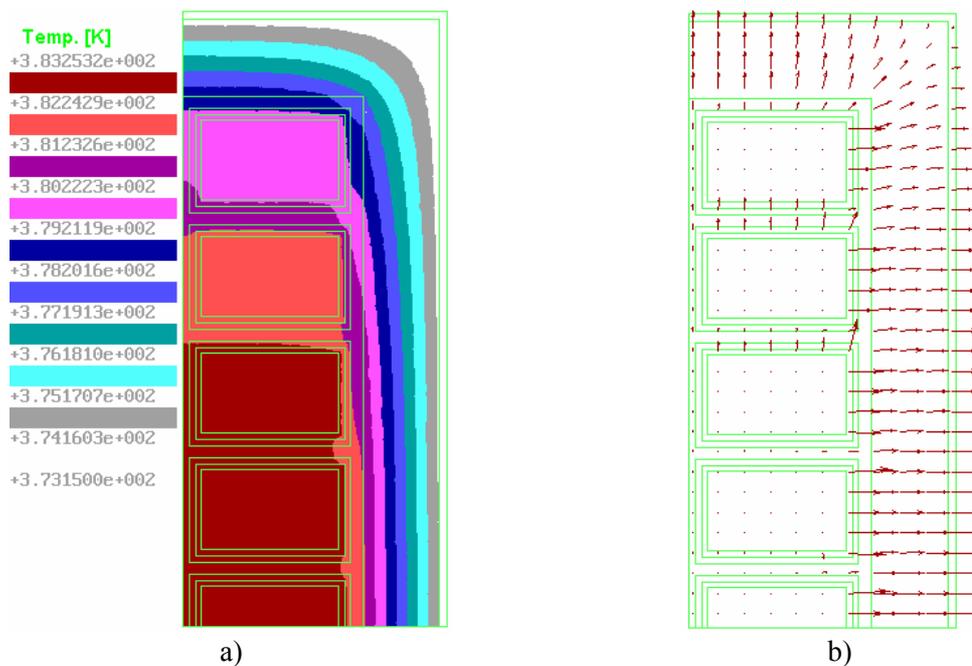


Fig. 11.2. a) Temperatura da barra original; b) distribuição do vector fluxo de calor  $F$ .

O aumento da temperatura para a barra e malha originais, designado por  $\Delta T_{ref}$ , e que será tomado como referência, é dado por

$$\Delta T_{ref} = T_{max} - T_{ref} \quad (11.2)$$

sendo  $\Delta T_{ref} = 383,2532 - 373,15 \approx 10,103$  K, como se pode tirar da Fig. 11.2a.

### 11.2.2 Verificação da solução de elementos finitos: cálculo do fluxo de calor

Tendo-se produzido um novo processador, e apesar das verificações já efectuadas e referidas anteriormente, quis fazer-se mais uma verificação adicional, desta vez não por comparação com soluções anteriores, mas por comparação com uma solução analítica exacta. Assim, a verificação da solução de elementos finitos pode ser feita através da confirmação de que a lei da conservação de energia ([Incropera1996] pp.12-16, [Ozisik1977] pp.21-26, [Rohsenow1985] pp.1.13-1.33) é respeitada. No caso do presente problema, não havendo entrada de calor exterior na barra, isso quer dizer que, em regime permanente, o calor que sai (i.e. o fluxo de calor) terá que ser igual ao calor gerado por efeito de Joule no interior da barra (i.e. as fontes térmicas).

Recorde-se que o vector fluxo de calor,  $\mathbf{F}$ , é dado pela generalização para 3D da Lei de Fourier de condução de calor

$$\mathbf{F} = -k\nabla T = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + k\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + k\frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \quad (9.3)$$

O fluxo de calor por condução  $\phi_{hcond}$ , em W, que atravessa uma superfície qualquer 3D, fechada ou não, é dada pela integração do produto escalar de  $\mathbf{F}$  por  $\hat{\mathbf{n}}$  ao longo da superfície  $S$

$$\phi_{hcond} = \int \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (11.3)$$

em que  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor normal à superfície, apontando para fora.

Num sistema de coordenadas cartesiano, (11.3) torna-se

$$\phi_h = \int_{yz} F_x dydz + \int_{xz} F_y dx dz + \int_{xy} F_z dx dy \quad (11.4)$$

em que  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são as componentes do vector fluxo de calor  $\mathbf{F}$  nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

O fluxo de calor saindo da barra pode ser facilmente calculado se se tiver em conta que para um problema 2D no plano  $xy$ , tal como o apresentado nas figuras anteriores, não há variação de temperatura segundo  $z$ , pelo que  $F_z$  em (11.4) é zero. Assim, o fluxo de calor pode ser calculado em função da profundidade, ou seja, do comprimento da barra, pelo que a equação (11.4) pode ser simplificada (cf. (9.1) e (9.20), páginas 217 e 222) resultando

$$\frac{\phi_h}{l} = \int_y F_x dy + \int_x F_y dx = -\int_y k \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_x k \frac{\partial T}{\partial y} dx \quad (11.5)$$

em que  $l$  é o comprimento da barra na direcção do eixo dos  $z$  em m e  $\phi_h/l$  representa o fluxo de calor por metro de profundidade do modelo, em W/m ( $\phi_h/l$  também aparece na literatura como  $q'$  [Incropera1996] pp.xxii).

Em particular, para o fluxo de calor  $\phi_h/l$  deixando o cabo cruzando as linhas 1, 2 e 3 (linhas a vermelho na Fig. 11.3), observe-se que:

- o caminho de integração apenas cruza um material com condutividade térmica (considerada<sup>101</sup>) constante; e
- as linhas escolhidas para caminho de integração do integral de linha são paralelas aos eixos cartesianos. Por isso, para a parte vertical dos caminhos de integração (linhas “a” na Fig. 11.3a), apenas  $F_x$  será considerada, e, para a parte horizontal dos caminhos de integração (linha “b” na Fig. 11.3a) apenas  $F_y$  deverá ser considerada.

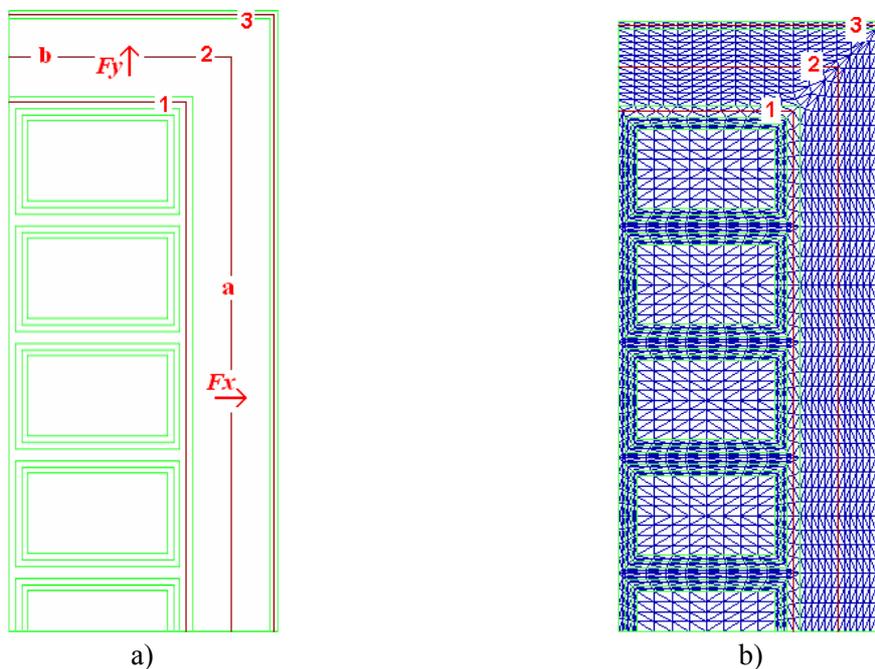


Fig. 11.3. a) Linhas de integração para a barra; b) posição das linhas 1 a 3 em relação à malha de elementos finitos original.

Consequentemente, o fluxo de calor  $\phi_h/l$  cruzando as linhas 1, 2 e 3, é dado por

$$\frac{\phi_h}{l} = \int_{y=a} F_x dy + \int_{x=b} F_y dx = k \left( - \int_{y=a} \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_{x=b} \frac{\partial T}{\partial y} dx \right) \quad (11.6)$$

<sup>101</sup> Na realidade, de uma forma geral, a condutividade térmica dos materiais também é função da temperatura [Incropera1996] pp.46-50, [Ozisik1977] pp.4-8, e todo o capítulo 3 de [Rohsenow1985], em particular pp.3.116-3.120. No entanto, dentro da gama de variações da temperatura do modelo, o erro cometido ao considerar  $k$  constante não será significativo.

Assim, o cálculo do fluxo térmico de calor nas condições indicadas pode ser calculado utilizando comandos já existentes no **CADyPOS**, nomeadamente funcionando em modo *batch* tal como se verá na Fig. 11.12, página 284.

O fluxo de calor  $\phi_h/l$  atravessando as linhas 1, 2 e 3 indicadas na Fig. 11.3 (para a barra original) foi então calculado usando (11.6). Confirmou-se que o fluxo de calor é muito aproximadamente igual às fontes térmicas, dadas por (11.1), i.e., confirmou-se que  $\phi_h/l = q'$  (com um erro de 0,839%, 0,256% e -0,083%, para os caminhos 1,2 e 3, respectivamente. Estes erros serão justificados mais à frente na página 284, em “11.4 Considerações adicionais à cerca do cálculo do fluxo de calor”). Foi portanto numericamente confirmado que (9.14) é verificada, ou seja que é verificada a lei da conservação da energia, o que reforça a validação da solução de elementos finitos.

### **11.2.3 Substituição da barra original por barras equivalentes**

Tendo-se verificado a validade da solução de elementos finitos, volta-se ao objectivo de substituir a barra “Original” por uma equivalente com muito menor número de nodos. Como metodologia, decidiu-se substituir a barra original por barras equivalentes compostas por cobre, onde as perdas por efeito de Joule são produzidas, rodeadas por um único material isolante equivalente. Foram consideradas duas aproximações diferentes: primeiro, substituir a barra original por uma equivalente com igual distribuição de cobre (doravante designada por “Igual”, Fig. 11.4) e, segundo, substituí-la por uma barra com o cobre todo concentrado num único grande condutor (que será designada por “Conc.”, Fig. 11.5). A ideia de manter a mesma área de cobre que na barra original é poder utilizar a mesma densidade de corrente,  $J$ , para ambos os problemas térmicos e magnéticos, embora possam ser consideradas outras possibilidades.

Tal como já referido, para ambas as aproximações, os cinco isolantes originais foram substituídos por um único material equivalente. Para isso foram consideradas duas malhas diferentes para cada aproximação: uma malha refinada (designada por “Fina”) e uma malha grosseira (designada por “Grosseira”). Para os modelos com a mesma distribuição de cobre, “Igual”, a malha refinada (Fig. 11.4a) tem a mesma geometria que a malha da barra original (i.e. os mesmos nodos e elementos que os da Fig. 11.1b, embora agora apenas com um isolante) e a malha grosseira (Fig. 11.4b) tem o número mínimo de nodos e elementos necessários para a análise. Para os modelos com cobre concentrado, “Conc.”, a malha refinada (Fig. 11.5a) tem cerca de metade dos nodos da barra original (Fig. 11.1b), e a malha grosseira

(Fig. 11.5b) tem também o número mínimo de nodos e elementos necessários para a análise com esta configuração.

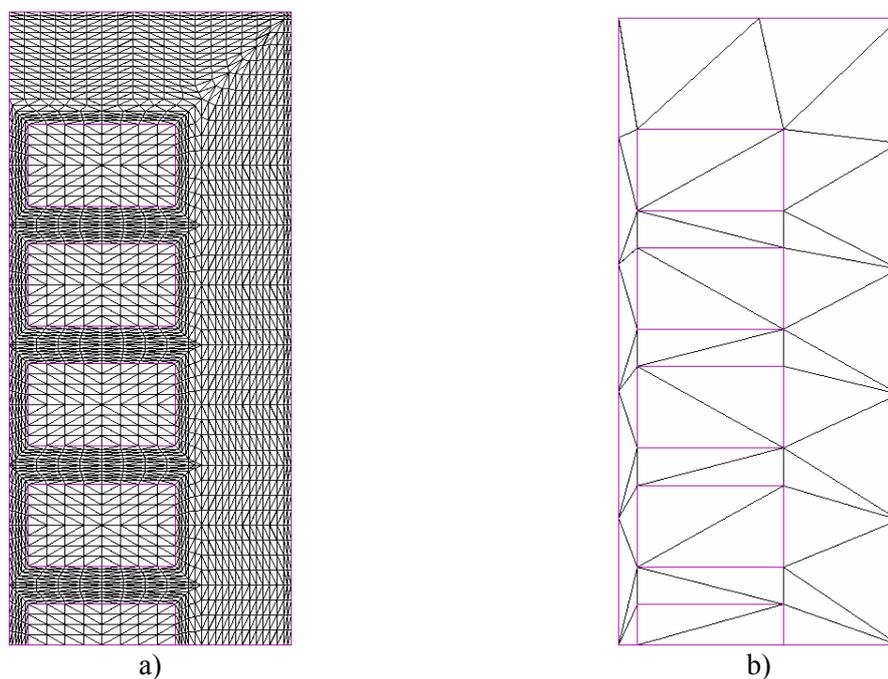


Fig. 11.4. Modelos com a mesma distribuição de cobre, “Igual”: a) malha “Fina” (2035 nodos/ 3920 elementos); b) malha “Grosseira” (33 nodos/49 elementos).

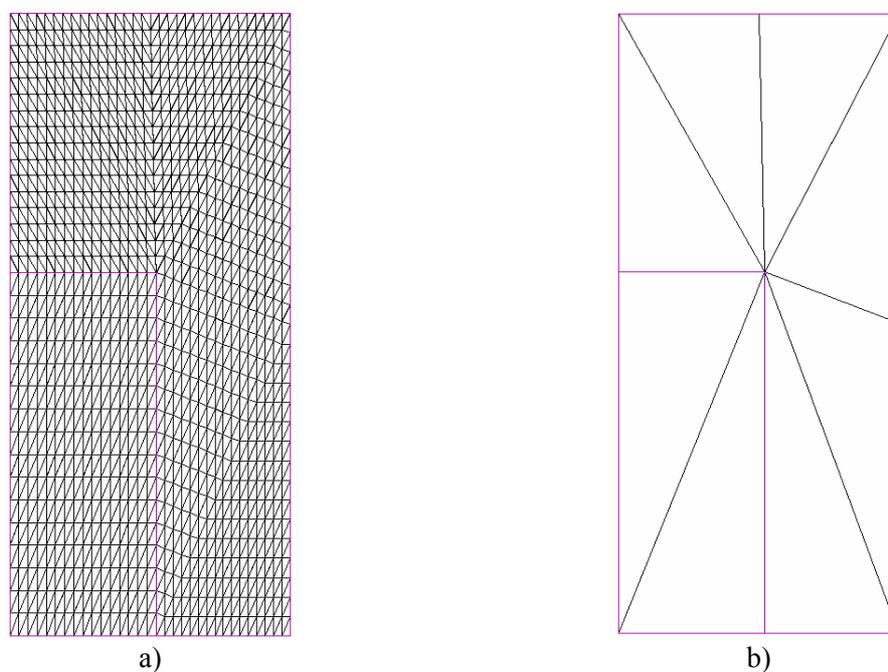


Fig. 11.5. Modelos com distribuição de cobre diferente da barra original, concentrado, “Conc.”: a) malha “Fina” (1089 nodos/ 2048 elementos); b) malha “Grosseira” (9 nodos/8 elementos).

Quanto à condutividade térmica, como na metodologia proposta o calor não tem que atravessar toda a barra de lado a lado<sup>102</sup>, mas em vez disso é gerado dentro da barra, a condutividade térmica equivalente foi considerada isotrópica.

A questão a resolver agora é **como calcular o valor da condutividade térmica equivalente**. Para a calcular, os problemas térmicos em regime permanente para os quatro<sup>103</sup> casos mencionados anteriormente só com um isolante, foram resolvidos fazendo variar a condutividade térmica  $k$  do isolante entre 0,2 e 0,6 W/(m·K). Os correspondentes aumentos da temperatura máxima no modelo foram calculados (resultados a apresentar na Fig. 11.6). A partir deste aumento da temperatura máxima em função da condutividade térmica  $k$ , foi então calculada a condutividade térmica equivalente  $k_e$ , tal como se verá mais detalhadamente em seguida.

### 11.3 Resultados

O problema térmico em regime permanente, dado por (9.14), foi resolvido para as quatro malhas equivalentes mostradas na Fig. 11.4 e Fig. 11.5, utilizando valores de condutividade térmica  $k$  variando entre 0,2 e 0,6 W/(m·K), pois na barra real (Fig. 11.1) as condutividades térmicas das várias camadas de isolantes variam entre 0,17 e 0,7 W/(m·K). Para cada malha equivalente, o aumento da temperatura máxima,  $\Delta T$ , é dado por

$$\Delta T = T_{\max} - T_{ref} \quad (11.7)$$

em que  $T_{\max}$  é a temperatura máxima obtida para cada malha e cada  $k$ . Os valores obtidos são representados na Fig. 11.6 (com linhas coloridas grossas).

---

<sup>102</sup> O que provavelmente conduziria a ter que considerar o material anisotrópico com duas condutividades térmicas diferentes, uma para a direcção horizontal e outra para a direcção vertical da barra.

<sup>103</sup> Distribuição do cobre concentrada e igual, e em ambos os casos, com uma malha grosseira e outra fina.

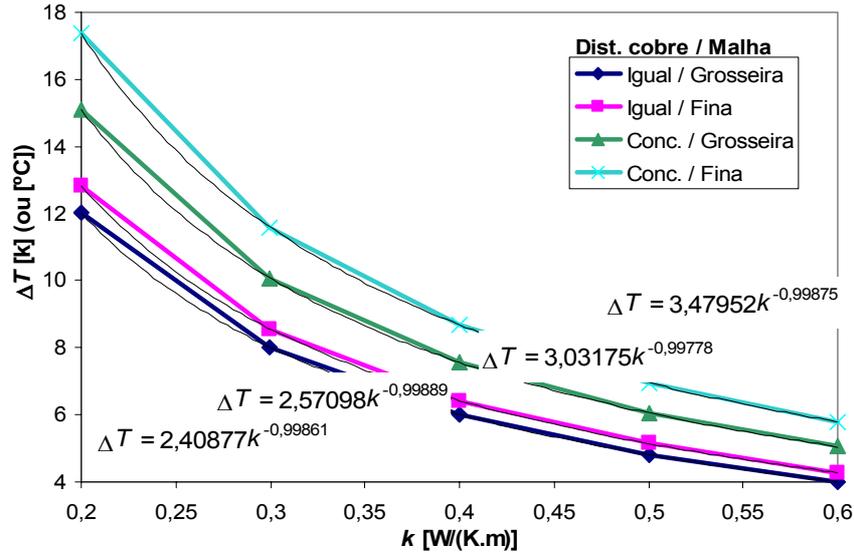


Fig. 11.6. Aumento da temperatura máxima,  $\Delta T$ , para as diferentes malhas em função da condutividade térmica,  $k$ .

Uma conclusão importante é que, como se pode ver, essas curvas podem ser perfeitamente ajustadas por funções de potências (curvas finas a preto) na forma

$$\Delta T = ak^{-b} \quad (11.8)$$

em que “a” e “b” são coeficientes cujos valores, para os problemas concretos, são também mostrados na Fig. 11.6, dados pela função “linha de tendência” (“*trendline*”) do *Microsoft Excel*.

Para obter o mesmo aumento da temperatura máxima que na barra e malha originais,  $\Delta T_{ref}$ , equação (11.2), a condutividade térmica equivalente  $k_e$  para cada malha de elementos finitos em particular (pois a solução de temperatura dependerá da malha, particularmente quando esta é bastante grosseira) pode então ser muito facilmente calculada por

$$k_e = \left( \frac{\Delta T_{ref}}{a} \right)^{-1/b} \quad (11.9)$$

Os valores dos coeficientes “a” e “b”, bem como os dos  $k_e$  resultantes são apresentados na Tabela 11.2.

Tabela 11.2. Coeficientes “a” e “b” e condutividade térmica equivalente  $k_e$ .

Distribuição cobre/ Malha	Coeficiente “a”	Coeficiente “b”	$k_e$ [W/(m·K)]
Igual / Grosseira	2,40877	0,99861	0,237946
Igual / Fina	2,57098	0,99889	0,254090
Conc. / Grosseira	3,03175	0,99778	0,299282
Conc. / Fina	3,47952	0,99875	0,343945

Neste momento, deve ser clarificado porque é que para o cálculo das fontes térmicas, neste problema, não deve ser utilizada a expressão mais exacta, (9.24), página 223, que considera a variação da resistividade eléctrica com a temperatura. Com efeito, apesar de (9.24) ser, normalmente, a expressão a utilizar para resolver os problemas térmicos, para o caso particular em estudo é obrigatório utilizar (9.23). A razão é a seguinte: se for utilizada a equação (9.24), as fontes térmicas<sup>104</sup> não permanecem constantes. Consequentemente, o aumento da temperatura máxima resultante,  $\Delta T$ , não será apenas função da condutividade térmica dos materiais isolantes e da sua geometria, mas será também função da densidade de corrente e da temperatura de referência na fronteira da barra,  $T_{ref}$ . Nesse caso, não seria possível estabelecer um padrão como o representado na Fig. 11.6, apenas função de  $k_e$  e da malha utilizada.

Finalmente, utilizando os valores de  $k_e$  calculados por (11.9) e apresentados na Tabela 11.2, o problema térmico de condução para cada malha foi resolvido, sendo as distribuições de temperaturas obtidas mostradas na Fig. 11.7 e Fig. 11.8, para as barras “Igual” e “Conc.” e para as malhas “Fina” e “Grosseira”.

<sup>104</sup> No cálculo das fontes térmicas pela equação (9.24) utilizou-se um valor típico de  $\rho_0$  à temperatura de 20°C. Atendendo a que a temperatura máxima da barra e a temperatura na fronteira ( $T_{ref}=100^\circ\text{C}$ ), são significativamente superiores a 20°C, teria sido formalmente mais correcto usar um valor de resistividade corrigido para um valor de temperatura perto de  $T_{ref}$ . Assim, o valor de  $T_{max}$  seria mais correcto. No entanto, para o caso concreto do problema em estudo, isso é indiferente desde que a resistividade (e consequentemente as fontes térmicas) seja igual e constante para todos os modelos, como foi e tem que ser feito.

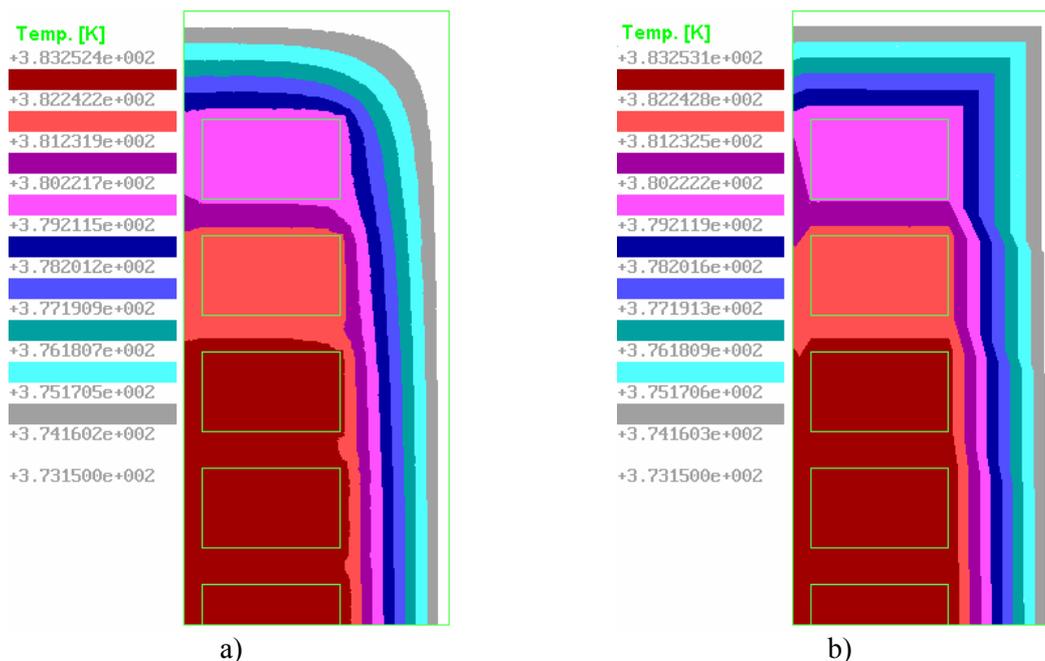


Fig. 11.7. Distribuição da temperatura para a mesma distribuição de cobre, “Igual”:  
 a) malha “Fina” (2035 nodos/ 3920 elementos),  $k_e = 0,254090$  W/(m·K);  
 b) malha “Grosseira” (33 nodos/49 elementos),  $k_e = 0,237946$  W/(m·K).

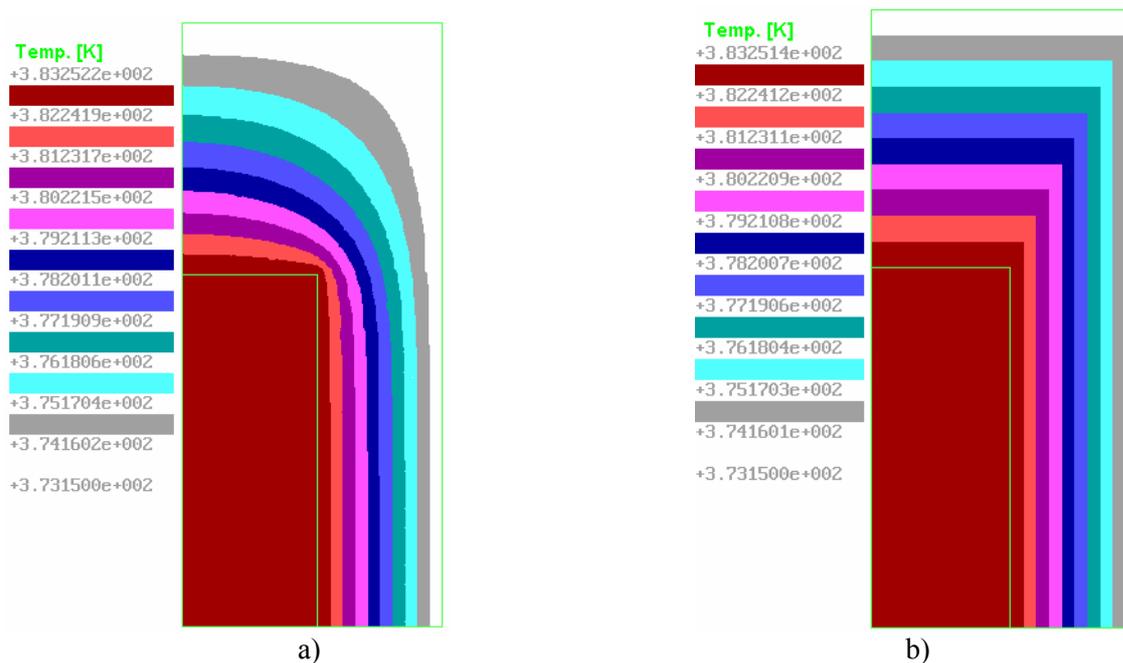


Fig. 11.8. Distribuição da temperatura para distribuição de cobre diferente da barra original, concentrado “Conc.”: a) malha “Fina” (1089 nodos/ 2048 elementos),  $k_e = 0,343945$  W/(m·K);  
 b) malha “Grosseira” (9 nodos/8 elementos),  $k_e = 0,299282$  W/(m·K).

Comparando estes resultados com os de referência, na Fig. 11.2a, pode ver-se que a temperatura máxima de referência,  $T_{ref}=383,253$  K ( $\Delta T_{ref}= 10,103$  K), é obtida com elevada precisão. Estes valores e os erros respectivos, são apresentados na Tabela 11.3.

Tabela 11.3. Erros na temperatura máxima para os diversos modelos.

Distribuição cobre/ Malha	nodos/elem.	$k_e$ [W/(m·K)]	$\Delta T$ (K)	Erro
Igual / Grosseira	33/49	0,237946	10,1031	0,0010%
Igual / Fina	2035/3920	0,254090	10,1024	-0,0059%
Conc. / Grosseira	9/8	0,299282	10,1014	-0,0158%
Conc. / Fina	1089/2048	0,343945	10,1020	-0,0099%

É também possível ver que para a barra concentrada equivalente “Conc.”, a distribuição de temperaturas, bem como a temperatura média do cobre, apresentam algumas diferenças em relação à barra original. Contudo, para a malha “Igual/Grosseira” (malha na Fig. 11.4b, temperaturas na Fig. 11.7b), com apenas 33 nodos, i.e. 62 vezes menos que a original (malha com 2035 nodos na Fig. 11.1b, temperaturas na Fig. 11.2a), é possível obter uma distribuição de temperaturas muito semelhante.

Foi também verificado que adicionando apenas mais um ou dois nodos na malha de elementos finitos, na linha que vai do canto superior direito do cobre ao limite superior direito dos modelos (da Fig. 11.4b e Fig. 11.5b), a distribuição de temperaturas das malhas “Grosseira” pode ainda ser significativamente melhorada, tal como se pode ver na Fig. 11.9. Nesta figura, a solução térmica é mostrada com as novas malhas sobrepostas, designadas por “Grosseira2”. Os  $k_e$  calculados para as duas novas malhas são apresentados na Tabela 11.4, juntamente com os aumentos da temperatura máxima resultantes e os erros correspondentes.

Tabela 11.4. Erros na temperatura máxima para as malhas ligeiramente menos grosseiras (Grosseira2).

Distribuição cobre/ Malha	nodos/elem.	$k_e$ [W/(m·K)]	$\Delta T$	Erro
Igual/Grosseira2	35/53	0,241042	10,1031	0,0010%
Conc./Grosseira2	10/10	0,319620	10,1017	-0,0129%

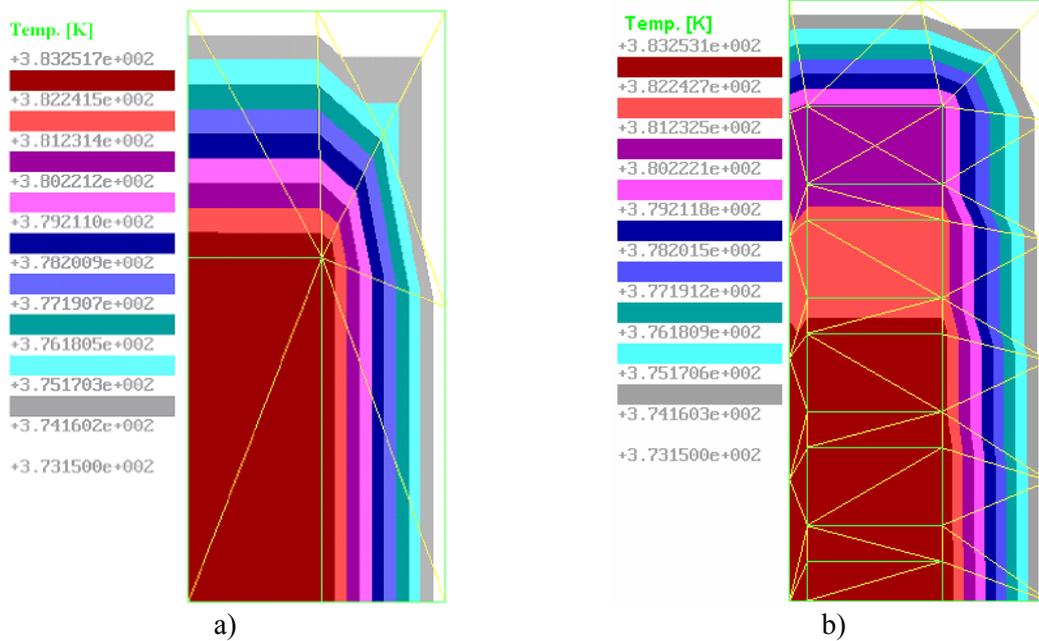


Fig. 11.9. Distribuição da temperatura para distribuição de cobre concentrado e igual com malhas ligeiramente menos grosseiras, “Grosseira2”: a) “Conc.” (10 nodos/ 10 elementos),  $k_e = 0,319620$ ; b) “Igual” (35 nodos/53 elementos),  $k_e = 0,241042$ .

Foi ainda verificado numericamente que, tal como esperado, a condutividade térmica equivalente  $k_e$  para cada malha é independente da densidade de fontes térmicas (desde que se utilize a equação (9.23), tal como referido anteriormente) e da temperatura na fronteira. Com efeito, o problema foi ainda resolvido para outros dois valores de densidade de corrente (2 e 4 vezes a  $J$  original,  $7,832 \times 10^6 \text{ A/m}^2$  e  $15,664 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ , respectivamente) e outros dois valores da temperatura na fronteira, 323,15 K (50 °C) e 328,15 K (55 °C), que conduziram aos mesmos resultados que os obtidos pela barra original para aquelas mesmas condições de  $J$  e  $T_{\text{ref}}$ .

## 11.4 Considerações adicionais à cerca do cálculo do fluxo de calor

Neste momento, do ponto de vista de metodologia e dos cuidados que o utilizador deve ter em mente, é importante abordar a questão do cálculo do fluxo de calor a partir de uma solução de elementos finitos de 1ª ordem.

Para o cálculo do fluxo de calor, dado pela equação (11.6)

$$\frac{\phi_h}{l} = \int_{y=a} F_x dy + \int_{x=b} F_y dx = k \left( - \int_{y=a} \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_{x=b} \frac{\partial T}{\partial y} dx \right) \quad (11.6)$$

o procedimento utilizado foi o seguinte (válido porque  $k$  é constante ao longo do percurso de integração escolhido):

- Calcular “– gradiente de  $T$ ”, i.e.  $\mathbf{F}/k = -\nabla T$ ;
- Calcular a componente  $x$  de  $\mathbf{F}/k$ ,  $\frac{\mathbf{F}_x}{k} = \frac{F_x}{k} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}}$ ;
- Calcular o integral de linha  $\int_{y=a} (F_x/k) dy$  para as linhas “a” (parte vertical dos caminhos de integração, cf. Fig. 11.3a, página 271);
- Calcular a componente  $y$  de  $\mathbf{F}/k$ ,  $\frac{\mathbf{F}_y}{k} = \frac{F_y}{k} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}$ ;
- Calcular o integral de linha  $\int_{x=b} (F_y/k) dx$  para as linhas “b” (parte horizontal dos caminhos de integração, cf. Fig. 11.3a, página 271);
- Finalmente, importar os resultados obtidos para o *Microsoft Excel*, multiplicar os valores obtidos pelo  $k$  correspondente e somar as duas componentes por forma a obter o fluxo de calor por metro de profundidade, de acordo com a seguinte adaptação de (11.6):

$$\frac{\phi_h}{l} = k \left( \int_{y=a} (F_x/k) dy + \int_{x=b} (F_y/k) dx \right) \quad (11.10)$$

O problema que se coloca no cálculo do fluxo de calor é o seguinte: tanto no pacote de programas **CADdyMAG**, como em qualquer outro *software* que utilize elementos finitos de 1ª ordem, é fundamental não esquecer que o fluxo de calor, dado por  $\phi_h = \int \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ , equação (11.3), é calculado a partir do vector fluxo de calor  $\mathbf{F} = -k\nabla T$ , equação (9.3), página 217. Ora, sendo  $\mathbf{F}$  um gradiente de um campo linear em cada elemento finito (consequência da utilização de elementos finitos de 1ª ordem),  $\mathbf{F}$  será constante em cada elemento finito, tal como  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ . Por esta razão, e passando já para o problema 2D, embora o integral de linha nas equações (11.5) e (11.6), página 271, seja independente<sup>105</sup> do percurso de integração, na prática, os valores obtidos serão diferentes consoante forem utilizadas as linhas 1, 2 ou 3 na Fig. 11.3, página 271.

---

<sup>105</sup> Desde que, obviamente, as fontes térmicas incluídas no seu interior sejam as mesmas, ou seja, neste caso que todo o cobre esteja no interior do percurso de integração. Note-se que se utiliza o termo “interior” pois as linhas “abertas” 1, 2 ou 3 correspondendo apenas a ¼ do modelo, na realidade correspondem a percursos de integração fechados para o problema total.

É esta a razão pela qual os valores apresentados anteriormente para o fluxo de calor  $\phi_n/l$  atravessando as linhas 1, 2 e 3 na Fig. 11.3, página 271, tinham um erro “relativamente elevado” de 0,839%, 0,256% e 0,083%, respectivamente. Com efeito, apesar das malhas serem relativamente refinadas e portanto serem espectáveis erros ainda mais baixos, uma análise cuidada da Fig. 11.3b na página 271 revela que por falta de atenção inicial a esta questão, e infeliz escolha, as linhas dos percursos de integração não só não atravessam o meio da camada de elementos finitos, como atravessam precisamente a fronteira entre camadas, onde o valor de  $\mathbf{F}$  está mais afastado do seu valor correcto, que se encontrará no centróide do elemento finito.

Claro que, estes valores de erro para as malhas mais refinadas podem ser muito diminuídos, utilizando as metodologias apresentadas de seguida, mas achou-se pertinente chamar já a atenção para este aspecto.

É também importante salientar que este problema da localização do percurso de integração será tanto mais sensível quanto mais grosseira for a malha. Com efeito, se tentarmos calcular o fluxo de calor atravessando as mesmas linhas 1, 2 e 3 (i.e. na mesma posição  $x,y$ ) mas agora para as malhas grosseiras indicadas na Fig. 11.10, os erros serão muito maiores.

Estes erros são mostrados na Fig. 11.11, onde é feita uma comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor, para as várias malhas em função da distância horizontal<sup>106</sup> ao centro da barra, ou seja, em função da coordenada  $x$  da linha considerada. Os três pontos apresentados para cada curva, da esquerda para a direita, correspondem às linhas 1, 2 e 3. Nesta figura aparecem também os valores para uma outra malha ainda não referida anteriormente, designada por “Original (Média)”. Trata-se de uma outra malha que foi utilizada para verificações adicionais e que discretiza a barra real, com os cinco isolantes, mas com menor número de nodos (528 nodos / 980 elementos, i.e., cerca de um quarto dos da malha “Original (Fina)”, Fig. 11.1, página 267).

---

<sup>106</sup> A “Distância horizontal ao centro da barra (m)” representa a distância desde o canto inferior esquerdo do modelo de elementos finitos, origem das coordenadas, até ao início do percurso de integração, na coordenada  $y=0$ . Assim, a linha 1 tem  $x_1=5,7 \times 10^{-3}$  m, a linha 2 tem  $x_2=7,15 \times 10^{-3}$  m e a linha 3 tem  $x_3=8,525 \times 10^{-3}$  m, tal como de resto se poderá ver na Fig. 11.12, página 284, na terceira coluna dos primeiros três comandos iniciados por “305”.

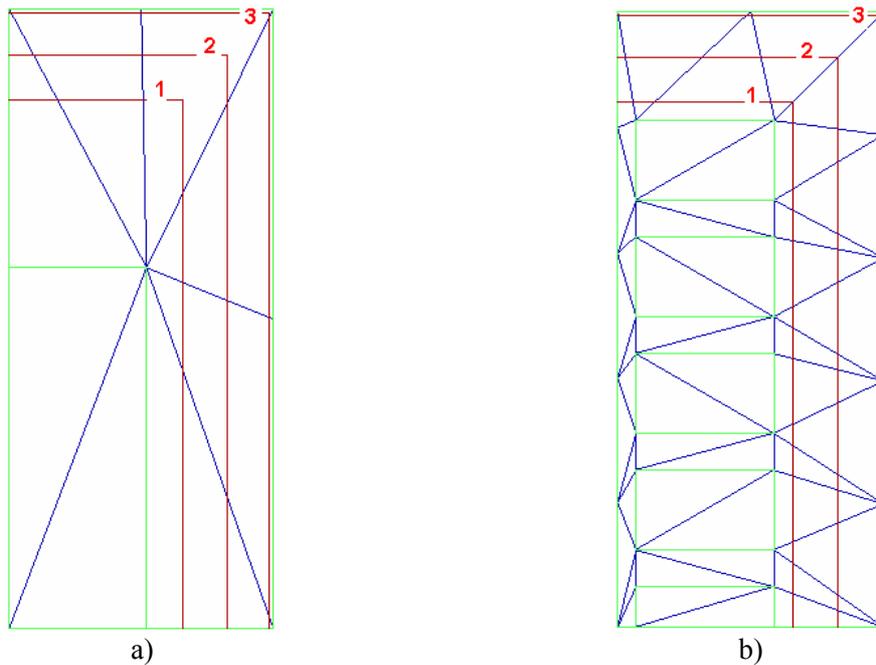


Fig. 11.10. Posição das linhas de integração 1 a 3 em relação às malhas de elementos finitos para as barras equivalentes “Grosseira”: a) concentrado, “Conc.”; b) mesma distribuição de cobre, “Igual”.

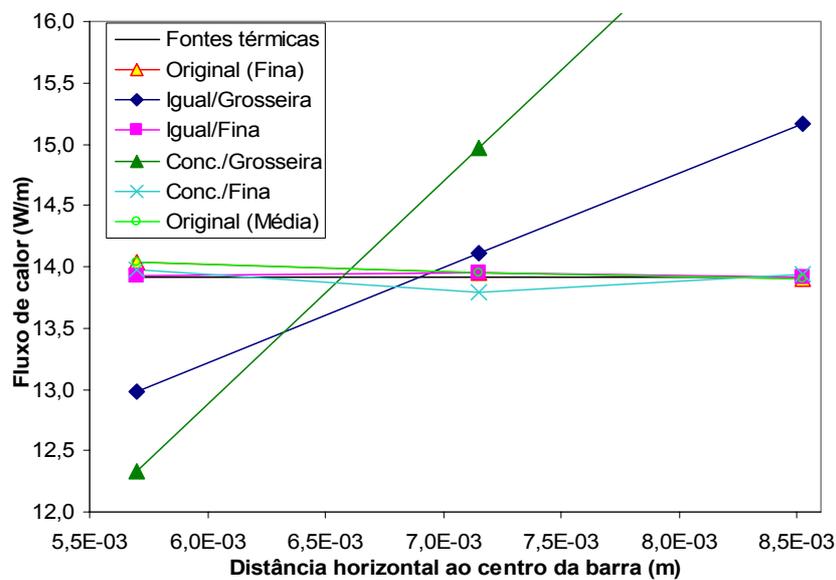


Fig. 11.11. Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as várias malhas em função da distância horizontal ao centro da barra. Os três pontos apresentados para cada curva, da esquerda para a direita, correspondem às linhas 1, 2 e 3.

Para ultrapassar este problema da influência da posição do percurso de integração, foram tentadas e testadas duas abordagens diferentes. A primeira consistiu em linearizar o vector fluxo de calor  $\mathbf{F}$ , por forma a transformar essa grandeza constante numa grandeza linearizada em cada elemento finito,  $\mathbf{F}_{lin}$ . A segunda, muito mais simples de utilizar (neste caso, devido à

geometria do problema e às malhas consideradas), consiste simplesmente em fazer passar o(s) percurso(s) de integração pelo meio da(s) camada(s) de elementos finitos.

### 11.4.1 Linearização do vector fluxo de calor

Quanto à primeira abordagem, a nova grandeza linearizada  $\mathbf{F}_{lin}$  foi utilizada directamente para o cálculo do fluxo de calor, de acordo com o seguinte procedimento, que utiliza apenas comandos já existentes no **CADyPOS** (tendo o cálculo sido efectuado em modo “*batch*”), e que também é válido porque  $k$  é constante nas linhas de integração escolhidas:

- Calcular “– gradiente de  $T$ ”, i.e.  $\mathbf{F} / k = -\nabla T$  ;
- Aplicar algoritmo de linearização a  $\mathbf{F} / k = -\nabla T$  , resultando  $\mathbf{F}_{lin} / k$  ;
- Calcular a componente  $x$  de  $\mathbf{F}_{lin} / k$  ,  $(F_{lin\_x} / k)\hat{\mathbf{x}}$  ;
- Calcular o integral de linha  $\int_{y=a} (F_{lin\_x} / k)dy$  para a linha “a” (linha vertical dos caminhos de integração, Fig. 11.3a, página 271);
- Calcular a componente  $y$  de  $\mathbf{F}_{lin} / k$  ,  $(F_{lin\_y} / k)\hat{\mathbf{y}}$  ;
- Calcular o integral de linha  $\int_{x=b} (F_{lin\_y} / k)dx$  para a linha “b” (horizontal dos caminhos de integração, Fig. 11.3a, página 271);
- Finalmente, importar os resultados obtidos para o *Microsoft Excel*, somar as duas componentes,  $\int_{y=a} (F_{lin\_x} / k)dy$  e  $\int_{x=b} (F_{lin\_y} / k)dx$  , e multiplicar os valores obtidos pelo  $k$  correspondente, para obter o fluxo de calor por metro de profundidade, de acordo com a seguinte adaptação de (11.6):

$$\frac{\phi_h}{l} = k \left( \int_{y=a} (F_{lin\_x} / k)dy + \int_{x=b} (F_{lin\_y} / k)dx \right) \quad (11.11)$$

Tal como referido anteriormente, os fluxos de calor foram calculados pelo **CADyPOS** em modo *batch*. Para isso, é necessária a utilização de um ficheiro de comandos a executar, ficheiro “**com\*.txt**”, que ao ser chamado de dentro do pós-processador **CADyPOS**, indica quais os comandos a serem executados sobre os ficheiros “**\*.pos**” indicados num outro ficheiro “**\*.pes**”, que contém a lista dos ficheiros **\*.pos** a serem pós-processados. O resultado dos cálculos efectuados no **CADyPOS**, segundo a sequência de comandos indicados no ficheiro de comandos **com\*.txt**, é finalmente guardado num ficheiro **\*.pss** (como o que se

verá na Fig. 11.21). Assim, a título de exemplo, apresenta-se de seguida na Fig. 11.12 um dos ficheiros de comando utilizados para o cálculo do fluxo de calor. As primeiras seis e as últimas linhas do ficheiro são comentários e para melhor compreensão são mostradas em itálico (embora tal não aconteça no ficheiro original, pois trata-se de um ficheiro de texto, formato ASCII, \*.txt).

```

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
  Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
  Para ICEM04, - Cracow, Cabo de AT para estator de alternador: Homogeneizacao térmica.
  Calcula fluxo térmico.

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
1
404 1 F/k
304 2 Flin/k
106
102
103
203 30 30 3
307 3 Flin_x/k
106
102
305 2000 5.700000E-03 1.710000E-02 5.700000E-03 0.000000E+00
305 2000 7.150000E-03 1.855000E-02 7.150000E-03 0.000000E+00
305 2000 8.525000E-03 1.992500E-02 8.525000E-03 0.000000E+00
305 2000 8.650000E-03 2.005000E-02 8.650000E-03 0.000000E+00
307 3 Flin_y/k
106
102
305 2000 0.000000E+00 1.710000E-02 5.700000E-03 1.710000E-02
305 2000 0.000000E+00 1.855000E-02 7.150000E-03 1.855000E-02
305 2000 0.000000E+00 1.992500E-02 8.525000E-03 1.992500E-02
305 2000 0.000000E+00 2.005000E-02 8.650000E-03 2.005000E-02
801 S

DESCRICAÇÃO (comentários)
"0": "Qual o tipo de simetria?": "0.cartesiana"
(...)

```

Fig. 11.12. Um dos ficheiros de comandos *batch* para o **CADyPOS**, para calcular o fluxo de calor deixando a barra.

A sequência de comandos começa na 7ª linha, e inclui:

- indicações à cerca do tipo de modelo;
- alguns comandos de visualização e outros de cálculo, nomeadamente para primeiro calcular  $\int_{y=a} (F_{lin\_x} / k) dy$  e depois  $\int_{x=b} (F_{lin\_y} / k) dx$  ao longo das linhas 1, 2 e 3, e ainda de uma outra linha 4 (coincidente com a fronteira exterior da barra);
- finalmente termina com a instrução “801 S”<sup>107</sup>.

<sup>107</sup> Corresponde ao comando 8.1 do **CADyPOS**, “fim programa”, sendo “S” a resposta “sim” à pergunta: “Quer sair do programa (N/S)?”. Isto permite passar automaticamente ao ficheiro \*.pos seguinte, indicado no ficheiro

No entanto, para maior clareza de leitura, os ficheiros deste tipo têm normalmente uma parte final de descrição<sup>108</sup> das instruções e comandos. Apresenta-se seguidamente uma descrição possível para os comandos da figura anterior. Tratando-se de comentários, são aqui mostrados a itálico. O número, nome dos comandos e perguntas internas de cada comando, tal como aparecem no **CADyPOS**, são apresentados a negrito.

*DESCRIPÇÃO (comentários)*

"0": **Qual o tipo de simetria?**: "0.cartesiana"

"1": **Qual o tipo de potencial?**: "1.escalar linear (modelos electrostatico, condutivo, térmico)". Neste caso, térmico.

"404 1 F/k": Comando 4.4 **"- gradiente"** da grandeza "1" (temperatura T), toma o nome F/k

"304 2 Flin/k": Comando 3.4 **"const -> lin."**. Converte uma grandeza constante no e.f. para linear: **"Critério"** responder 2 (= **"média"**) pois ainda não está automatizada. As duas questões seguintes do comando já estão automatizadas: **"grandeza linear de que grandeza constante?"**: = "2" e **Nome da nova grandeza** = "F<sub>lin</sub>/k"

"106": Comando 1.6, **"níveis de cor"** (para controlo visual da solução e/ou captura de imagem)

"102": Comando 1.2 **"malha"** sobrepõe a malha de elementos finitos (para controlo visual ...)

"103": Comando 1.3 **"outline"**: sobrepõe o outline (contorno dos materiais e limites do modelo).

"203 30 30 3": Comando 2.3, **"vectores"**, desenha "30" vectores segundo o eixo dos x e 30 segundo o dos y, com tamanho "3"

"307 3 Flin\_x/k": Comando 3.7 **"componente X/Y"**. Calcular componente x de Flin/k; responder 1 (= **1. componente X**) pois ainda não está automatizada. As duas questões seguintes do comando já estão automatizadas: **"Componente X de que grandeza vectorial XY?"**: = "3" e **Nome da nova grandeza** = "Flin\_x/k"

"305 2000 5.700000E-03 1.710000E-02 5.700000E-03 0.000000E+00": Comando 3.5 **"integral lin."**, Calcula o integral de linha com 2000 intervalos, desde o ponto x1,y1(5.7e-3,1.71E-2) até x2,y2 (5.7E-3,0)

"307 3 Flin\_y/k": Comando 3.7 **"componente X/Y"**. Calcular componente y de Flin/k; responder 2 (= **2. componente Y**) pois ainda não está automatizada. As duas questões seguintes do comando já estão automatizadas: **"Componente Y de que grandeza vectorial XY?"**: = "3" e **Nome da nova grandeza** = "Flin\_y/k"

"801 S": Comando 8.1 **"fim programa"**. **"Quer sair do programa (N/S)?"**: = "S". Termina comandos. Tudo o que se seguir no ficheiro de comandos são comentários e é ignorado. No entanto será também copiado para o ficheiro de resultados, ficheiro "\*.pss"

Fig. 11.13. Exemplo de comentários possíveis no final do ficheiro de comandos *batch*, **com\*.txt**, para o **CADyPOS**, apresentado na Fig. 11.12.

Vejam-se agora os resultados obtidos para o fluxo de calor após a linearização, medido nas linhas 1 a 4 (a linha 4 é coincidente com a fronteira exterior do modelo, logo a seguir à linha 3), e que são mostrados na Fig. 11.15a. Por comparação com a Fig. 11.11, pode ver-se que, embora haja ligeiras melhorias para os modelos com malhas mais refinadas, não há nenhuma melhoria consistente para as malhas mais grosseiras, piorando inclusive nalguns pontos, nomeadamente para a malha "Original (Média)". Isso deve-se a que o ficheiro de

de entrada de ficheiros \*.pes, e para o qual irá repetir os comandos da Fig. 11.12 até ao último ficheiro \*.pos indicado em \*.pes.

<sup>108</sup> Que muitas vezes vai sendo acrescentada pelo utilizador de uns problemas para os seguintes, apresentando por isso normalmente muitos comentários a comandos que nem sequer são utilizados no problema em questão. Na descrição apresentada na Fig. 11.13 foram retirados os comentários a comandos não utilizados, sendo relativamente elaborada e cuidada por forma a ser mais clara ao leitor. Normalmente os comentários, servindo essencialmente de ajuda de memória para o utilizador que criou o ficheiro de comandos, ou para utilizadores experientes, são mais resumidos (cf. Fig. 8.7, página 205).

comandos *batch* mostrado na Fig. 11.12 é referente à linearização da grandeza constante **F** utilizando apenas um dos algoritmos de linearização pré existentes no **CADyPOS**<sup>109</sup>, o comando **3.4 “const. -> lin.”**. Este é o algoritmo mais simples e que não é correcto, pois não entra em consideração com a diferença de propriedades entre dois elementos finitos vizinhos [Coimbra1995] pp.169, só sendo portanto válido para modelos com a mesma propriedade.

Com efeito, no caso de haver variação da propriedade entre dois elementos finitos vizinhos, é necessário estar atento à continuidade da solução. No caso dos modelos térmicos, temos as seguintes equações de continuidade [Coimbra1995]pp.237:

$$\phi_{hn1} = \phi_{hn2} \quad (11.12)$$

$$k_2\phi_{ht1} = k_1\phi_{ht2} \quad (11.13)$$

em que  $\phi_{hn}$  é a componente normal e  $\phi_{ht}$  a componente tangencial do fluxo de calor. Atendendo a que as expressões de linearização resultantes são semelhantes às que se obtêm para a linearização do campo eléctrico<sup>110</sup> [Coimbra1995]pp.238, pode ser utilizado o segundo algoritmo apresentado em [Coimbra1995] pp.171-175, escolhendo a opção “campo eléctrico”. Assim, o problema foi novamente resolvido, agora com esse algoritmo de linearização correcto que permite considerar as descontinuidades das propriedades entre elementos finitos vizinhos. Este algoritmo é implementado através do comando **3.8 “const -> lin.d.”**, comando genérico de conversão de grandeza constante para grandeza linear descontínua. Foram utilizadas as seguintes opções: “**Tipo de campo**”=“**1.Electrico**”, “**Criterio de interpolacao**”=“**2.Media**”, “**Criterio de interpolacao**”= “**1. normal**”; “**Criterio de linearizacao**”=“**2.Media**”, “**Criterio de interpolacao**”= “**1. normal**”, introduzidas manualmente, pois o comando ainda não está totalmente adaptado ao funcionamento em modo *batch*, e, já de forma automática, “**Grandeza linear descont. de que grandeza const.?**”=“**2**” (2ª grandeza da pilha, i.e., F/k). Quanto ao resto, foi utilizado um ficheiro de comandos *batch* com a mesma sequência que o da Fig. 11.12, à excepção de que:

- a) em vez de “304 2 Flin/k”, aparecia “308 2 FlinDesc/k” e “FlinDesc”em vez de “Flin”;

<sup>109</sup> **CADyPOS** versão 3.2.4 (26-Jun-2003), 2200 nodos, 4300 elementos finitos.

<sup>110</sup> Isto apesar das equações de continuidade do campo eléctrico para modelos electrostáticos e electrocondutivos serem  $\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$  e  $E_{t1} = E_{t2}$ .

b) foram inseridos mais alguns comandos de visualização para permitir capturar as imagens apresentadas na Fig. 11.14bc.

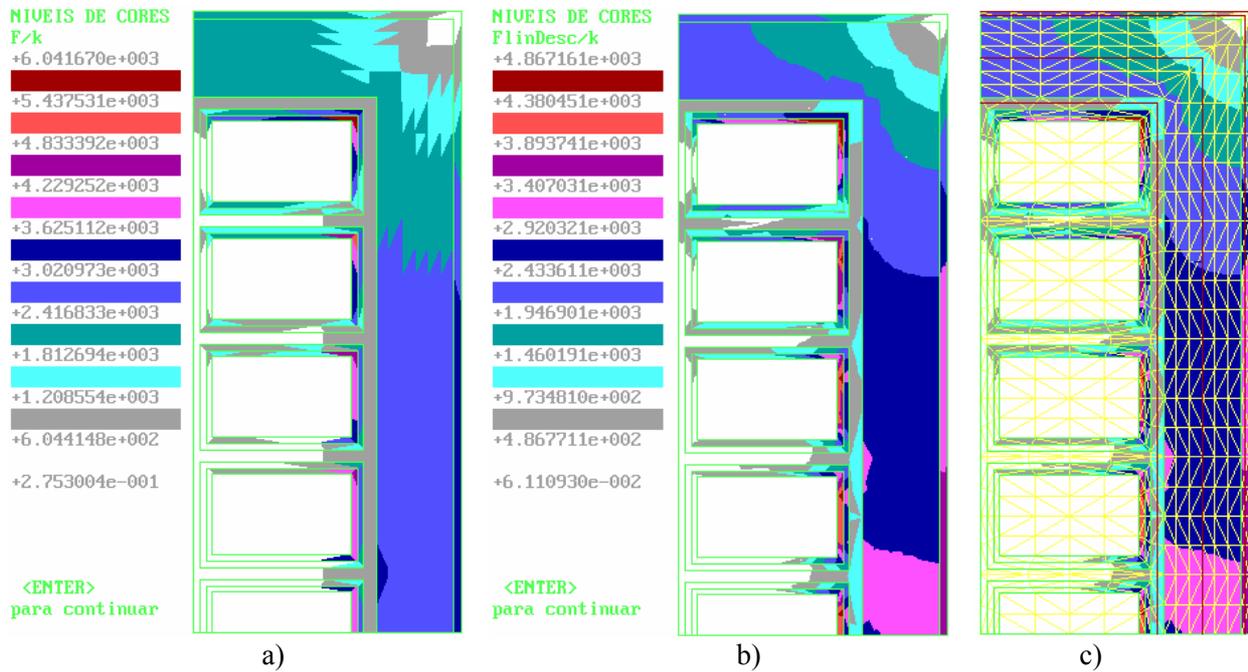


Fig. 11.14. Para a malha “Original (Média)”: a)  $F/k$ ; b)  $F_{linDesc}/k$ ; c)  $F_{linDesc}/k$ , com sobreposição da malha e das linhas 1 a 4 (a vermelho), correspondentes aos percursos de integração.

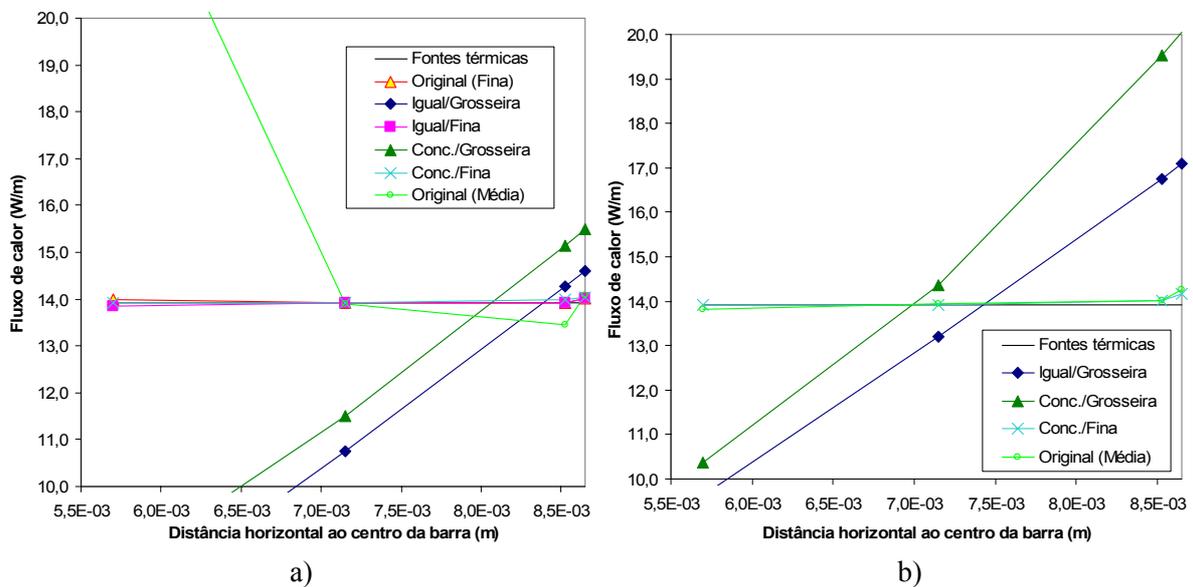


Fig. 11.15. Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as várias malhas em função da coordenada  $x$  da linha considerada: a) grandeza linearizada; b) grandeza linearizada descontínua<sup>111</sup>.

<sup>111</sup> Na Fig. 11.15b não aparecem as curvas para as malhas com mais nodos “Original (Fina)” e “Igual (Fina)”, pois estes dois ficheiros faziam abortar o pós-processamento. Note-se que executando todos os comandos para os

Assim, na Fig. 11.14 apresentam-se, para a malha original média, as distribuições de  $F/k$  e  $F_{linDesc}/k$ , onde pode ser visto o efeito da “linearização descontínua” de  $F$ .

Os resultados para o fluxo de calor por metro de profundidade,  $\phi_h/l$ , obtidos pelo comando 3.8 “**const -> lin.d.**” são então apresentados na Fig. 11.15b, concluindo-se que há, de facto, uma melhoria notável para a malha “Original (Média)”, i.e., que agora a linearização efectuada é correcta. Contudo, para as situações mais críticas, as malhas “Grosseira”, aparentemente pelo facto de serem demasiado grosseiras, o algoritmo não consegue obter os resultados pretendidos. Assim, e embora a linearização pareça e seja uma boa ideia, concluímos que para este tipo de problema os algoritmos de linearização já desenvolvidos e disponíveis no **CADyPOS** não são adequados para os casos onde teriam mais interesse, ou seja, no caso das malhas mais grosseiras. Aliás este é um problema conhecido, e de certa forma sem soluções universais, da utilização de elementos finitos de 1ª ordem e não específico dos problemas térmicos, colocando-se também no caso dos campos eléctricos e magnéticos<sup>112</sup>.

Vai-se de seguida testar a segunda abordagem mencionada, a passagem do percurso de integração pelo meio da camada de elementos finitos.

### 11.4.2 Passagem do percurso de integração pelo meio da camada de elementos finitos

Em relação à segunda abordagem para o cálculo do fluxo de calor, a passagem do percurso de integração pelo meio da camada de elementos finitos, é bastante mais simples de implementar, pelo menos no caso das geometrias em questão. O fluxo de calor foi calculado para as duas malhas “Grosseira” por serem aquelas em que o erro e a dependência do percurso de integração era maior, tal como se pôde ver na Fig. 11.11. Por forma a poder utilizar o

---

seis modelos indicados na Fig. 11.15a em modo *batch* numa mesma “fornada”, i.e. corrida do programa, com os mesmos comandos para todos os ficheiros, só estes dois é que davam (sistematicamente) o mesmo problema. Isto levou-nos a concluir que a causa seria provavelmente devido a estar a ser ultrapassado o espaço máximo em memória para as variáveis e cálculos: aqui o **CADyPOS** ainda não foi convertido para *Windows* e o número de nodos, 2035, estava próximo do limite máximo permitido pela memória do MS-DOS, 2200, sendo este algoritmo de linearização bastante mais pesado computacionalmente que o mais simples (cujos resultados são apresentados na Fig. 11.15a).

<sup>112</sup> Um caso típico é o do cálculo de forças pelo tensor de Maxwell. Para evitar este problema, costuma aconselhar-se (por exemplo no manual do utilizador do programa de elementos finitos FEMM, em “4.11.3 Maxwell Stress Tensor Line Integral” [Meeker2003] pp.36-40):

- a utilização de percursos de integração onde nem as propriedades nem as grandezas (a indução e o campo magnético) variem muito (de preferência o ar);
- a utilização de uma malha bastante refinada; e ainda eventualmente
- tentar diferentes caminhos de integração e fazer uma média do valor da força.

mesmo ficheiro de comandos *batch* para as duas malhas, foram utilizados dois novos percursos de integração. Note-se no entanto que, para cada uma das malhas apenas um percurso corresponde à passagem pelo meio da camada de elementos finitos respectiva e portanto apenas um é correcto para essa malha, tal como se pode ver e assinala na Fig. 11.16.

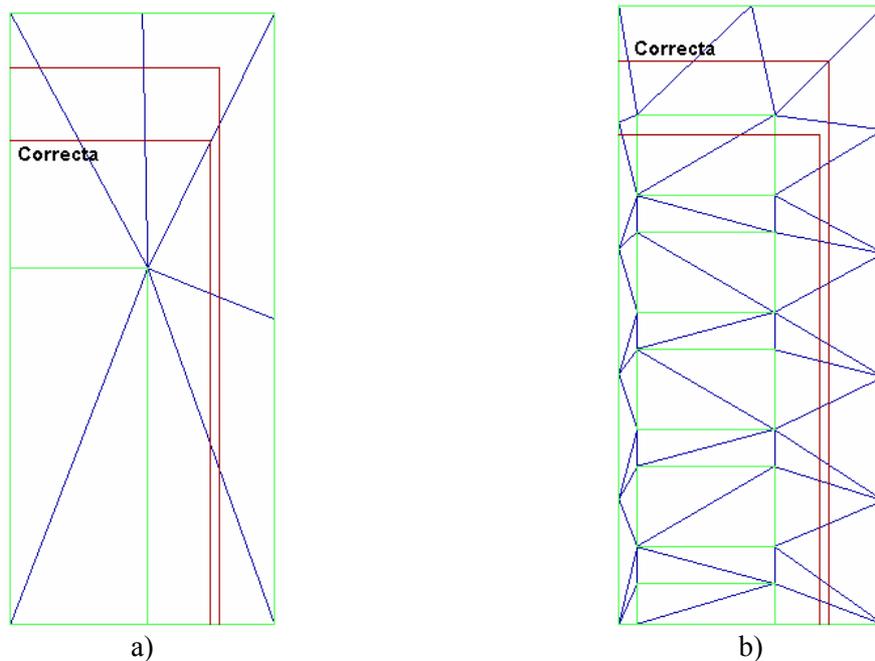


Fig. 11.16. Dois novos caminhos de integração para as barras equivalentes “Grosseira” (só é “Correcta” a linha que passa pelo meio da camada de elementos finitos considerada): a) concentrado, “Conc.”, ficheiro CcQs6.pos; b) mesma distribuição de cobre, “Igual”, ficheiro CdQs6.pos.

O procedimento e o ficheiro de comandos utilizados para o cálculo do fluxo de calor foram iguais aos usados para obter os resultados anteriormente mostrados na Fig. 11.11, à excepção, obviamente, da localização dos percursos de integração. Apresenta-se o ficheiro de comandos respectivo na Fig. 11.17.

```

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
  Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
  Para ICEM04, - Cracow, Cabo de AT para estator de alternador: Homogeneizacao termica.
Calcula: fluxo térmico.
  SÓ LINHA meio da camada, malhas equivalentes.
Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
1
707 1
704 6
704 2
102
103
404 1 F/k
307 2 Fx/k
305 2000 6.575000E-03 0.000000E+00 6.575000E-03 1.587500E-02
305 2000 6.875000E-03 0.000000E+00 6.875000E-03 1.827500E-02
307 2 Fy/k
305 2000 6.575000E-03 1.587500E-02 0.000000E+00 1.587500E-02
305 2000 6.875000E-03 1.827500E-02 0.000000E+00 1.827500E-02
704 6
801 S

DESCRIPÇÃO (comentários)
(...)

```

Fig. 11.17. Ficheiro de comandos “batch” para o CADyPOS, para o cálculo do fluxo de calor atravessando o meio da camada das malhas “Grosseira”.

Mostra-se seguidamente uma descrição possível<sup>113</sup> para os comandos da figura anterior. Tratando-se de comentários, são aqui apresentados a itálico, sendo o número, nome dos comandos e perguntas internas de cada comando, tal como aparecem no CADyPOS, escritos a negrito.

<sup>113</sup> A descrição apresentada é relativamente elaborada e cuidada por forma a ser mais clara ao leitor. Normalmente os comentários, servindo essencialmente de ajuda de memória para o utilizador que criou o ficheiro de comandos, ou para utilizadores experientes, são mais resumidos. Normalmente aparece um “0” no meio do número do comando. Por exemplo o comando “1.6” no CADyPOS manual, aparece no modo batch como “106”. Isto deve-se a que por vezes há mais de 9 opções nos sub menus, sendo por isso necessário mais um dígito. Por exemplo o comando **3.11 “quadrado”**, que calcula o quadrado de uma grandeza, aparece no modo batch como “311”.

DESCRIÇÃO (comentários)

"0": "Qual o tipo de simetria?": "0.cartesiana"

"1": "Qual o tipo de potencial?": "1.escalar linear (modelos electrostatico, condutivo, térmico)". Neste caso, térmico.

"707 1": Comando 7.7, Altera "cor do fundo" para branco ="1"(para captura de imagem para impressão).

"704 6": Comando 7.4 "altera cores". Escolher manualmente "5.malha"; "6"= azul;

"704 2": Comando 7.4 "altera cores". Escolher manualmente "4.grafico-linha". Põe a linha do percurso de integração a "2"=vermelho.

"102": Comando 1.2 "malha": sobrepoe a malha de elementos finitos (para controlo visual ...)

"103": Comando 1.3 "outline": sobrepõe o outline (contorno dos materiais e limites do modelo).

"404 1 F/k": Comando 4.4 "- gradiente" da grandeza "1" (temperatura T), toma o nome F/k

"307 2 Fx/k": Comando 3.7 "componente X/Y". Calcular componente x de F/k; responder 1 (=1. componente X) pois ainda não está automatizada. As duas questões seguintes do comando já estão automatizadas: "Componente X de que grandeza vectorial XY?": ="2" e "Nome da nova grandeza" ="Fx/k"

"305 2000 6.575000E-03 0.000000E+00 6.575000E-03 1.587500E-02": Comando 3.5 "integral lin.", Calcula o integral de linha com 2000 intervalos, desde o ponto x1,y1 até x2,y2

"307 2 Fy/k": Comando 3.7 "componente X/Y". Calcular componente y de F/k; responder 2 (=2. componente Y) pois ainda não está automatizada. As duas questões seguintes do comando já estão automatizadas: "Componente Y de que grandeza vectorial XY?": ="2" e "Nome da nova grandeza" ="Fy/k"

"704 6" Comando 7.4 "altera cores". Aparece aqui apenas para fazer uma pausa antes de sair do ficheiro \*.pos e permitir a captura de imagem.

"801 S": Comando 8.1 "fim programa". "Quer sair do programa (N/S)?":="S". Termina comandos. Tudo o que se seguir no ficheiro de comandos são comentários e é ignorado. No entanto será também copiado para o ficheiro de resultados, ficheiro "\*.pss"

Fig. 11.18. Exemplo de comentários possíveis no final do ficheiro de comandos "batch" apresentado na Fig. 11.17 para o CADyPOS.

Este ficheiro de comandos foi também utilizado para obter as imagens mostradas na Fig. 11.16. Note-se que antes de terminar a sequência de comandos aparece novamente o comando 7.4 "altera cores" mas agora apenas para fazer uma pausa antes de sair do ficheiro \*.pos e permitir a captura da imagem através de "Print Screen"(carregando na tecla "PrtSc") e passando pelo programa *Microsoft Paint* apenas para cortar a parte da imagem que não interessa. A título de curiosidade, para a Fig. 11.16b, a imagem original obtida por "Print Screen", sem qualquer edição (excepto a diminuição de tamanho) é a da Fig. 11.19.

ALTERA CORES

- 0.cancela
- 1.curvas nivel
- 2.grafico-eixos
- 3.grafico-funcao
- 4.grafico-linha
- 5.malha
- 6.outline
- 7.vectores
- 8.linha de nivel
- 9.linhas fluxo
- 10.menu
- 11.legendas

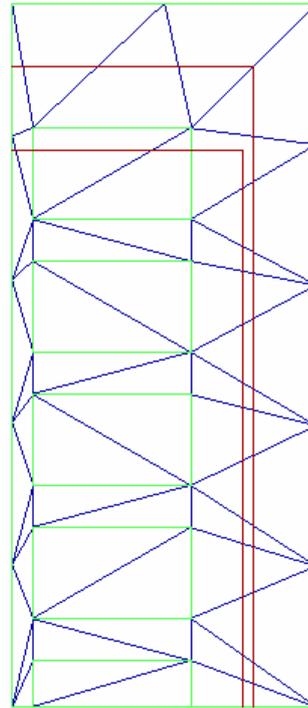


Fig. 11.19. Imagem obtida directamente por *Print Screen*, donde foi extraída a Fig. 11.16b.

Para o funcionamento do **CADyPOS** em modo *batch*, são também necessários mais dois ficheiros:

- o ficheiro **\*.pes** (ficheiro de ficheiros **\*.pos** a serem pós processados), i.e. utilizado pelo **CADyPOS** para saber quais os ficheiros **\*.pos** a carregar e aos quais vai aplicar os comandos incluídos no ficheiro de comandos **com\*.txt**;
- o ficheiro de saída de resultados, **\*.pss**.

Mostra-se na Fig. 11.20 o ficheiro **\*.pes** utilizado neste caso. O cabeçalho do ficheiro **\*.pes**, até “Lista de ficheiros”, inclusive, é depois copiado para o início do ficheiro de saída de resultados, **\*.pss**, tal como se pode ver na Fig. 11.21.

```
Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.  
DESCRICAO: (SE NAO APRESENTAR ALGUNS VALORES VERIFICAR SE IMPRESSORA ESTA LIGADA)  
ICEM04 - Cracow, Cabo de AT para estator de alternador: Homogeneizacao  
termica.  
  
Lista de ficheiros:  
CcQs6.pos  
CdQs6.pos  
. Ultima linha com comando "." para terminar.
```

Fig. 11.20. Ficheiro de ficheiros **\*.pes**, com cabeçalho e indicação dos ficheiros **\*.pos** a pós-processar.

O ficheiro de saída de resultados, \*.pss, é apresentado na Fig. 11.21.

```
Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.4 (26-Jun-2003)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
DESCRICA0: (SE NAO APRESENTAR ALGUNS VALORES VERIFICAR SE IMPRESSORA ESTA LIGADA)
ICEM04 - Cracow, Cabo de AT para estator de alternador: Homogeneizacao
termica.

Lista de ficheiros:

CcQs6.pos
2000 6.575000e-003 0.000000e+000 6.575000e-003 1.587500e-002 3.857290E+001
2000 6.875000e-003 0.000000e+000 6.875000e-003 1.827500e-002 4.002599E+001
2000 6.575000e-003 1.587500e-002 0.000000e+000 1.587500e-002 7.936472E+000
2000 6.875000e-003 1.827500e-002 0.000000e+000 1.827500e-002 8.297634E+000

CdQs6.pos
2000 6.575000e-003 0.000000e+000 6.575000e-003 1.587500e-002 4.044467E+001
2000 6.875000e-003 0.000000e+000 6.875000e-003 1.827500e-002 4.494556E+001
2000 6.575000e-003 1.587500e-002 0.000000e+000 1.587500e-002 3.903493E-002
2000 6.875000e-003 1.827500e-002 0.000000e+000 1.827500e-002 1.345265E+001

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
Para ICEM04, - Cracow, Cabo de AT para estator de alternador: Homogeneizacao termica.
Calcula: fluxo térmico.
SÓ LINHA meio da camada, malhas equivalentes.
Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
1
707 1
704 6
704 2
102
103
404 1 F/k
307 2 Fx/k
305 2000 6.575000E-03 0.000000E+00 6.575000E-03 1.587500E-02
305 2000 6.875000E-03 0.000000E+00 6.875000E-03 1.827500E-02
307 2 Fy/k
305 2000 6.575000E-03 1.587500E-02 0.000000E+00 1.587500E-02
305 2000 6.875000E-03 1.827500E-02 0.000000E+00 1.827500E-02
704 6
801 S

DESCRICA0 (comentários)
"0": "Qual o tipo de simetria?": "0.cartesiana"
"1": "Qual o tipo de potencial?": "1.escalar linear (modelos electrostatico, condutivo, térmico)". Neste caso,
térmico.
"707 1": Comando 7.7, Altera "cor do fundo" para branco ="1"(para captura de imagem para impressão).
(...)
```

Fig. 11.21. Ficheiro de saída de resultados \*.pss tal como foi gerado pelo CADyPOS, contendo os resultados pretendidos (valor dos integrais de linha).

Neste ficheiro, os resultados estão escritos a negrito, sendo tudo o resto dados e comentários. O ficheiro é constituído por:

- Uma primeira linha que indica qual a versão e data do CADyPOS utilizado;

- Cópia do cabeçalho do ficheiro de ficheiros **\*.pes**;
- Os resultados pedidos. Neste caso, para cada um dos ficheiros **\*.pos** aparecem quatro linhas, cada uma indicando: o número de intervalos de integração (2000), as coordenadas iniciais da linha de integração  $x_1, y_1$  e as finais  $x_2, y_2$ , e finalmente o valor do integral, a negrito. Por exemplo, para o ficheiro CcQs6.pos (malha “c”= “Conc.”), os resultados da última coluna dão:
  - na primeira linha,  $\int_{y=Correcta} (F_x / k) dy = "3.857290E+001" K$ ;
  - na segunda linha,  $\int_{y=Incorrecta} (F_x / k) dy = "4.002599E+001" K$ ;
  - na terceira linha,  $\int_{x=Correcta} (F_y / k) dx = "7.936472E+000" K$ ;
  - na quarta linha,  $\int_{x=Incorrecta} (F_y / k) dx = "8.297634E+000" K$ .

Para a extracção dos resultados dos ficheiros **\*.pss** e introdução na folha de cálculo do *Microsoft Excel*, foram ainda feitas e utilizadas macros para o *Microsoft Excel* e do *Microsoft Word*. Isto permite acelerar e uniformizar o processo de extracção de resultados, eliminando erros de introdução manual de resultados no *Excel*, por exemplo (troca de dígitos entre si, esquecimento de um ou outro dígito, etc.).

Refira-se que a apresentação dos dados, juntamente com os resultados do pós-processamento, com os respectivos comandos e comentários, no ficheiro **\*.pss**, é muito importante pois permite facilmente fazer verificações à *posteriori*, nomeadamente para confirmar se os resultados foram bem obtidos. Isto, juntamente com a já referida utilização de macros (no *Word* e *Excel*) para extracção de resultados, é fundamental quando se trabalha com um grande número de casos e, por exemplo, aparece um resultado ou uma “família de resultados” com aspecto suspeito ou errado.

Também a introdução das características físicas do problema no **CADyEXE** e o próprio processamento dos modelos ambos em modo *batch* (especialmente nos problemas de correntes induzidas), permite evitar erros de introdução de dados, ou caso existam, torná-los sistemáticos e normalmente mais fáceis de detectar. Isto para além de acelerar muito o processo de resolução de uma fornada (*batch*) de problemas. Outra enorme vantagem da possibilidade de utilização do modo *batch* e macros é que, uma vez definido o processo de cálculo e criados os primeiros ficheiros para o modo *batch* e as macros respectivas, é muito rápido estudar outras possibilidades, novas propriedades de materiais, etc., e até corrigir erros:

basta alterar ou corrigir os ficheiros de modo *batch* e voltar a correr os problemas novos ou que tinham erros. Sem esta possibilidade não seria possível ter efectuado a grande maioria do trabalho apresentado não só neste capítulo mas em toda esta dissertação, pois diversas vezes foram detectados erros de estratégia, de introdução de dados, de procedimento de cálculo, de malhas incorrectas, etc., e não teria sido possível proceder manualmente à correcção das centenas<sup>114</sup> de casos que não estavam correctos ou experimentar outras estratégias.

Finalmente, na Fig. 11.22 podem ser vistos os resultados da comparação entre os valores obtidos para o fluxo de calor utilizando o integral de linha passando pelo meio da camada de elementos finitos. É evidente que os valores obtidos para a linha “Correcta” para o percurso de integração estão muito próximos do valor de referência (escala ampliada na Fig. 11.22b), sendo ainda melhores que os obtidos com a barra e malha “Original (Fina)” (para os quais, recorde-se, o integral de linha passa precisamente na zona de fronteira entre camadas, i.e. pelos nodos, onde o erro da grandeza derivada, fluxo de calor por metro de profundidade  $\phi_h/l$ , será máximo).

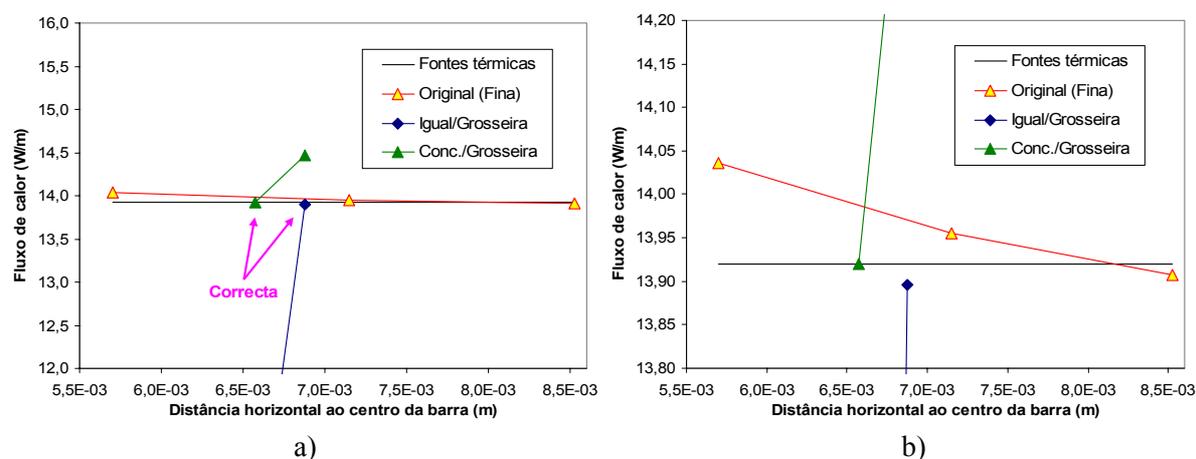


Fig. 11.22. Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as malhas “Grosseira”, com o cálculo do integral ao longo do meio da camada de elementos finitos: a) mesma escala da Fig. 11.11; b) escala vertical ampliada.

<sup>114</sup> A este respeito o autor gostaria de referir que nos trabalhos conducentes à sua Dissertação de Mestrado, processou manualmente, i.e. um a um, algumas centenas de problemas distintos. A não existência no **CADdyMAG**, nessa altura, da possibilidade de funcionamento em modo *batch* tornou este trabalho bastante penoso, inclusive do ponto de vista físico, pois o trabalho de introdução manual dos dados nos ficheiros \*.pro, e todo o processo até obter os resultados de uma série de casos podia demorar dias. Também foram bastante penosas as vezes em que foram detectados erros: por exemplo que o valor de uma propriedade estava errada, o que levou a que umas largas dezenas de casos tivessem que ser novamente resolvidos, mudando apenas o valor dessa propriedade, o que levou a muitas horas de trabalho repetido. Por isso, a transformação do **CADdyMAG** para poder funcionar em modo *batch* foi uma das tarefas obrigatórias e que foi sendo desenvolvida desde o início dos trabalhos de Doutoramento, à medida das necessidades, com a preciosa ajuda do Prof. Dr. António Paulo Coimbra, em particular na adaptação do **CADyPOS**.

## 11.5 Conclusões e novas questões

Do trabalho desenvolvido neste capítulo, resultaram as seguintes conclusões:

- O método desenvolvido parece ser capaz de calcular com elevada precisão a condutividade térmica equivalente  $k_e$  para qualquer barra com diferentes materiais isolantes e geometrias não triviais e com apenas condução de calor;
- Foi demonstrado que o valor exacto de  $k_e$  depende da malha usada;
- A conclusão anterior indica que esta metodologia poderá ser mais adequada e atingir maior precisão nos casos em que o utilizador do programa de elementos finitos pode fazer replicações de partes da malha (concretamente, das barras dentro das ranhuras) do que no caso de programas que façam a discretização da malha de forma totalmente automática, nos quais o utilizador não tenha qualquer controlo sobre a topologia da malha de elementos finitos;
- O método realiza uma aproximação muito boa à temperatura máxima em regime estacionário na barra com múltiplos isolamentos dentro da ranhura de uma máquina eléctrica, com muito menor custos computacionais do que modelando todos os materiais isolantes;
- A solução numérica para o problema térmico foi confirmada através da verificação de que o calor que atravessa a fronteira do modelo, i.e. os limites da barra é igual às fontes térmicas aplicadas;
- Tratando-se de elementos finitos de 1ª ordem, o cálculo do fluxo de calor depende da localização do percurso de integração;
- A linearização (com o algoritmo correcto!) do vector de fluxo de calor  $\mathbf{F}$  funciona bem para malhas com algum refinamento, mas não para malhas muito pouco refinadas, como é o caso das “Grosseira”s;
- Para calcular correctamente o fluxo de calor, embora possa ser tentada uma linearização do  $\mathbf{F}$  constante em cada elemento finito, será muito mais fácil e preciso fazer passar o integral de linha pelo meio da camada de elementos finitos.

No entanto, surgiram também novas questões a resolver no futuro:

- O método será aplicável a outros tipos de cabos, nomeadamente a cabos cilíndricos? Ou a barras refrigeradas a água ou hidrogénio? Neste caso, qual a influên-

cia da convecção e da relação entre as temperaturas da fronteira do problema, do fluido de refrigeração e da sua velocidade?

- Sendo normalmente o  $k$  uma grandeza variável com a temperatura, no caso de um problema com diferentes materiais e diferentes  $k$ , como acomodar as diferentes taxas de variação de  $k$  com a temperatura, no cálculo de uma condutividade térmica equivalente?
- Quais os cuidados a ter caso se queira utilizar a mesma malha para os problemas térmico e magnético? Muitas vezes na modelação do problema magnético substitui-se todo o interior da ranhura (incluindo isolamento) por um único rectângulo (ou outra forma simples, sem considerar isolamento térmico) com a mesma força magnetomotriz que a do cabo ou barra real. Com o método desenvolvido, se se quiser utilizar a mesma malha para os dois problemas, não se pode usar o simples “rectângulo” tipicamente usado nos problemas magnéticos;
- Caso a geometria não permita facilmente a utilização de percursos de integração paralelos aos eixos de coordenadas, será necessário desenvolver comandos que permitam calcular directamente a versão 2D da equação (11.3),  $\phi_h = \int \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$ , o que não é trivial, até por causa dos problemas da influência do percurso de integração nos resultados para malhas grosseiras.



## 12 OUTROS DESENVOLVIMENTOS: MELHORIAS AO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS, CADDyMAG

O cálculo das perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas, bem como a modelação dos fenómenos térmicos, apresentados nos capítulos anteriores, enquadra-se numa estratégia mais vasta do Laboratório de CAD/CAE do Instituto de Sistemas e Robótica (ISR), no Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores (DEEC) da Universidade de Coimbra (UC). Com efeito, ao longo das duas últimas décadas, os investigadores associados a este Laboratório, sob a orientação do Professor Doutor Carlos Lemos Antunes, têm vindo a desenvolver conhecimento na área da modelação e análise de dispositivos electromagnéticos (análise electromagnética e térmica), que originou o desenvolvimento dos pacotes de programas de elementos finitos **CADDyMAG** e **CADDyTERM**, utilizados e referidos já nos capítulos anteriores. Obviamente, que os objectivos subjacentes a esta estratégia são vastíssimos e impossíveis de abordar e concretizar totalmente no presente trabalho.

Neste contexto, tanto para poder realizar o trabalho exposto nesta dissertação, como para ampliar as capacidades do **CADDyMAG**, foi necessário proceder a diversas alterações de fundo no referido *software*. Destas, destacam-se o aumento do número de nodos e elementos permitidos, a introdução do funcionamento em modo automático (modo *batch*), fundamental para a resolução de grande número de casos, a conversão para ambiente *Windows*, alterações em diversos processadores (nomeadamente a conversão de um processador térmico de VAX/VMS para PC/*Windows*) e as alteração no pré-processador para poder preparar também os modelos térmicos.

Neste capítulo, começar-se-á por referir o estado do **CADDyMAG** e **CADDyTERM** no início do presente trabalho, descrevendo-se de seguida, de forma abreviada, as principais alterações e melhoramentos efectuados.

## 12.1 Constituição, estrutura e estado iniciais do CADDyMAG e do CADDyTERM

Tal como já descrito na “SIMBOLOGIA, NOTAÇÃO E UNIDADES UTILIZADAS”, no início desta dissertação, mais concretamente em “Programas de elementos finitos”, na página Erro! Marcador não definido., o **CADDyMAG** é um pacote de *software*, i.e., um conjunto de programas, para o cálculo de campos electromagnéticos. Foi desenvolvido no Lab. de CAD/CAE do ISR/DEEC-UC e é constituído por diversos programas: um pré-processador (**CADyPRE**), um programa de interface (**CADyEXE**) entre o pré-processador e o processador, diversos processadores (consoante o tipo de problema) e um pós-processador (**CADyPOS**).

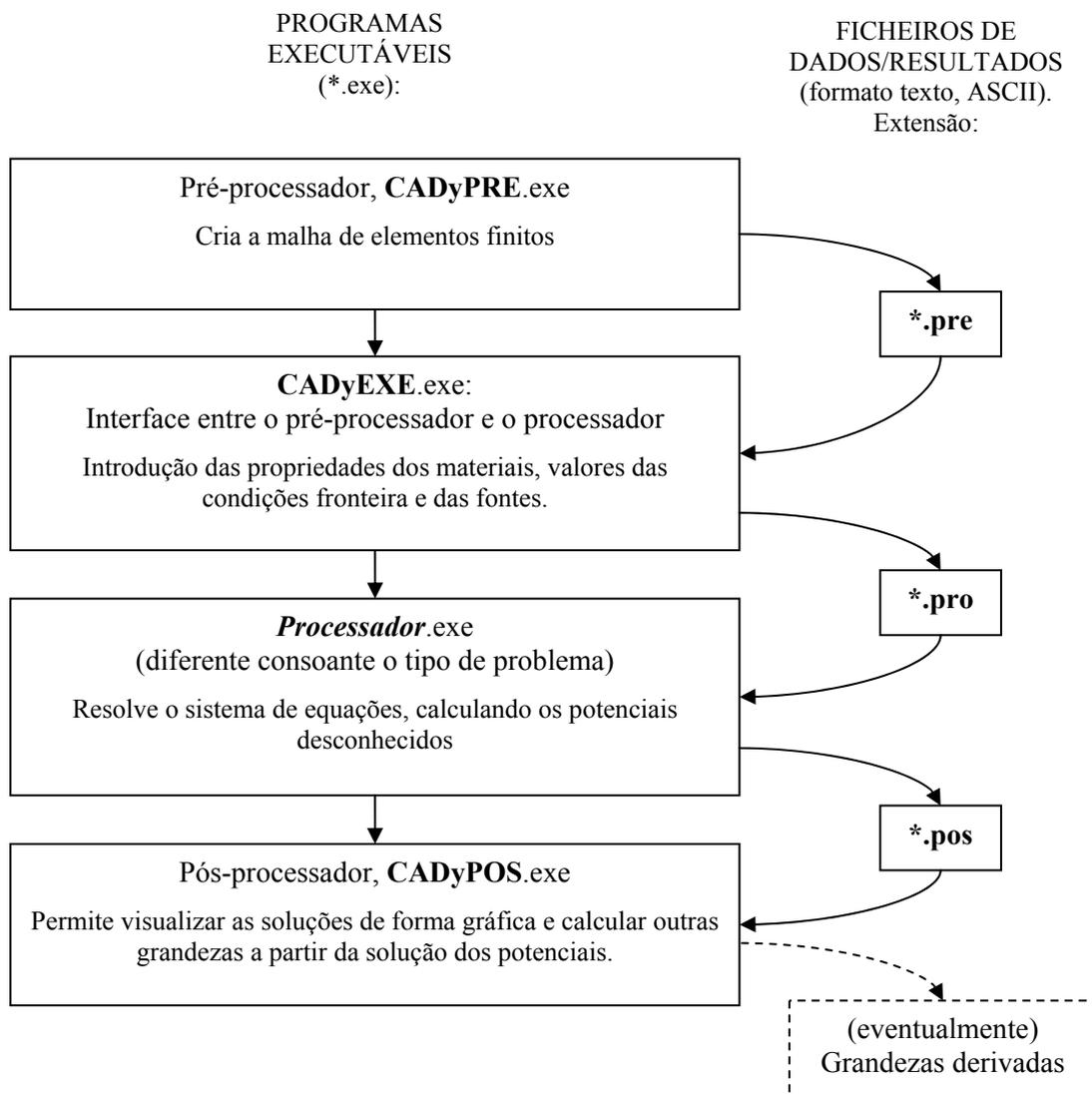


Fig. 12.1. Estrutura inicial do CADDyMAG.

A estrutura e modo de funcionamento inicial do **CADdyMAG**, no início dos trabalhos que conduziram à presente dissertação era a que se apresenta na Fig. 12.1.

Cada um dos quatro programas é chamado sequencialmente pelo utilizador, sendo a troca de informação feita através de ficheiros de dados, **\*.pre** e **\*.pro**, e de resultados, **\*.pos**. Estes ficheiros, já descritos na Simbologia, são gravados em formato ASCII, podendo por isso ser consultados e, se necessário, editados com um simples editor de texto (como o **Notepad/Bloco de Notas** do *Windows*). O **CADyPOS** tinha também a possibilidade de gravar algumas grandezas calculadas.

O estado inicial do **CADdyMAG**, em termos de nodos e elementos finitos permitidos, era o que se mostra na Tabela 12.1.

Tabela 12.1. Número de nodos e elementos do **CADdyMAG** e do processador térmico **TP21GN\_ALFAS**, no início do presente trabalho.

Programa	nodos/elem.	Função
<b>CADyPRE</b>	2000/4000	Pré- processador: permitir ao utilizador criar a malha de elementos finitos para problemas electromagnéticos
<b>CADyEXE</b>	1400/2745	Interface entre o <b>CADyPRE</b> e os processadores. Permite introduzir o valor das propriedades, das condições de fronteira e das fontes. Apenas para problemas electromagnéticos
<b>CARTyPRO</b>	1000/2000	Processador em coordenadas cartesianas, linear, de Poisson. Para problemas electrostáticos, electrocondutivos, magnetostáticos (e de condução térmica)
<b>CILyPRO</b>	1000/2000	Processador em coordenadas cilíndricas, linear, de Poisson. Para problemas electrostáticos, electrocondutivos e de condução térmica
<b>PMAGNLIN</b>	1000/2000	Processador em coordenadas cartesianas, não linear, de Poisson. Problemas magnetostáticos e materiais ferromagnéticos que podem estar na saturação. Lê as curvas de magnetização do ficheiro <b>MAGNETIZ.BH</b>
<b>EDDyPROC</b>	600/1200	Processador em coordenadas cartesianas, linear, de correntes induzidas. Para problemas magnetodinâmicos
<b>EDDyNLIN</b>	600/1200	Processador em coordenadas cartesianas, não linear, de correntes induzidas. Para problemas magnetodinâmicos e materiais ferromagnéticos que podem estar na saturação. Lê as curvas de magnetização do ficheiro <b>MAGNETIZ.BH</b>
<b>TP21GN_ALFAS</b>	600/1200	Processador térmico original do <b>CADdyTERM</b> , para regime permanente (sem radiação), correndo em computador VAX, em VMS (convertido para <i>PC/Windows</i> e expandido, deu origem ao <b>CARTyTERB</b> )
<b>CADyPOS</b>	2000/4000	Pós- processador para problemas 2D em coordenadas cartesianas ou cilíndricas. Permite visualizar os resultados obtidos pelos processadores e calcular outras grandezas a partir desses resultados: energia, coenergia, correntes induzidas, campos eléctricos, campo magnéticos, fluxo magnético e fluxo de calor, forças, binários, etc.

Em [Coimbra1995] pp.69-71;318-319 são referidos mais alguns processadores que caíram em desuso, pelo que não foram agora objecto de actualização nem são mencionados na presente dissertação.

O **CADdyTERM** é um pacote de *software* para simulação e análise térmica, em regime permanente e transitório, de dispositivos electromagnéticos. Partilha o pré-processador e o pós-processador com o **CADdyMAG**, mas os processadores do **CADdyTERM** correm em VAX/VMS. A estrutura e modo de funcionamento inicial do **CADdyTERM** é a que se apresenta na Fig. 12.2.

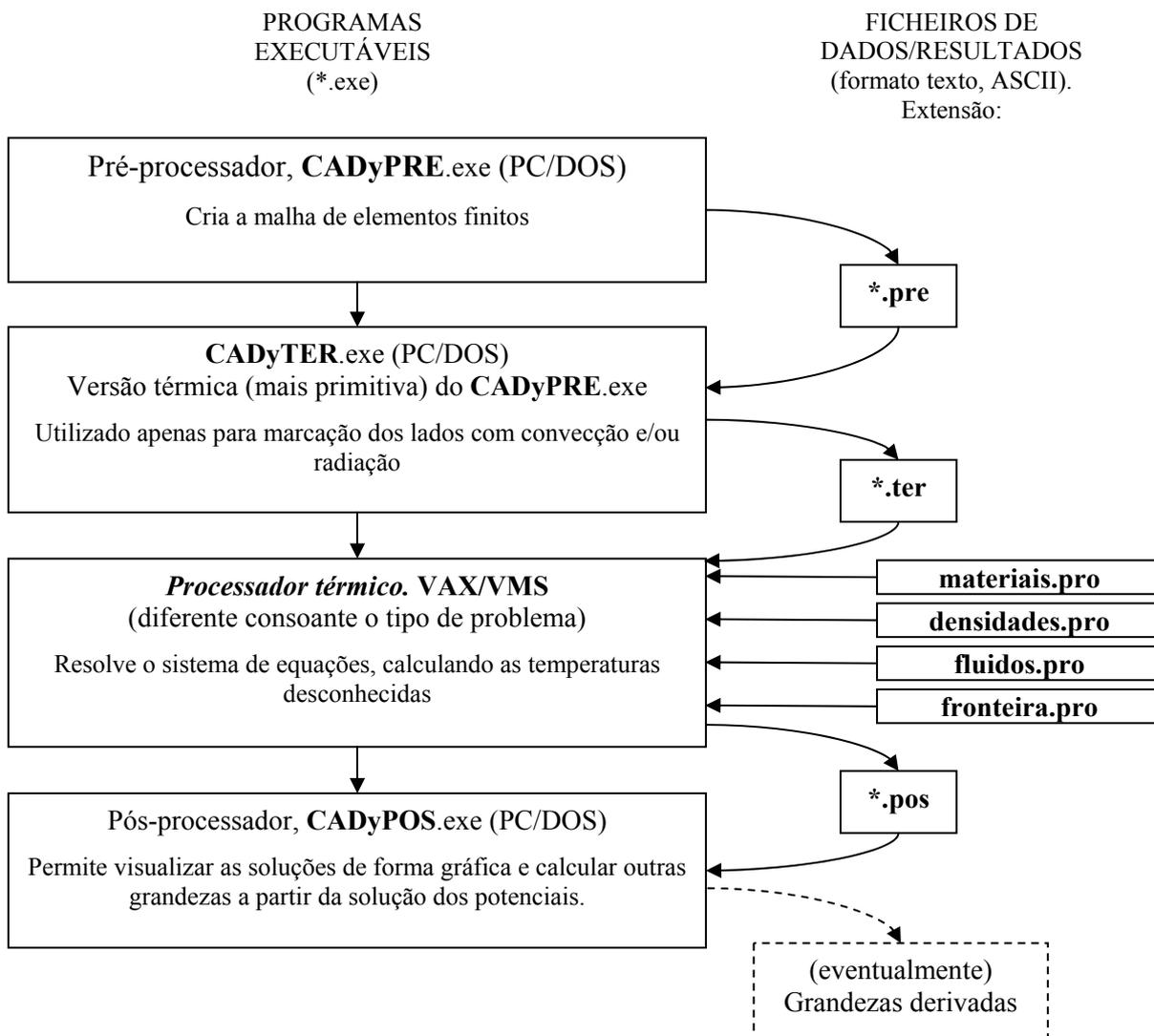


Fig. 12.2. Estrutura inicial do **CADdyTERM**.

No caso dos modelos térmicos, começa-se por fazer a malha no **CADyPRE**, gravando-se esse ficheiro com a extensão **.pre**. Depois é necessário passar pelo **CADyTER.exe** (algumas versões eram compiladas com o nome **EXET.exe**), uma versão térmica e mais primitiva do **CADyPRE**, para marcação das superfícies onde havia convecção, o que, na prática, corresponde a marcar aquelas arestas, dos elementos finitos, onde há convecção. Os dados são então gravados num ficheiro com a extensão **\*.ter**.

Contrariamente ao **CADdyMAG**, em que os modelos são completados no **CADyEXE** com as propriedades dos materiais, as condições de fronteira de Dirichlet e as fontes, no **CADdyTERM** estes dados, juntamente com as informações relativas aos fluidos onde há convecção (e se for um problema transitório, também os dados respectivos), são fornecidas através de quatro ficheiros auxiliares, tal como já referido anteriormente:

**materiais.pro**: ficheiro com os valores das propriedades dos materiais, cf. Fig. 10.5, página 236;

**densidades.pro**: ficheiro com os valores das densidades de corrente, cf. Fig. 10.6;

**fluidos.pro**: ficheiro com os valores dos coeficientes de convecção (e radiação) e temperaturas dos fluidos, cf. Fig. 10.7;

**fronteira.pro**: ficheiro com os valores das condições de fronteira de Dirichlet (potenciais fixos, i.e. temperaturas conhecidas), cf. Fig. 10.8.

Estes ficheiros, também já descritos na Simbologia, são gravados em formato ASCII, podendo por isso ser consultados e, se necessário, editados com um simples editor de texto (como o **Notepad/Bloco de Notas** do *Windows*).

Assim, é necessário exportar o ficheiro **\*.ter**, juntamente com os quatro ficheiros **\*.pro** respectivos, através de um protocolo de transferência de ficheiros, FTP (*"file transfer protocol"*) para um computador VAX, no Centro de Informática da Universidade de Coimbra. Aí, através de uma ligação remota TELNET, tem que se correr o processador em questão (permanente, com ou sem correcção da resistividade eléctrica dos materiais com a temperatura, ou transitório). Finalmente, recorrendo novamente a FTP, é necessário importar os ficheiros **\*.pos** dos resultados para um PC onde são analisados com o **CADyPOS**.

O **CADdyTERM** praticamente já não é utilizado, visto que o processador para regime permanente já foi convertido para PC/*Windows* e integrado no **CADdyMAG**, como descrito no capítulo 10.

## 12.2 Estrutura e estado actuais do CADdyMAG

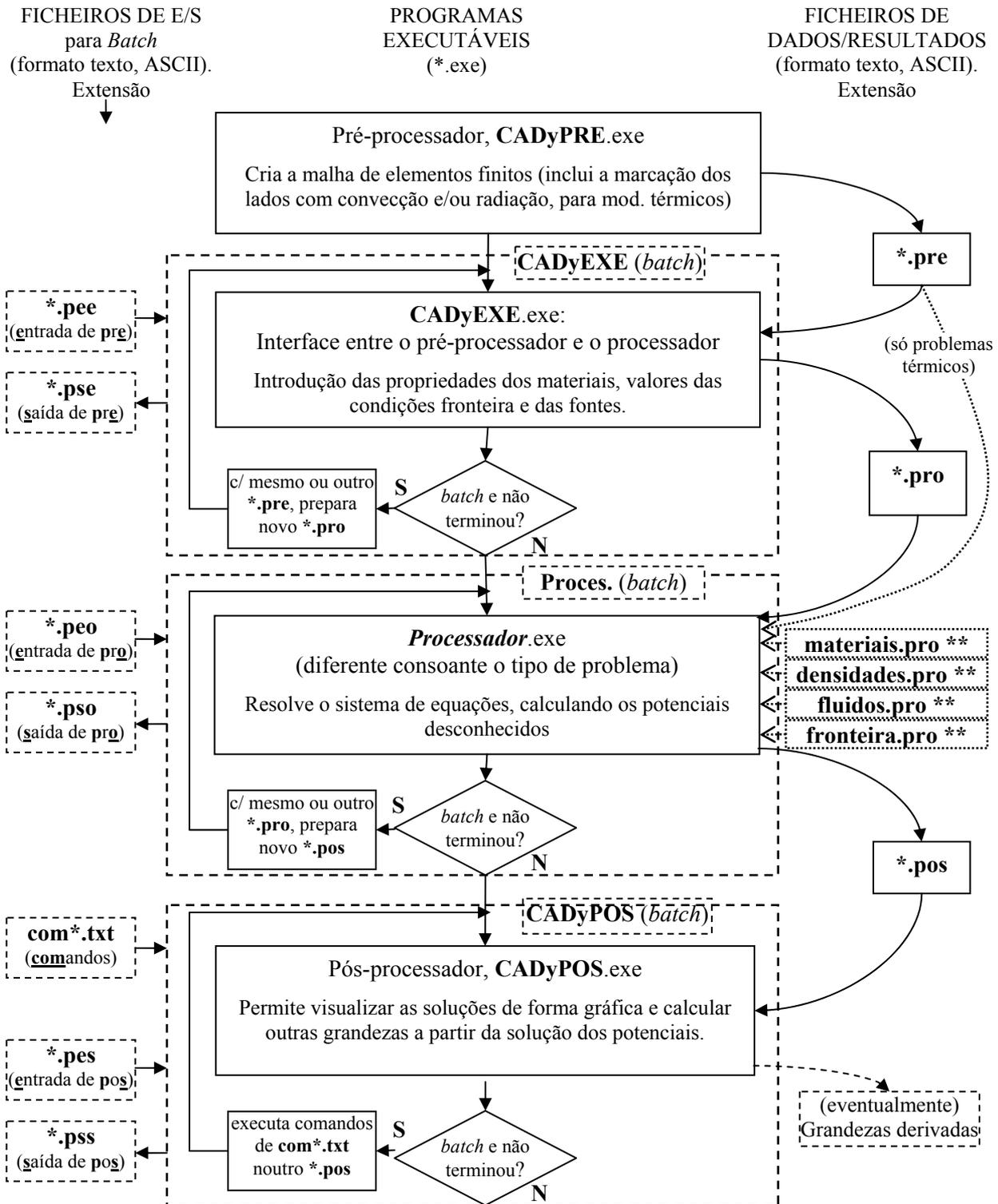


Fig. 12.3. Estrutura actual do CADdyMAG, incluindo os fenómenos térmicos (\*\*) e o funcionamento em modo *batch*.

No decorrer do presente trabalho, tal como várias vezes mencionado, houve a necessidade de proceder a diversas alterações ao **CADdyMAG**, nomeadamente a inclusão da possibilidade de funcionamento em modo *batch*, a capacidade de tratar também os fenómenos térmicos em PC/*Windows* e o aumento do número de nodos. Antes de passar a descrever essas alterações, apresenta-se já a estrutura actual do **CADdyMAG**. Assim, a Fig. 12.3 resume o seu modo de funcionamento, bem como as entradas e saídas de dados. Os ficheiros e indicações que se encontram do lado direito, com linhas ponteadas, dizem respeito ao funcionamento com problemas térmicos (indicado também com \*\*). O que se mostra a linha tracejada, diz respeito ao funcionamento em modo *batch*, vendo-se os ficheiros de entrada (\*.pe\*) e os de saída (\*.ps\*), bem como os ciclos exteriores aos programas originais. Estes apresentam-se em caixas a traço contínuo. No entanto, os programas executáveis actuais, com os mesmos nomes dos originais, correspondem ao que está dentro de cada caixa a linha tracejada.

O estado actual do **CADdyMAG** é o apresentado na Tabela 12.2, onde se pode ver o número actual de nodos e elementos permitidos pelos diversos programas, se permitem *batch* e também qual a linguagem de programação e os compiladores utilizados. Desta tabela, ressalta já um dos problemas com que o autor se debateu: a utilização de três linguagens de programação e cinco compiladores diferentes. A utilização de alguns compiladores antigos prendeu-se com a opção de tentar mexer o mínimo possível, numa primeira fase, isto é tentar expandir ao máximo as capacidades dos programas mesmo continuando a trabalhar em ambiente MS-DOS. No entanto, rapidamente se viu que, mesmo passando as estruturas de dados de estáticas para dinâmicas, i.e., passando a ser referenciadas por ponteiros, o número de nodos e elementos não era suficiente, apresentando também alguns problemas de compatibilidade com o *Windows* XP (nomeadamente a captura de imagens por *PrintScreen*, que não funciona no XP), pelo que se teve que passar para compiladores mais recentes. Foi também necessário alterar o formato das bases de dados, visto que estavam preparadas para um número de nodos e elementos definido por quatro dígitos, ou seja, permitindo, no máximo, apenas até 9999 elementos.

Tabela 12.2. Estado actual do **CADyMAG**.

Programa	nodos/elem.	Batch	Linguagem de programação/Compilador
<b>CADyPRE</b>	20000/40000	<i>Batch</i> não se aplica. Contudo, teve evolução significativa na melhoria semi-automática da malha	Pascal/ <i>FreePascal IDE for Win32</i> (Vers. 0.9.2)
<b>CADyEXE</b>	5200/10400	Sim	Pascal/ <i>Borland Turbo Pascal 7=&gt; FreePascal IDE for Win32</i>
<b>CARTyPRO</b>	20000/40000	Sim	Fortran/ <i>Fortran PowerStation 4.0</i> (FPS 4.0), do <i>Microsoft Developer Studio</i>
<b>CILyPRO</b>	20000/40000	Sim	Fortran/ FPS 4.0
<b>PMAGNLIN</b>	20000/40000	Sim	Fortran/ FPS 4.0
<b>EDDyPROC</b>	20000/40000	Sim	Fortran/ FPS 4.0
<b>EDDyNLIN</b>	20000/40000	Sim	Fortran/ FPS 4.0
<b>CARTyTERB</b>	20000/40000	Não	Fortran/ FPS 4.0
<b>CADyPOS</b>	2200/4300	Sim	C/Microsoft C => C++/Visual C++ da <i>Microsoft</i>

O número máximo de nodos e elementos no **CADyPRE** e nos processadores pode ser muito facilmente aumentado, bastando para isso mexer nas variáveis que indicam o número máximo de nodos e elementos permitidos. Por exemplo, o **CADyPRE** foi testado na realização de uma malha com cerca de 100000 nodos, sem qualquer problema. No entanto, como o estrangulamento ainda está no **CADyPOS**, mantiveram-se os restantes programas limitados a 20000 nodos. O **CADyEXE** poderá ser rapidamente convertido do compilador *Turbo Pascal 7.0* da *Borland* para o “*FreePascal IDE for Win32*”<sup>115</sup>, utilizando o mesmo procedimento que já foi utilizado para converter o **CADyPRE**.

<sup>115</sup> Compilador gratuito, que compila *software* sob uma licença pública GNU modificada (“*modified library gnu public license, LGPL*”). O “*Free Pascal compiler*” (FPC), originalmente chamado “*FPK-Pascal*”, é um compilador de Pascal, compatível com o Turbo Pascal e o Delphi, para 32 bits, permitindo criar programas executáveis para as plataformas DOS, Linux, Win32, OS/2, FreeBSD, AmigaOS, MacOSX e MacOS, entre outras. A última versão estável é a 1.0.10, de Julho de 2003, embora hajam diversas versões Beta, mais recentes. GNU, significa “GNU’s *not* UNIX”. Trata-se de um esforço da “*Free Software Foundation*”, FSF, baseada em Cambridge, EUA, para tornar os programas tradicionais em UNIX livres para quem quiser.

## 12.3 Pré-processador, CADyPRE

Inicialmente, utilizou-se o *Borland Turbo Pascal 7.0* para passar as variáveis estáticas para variáveis dinâmicas, tendo sido depois utilizado o *FreePascal IDE for Win32*.

As principais alterações feitas no **CADyPRE** foram as seguintes:

- aumento do número de nodos;
- melhoria das capacidades de geração semi-automática da malha;
- incorporação da capacidade de preparar modelos térmicos;
- passagem para ambiente *Windows* (podendo também ser compilada para outras plataformas).

Na descrição que se segue, as palavras indicadas a negrito correspondem a nomes de comandos, que se encontram distribuídos em menus. Duas palavras a negrito separadas por um hífen, “ – ”, representam um menu e um comando (ou um sub-menu, se existirem vários níveis).

Uma das alterações do **CADyPRE** que deu mais trabalho, e exigiu mais cuidado, foi a alteração das estruturas de dados por forma a poder marcar as arestas onde existe convecção e, sobretudo, alterar o procedimento do comando **refina zona** (que já existia), para manter as arestas de convecção nos sítios correctos aquando da criação dos novos nodos e elementos. Também foi algo complicado o desenvolvimento dos algoritmos para manter correcta a localização das (novas) arestas com convecção quando se chamavam os comandos **altera – arestas zona** e **altera – renumera nodos**, tendo havido necessidade de alterar diversos procedimentos pré-existentes, pois para além de terem que funcionar bem, tinham que funcionar rapidamente.

Consequência do aumento do número de nodos, teve também que ser revisto o comando **outline**, pois agora o tempo de cálculo do **outline** tornava-se incomportável, chegando a largos segundos, ou mesmo alguns minutos, para os modelos com malhas com maior número de nodos. Para além disso, com a diminuição do tamanho dos elementos finitos, era necessário que este comando passasse a mostrar de uma forma mais explícita os erros na malha de elementos finitos. Assim, o comando **outline** funciona de forma diferente da versão anterior do **CADyPRE**.

Os menus e comandos são acessíveis através do rato, das teclas de cursor (para cima e para baixo) e ainda através do número dos comandos. Para um utilizador com experiência, esta última é a forma mais rápida de chamar os comandos. De referir que se chama, normalmente, **ponto** a um ponto isolado e **nodo** a um ponto que faz parte da malha de elementos finitos, i.e., que é vértice de um triângulo. O comando **outline** (“linha de fora”, ou “exterior”), mostra os contornos: os limites do modelo e as fronteiras entre materiais distintos.

Para que se entenda a filosofia e metodologia de trabalho com o **CADyPRE**, apresenta-se de seguida a sequência de criação da malha de um modelo de elementos finitos: com o **CADyPRE** é a seguinte:

1. Criar, através das suas coordenadas, os pontos que definem a geometria do modelo, com o comando **cria – ponto( numer. )**.
2. Se necessário, criar outros pontos auxiliares, através de comandos como **expansão – linha** (que permite criar, com auxílio do rato, um conjunto de pontos alinhado com outros dois) ou com o comando **cria – pontos**, que permite criar pontos onde se quiser, apontando com o rato.
3. No comando **cria – elementos**, definir uma etiqueta identificativa de um material e criar alguns elementos finitos, através da união dos pontos criados anteriormente. Isto é feito apontando com o rato os pontos que passarão a constituir cada triângulo. Repetir para os diferentes materiais. Ao criar estes elementos finitos, deve ter-se em conta que cada triângulo só pode ligar-se a outro através dos vértices (e nunca num ponto intermédio da aresta<sup>116</sup>) e que os ângulos internos de cada triângulo não devem ser muito diferentes entre si. Em qualquer caso, não devem ser inferiores a 5°, pois, nessa situação, os erros numéricos começam a deixar de ser desprezáveis.
4. Utilizando os comandos de **expansão (bissecção e trissecção de elementos finitos, simetria da malha)**, o comando **cria – nodo** (para a criação de nodos onde já existe malha) e os comandos de alteração da malha, no menu **altera (baricentra pto e arestas)**, deve-se retocar a malha, para que a proporção entre o tamanho dos diversos elementos finitos seja aproximada da final. Ou seja, a malha deve ser mais refinada onde as grandezas variam mais e menos refinada onde variam menos.
5. Podem ser marcados os nodos onde existem condições de fronteira de Dirichlet, através do comando **cria – cond.fronteira**.

---

<sup>116</sup> Isto (só) pode acontecer se se deixarem pontos não utilizados no interior ou ao longo da aresta de um elemento finito.

6. Nesta fase deve ser verificada a existência de erros na malha, através do comando **display – outline**. Pode também correr-se o comando **outros – corrige malha** que faz a verificação da malha, eliminando pontos isolados e nodos ou elementos duplicados ou elementos com área nula. No entanto, se a malha tiver sido feita respeitando a sequência indicada, não deverão existir. Não havendo erros (i.e., não havendo pontos isolados, elementos sobrepostos ou ligados a pontos que não sejam os vértices dos elementos adjacentes), pode-se então passar à fase seguinte e fazer refinamentos automáticos, que permitem em poucos segundos melhorar muito o nível de refinamento e qualidade da malha.
7. Utilizando o comando **expansão – refina zona**, seguido dos comandos **altera – arestas zona** e **altera – baric. pts zona**, refinar a malha. Estes dois últimos comandos podem ser chamados iterativamente duas ou três vezes, até a malha já não ter alterações significativas. Refira-se que quando se faz **refina zona**, o número de nodos da zona a refinar quase quadruplica.
8. Nesta fase deve-se terminar a malha. Para isso:
  - Deve-se verificar novamente a malha, através do comando **display – outline**, bem como a correcta marcação das condições de fronteira, através do comando **display – cond.fronteira**;
  - Pode-se novamente correr o comando **outros – corrige malha**, (embora se não havia erros antes de fazer o refinamento da malha, também não haverá agora);
  - É conveniente utilizar o comando **outros – texto – escrever nome** e **outros – texto – escrever texto**, para escrever o nome do modelo e o texto descritivo do modelo, que irão aparecer nos cabeçalhos dos ficheiros dos modelos;
  - Deve também ser verificado se as dimensões do modelo estão correctas, através do comando **outros – posição**, e se necessário corrigir através de **altera – escala**;
  - É muito importante, pelas razões vistas nos capítulos anteriores, fazer a renumeração dos nodos, com **altera – renumera nodos**;
  - Finalmente gravar o ficheiro com a extensão **.pre**, usando o comando **ficheiros – grava** ou **ficheiros – grava como...** e passa-se ao programa seguinte, **CADyEXE**.

Mostram-se de seguida, de forma muito resumida, algumas das novas possibilidades introduzidas no **CADyPRE**. Assim, na Fig. 12.4 é apresentado o corte de um transformador de intensidade (transformador de corrente), com cinco enrolamentos primários (possíveis) e um secundário, e a respectiva malha de elementos finitos original [Pinto1998], utilizada para o estudo térmico.

Na Fig. 12.5a mostra-se uma ampliação da Fig. 12.4, obtida com o comando **zoom** e tendo o **outline** sobreposto (na versão anterior do **CADyPRE**, não era possível sobrepor o outline à malha). Esta malha pode ser significativamente melhorada em apenas alguns segundos, resultando a malha da Fig. 12.5b, através da simples sequência de comandos:

- **marca – inverte** (visto que nada estava marcado, selecciona todo o modelo);
- **expansão – refina zona** (a zona seleccionada, neste caso, todo o modelo);
- **altera – arestas zona** (revira 1508 arestas de elementos finitos, em cerca 1 s, por forma a diminuir os menores ângulos internos dos triângulos);
- **baric. pts zona** (“baricentra” 2497 pontos da zona, em cerca de 1 s. Baricentrar corresponde a posicionar um nodo no centro geométrico do conjunto dos elementos a que está ligado, adaptando a malha);
- **display – outline** (S – sobreposto).

Na Fig. 12.6 mostram-se as malhas iniciais e finais dos modelos completos, com a indicação do número de nodos e elementos, indicados pelo comando **outros – estado**.

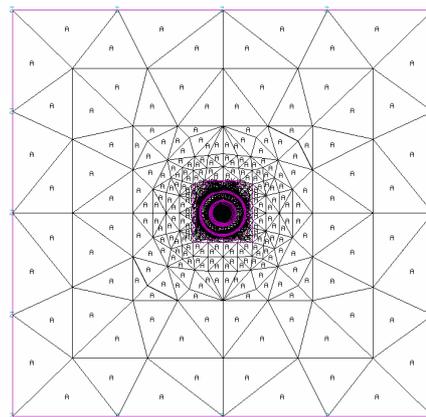
Na Fig. 12.7 apresenta-se o novo comando **outline**, que, para além de desenhar os contornos do dispositivo, mostra também a existência de alguns erros, propositadamente criados na malha da Fig. 12.6a. Pode observar-se que o comando **outline** detecta a existência de erros, neste caso a existência de elementos sobrepostos, afixando uma mensagem com essa indicação, e mostrando também dois tipos diferentes de sobreposição: a sobreposição de elementos finitos com a mesma etiqueta, em que apenas aparece o símbolo # nos nodos onde ocorre, e a sobreposição de elementos com etiquetas diferentes em que os nodos, também marcados por #, são unidos por linhas. O triângulo invertido que aparece mais à esquerda corresponde a um buraco na malha, ou seja a um elemento que o utilizador se teria esquecido de criar (neste caso, foi um elemento apagado). Na Fig. 12.7a é apresentado o **outline** sobreposto à malha, e na Fig. 12.7b é mostrado apenas o **outline**.



a)

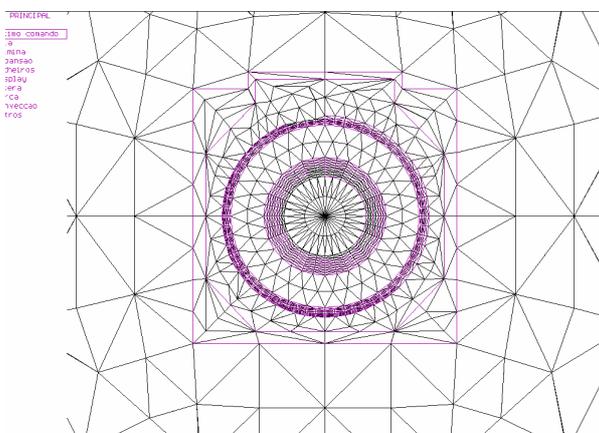
```

FINO INICIAL
[O último comando]
1.cria
2.estrutura
3.expansao
4.licenças
5. display
6.alterar
7. marca
8.convecção
9. curvas
  
```

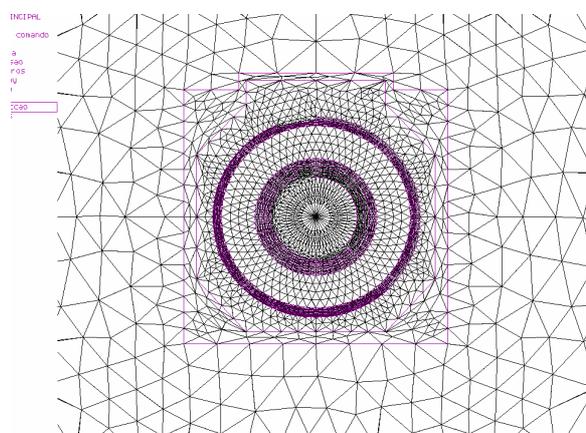


b)

Fig. 12.4. Transformador de intensidade: a) corte; b) malha original, com etiquetas.

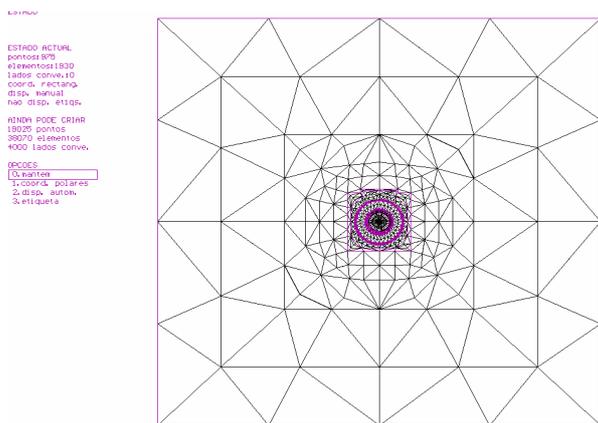


a)

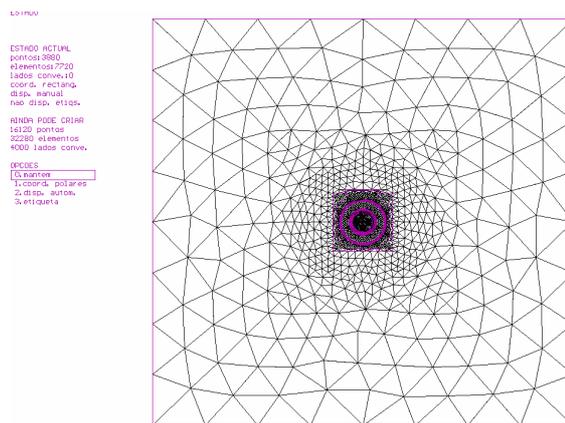


b)

Fig. 12.5. Ampliação (zoom), com outline sobreposto: a) malha original; b) malha melhorada.



a)



b)

Fig. 12.6. Evolução do modelo após alguns comandos rápidos: a) estado inicial (975 nodos/1930 elementos); b) estado final (3880 nodos/ 7720 elementos).

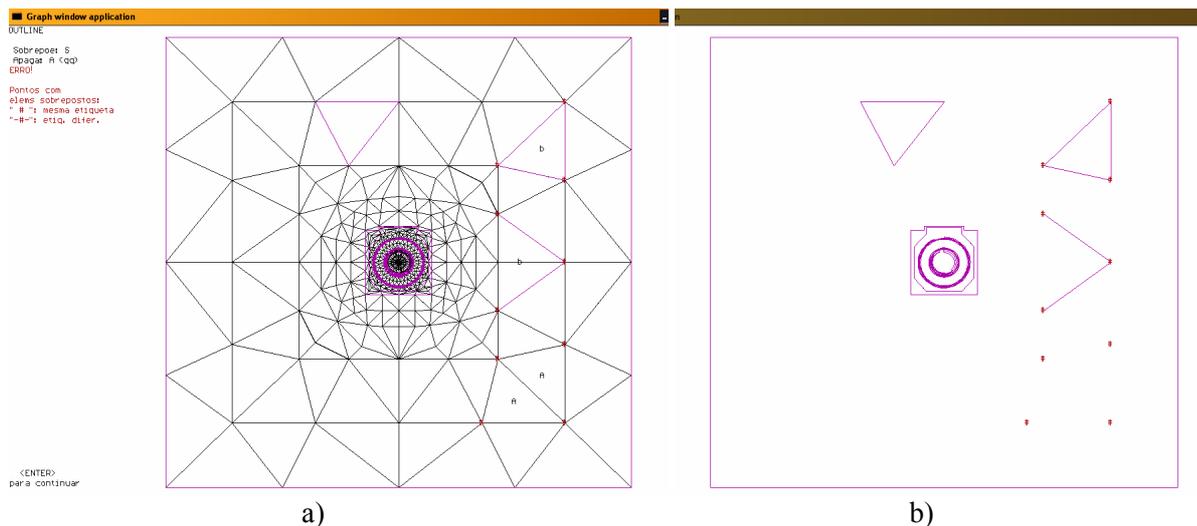


Fig. 12.7. Visualização de erros (provocados) na malha: a) com **outline** sobreposto à malha (opção “S”); b) com **outline** sem malha (opção “A”, ou qualquer tecla diferente de “S”).

O **CADyPRE** funciona numa janela, como qualquer programa em *Windows*, sendo representada a barra da janela apenas na Fig. 12.7. É importante referir que, visto que o fundo do ecrã no **CADyPRE** é preto, as cores representadas nas figuras estão invertidas (por razões ecológicas e poupança de tinta).

Foram também alterados outros comandos já existentes no **CADyPRE** e criados outros, nomeadamente:

- comandos para permitir seleccionar e desseleccionar muito rapidamente o que se quiser (por material, por zonas, por elemento, etc.), o que permite refinar apenas determinadas zonas ou materiais;
- o comando **outros – corrige malha**, para a correcção de erros da malha;
- comandos para marcação e desmarcação de arestas com convecção, específicos para os modelos térmicos.

Assim, apesar do **CADyPRE** não ter as facilidades de geração automática de malha<sup>117</sup> que têm alguns pacotes comerciais, os desenvolvimentos efectuados permitem construir rapidamente malhas de boa qualidade, sobretudo se se tiver um pouco de experiência e o cuidado de criar a malha inicial de forma a já estar adaptada aos resultados que se prevêm obter.

<sup>117</sup> Existem também duas rotinas no **CADyPRE** para geração automática de malha. No entanto, ainda não são suficientemente robustas e eficazes, pelo que normalmente não são utilizadas.

Finalmente, para mostrar o tipo de ficheiros de dados gerado pelo **CADyPRE**, e mudando de tipo de problema, apresenta-se na Fig. 12.8 um extracto do ficheiro PU.pre, mencionado na página 172 e seguintes.

```
Ficheiro criado pelo CADyPRE

* Nome do modelo:
PU - 1D malha mais refinada, p/ comparar com Gyselinck(COMPUMAGO)

* Texto descritivo do modelo:
w/d=0.025/0.5 mm. Malha 1D, adapt. ef. pelic. COMPUMAG03

* Numero de pontos do modelo:
1944

* Numero de elementos do modelo:
3136

* Lista de pontos:
  n      x      y      cond.fr.  potencial
  1  0.00000000E+00  0.00000000E+00 H
  2  3.12500000E-06  4.88281250E-07 .
  (...)
1935  2.50000000E-05  4.99511719E-04 .
1936  0.00000000E+00  5.00000000E-04 H
  (...)
1943  2.18750000E-05  5.00000000E-04 H
1944  2.50000000E-05  5.00000000E-04 H

* Lista de elementos:
  n1  n2  n3 etiq
100  91  101 f
246  247  238 f
423  428  424 f
372  371  380 f
648  643  644 f
743  744  748 f
848  846  849 f
...
1545 1552 1551 f
1564 1554 1555 f
1547 1554 1555 f
```

Fig. 12.8. Ficheiro PU.pre criado pelo **CADyPRE**.

## 12.4 CADyEXE

O **CADyEXE** inicial, visto tratar-se apenas de um programa auxiliar para introdução de dados, estava um pouco desactualizado. Como foi um dos primeiros executáveis do **CADdyMAG** a ter que ser alterado, pois inicialmente só permitia 1400 nodos (cf. Tabela 12.1), utilizou-se primeiro o *Borland Turbo Pascal 7.0*, para tentar aproveitar o máximo do código original. Assim, foi preciso melhorar o aspecto gráfico do **CADyEXE**, a

sua funcionalidade, o número máximo de nodos permitido (o que obrigou a passar as variáveis de estáticas para dinâmicas, apontadas por ponteiros) e, sobretudo, permitir a entrada de dados em modo *batch*, tal como já foi por diversas vezes referido neste trabalho. Como pelo **CADyEXE** passam todos os tipos de problemas electromagnéticos (modelos electrostáticos, electrocondutivos, magnetostáticos e magnetodinâmicos), lineares e não lineares, com grandezas reais ou complexas, teve que ser ter bastante cuidado para poder funcionar correctamente com todas as diferentes possibilidades.

A título de exemplo, mostra-se na Fig. 12.9 o **CADyEXE** a criar o ficheiro PUE.pro, introduzindo-lhe os dados em modo *batch*. O ficheiro PUE.pro foi anteriormente apresentado na Fig. 7.17, página 174. A malha, representada na janela superior direita, é copiada do ficheiro PU.pre, representado na Fig. 12.8, e os dados físicos do problema são extraídos do ficheiro CMAG03U2.pee (cf. Fig. 7.16).

Na Fig. 12.10 vê-se o **CADyEXE** a criar um ficheiro chamado PUEA.pro, semelhante a PUE.pro, mas com  $H_s=200$  H/m e utilizando agora a curva  $B-H$  equivalente designada na Tabela 7.3 por TTJG13eqBsRa (praticamente igual à TTJG13EqRtav; cf. página182). Esta figura mostra também outro aspecto importante: a compatibilidade dos ficheiros do modelo no **CADyMAG**. O que isto quer dizer é que (excepto nos modelos não lineares, em que o nome do material é substituído pelo valor calculado para a propriedade) toda a informação que está no \*.pre se encontra também no \*.pro e no \*.pos. Ou seja, o **CADyPRE** pode abrir um ficheiro \*.pro ou \*.pos, sendo a restante informação descartada.

Refira-se ainda que o limite actual do **CADyEXE**, é 5200 nodos e 10400 elementos. No entanto, fazendo a conversão para o compilador *FreePascal IDE for Win32*, tal como foi feito com o **CADyPRE**, o limite será, em princípio, aquele que se quiser, ou seja, a memória do computador. No entanto, ainda não se implementaram estas alterações, porque o estrangulamento actual está no **CADyPOS**.

```

COND. FRONT., PROPRIEDADES E FONTES:
Valor da condicao fronteira da etiqueta:
H (real)= 3.000000000E+00
H (imag)= 0.000000000E+00
05 elementos de etiqueta...
"fn" sao de:
densid. corrente (ampl.)= 0.000000000E+00
densid. corrente (fase2)= 0.000000000E+00
condutividade eléctrica= 6.000000000E+06

DADOS DO MODELO E DO PROBLEMA:
Nome do ficheiro (em disco):
PU.pre
Nome do modelo :
PU - 1D malha mais refinada, p/ comparar com Gu
Texto descritivo do modelo :
u/d=0.025/0.5 mm. Malha 1D, adapt. ef. pelic. COMP
Nome do problema (nome a gravar em disco, *.pro):
PUE.pro
Texto descritivo do problema:
p/ Braxelvo 1. Usare 1D para COMPUBG: BstnyRelTr

```

Fig. 12.9. CADyEXE introduzindo, em modo *batch*, a malha contida em PU.pre e os dados indicados em CMAG03U2.pes num novo ficheiro PUE.pro.

```

COND. FRONT., PROPRIEDADES E FONTES:
Valor da condicao fronteira da etiqueta:
H (real)= 3.000000000E+00
H (imag)= 0.000000000E+00
05 elementos de etiqueta...
"fn" sao de:
densid. corrente (ampl.)= 0.000000000E+00
densid. corrente (fase2)= 0.000000000E+00
condutividade eléctrica= 6.000000000E+06

DADOS DO MODELO E DO PROBLEMA:
Nome do ficheiro (em disco):
PUD.pro
Nome do modelo :
PU - 1D malha mais refinada, p/ comparar com Gu
Texto descritivo do modelo :
u/d=0.025/0.5 mm. Malha 1D, adapt. ef. pelic. COMP
Nome do problema (nome a gravar em disco, *.pro):
PUEA.pro
Texto descritivo do problema:
p/ Braxelvo 1. Usare 1D p/ COMPUBG: Bstny, TT0613sqBsReT

```

Fig. 12.10. CADyEXE introduzindo, em modo *batch*, a malha contida em PUD.pro (igual à de PU.pre) e os dados indicados em CMAG03U5.pes num novo ficheiro PUEA.pro.

## 12.5 Processadores

Foram efectuadas diversas alterações aos processadores, ao longo deste trabalho. Para além das alterações aos processadores **EDDyPROC**, **EDDyNLIN** e **CARTyTERB**, já mencionadas nos capítulos anteriores, foram também alterados o **CARTyPRO**, o **CILyPRO** e o **PMAGNLIN**.

O compilador utilizado foi também o *Fortran PowerStation 4.0* (“FPS 4.0”), do *Microsoft Developer Studio*. As alterações principais foram:

- Converter para ambiente *Windows*;
- Aumentar o número de nodos permitidos;
- Poder funcionar em modo *batch*.

Tal como com o **EDDyNLIN**, o aumento o número de nodos também não causou qualquer tipo de problema, visto que os processadores do **CADdyMAG** já tiravam partido da esparsidade da matriz global dos coeficientes e de ser simétrica positiva definida, bem como da renumeração dos nodos. Assim, os aumentos da quantidade de memória e do tempo de processamento necessários não foram significativos. A conversão para modo *batch* também foi relativamente simples, bastando aplicar a mesma metodologia utilizada com os processadores já alterados. A conversão para *Windows* está obviamente implícita no facto de o compilador ser para *Windows*.

O processadores correm em janelas de texto, que não se mostram aqui. A solução do problema de elementos finitos, é gravada num ficheiro **\*.pos**. Os ficheiros **\*.pos** são ficheiros de texto, gravados em formato ASCII. No entanto, o formato destes ficheiros varia um pouco consoante o tipo de problema. Assim, na Fig. 12.11 apresenta-se um exemplo do formato dos ficheiros **\*.pos** criados pelo **EDDyPROC**, concretamente o ficheiro **PKC4K2U.pos**, referido na Fig. 8.11 e Fig. 8.13 (página 211).

```

Ficheiro criado pelo EDDyPROC versao 3.0 de 2002.03.14
modelo linear
modelo magnetodinamico (de correntes induzidas)
simetria cartesiana

* Nome do modelo:
PK.pre

* Texto descritivo do modelo:
1/4 mod., w/d=6/0.5=12; malha adapt. ef. pelic., 2D, Compmag03 Si

* Nome do problema:
PKC4K2U.PRO

* Texto descritivo do problema:
d/delta= 10,0 , 4.24413E+03 Hz, H=150 A/m,Compumag03? Sigma equ

* Numero de pontos do modelo:
1386

* Numero de elementos do modelo:
2591

* Lista de pontos:
n          x          y      cond.fr.      (Re)Pot      (Im)Pot
  1    .30000000E-02    .25000000E-03 H    .15000000E+03    .00000000E+00
  2    .29921880E-02    .24609380E-03 .    .14820960E+03   -.52938460E+01
(...)
1386    .00000000E+00    .25000000E-03 H    .15000000E+03    .00000000E+00

* Lista de elementos:
n1  n2  n3 etiq  propriedade      fonte(modulo)      fonte(fase)      condutividade
1020 1066 1067 f    .15000000E+03    .00000000E+00    .00000000E+00    .45000000E+07
(...)
251  279  280 f    .15000000E+03    .00000000E+00    .00000000E+00    .45000000E+07

```

Fig. 12.11. Exemplo do formato dos ficheiros \*.pos criados pelo **EDDyPROC** (ficheiro PKC4K2U.pos).

Um exemplo do formato dos ficheiros \*.pos criados pelo **EDDyNLIN** é dado na Fig. 12.12. Trata-se do ficheiro PUEA1k0.pos mencionado na Fig. 7.17, Fig. 7.18 e Fig. 7.19, resultante do processamento do ficheiro PUEA.PRO, apresentado na Fig. 12.10. Repare-se que a propriedade, a relutividade magnética, deixou de ser constante.

```

Ficheiro criado pelo EDDNLIN, Versao 2.0 de 2002.10.11
modelo nao linear
modelo magnetodinamico (de correntes induzidas)
simetria cartesiana

* Nome do modelo:
PU - 1D malha mais refinada, p/ comparar com Gyselinck(COMPUMAG0)

* Texto descritivo do modelo:
w/d=0.025/0.5 mm. Malha 1D, adapt. ef. pelic. COMPUMAG03

* Nome do problema:
PUEA.pro

* Texto descritivo do problema:
Bref=1.0 T, 1D p/ COMPUMAG: Bsin, TTJG13eqBsRa=TTJG13EqRtav

* Numero de pontos do modelo:
1944

* Numero de elementos do modelo:
3136

* Lista de pontos:
n      x      y      cond.fr.      (Re)Pot      (Im)Pot
1      .00000000E+00      .00000000E+00 H      .89809640E+03      .00000000E+00
2      .31250000E-05      .48828130E-06 .      .89568880E+03      -.25341360E+01
3      .31250000E-05      .00000000E+00 H      .89809640E+03      .00000000E+00
4      .00000000E+00      .48828130E-06 .      .89568900E+03      -.25341360E+01
(...)
50     .21875000E-04      .24414060E-05 .      .88600570E+03      -.12581970E+02
51     .21875000E-04      .29296880E-05 .      .88357200E+03      -.15071870E+02
(...)
1935   .25000000E-04      .49951170E-03 .      .89568930E+03      -.25342840E+01
1936   .00000000E+00      .50000000E-03 H      .89809640E+03      .00000000E+00
(...)
1944   .25000000E-04      .50000000E-03 H      .89809640E+03      .00000000E+00

* Lista de elementos:
n1  n2  n3  etiq  propriedade      fonte (modulo)      fonte (fase)      condutividade
91  100 101  f     .54647970E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
238 246 247  f     .52769520E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
423 424 428  f     .49188180E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
371 372 380  f     .50954350E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
643 644 648  f     .41680080E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
743 744 748  f     .40090360E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
846 848 849  f     .39256480E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
803 804 808  f     .39614630E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
(...)
1554 1555 1564  f     .50660440E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07
1547 1554 1555  f     .50513010E+03      .00000000E+00      .00000000E+00      .60000000E+07

```

Fig. 12.12. Exemplo do formato dos ficheiros \*.pos criados pelo EDDyNLIN (ficheiro PUEA1k0.pos).

Quanto aos ficheiros dos modelos térmicos, tal como se pode ver na Fig. 12.13, são diferentes dos anteriores, por várias razões: em primeiro lugar, como não passam pelo CADyEXE, o seu cabeçalho não tem as linhas de comentários que têm os outros modelos (como se pode ver, por exemplo, na Fig. 12.9 e Fig. 12.10) e têm uma parte final relativa ao “\* Numero de elementos com conveccao” e aos “\* Coeficientes de conveccao”. As outras diferenças devem-se a que a temperatura e a condutividade térmica são grandezas escalares reais (o que também acontece com os modelos electrostáticos, electrocondutivos e magnetostáticos a 2D considerados). O ficheiro da Fig. 12.13, CcQ2s5.pos, corresponde a um

dos casos cujos resultados foram apresentados na Fig. 11.6 ( $k=0,6 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , barra Conc./Grosseira). Observe-se que como se trata de um modelo apenas com 10 nodos e 10 elementos, na figura está representada a totalidade do ficheiro.

```

Ficheiro criado pelo CARTyTERB para Windows, 30-03-03

* Nome do modelo:
CcQ.pre

* Texto descritivo do modelo:
1/4 cabo AT alternador ICEM04,CABO EQUIVALENTE, cobre concentrado

* Numero de pontos do modelo:
10

* Numero de elementos do modelo:
10

* Lista de pontos:
n      x      y      cond.fr.  temp.fixa
1      .00000000E+00  .00000000E+00  .37853905E+03
2      .00000000E+00  .11700000E-01  .37852216E+03
3      .45000000E-02  .11700000E-01  .37851678E+03
4      .45000000E-02  .00000000E+00  .37853230E+03
5      .65750000E-02  .15875000E-01  .37457410E+03
6      .00000000E+00  .20050000E-01 T  .37314999E+03
7      .86500002E-02  .10025000E-01 T  .37314999E+03
8      .86500002E-02  .00000000E+00 T  .37314999E+03
9      .43250001E-02  .20050000E-01 T  .37314999E+03
10     .86500002E-02  .20050000E-01 T  .37314999E+03

* Lista de elementos:
n1  n2  n3  etiq  cond.term.  fonte term.
1   2   3   c   .38600000E+03  .26437637E+06
3   4   1   c   .38600000E+03  .26437637E+06
2   6   3   e   .60000000E+00  .00000000E+00
9   5   10  e   .60000000E+00  .00000000E+00
3   7   8   e   .60000000E+00  .00000000E+00
8   4   3   e   .60000000E+00  .00000000E+00
7   5   3   e   .60000000E+00  .00000000E+00
3   6   9   e   .60000000E+00  .00000000E+00
7   10  5   e   .60000000E+00  .00000000E+00
9   3   5   e   .60000000E+00  .00000000E+00

* Numero de elementos com conveccao:
4

* Coeficientes de conveccao :
elem lados
num. 1 2 3
5     R
8     R
4     R
9     R

* Numero de elementos com radiacao:
0

```

Fig. 12.13. Exemplo do formato dos ficheiros \*.pos criados pelo CARTyTERB (ficheiro CcQ2s5.pos).

Quanto aos processadores **CARTyPRO**, **CILyPRO** e **PMAGNLIN**, depois de feita a sua conversão, foi também verificado o seu funcionamento e precisão, através da resolução de problemas que têm solução analítica exacta e comparação destes com os resultados numéricos obtidos (por elementos finitos).

Na Fig. 12.14 apresenta-se um dos ficheiros utilizados para a validação da solução do novo **CARTyPRO** funcionando em modo *batch*. Refere-se ao cálculo da solução do potencial, campo eléctrico e capacidade de um cabo coaxial. O mesmo problema, embora com um malha menos refinada, tinha sido já anteriormente utilizado para os mesmos efeitos [Coimbra1995] pp. 245. Com as novas malhas, mais refinadas, verificou-se um aumento de precisão.

```
Ficheiro criado pelo CARTYPRO batch Vers 5.0.0 de 23-09-2002
modelo linear
modelo electrostatico
simetria cartesiana

* Nome do modelo:
Coax2r

* Texto descritivo do modelo:
1/8Cabo Coaxial, Tese PC p245, Teste CartyproBatch 10Knod, +refin

* Nome do problema:
Coax2r.pro

* Texto descritivo do problema:
Teste Cartypro batch 10000 nodos

* Numero de pontos do modelo:
1729

* Numero de elementos do modelo:
3276

* Lista de pontos:
  n      x              y      cond.fr.      potencial
  1  .10606600E-01    .10606600E-01 V    .10000000E+03
  2  .10827620E-01    .10365410E-01 V    .10000000E+03
  (...)
1726  .14789060E+00    .00000000E+00 .    .59893260E+00
1727  .14985730E+00    .32683400E-02 z    .00000000E+00
1728  .14971460E+00    .65366810E-02 z    .00000000E+00
1729  .15000000E+00    .00000000E+00 z    .00000000E+00

* Lista de elementos:
  n1  n2  n3  etiq  propriedade      fonte
1148 1194 1195 d    .26562000E-10    .00000000E+00
  (...)
  430 431 455 d    .26562000E-10    .00000000E+00
1046 1063 1092 d    .26562000E-10    .00000000E+00
```

Fig. 12.14. Exemplo do formato dos ficheiros **\*.pos** criados pelo **CARTyPRO** para modelos electrostáticos (ficheiro Coax2r.pos).

Nas figuras seguintes, para que se possam ver os seus formatos, apresentam-se os ficheiros de entrada em modo *batch*, para várias fase da resolução do problema, incluindo o de saída do **CADyPOS**. Assim, na Fig. 12.15 mostra-se o ficheiro Cartypr0.pee, utilizado para a introdução dos dados no **CADyEXE**, e na Fig. 12.16 vê-se o Cartypr0.peo, utilizado para introdução dos dados no processador **CARTyPRO**.

```

Ficheiro de propriedades e ficheiros para batch com o CADyEXE.
DESCRICAO:
  "Cartypr0.pee": Introdução de condições fronteira e propriedades
                para teste ao Cartypro 5.0.0 (Batch , 10000 nodos, 20000 elementos)
                Teste feito em 25-9-2002

linear          {linear/naolinear}
electrostatico {electrocondutivo, electrostatico, magnetodinamico, magnetostatico, termico}
cartesiana     {cartesiana/cilindrica}
S {PAUSA: S/N/(1,2,3,4,..9) - SIM,NAO ou tempo=algarismo (segundos)}
S {Gravar por cima: S/N, caso o ficheiro *.PRO ja exista}
4 {Numero de Ficheiros *.pre a "CadyExecutar"}

* Condições Fronteira: n°; etiquetas e valores (se =-1e-20=>a alterar)
02 {para cada etiq. só lê o 1º valor, excepto para magnetodinâmico que lê os 2 primeiros}
   C.F.real      C.F.imag
V               100      -1E-20
z               0        -1E-20

* Materiais: n°; Etiq, Propried e Fontes (se =-1e-20=>a alterar. Tolerante a desalinhamento):
01 {para cada etiq lê 1,2,3 ou 4 valores consoante o tipo de campo e linearidade}
   Permitiv [F/m] Dens.Carg[C/m3]
d  2.65620000E-11      0

Lista de ficheiros (só dados "a alterar" entre modelos):
FichPRE   FichPRO   Texto descritivo do modelo
Coax0.pre Coax0.pro   [Teste Cartypro batch 10000 nodos]
Coax0r.pre Coax0r.pro   [Teste Cartypro batch 10000 nodos]
Coax1r.pre Coax1r.pro   [Teste Cartypro batch 10000 nodos]
Coax2r.pre Coax2r.pro   [Teste Cartypro batch 10000 nodos]

```

Fig. 12.15. Exemplo do formato dos ficheiros **\*.pee** para problemas electrostáticos, a resolver com o **CARTyPRO** (ficheiro Cartypr0.pee, utilizado para introdução dos dados no **CADyEXE**).

```

Ficheiro para PROCESSADOR do CADDYMAG em modo batch.
PROCESSADOR: CARTYPRO 5.0(é um comentário)
  "Cartypr0.peo: Teste ao Cartypro 5.0.0 :
  25-09-2002
  (CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações"; Não alterar número de Linhas)

1   Gravar por cima (1=Sim, 0=Não) caso o ficheiro *.POS ja exista
5   Numero de Ficheiros *.pro a Processar

Lista de ficheiros. Respeitar alinhamentos à DIREITA
FicheiroPRO   FicheiroPOS
Coax0.pro     Coax0.pos
Coax0r.pro    Coax0r.pos
Coax1r.pro    Coax1r.pos
Coax2r.pro    Coax2r.pos
ESFG.pro     ESFGlix2.pos

=====
CUIDADO: usar "ESPAÇOS", não "Tabulações".
         não alterar número de linhas
         Respeitar alinhamentos (à direita)

```

Fig. 12.16. Exemplo do formato dos ficheiros **\*.peo** para indicação dos ficheiros **\*.pro** a processar pelo **CARTyPRO** e nome dos respectivos ficheiros de saída **\*.pos** (ficheiro Cartypr0.peo).

Os quatro ficheiros a pós-processar pelo **CADyPOS** são vistos na Fig. 12.17.

```
Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
DESCRICAO: (SE NAO APRESENTAR ALGUNS VALORES VERIFICAR SE IMPRESSORA ESTA LIGADA)
  Cartypr0.pes: Para teste de Cartypro 5.0.0, batch 10000 nodos, 25Set2002
    (nota: maior modelo com 1729 nodos):

Lista de ficheiros:
Coax0.pos
Coax0r.pos
Coax1r.pos
Coax2r.pos
```

Fig. 12.17. Exemplo do formato dos ficheiros **\*.pes** para entrada dos modelos a pós-processar no **CADyPOS** (ficheiro Cartypr0.pes).

Finalmente, apresenta-se na Fig. 12.18 o ficheiro Cartypr0.pss, que contém a cópia do Cartypr0.pes e do ficheiro de comandos **comCarty.txt**, bem como os respectivos comentários.

```
Ficheiro criado pelo CADyPOS versao 3.2.2 (22-Mar-2002)

Ficheiro de ficheiros para batch com o CADyPOS.
DESCRICAO: (SE NAO APRESENTAR ALGUNS VALORES VERIFICAR SE IMPRESSORA ESTA LIGADA)
  Cartypr0.pes: Para teste de Cartypro 5.0.0, batch 10000 nodos, 25Set2002
    (nota: maior modelo com 1729 nodos):

Lista de ficheiros:

Coax0.pos
Coax0r.pos
Coax1r.pos
Coax2r.pos

Ficheiro de comandos batch para o CADyPOS.
Ultima linha com comando "801 S" para terminar.
  Teste ao Cartypro 5.0.0 Batch, 10000 nodos
  (25Set2002)

Conteudo: tipo de simetria (0 cart, 1 cilin)/tipo de potencial (0-5)/comandos e opcoes...
0
1
201 10 2 50
401
404 1 E
106
703
104
801 S

DESCRICAO (comentários)
0 cartesiano
1 electrostático
201 10 2 50 níveis de cores, 10 cores, por nº de curvas, 50 curvas
401 Energia
404 1 E -gradiente, da grandeza 1, E (resulta campo eléctrico)
106 Níveis de cores
```

Fig. 12.18. Exemplo de ficheiro **\*.pss** criado pelo **CADyPOS** para um problema electrostático (ficheiro Cartypr0.pss).

## 12.6 Pós-processador, CADyPOS

Em relação ao pós-processador, foram já sendo referidas ao longo do texto diversas alterações efectuadas. Por exemplo, o aumento do número de nodos, o comando integra e comando quadrado, o cálculo da indução média para modelos magnetodinâmicos em termos de  $H$  (cf. página 164 e seguintes), etc., bem como a introdução do funcionamento em modo *batch*, pelo que não se entrará aqui em mais detalhes. Foram também sendo apresentadas muitas dezenas de imagens de resultados, obtidas no **CADyPOS** (por exemplo a Fig. 8.9 e a Fig. 11.7, para citar apenas duas).

No entanto, devido às limitações da memória do DOS e do compilador utilizado, apenas foi possível passar dos 2000 nodos iniciais, para os actuais 2200 nodos.

O **CADyPOS** está actualmente em desenvolvimento para aumento do número de nodos e conversão definitiva para *Windows*, utilizando o *Visual C++* da *Microsoft*. Na Fig. 12.19 pode ver-se o aspecto actual do **CADyPOS** (numa janela pequena) para *Windows*, embora ainda não esteja totalmente operacional devido a alguns problemas na conversão de algumas classes e de conversão das rotinas gráficas.

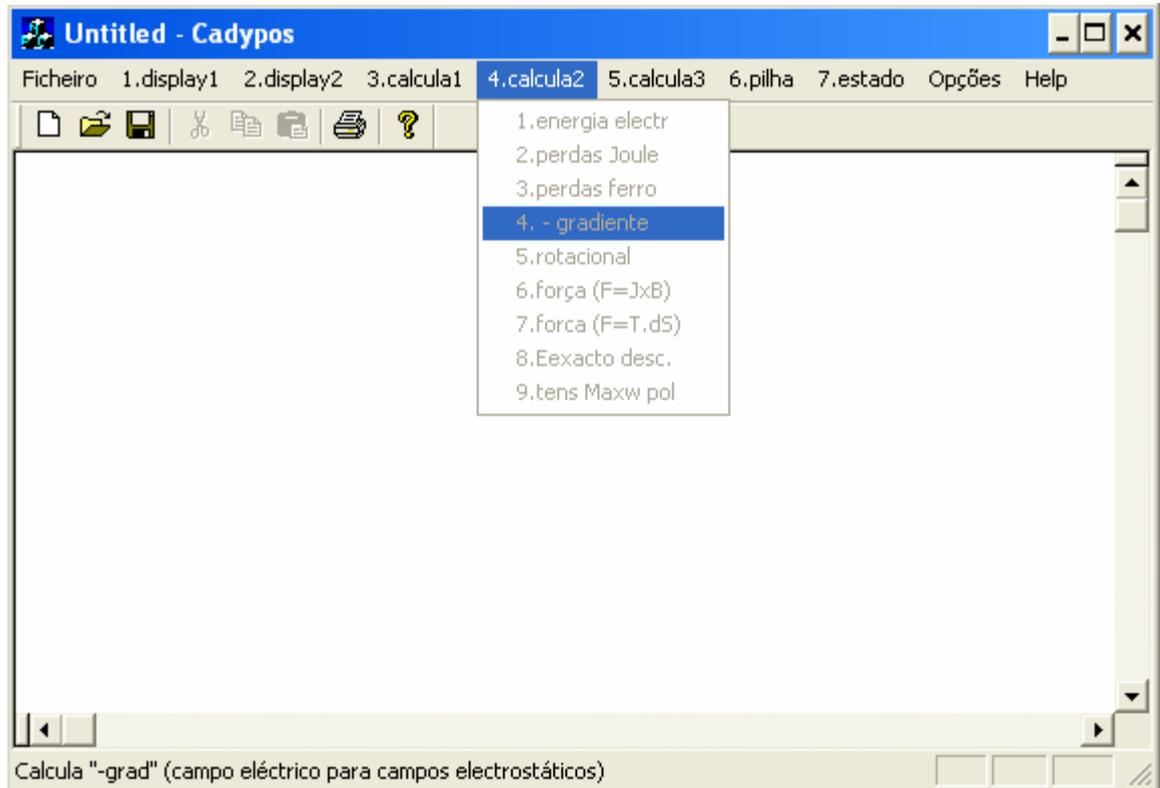


Fig. 12.19. Aspecto do **CADyPOS** para *Windows* (correndo numa janela pequena).



## 13 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Ao concluir este trabalho, pode dizer-se que muito foi feito e que muito ficou por fazer.

Atendendo à extensão e à evolução do trabalho desenvolvido, as conclusões foram sendo apresentadas no final de cada capítulo ou secção (sub-capítulo), aparecendo, por isso, muitas vezes no título das secções respectivas, tal como se pode ver no ÍNDICE. Para além disso, as principais conclusões do trabalho, foram também já expostas de uma forma resumida, no capítulo 1, especialmente em “1.3 Contribuições originais”, página 8.

Apesar disso, e de forma bastante resumida, pode dizer-se que as principais conclusões do trabalho realizado, são as seguintes:

1. Talvez a primeira conclusão geral seja que a modelação correcta das perdas magnéticas, nas quais se incluem as perdas por correntes induzidas em chapas ferromagnéticas, é um assunto complexo e ainda não definitivamente resolvido, razão pela qual há-de continuar a ser abordado nos fóruns internacionais da especialidade.
2. Da comparação entre as várias expressões analíticas, dispersas pela literatura, para o cálculo de perdas por correntes induzidas para o problema 1D, quer formuladas em termos da indução média na chapa ( $B_{\max}^a$ ), quer do valor da intensidade do campo magnético à superfície da chapa ( $H_s$ ), verificaram-se os domínios de aplicação descritos na literatura para cada uma delas, tendo-se concluído acerca das situações em que se podem ou devem usar umas ou outras;
3. Apesar de, sobretudo na parte inicial, no cálculo das perdas por correntes induzidas terem sido utilizadas malhas um pouco grosseiras, o erro para o problema 1D em relação à expressão analítica exacta foi sempre inferior a 1%, pelo que se consideram os resultados aceitáveis, sendo os erros espectáveis para o problema 2D da mesma ordem de grandeza. Para além disso, a comparação dos nossos resultados numéricos para o problema 1D, com os dados experimentais de outro autor, considerado de referência, Bertotti, apresentou uma boa concordância. Também os nossos resultados numéricos a 2D praticamente coincidiram com os resultados numéricos de outro

autor conceituado nesta área, Gyselinck. Assim, a formulação, a metodologia e os resultados foram verificados e validados;

4. Utilizando o método dos elementos finitos e uma condição de fronteira complexa, foi desenvolvida uma metodologia para calcular as perdas por correntes induzidas considerando o efeito pelicular e tendo em consideração a espessura e a largura das chapas. Concluiu-se ser importante considerar o efeito pelicular, a largura e a espessura da chapa para uma previsão correcta das perdas por correntes induzidas;
5. Foram desenvolvidos um gráfico genérico e um modelo analítico derivados de soluções numéricas por elementos finitos. O gráfico e/ou o modelo permitem um cálculo fácil das perdas por correntes induzidas relativamente a valores analíticos de referência a 1D, para qualquer chapa de material ferromagnético macio isotrópico e não hysterético, na zona de funcionamento linear. Tanto o gráfico como o modelo são válidos para qualquer largura  $w$ , espessura  $d$  e frequência  $f$ , na gama considerada de  $w/d$  de 2 a 17,14 e de  $d/\delta$  de 0,05 a 30;
6. Quanto à utilização de curvas de relutividade (e/ou curvas de  $B-H$ ) equivalentes, concluiu-se que este método dá bons resultados para as perdas por correntes induzidas, por comparação com o *time-stepping*, com muito menos esforço computacional, desde que não se verifiquem simultaneamente saturação e efeito pelicular significativos. Para frequências superiores, ou melhor, com efeito pelicular e simultaneamente saturação, tanto quanto pudemos concluir, deverá ser utilizada a resolução no domínio do tempo ou o método do balanço harmónico;
7. Do estudo do efeito da largura da chapa ferromagnética na densidade local de perdas por correntes induzidas, em função da distância à fronteira lateral da chapa,  $dte$ , concluiu-se que as curvas da densidade relativa de perdas obtidas usando  $H_s$  constante, são independentes da relação  $w/d$ . Assim, a utilização de  $H_s$  poderá ser mais adequada para aplicação em técnicas de homogeneização. Usar  $B_{\max}^a$  parece ser mais complicado;
8. Concluiu-se que o método desenvolvido para o cálculo da condutividade térmica equivalente de barra condutora alojada em ranhura do estator do alternador permite calcular com elevada precisão a condutividade térmica equivalente,  $k_e$ , para qualquer barra com diferentes materiais isolantes e geometrias não triviais e com apenas condução de calor. Isto permite modelar o problema com muito menos nodos e de forma mais rápida, mantendo a precisão;

9. Foram feitas melhorias e actualização do pacote de programas de elementos finitos **CADdyMAG**, sendo o aumento do número de nodos, a inclusão dos problemas térmicos no ambiente PC/Windows e a possibilidade de funcionar em modo batch, as mais relevantes.

Quanto aos trabalhos futuros, ao longo desta dissertação foram sendo deixadas algumas questões pendentes que apontam caminhos para a continuação do trabalho. Assim, há três tipos de trabalhos futuros que poderão ser equacionados:

1. Os relacionados com a continuação do estudo dos fenómenos das perdas nos materiais ferromagnéticos;
2. Os relacionados com o aprofundamento do estudo dos fenómenos térmicos e da aplicação de técnicas de homogeneização térmica;
3. Os que têm a ver com a continuação dos melhoramentos ao *software* de elementos finitos, **CADdyMAG**.

Em relação ao ponto 1, uma questão interessante e importante será aprofundar o estudo da utilização correcta das curvas  $B-H$  equivalentes consoante os objectivos (cálculo de perdas por correntes induzidas provocadas por uma determinada densidade de corrente fornecida, forças electromotrizes induzidas, cálculo de indutâncias, etc.), por forma a escolher correctamente qual a formulação para a curva equivalente a utilizar.

Poderá ser também testada a aplicação das curvas  $B-H$  equivalentes conjuntamente com a introdução de uma relutividade ou permeabilidade complexa equivalente (ou, em alternativa, com curvas  $B-H$  complexas equivalentes), nas quais serão incluídas as perdas por histerese na fase dessa curva.

Para o estudo das perdas magnéticas totais (por correntes induzidas “clássicas”, histerese e por excesso), bem como para tentar implementar os resultados obtidos para a densidade local das perdas, usando técnicas de homogeneização, directamente no modelo de elementos finitos, será de todo o interesse prosseguir e aprofundar a colaboração com investigadores de outros laboratórios, nomeadamente com o Prof. Johan Gyselinck, da *Université Libre de Bruxelles*, Bruxelas, Bélgica, e com o Eng. Alfredo de Blas, da *Universidad Politécnica de Cataluña*, Barcelona, Espanha.

Em relação ao ponto 2, aprofundamento do estudo dos fenómenos térmicos e da aplicação de técnicas de homogeneização, poderão ser estudadas a aplicação do método desenvolvido a outros tipos de cabos, com outras formas e também a casos com convecção.

Quanto ao ponto 3, a continuação dos melhoramentos ao *software* **CADdyMAG**, as duas primeiras acções serão a conclusão do novo CADyPOS, e a conversão para Windows do CADyEXE. Depois poderão ser desenvolvidos novos processadores. Poderia ser também equacionada a questão de uma reconversão completa do CADdyMAG, nomeadamente passando tudo para uma única linguagem e compilador. No entanto, isso seria uma intervenção de fundo muito trabalhosa, e sem um grande valor científico, pelo que será difícil de realizar sem haver um financiamento específico para este projecto.

## 14 REFERÊNCIAS

- [Alves1997] C. J. S. Alves, “Análise Numérica 1996/97 – Resumo da Matéria”, Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica, Dep. Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2004.  
[www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/](http://www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/)
- [Anim-Appiah1997] K. D. Anim-Appiah, S. M. Riad, “Analysis and design of ferrite cores for eddy-current-killed oscillator inductive proximity sensors”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, pp.2274-2281, May 1997.
- [Antunes2002] C. L. Antunes, P. G. Pereirinha, “Finite element computation of eddy current losses in steel lamination considering the skin effect, the lamination width and thickness”, *Proc. of the International Conference on Electrical Machines, ICEM 2002*, paper 159 (in CD ROM), Bruges, Belgium, August 25-28, 2002.
- [AST1999a] AST – Acciai Speciali Terni, *Non oriented electrical steel sheets* (Catálogo de Fabricante), Acciai Speciali Terni, 05100 Terni, Viale B. Brin 218 - Italy, 1999.
- [AST1999b] AST – Acciai Speciali Terni, *Grain oriented and high permeability steel sheets* (Catálogo de Fabricante), Acciai Speciali Terni, 05100 Terni, Viale B. Brin 218 - Italy, 1999.
- [Atallah1992] K. Atallah, Z. Q. Zhu, D. Howe, “An improved method for predicting iron losses in brushless permanent magnet DC drives”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, pp.2997-2999, Sept. 1992.
- [Basso1997] V. Basso, G. Bertotti, O. Bottauscio, F. Fiorillo, M. Pasquale, “Power losses in magnetic laminations with hysteresis: Finite element modeling and experimental validation”, *J. Appl. Phys.*, vol. 81, nº8, pp.5606-5608, 1997.
- [Bathe1995] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering and Analysis*, Prentice Hall, London, 1995.
- [Bertotti1988] G. Bertotti, “General properties of power losses in soft ferromagnetic materials”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, pp.621-630, Jan. 1988.
- [Bertotti1991] G. Bertotti, A. Boglietti, M. Chiampi, D. Chiarabaglio, F. Fiorillo, M. Lazzari, “An improved estimation of iron losses in rotating electrical machines”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, pp.5007-5009, Nov. 1991.
- [Bertotti2002] G. Bertotti, “Micromagnetics and nonlinear magnetization dynamics” Tutorial Course, in the 20<sup>th</sup> *Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC2002*, Perugia, Italy, June 16-19, 2002.

- [Bessonov1977] L. Bessonov, *Electricidade Aplicada para Engenheiros*, Lopes da Silva Editora, Porto, Portugal, 2<sup>a</sup> ed., 1977.
- [Blas2004a] A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Desarrollo de un modelo de histéresis dinámico tipo Preisach y su aplicación al cálculo de máquinas eléctricas”, *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, in CD-ROM Lisboa, Portugal, 31 de Maio – 2 de Junho de 2004.
- [Blas2004b] A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Determination of the hysteresis core losses on a single-phase transformer by using a dynamic Preisach-type hysteresis model”, *16<sup>th</sup> International Conference On Electrical Machines – ICEM’2004*, in CD-ROM, Kracow, Poland, September 5-8, 2004.
- [Bossavit1982] A. Bossavit, J.-C. Verite, “A mixed fem-biem method to solve 3-D eddy-current problems”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.18, pp.431- 435, Mars 1982.
- [Bossavit1983] A. Bossavit, J. Verite, “The “TRIFOU” Code: Solving the 3-D eddy-currents problem by using H as state variable”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.19, pp.2465-2470, Nov 1983.
- [Bossavit1988] A. Bossavit, “A rationale for ‘edge-elements’ in 3-D fields computations”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.24, pp.74- 79, Jan. 1988.
- [Bottauscio1998] O. Bottauscio, M. Chiampi, L. Dupré, M. Repetto, M. Von Rauch, J. Melkebeek, “Dynamic Preisach modeling of ferromagnetic laminations: a comparison of different finite element formulations”, *J. Physique IV*, vol. 8, n° 2, pp.647-650, 1998.
- [Bozorth1993] Richard Bozorth, *Ferromagnetism*, IEEE Press, New York, USA, 1993. (Reedição. Versões anteriores: 1951, D.Van Nostrand Company, Inc.; 1978, Lucent Technologies, Inc.)
- [Brauer1975] J. Brauer, “Simple equations for the magnetization and reluctivity curves of steel”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.11, pp.81- 81, Jan 1975.
- [Brauer1999] J. R. Brauer, Z. J. Cendes, B. C. Beihoff, K. P. Phillips, “Laminated steel eddy current loss versus frequency computed using finite elements”, *Proc. da IEEE IEMDC’99, Intern. Electric Machines and Drives Conf.*, pp.543-545, Washington, USA, May 1999.
- [Brauer2000] J. R. Brauer, Z. J. Cendes, B. C. Beihoff, B.C.; K. P. Phillips, “Laminated steel eddy-current loss versus frequency computed using finite elements”, *IEEE Trans. Indust. Applic.*, vol. 36, pp.1132 -1137, July-Aug. 2000.
- [Brito1999] L. Brito, M. Fiolhais, C. Providência, *Campo Electromagnético*, McGraw-Hill, Lisboa, Portugal, 1999.

- [BROCKHAUS2004] BROCKHAUS, “Measuring of Soft Magnetic Materials”, 2004, <http://www.brockhaus.net/english/produkte/services/weichmagnetisch.html> .
- [Campbell1994] P. Campbell, *Permanent Magnet Materials and their Application*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [Chalmers2003] B. J. Chalmers, “Electrical machines powered by eddy currents”, Conferência Plenária, *Actas do 8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, Vol. I, pp.1.XLI-1.XLV, Vilamoura, Algarve, Portugal, 3-5 de Julho de 2003.
- [Chari2000] M.V.K. Chari, S. Salon, *Numerical Methods in Electromagnetism*, Academic Press, San Diego – USA / London, UK, 2000.
- [Chatelain1983] J. Chatelain, *Machines Electriques*, Vol. 1, Editions Dunod, Paris, France, 1983.
- [Chaveau2002] E. Chauveau, E. Zaim, D. Trichet, J. Fouladgar, “A statistical approach of temperature calculation in electrical machines”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.1826-1829, Jul. 2000.
- [Coey1996] J. M. D. Coey (edit.), *Rare-Earth Iron Permanent Magnets*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.
- [Coimbra1995] A. P. Coimbra, *Desenvolvimento de um sistema integrado electro-magneto-térmico a 2D e 3D para análise e optimização de dispositivos eléctricos*, Tese de Doutoramento, FCTUC, Coimbra, Portugal, 1995.
- [Coulomb1985] J. C. Coulomb, J. C. Sabonnadiere, *CAO en Électrotechnique*, Hermes Publishing, Paris, France, 1985.
- [Cundeva2001] M. Cundeva, L. Arsov, “Experimental verification of the results from the FEM – 3D magnetic field analysis of Epstein frame”, *Proc. of the International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF 2001*, pp.251-256, Crakow, Poland, September 20-22, 2001.
- [DECOUP] DECOUP, *Caractéristiques des toles magnetiques au silicium; (segundo) DIN 46400* (Catálogo de Fabricante), 18, Rue Chardanne, B.P. 27 – F 93310, Le Pre-St-Gervais, France.
- [Delage-Darces2000] M. Delage-Darces, F. Alves, J. Moulin, A. Benchabi, M. Lecrivain, “Prediction of losses in ferromagnetic sheets: dynamic and magnetomechanical behaviours”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.3460-3462, Sept. 2000.
- [Dodd2002] Dodd M., “The Application of FEM to the Analysis of Loudspeaker Motor Thermal Behavior”, *112th Audio Engineering Society Convention (AES 112<sup>th</sup> Convention)*, München, Germany, May 2002.

- [Du Terrail1984] Y. Du Terrail, J.-C. Sabonnadiere, P. Masse, J.L. Coulomb, “Nonlinear complex finite element analysis of electromagnetic field in steady-state AC devices”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-20, pp.549-552, 1984.
- [Dular2002] P. Dular, J. Gyselinck, C. Geuzaine, N. Sadowski, J. Bastos, “A 3D magnetic vector potential formulation taking eddy currents in lamination stacks into account”, Proc. of CEFC2002, *20<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, pp.123, Perugia, Italy, June 16–19, 2002.
- [Dular2003] P. Dular, J. Gyselinck, C. Geuzaine, N. Sadowski, J. Bastos, “A 3D magnetic vector potential formulation taking eddy currents in lamination stacks into account”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.39, pp.1424 - 1427, May 2003.
- [Dupré1998] L. Dupré, R. Van Keer, J. Melkebeek, “A study of the influence of laser cutting and punching on the electromagnetic behaviour of electrical steel sheets”, *4<sup>th</sup> Intern. Workshop Electric and Magnetic Fields*, Marseille, France, pp.195-200, 1998.
- [EGB1997] EBG, *Stabocor, Staboperm, Stabopol: Non grain oriented grades of electrical steels* (Catálogo de Fabricante), EBG, Bochum, Germany, 1997.
- [Ferrari1985] R. Ferrari, A. Pinchuk, “Complementary variational finite-element solution of eddy current problems using the field variables”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 21, pp.2242-2245, Nov 1985.
- [Fishbane1996] P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz, S.T. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., USA, 2<sup>nd</sup> ed. extended, 1996.
- [Furlani2001] E. Furlani, *Permanent Magnet and Electromechanical Devices – Materials, Analysis, and Applications*, Academic Press, San Diego-USA / London-UK, 2001.
- [GetDP2003] P. Dular, C. Geuzaine, (Manual of) *GetDP: a general environment for the treatment of discrete problems*, Version 0.89, 26 March 2003, <http://www.geuz.org/getdp/>
- [Gmsh2004] C. Geuzaine, J.-F. Remacle, (Manual of) *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, Version 1.51, 28 February 2004, <http://www.geuz.org/gmsh/>
- [Gyselinck1999] J. Gyselinck, L. Vandeveld, J. Melkebeek, P. Dular, F. Henrotte, W. Legros, “Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, pp.1191-1194, May 1999.

- [Gyselinck2000] J. Gyselinck, *Two-dimensional dynamic finite element modelling of static and rotating electromagnetic energy converters* (in Dutch), PhD dissertation, Ghent University, Faculty of Applied Sciences, Gent, Belgium, March 2000.
- [Gyselinck2002a] J. Gyselinck, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, “Two-dimensional harmonic balance finite element modelling of electromagnetic devices coupled to nonlinear circuits”, *XVII Symposium Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits (EPNC)*, Leuven, Belgium, July 1-3, 2002.
- [Gyselinck2002b] J. Gyselinck, C. Geuzaine, P. Dular, W. Legros, “Multi-harmonic modelling of motional magnetic field problems using a hybrid finite element – boundary element discretisation”, *Proc. of the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, ACOMEN’2002*, CD-ROM, Liège, Belgium, May 2002.
- [Gyselinck2002c] J. Gyselinck, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, “Harmonic-balance finite-element modeling of electromagnetic devices: a novel approach”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.38, pp.521-524, Mars 2002.
- [Gyselinck2003a] J. Gyselinck, P. Pereirinha, C. Antunes, W. Legros, “Harmonic balance finite element modelling of eddy currents in steel laminations”, *Actas do 8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, Vol. I, pp.1.89-1.94, Vilamoura, Algarve, Portugal, 3-5 de Julho de 2003.
- [Gyselinck2003b] J. Gyselinck, L. Vandeveld, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, “A general method for the frequency domain finite element modelling of rotating electromagnetic devices”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, pp.1147-1150, May 2003.
- [Hayt1989] W. H. Hayt, Jr., *Engineering Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, USA, 1989.
- [Hollaus1999] K. Hollaus and O. Biro, “Estimation of 3-D eddy-currents in conducting laminations by an anisotropic conductivity and a 1-D analytical model,” *COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 18, no. 3, pp.496–499, 1999.
- [Holman1983] J. P. Holman, *Transferência de Calor*, McGraw-Hill, São Paulo, Brasil, 1983.
- [Holman1986] J. Holman, *Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, New-York, USA, 6<sup>th</sup> ed., 1986.
- [Holmberg1997] P. Holmberg, A. Bergqvist, G. Engdahl, “Modelling eddy currents and hysteresis in a transformer laminate”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, pp.1306-1309, Mars 1997.

- [Hoole1996] S. Ratnajeevan Hoole, P. Ratnamahilan P. Hoole, *A Modern Short Course in Engineering Electromagnetics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1996.
- [Ida1997] N. Ida, J.P.A. Bastos, *Electromagnetics and Calculation of Fields*, Springer-Verlag, New York, USA, 2<sup>nd</sup> ed., 1997.
- [Ida2000] N. Ida, *Engineering Electromagnetics*, Springer-Verlag, New York, USA, 2000.
- [IEC 60404-2\_1996] IEC (International Electrotechnical Commission) 60404-2 Ed. 3.0 b: 1996. *Magnetic Materials – Part 2: Methods of Measurement of the Magnetic Properties of Electrical Steel Sheet and Strip by means of an Epstein Frame*, 1996.
- [IEC 60404-3\_2002] IEC (International Electrotechnical Commission) 60404-3 Ed. 2.1 b: 2002. *Magnetic materials – Part 3: Methods of Measurement of the Magnetic Properties of Magnetic Sheet and Strip by means of a Single Sheet Tester*, 2002.
- [Incropera1996] F. P. Incropera, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, New York, USA, 4<sup>th</sup> ed., 1996.
- [Jack1990] A.G. Jack, B.C. Mecrow, “Methods for magnetically nonlinear problems involving significant hysteresis and eddy currents”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, pp.424-429, 1990.
- [JFE Steel Corporation2003] JFE Steel Corporation, “MBT2 – soft ferrite with low core loss ideal for electronic devices”, <http://www.jfe-steel.co.jp/en/release/2003/030701.html>, JFE Steel Corporation, Tokyo, Japan, <http://www.jfe-steel.co.jp/en/index.html>, 2003.
- [Jiles1994] D.C. Jiles, “Modelling the effects of eddy current losses on frequency dependent hysteresis in electrically conducting media”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, pp.4326 -4328, Nov. 1994.
- [Jin1993] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1993.
- [Kawase2000] Y. Kawase, T. Miyatake, K. Hirata, “Thermal analysis of steel blade quenching by induction heating”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.1788-1791, Jul. 2000.
- [Krahenbuhl2004] L. Krahenbuhl, P. Dular, T. Zeidan, F. Buret, “Homogenization of lamination stacks in linear magnetodynamics”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.40, pp.912 - 915, Mar 2004.
- [Krause1998] R.P. Krause, J.H. Bularzik, H.R. Kokal, “A pressed soft magnetic material for motor applications”, *IEE Colloquium on New Magnetic Materials – Bonded Iron, Lamination Steels, Sintered Iron and Permanent Magnets* (Digest Nmo. 1998/259), pp.2/1-2/4, 1998.

- [Krawczyk1993] A. Krawczyk, J. Tegopoulos, *Numerical Modelling of Eddy Currents*, Monographs in EEE N° 32, Oxford University Press, Oxford, UK, 1993.
- [Kriezis1992] E.E. Kriezis, T.D. Tsiboukis, S.M. Panas, J.A. Tegopoulos, “Eddy currents: theory and applications”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, (n° 10, Oct. 1992), pp.1559-1589.
- [Lederer1998] D. Lederer, A. Kost, “Modelling of nonlinear magnetic material using a complex effective reluctivity”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 34, pp.3060-3063, Sept. 1998.
- [Li1997] L. Lin, C. Xiang, “Analysis of 3D nonlinear eddy current problem using the field variables H and E directly”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, pp.1179 -1184, Mars 1997.
- [Lowther1986] D. Lowther, P.P. Silvester, *Computer-Aided Design in Magnetics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986.
- [Lu1990] J. Lu, S. Yamada, K. Bessho, “Time-periodic magnetic field analysis with saturation and hysteresis characteristics by harmonic balance finite element method”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, pp.995–998, Mars 1990.
- [Luomi1986] J. Luomi, A. Niemenmaa, A. Arkkio, “On the use of effective reluctivities in magnetic field analysis of induction motors fed from a sinusoidal voltage source”, *Proc. of the International Conference On Electrical Machines*, ICEM 86, pp.706-709, Munich, Germany, September 8-10, 1986.
- [Magnetics1999] Magnetics, “Magnetic Cores for Switching Power Supplies”, PS-01 11G, <http://www.mag-inc.com/pdf/ps-01.pdf>, Magnetics, a Division of Spang & Company, P.O Box 391, Butler, PA 16003, USA, [www.mag-inc.com](http://www.mag-inc.com), 1999.
- [Mason1998] P. Mason, D. Nowe, K. Atallah, “Soft magnetic composites in active magnetic bearings”, *IEE Colloquium on New Magnetic Materials – Bonded Iron, Lamination Steels, Sintered Iron, Permanent Magnets* (Digest Nmo. 1998/259), pp.4/1-4/5, 1998.
- [Matagne1990] E. Matagne, “Macroscopic thermal conductivity of a bundle of conductors”, *Conference on Modelling and simulation of electrical machine and static converters, IMACS TC1'90*, pp.189-193, Nancy, France, September 1990.
- [Matsuo2000] Y. Matsuo, K. Ono, M. Kondoh, F. Nakao, “Controlling new die mechanisms for magnetic characteristics of super-large ferrite cores”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.3411-3414, Sep. 2000.
- [Meeker2003] D. Meeker, “User’s Manual, Finite Element Method Magnetics”, Version 3.3, May 24, 2003, <http://femm.berlios.de>

- [Mendiratta1995] S.K. Mendiratta, *Introdução ao Electromagnetismo*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 2<sup>a</sup> ed., 1995.
- [Moreau1998] O. Moreau, L. Popiel, J.L. Pages, “Proximity losses computation with a 2D complex permeability modelling”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, pp.3616-3619, Sep. 1998.
- [Nasar1984] S. A. Nasar, *Máquinas Eléctricas*, McGraw-Hill, Colecção Schaum, São Paulo, Brasil, 1984.
- [Ossart2000] F. Ossart, E. Hug, O. Hubert, C. Buvat, R. Billardon, “Effect of punching on electrical steels: experimental and numerical coupled analysis”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.3137-3140, Sep. 2000.
- [Ozisik1977] M. N. Ozisik, *Basic Heat Transfer*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Japan, 1977.
- [Paoli1998] G. Paoli, O. Biro, G. Buchgraber, “Complex representation in nonlinear time harmonic eddy current problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, pp.2625-2628, Sep. 1998.
- [Pascal2003] R. Pascal, P. Conraux, J.-M. Bergheau, “Coupling between finite elements, boundary elements for the numerical simulation of induction heating processes using a harmonic balance method”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.39, pp.1535-1538, May 2003.
- [Pereirinha1996a] P. G. Pereirinha, *Cálculo de Forças Electromagnéticas pelo Método do Trabalho Virtual, utilizando Elementos Finitos*, Tese de Mestrado, FCTUC, Coimbra, Portugal, 1996.
- [Pereirinha1996b] P. J. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Force Calculation on a E Core Actuator using the Virtual Work Principle and Derived from Non Linear Finite Element Potential Solutions”, *Proc. of the International Conference On Electrical Machines, ICEM'1996*, Vol. III, pp.46-50, Vigo, Spain, September 10-12, 1996.
- [Pereirinha2002] P.G. Pereirinha, C.L. Antunes, “Generic abacus and analytical model for eddy current loss calculations in steel lamination derived from finite element numerical results in 2D”, *Proc. of the 20<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC 2002*, pp.238, Perugia, Italy, June 16–19, 2002.
- [Pereirinha2003a] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Comparison of expressions for calculation of eddy current losses and finite element solutions in steel laminations”, *Actas do 8<sup>o</sup> Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, Vol. I, pp.1.119-1.124, Vilamoura, Portugal, 3-5 de Julho de 2003.

- [Pereirinha2003b] P.G. Pereirinha, J. Gyselinck, C. L. Antunes, “Study of the local eddy current loss density near the edges in steel laminations of finite width”, *Proc. of 14<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG 2003*, Vol. IV, pp.194-195, Saratoga Springs, New York USA, July 13 – 17, 2003.
- [Pereirinha2003c] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Chart and Expressions for Eddy Current Losses Calculation in Steel Lamination derived from Finite Element Numerical Results in 2D”, *Proc. of International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF2003*, Vol. I, pp.171-176, Maribor, Slovenia, September 18-20, 2003.
- [Pereirinha2004] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Equivalent thermal conductivity of insulating materials for high voltage bars in slots of electrical machines”, *Proc. 16th International Conference On Electrical Machines, ICEM’2004*, on CD-ROM, Cracow, Poland, September 5-8, 2004.
- [Persson1995] M. Persson, P. Jansson, “Advances in powder metallurgy soft magnetic composite materials for electrical machines”, *IEE Colloquium on Impact of New Materials on Design*, pp.4/1-4/6, 1995.
- [Pinto1990] J. A. D. Pinto, C. L. Antunes, A. P. Coimbra, “Análise térmica em regime transitório de um motor de indução”, *Actas das Primeiras Jornadas Hispano-Lusas de Ingenieria Electrica*, vol.1, pp.399-407, Vigo, España, 4-6 Julho de 1990.
- [Pinto1991] J. A. D. Pinto, C. L. Antunes, A. P. Coimbra, “Análise do efeito térmico das correntes induzidas em regime estacionário de um motor de indução em carga”, *Actas das Segundas Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica*, vol.2, pp.152-158, Coimbra, Portugal, 3-5 de Julho de 1991.
- [Pinto1992] J. A. D. Pinto, *Análise Termográfica Assistida por Computador de Dispositivos Electromagnéticos*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 1992.
- [Pinto1993] J. A. D. Pinto, C. L. Antunes, A. P. Coimbra, “CADdyTERM 2D – Um pacote de “software” para simulação e análise térmica em regime permanente e transitório de dispositivos electromagnéticos”, *Electricidade*, nº 301, Jun. 1993, pp.265-269, Portugal, 1993.
- [Pinto1994a] J. A. D. Pinto, C. L. Antunes, A. P. Coimbra, “Influence of the thermal dependency of the windings resistivity in the solution of heat transfer problem using the finite element approach”, *Proc. of the International Conference on Electrical Machines, ICEM94*, pp.448-451, Paris, France, Sept. 1994.
- [Pinto1994b] J. A. D. Pinto, C. F. L. Antunes, A. P. B. Coimbra, “Transient heating and cooling analysis in an electromagnetic device”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, pp.3339 -3342, Sept. 1994.

- [Pinto1998] J. A. D. Pinto, A. P. B. Coimbra, P. G. Pereirinha, C. F. L. Antunes, "Thermal performance of a current transformer using the finite element approach", *Proc. of the International Conference On Electrical Machines, ICEM 1998*, pp.561-564, Istanbul, Turkey, September 02-04, 1998.
- [Pinto2001] J. A. D. Pinto, P. G. Pereirinha, A. P. B. Coimbra, C. F. L. Antunes, "Steady-state finite element thermal simulation of a linear induction motor", *Actas das 7<sup>as</sup> Jornadas Hispano Lusias de Ingenieria Eléctrica*, pp.89-94, Madrid, 3-6 Julho, 2001.
- [Plonsey1961] R. Plonsey, R.E. Collin, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, USA, 1961.
- [PMG1988] Magnetic Materials Producers Association, *Permanent magnet guidelines*, MMPA PMG-88, Chicago, USA, 1998.
- [Pulnikov2002] A. Pulnikov, P. Baudouin, L. Dupre, M. De Wulf, Y. Houbaert, J. Melkebeek, "Investigation of local magnetic effects in rotating electrical machines", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Modeling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems, Electrimacs 2002*, Montréal, Canada, August 18-21, 2002.
- [Pulnikov2002b] A. Pulnikov, P. Baudouin, J. Melkebeek, "Production stresses in the stator laminations of an induction motor", *Proc. of the International Conference on Electrical Machines, ICEM 2002*, paper 535 (in CD ROM), Bruges, Belgium, August 25-28, 2002.
- [Purcell1970] E. M. Purcell, *Curso de Física de Berkeley (Vol. 2) - Electricidade e Magnetismo*, Editora Edgard Blucher, S.Paulo, Brasil, 1970.
- [Ras1977] E. Ras, *Transformadores de Potência, de Medida e de Protecção*, Almedina, Coimbra, Portugal, 1977.
- [Reece2000] A.B.J. Reece, T.W. Preston, *Finite Element Methods in Electrical Power Engineering*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2000.
- [Ren1990] Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, A. Bossavit, J.C. Verite, "A new hybrid model using electric field formulation for 3-D eddy current problems", *IEEE Trans. Magn.*, Vol.26, pp.470-473, Jan. 1990.
- [Ren2000] Z. Ren, A. Razek, "Comparison of some 3D eddy current formulations in dual systems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.751-755, Jul. 2000.
- [Robert1988] P. Robert, *Electrical and magnetic properties of materials*, Artech House cop., Norwood, MA, USA, 1988.
- [Rohsenow1985] W. M. Rohsenow (Ed. by), *Handbook Of Heat Transfer Fundamentals*, 2. ed, McGraw-Hill, New York, USA, 1985.
- [Sadowski2000] N. Sadowski, M. Lajoie-Mazenc, J.P.A. Bastos, M.V. Ferreira da Luz, P. Kuo-Peng, "Evaluation and analysis of iron losses in electrical machines using the rain-flow method", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.1923-1926, Jul. 2000.

- [Salon1995] S.J. Salon, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1995.
- [Salon1999] S. Salon, M.V.K. Chari, *Numerical Methods in Electromagnetism*, Academic Press, San Diego-USA / London-UK, 1999.
- [Saotome1997] H. Saotome, Y. Sakaki, “Iron loss analysis of Mn-Zn ferrite cores”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, pp.728 -734, Jan. 1997.
- [Say1976] M. G. Say, *The Performance and Design of Alternating Current Machines: Transformers, Three-Phase Induction Motors and Synchronous Machines*, 3<sup>rd</sup> ed., Pitman Publ., London, UK, 1974.
- [Semail1998] É. Semail, *Physique du génie électrique*, Lavoisier, Paris, 1998.
- [Silvester1990] P.P. Silvester, R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2<sup>nd</sup> ed., 1990.
- [Silvester1993] P. P. Silvester, *Data Structures for Engineering Software*, Computational Mechanics Publ., Southampton, 1993.
- [Silvester1996] P.P. Silvester, R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3<sup>rd</sup> ed., 1996.
- [Smith1998] W. Smith, *Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*, McGraw-Hill, Lisboa, Portugal, 1998.
- [SollacMéditerranée2001a] Contactos entre Março e Novembro de 2001, sobre chapas magnéticas e suas propriedades, por carta e *e-mail* com Jean-Paul Gras, Sollac Méditerranée, Groupe USINOR, Usine de St.-Chély-d’Apcher, Route du Fau de Peyre, 48200, Saint-Chély-d’Apcher, França.
- [SollacMéditerranée2001b] Curvas da chapa ferromagnética M 400-50A, Sollac Méditerranée, Groupe USINOR, Usine de St.-Chély-d’Apcher, Route du Fau de Peyre, 48200, Saint-Chély-d’Apcher, França.
- [Staton2001] D. A. Staton, S.J. Pickering, D. Lampard, “Recent Advancement in the Thermal Design of Electric Motors”, *SMMA 2001 Fall Technical Conference “Emerging Technologies for the Electric Motion Industry”*, Raleigh-Durham, North Carolina, USA, Oct. 3-5, 2001.
- [Steingroever1997a] E. Steingroever, G. Ross, *Magnetic Measuring Techniques*, Magnet-Physik, Köln, Germany, 1997.
- [Steingroever1997b] E. Steingroever, G. Ross, *Magnetization, demagnetization and calibration of permanent magnet systems*, Magnet-Physik, Köln, Germany, 1997.
- [Stoll1974] R.L. Stoll, *The Analysis of Eddy Currents*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1974.
- [Stranges2000] N. Stranges, R.D. Findlay, “Measurement of rotational iron losses in electrical sheet”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, pp.3457-3459, Sep. 2000.

- [Suplee2004] C. Suplee, “Sol”, *National Geographic*, Edição Portuguesa, nº 40, Junho de 2004, Portugal, 2004.
- [TEAM13] “Team Problem 13 – 3-D non-linear magnetostatic model”, TEAM Workshop, Problem 13, <http://ics.ec-lyon.fr/team.html>
- [Torre2002] E. D. Torre, I. Mayergoyz, G. Bertotti, N. Takahashi, “Numerical modelling of hysteresis and micromagnetics”, Panel Session of the 20<sup>th</sup> *Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC2002*, Perugia, Italy, June 16-19, 2002.
- [UGINE] UGINE – Acers de Chantillon et Gueugnon, FeV 400-50 HA, Dados de medições (informação reservada).
- [UGINE1994] UGINE, FeV 470-P-50, Revista/Catálogo de Fabricante, Usinor Aciers Electriques, Immeuble Ile-de-France 4, place de la Pyramide Cedex 33, 92070 PARIS-LA-DEFENSE, FRANÇA, 1993 ou 1994.
- [van Welij1985] J. van Welij, “Calculation of eddy currents in terms of H on hexahedra”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.21, pp.2239-2241, Nov 1985.
- [Vassent1989] E. Vassent, G. Meunier, J.C. Sabonnadier, “Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.25, pp.3064-3066, Jul. 1989.
- [Villate1999] J. E. Villate, *Electromagnetismo*, McGraw-Hill, Lisboa, 1999.
- [Yamada1988] S. Yamada, K. Bessho, “Harmonic field calculation by the combination of finite element analysis and harmonic balance method”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, pp.2588–2590, Nov. 1988.
- [Yokogava1986] *Instruction manual for Epstein iron loss test set*, Yokogava Electric Corporation, Tokyo, Japan, 1986.
- [Yu1995] H.T. Yu, K.R. Shao, K.D. Zhou, J.D. Lavers, “H method for solving 3D eddy current problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol.31, pp.3518-3520, Nov 1995.
- [Zhu1998] Jian Guo Zhu, V.S. Ramsden, “Improved formulations for rotational core losses in rotating electrical machines”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, pp.2234 -2242, Jul. 1998.

## 14.1 Referências de trabalho apresentado e publicado em Conferências e Revista Internacionais

Do trabalho apresentado nesta dissertação, e também da colaboração com o Prof. Johan Gyselinck e o Eng. Alfredo de Blas, tal como foi sendo mencionado, resultaram as seguintes publicações, que foram publicadas em actas de Conferências e Revista Internacionais com

arbitragem. Referem-se de seguida por ordem cronológica do trabalho realizado, o que nem sempre corresponde à ordem de apresentação ao longo da dissertação. Refira-se também que alguns dos trabalhos foram realizados em paralelo, i.e., simultaneamente.

- [Pinto2001] J. A. D. Pinto, P. G. Pereirinha, A. P. B. Coimbra, C. F. L. Antunes, “Steady-state finite element thermal simulation of a linear induction motor”, *Actas das 7<sup>as</sup> Jornadas Hispano Lusas de Ingeniería Eléctrica*, pp.89-94, Madrid, España, 3-6 Julio de 2001.
- [Antunes2002] C. L. Antunes, P. G. Pereirinha, “Finite element computation of eddy current losses in steel lamination considering the skin effect, the lamination width and thickness”, *Proc. of the International Conference on Electrical Machines, ICEM 2002*, paper 159 (in CD ROM), Bruges, Belgium, August 25-28, 2002.
- [Pereirinha2002]] P.G. Pereirinha, C.L. Antunes, “Generic abacus and analytical model for eddy current loss calculations in steel lamination derived from finite element numerical results in 2D”, *Proc. of the 20<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, CEFC 2002*, pp.238, Perugia, Italy, June 16–19, 2002.
- [Pereirinha2003a] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Comparison of expressions for calculation of eddy current losses and finite element solutions in steel laminations”, *Actas do 8<sup>o</sup> Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, Vol. I, pp.1.119-1.124, Vilamoura, Portugal, 3-5 de Julho de 2003.
- [Pereirinha2003c] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Chart and Expressions for Eddy Current Losses Calculation in Steel Lamination derived from Finite Element Numerical Results in 2D”, *Proc. of International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, ISEF2003*, Vol. I, pp.171-176, Maribor, Slovenia, September 18-20, 2003.
- Este artigo foi seleccionado para publicação numa das próximas edições da revista COMPEL – *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*.
- [Gyselinck2003a] J. Gyselinck, P. Pereirinha, C. Antunes, W. Legros, “Harmonic balance finite element modelling of eddy currents in steel laminations”, *Actas do 8<sup>o</sup> Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica, 8CLEEE*, Vol. I, pp.1.89-1.94, Vilamoura, Algarve, Portugal, 3-5 de Julho de 2003.
- [Pereirinha2003b] P.G. Pereirinha, J. Gyselinck, C. L. Antunes, “Study of the local eddy current loss density near the edges in steel laminations of finite width”, *Proc. of 14<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG 2003*, Vol. IV, pp.194-195, Saratoga Springs, New York USA, July 13 – 17, 2003.

- [Blas2004a] A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Desarrollo de un modelo de histéresis dinámico tipo Preisach y su aplicación al cálculo de máquinas eléctricas”, *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, in CD-ROM Lisboa, Portugal, 31 de Maio – 2 de Junho de 2004.
- [Pereirinha2004] P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Equivalent thermal conductivity of insulating materials for high voltage bars in slots of electrical machines”, *Proc. 16th International Conference On Electrical Machines, ICEM'2004*, on CD-ROM, Cracow, Poland, September 5-8, 2004.
- [Blas2004b] A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, P. G. Pereirinha, C. L. Antunes, “Determination of the hysteresis core losses on a single-phase transformer by using a dynamic Preisach-type hysteresis model”, *16<sup>th</sup> International Conference On Electrical Machines – ICEM'2004*, in CD-ROM, Cracow, Poland, September 5-8, 2004.

# **ANEXOS**



## ANEXO 1 – ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1.	Dipolo magnético elementar: a) circuito com corrente $I$ criando um campo magnético no ponto $P(R, \theta, \phi)$ ; b) o dipolo magnético e o seu momento $\mathbf{m}$ .	14
Fig. 2.2.	Modelo dipolar magnético do átomo: a) orbital do electrão e momento dipolar magnético; b) indução magnética devida ao dipolo magnético; c) modelo de íman permanente equivalente.	16
Fig. 2.3.	Modelo para a magnetização em materiais: a) dipolos não orientados; b) a orientação dos dipolos produz magnetização; c) modelo de magnetização com ímanes permanentes.	17
Fig. 2.4.	a) Íman permanente; b) corte do íman mostrando os dipolos. Para magnetização constante, todas as correntes internas se cancelam; c) efeito resultante: densidade de corrente superficial.	19
Fig. 2.5.	Alinhamento dos momentos dipolares magnéticos quando submetidos a um campo magnético exterior.	20
Fig. 2.6.	a) Repulsão de um material diamagnético por um campo magnético devido à magnetização interna oposta; b) modelo com ímanes permanentes para a).	23
Fig. 2.7.	O oxigénio é paramagnético, sendo por isso atraído pelos pólos de um íman. O oxigénio líquido derramado, é mantido entre dois pólos magnéticos [Fishbane1996] pp.875.	25
Fig. 2.8.	Microfotografia de domínios magnéticos numa amostra de ferro com 3% de silício [Fishbane1996] pp.871.	26
Fig. 2.9.	Modelo de domínios para a magnetização em materiais ferromagnéticos: a) domínios não orientados; b) o campo exterior faz rodar os dipolos para se alinharem com ele e os domínios mais alinhados crescem à custa dos menos alinhados; c) os domínios alinhados ocupam todo (ou quase todo) o volume.	27
Fig. 2.10.	a) Vista explodida de um volume de material ferromagnético; b) parede de domínio (“ <i>Bloch wall</i> ”) entre domínios ferromagnéticos [PMG1988] pp.4.	28
Fig. 2.11.	a) Curva de magnetização (curva $B(H)$ ) para o ferro; b) variação da permeabilidade magnética $\mu$ ao longo da curva de magnetização inicial, $OM_I$ .	29
Fig. 2.12.	Crescimento e rotação dos domínios magnéticos, quando um material ferromagnético desmagnetizado é magnetizado até à saturação [Smith1998] pp.671.	29
Fig. 2.13.	Curvas $B(H)$ de alguns materiais magnéticos macios [Nasar1984] pp.211.	33
Fig. 2.14.	Curvas $B(H)$ no segundo quadrante para ímanes permanentes típicos de Nd-Fe-B, Sm-Co e ferrite. As linhas a ponteadas são curvas de produto $BH$ constante [Coey1996] pp.8.	34
Fig. 2.15.	Microfotografia da superfície de um “disco duro” de computador com informação gravada sob a forma de sinais digitais em materiais magnéticos duros [Fishbane1996] pp.873.	36

Fig. 2.16.	a) Dois domínios com orientação diferentes, separados por uma parede de Bloch; b) a aplicação de um campo exterior $\mathbf{H}$ , variável no tempo, faz deslocar a parede dos domínios; c) correntes induzidas $\mathbf{I}$ resultantes da deslocação da parede do domínio [Semail1998] pp.92.	38
Fig. 2.17.	a) Chapa ferromagnética empilhada [Semail1998] pp.93.	39
Fig. 3.1.	Chapa ferromagnética com espessura $d$ , largura $w$ e comprimento $l$ , sujeita a um campo magnético variável $\mathbf{H}$ e correntes induzidas resultantes.	45
Fig. 3.2.	Fasores e correntes induzidas numa chapa ferromagnética laminada sujeita a um campo magnético sinusoidal, $\tilde{H}_z$ .	54
Fig. 3.3.	Curvas de $F_{sk}$ e $\mu_e/\mu$ em função de $d/\delta$ .	61
Fig. 3.4.	Consequências do efeito pelicular em $B_{max}$ , $H_z$ e $J_{max}$ numa chapa com espessura $d$ .	62
Fig. 3.5.	Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas diversas expressões analíticas e por $P_{BI}$ .	64
Fig. 3.6.	Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas expressões analíticas e por $P_{BI}$ (ampliação).	64
Fig. 3.7.	Quocientes entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas expressões analíticas para $H_s$ constante ( $P_{HI}$ como referência. Ampliação).	67
Fig. 4.1.	Semi-modelo a 2D com indicação de correntes induzidas.	73
Fig. 4.2.	Curva de magnetização para FeV 400-50HA [UGINE].	74
Fig. 4.3.	Malha de elementos finitos para o modelo total, para $w=6$ mm e $d=0,35$ mm, 597 nodos, 1072 elementos. Ficheiro PATB1000.pos1.	75
Fig. 4.4.	Malha de elementos finitos para o modelo total, para $w=2$ mm e $d=1$ mm, 597 nodos, 1072 elementos. PDTC50.pos.	76
Fig. 4.5.	Malha de elementos finitos para semi-modelo, $w=6$ mm e $d=0,35$ mm (modelado 3 mm por 0,35 mm), 598 nodos, 1112 elementos. PATBM5K.pos.	76
Fig. 4.6.	Malha de elementos finitos para semi-modelo, $w=4$ mm e $d=0,65$ mm (modelados 2 mm por 0,65 mm), 598 nodos, 1112 elementos. PCTAM7k5.pos.	77
Fig. 4.7.	Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 1D para a malha correspondente ao modelo total, $w=6$ mm e $d=0,35$ mm. PAHB1000.pos.	77
Fig. 4.8.	Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 2D para a malha correspondente ao modelo total, $w=6$ mm e $d=0,35$ mm. PATB1000.pos.	78
Fig. 4.9.	Condições de fronteira de Dirichlet para o problema 2D para a malha correspondente ao semi-modelo, $w=6$ mm e $d=0,35$ mm. PATBM5K.pos.	78
Fig. 4.10.	Equipotenciais da componente real de $\tilde{H}_z$ , $H_R$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm, 50 Hz). Valores variam entre 1501,61 A/m e 1500,86 A/m. PDTC50.pos.	79

Fig. 4.11.	Equipotenciais da componente imaginária de $\tilde{H}_z$ , $H_I$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm, 50 Hz). Valores variam entre 78,53 A/m e -28,89 A/m. PDTC50.pos.	79
Fig. 4.12.	Vectores da componente real da densidade de corrente induzida, $J_R$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm). Os valores variam entre 6,240e+3 e 6,040e+1 A/m <sup>2</sup> . PDTC50.pos.	80
Fig. 4.13.	Vectores da componente imaginária da densidade de corrente induzida, $J_I$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm). Os valores variam entre 4,094636e+5 e 4,953e+4 A/m <sup>2</sup> . PDTC50.pos.	80
Fig. 4.14.	Distribuição de $J_{\max}$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm). Os valores variam entre 4,094635e+5 A/m <sup>2</sup> e 4,953e+4 A/m <sup>2</sup> . PDTC50.pos.	81
Fig. 4.15.	Distribuição de Jmaxlin: conversão de $J_{\max}$ , grandeza constante em cada elemento finito, para grandeza linear (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm). PDTC50.pos.	82
Fig. 4.16.	Distribuição de $ \tilde{H}_z $ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm): a) para 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.	82
Fig. 4.17.	Distribuição da fase de $\tilde{H}_z$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm): a) para 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.	83
Fig. 4.18.	Gráfico da variação da fase de $\tilde{H}_z$ para 10 kHz (linha amarela), ao longo da linha indicada a castanho (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm). PDTCM10k.pos.	83
Fig. 4.19.	Vectores da componente imaginária da densidade de corrente induzida $J_I$ (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm): a) 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.	84
Fig. 4.20.	Distribuição de Jmaxlin (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm): a) 50 Hz, PDTC50.pos; b) 10 kHz, PDTCM10k.pos.	84
Fig. 4.21.	Gráficos de Jmaxlin ao longo das linhas A, B e C indicadas na Fig. 4.20b (problema 2D, modelo total, $w=2$ mm e $d=1$ mm): a) 50 Hz ( $J_{\maxlin_{\max}}=4,1e+5$ A/m <sup>2</sup> ), PDTC50.pos; b) 10 kHz ( $J_{\maxlin_{\max}}=9,4e+5$ A/m <sup>2</sup> ), PDTCM10k.pos.	85
Fig. 4.22.	$P_J$ numéricas a 1D: a) em W/m <sup>3</sup> ; b) em W/kg.	89
Fig. 4.23.	Erros no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas a 1D.	97
Fig. 4.24.	Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par $d \times w$ , pondo em evidência a variação da espessura $d$ para cada largura $w$ (na mesma cor).	101
Fig. 4.25.	Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura $w$ para cada espessura $d$ (na mesma cor).	101
Fig. 4.26.	Densidade de perdas por correntes induzidas (problema 2D) em função da frequência, para cada par $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura $w$ para cada espessura $d$ . Escala logarítmica.	102

Fig. 4.27.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D em função da frequência, para cada par $d \times w$ , pondo em evidência a variação da espessura $d$ para cada largura $w$ (mesma cor).	104
Fig. 4.28.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D em função da frequência, para cada par $d \times w$ , pondo em evidência a variação da largura $w$ para cada espessura $d$ (mesma cor).	104
Fig. 4.29.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D em função de $w/d$ e $d/\delta$ .	106
Fig. 5.1.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D em função de $w/d$ para $d/\delta$ entre 0,05 e 8.	112
Fig. 5.2.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D e aproximação polinomial de 3ª ordem para $d/\delta < 3$ .	113
Fig. 5.3.	$P_J/P_{Bl}$ para o problema 2D e aproximação polinomial de 3ª ordem para $d/\delta \geq 3$ .	113
Fig. 5.4.	Valores dos coeficientes $C_3, C_2, C_1$ e $C_0$ para $d/\delta < 3$ .	115
Fig. 5.5.	Valores dos coeficientes $C_3, C_2, C_1$ e $C_0$ para $d/\delta \geq 3$ .	115
Fig. 5.6.	Comparação de $P_J/P_{Bl}$ obtido pela análise por EF a 2D e pelo modelo analítico aproximado.	116
Fig. 5.7.	“Fronteira vertical” onde se aplica a condição de fronteira de Dirichlet para o problema 2D, para 2 modelos com $w/d$ diferentes: a) $w/d$ grande; b) $w/d$ pequeno.	119
Fig. 5.8.	$B_{max}^a$ efectivamente imposto no problema 2D, para estudo até 10 kHz [Antunes2002].	120
Fig. 5.9.	$B_{max}^a$ efectivamente imposto no problema 2D, para estudo com $d/\delta$ entre 0,05 e 8.	121
Fig. 5.10.	Valores do factor de correcção $F_{cor}$ para o problema 2D.	122
Fig. 5.11.	Valores do factor de correcção $F_{cor}$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ (0,05-8) e $w/d$ .	123
Fig. 5.12.	$P_{Jcor}/P_{ref}$ em termos de $d/\delta$ (até 10 kHz) [Antunes2002].	124
Fig. 5.13.	$P_{Jcor}/P_{ref}$ em termos da frequência, até 10 kHz [Antunes2002].	125
Fig. 5.14.	$P_{Jcor}/P_{Bl}$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ (0,05-8) e $w/d$ .	125
Fig. 6.1.	Malha de elementos finitos para semi-modelo (problema 1D), para $w=6$ mm e $d=0,35$ mm, 1164 nodos, 2184 elementos. PA5BM.PRE.	130
Fig. 6.2.	Erro no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas a 1D, $P_{J1D}$ .	131
Fig. 6.3.	Gráfico genérico de $P_J/P_{Bl}$ para $w/d=2-17,14$ e $d/\delta=0,05-30$ .	132
Fig. 6.4.	Comparação entre os nossos resultados numéricos e os de Gyselinck <i>et al</i> [Gyselinck1999].	133
Fig. 6.5.	Equipotenciais da componente imaginária de $\tilde{H}_z$ , $H_I$ ( $w=2$ mm e $d=1$ mm, 50 Hz) e linhas de simetria no problema 2D: condições de fronteira de Neumann no eixo dos $x$ e $y$ .	135
Fig. 6.6.	Diferenças entre $P_J$ , $F_{cor}$ , $B_{max}^a$ e $P_{Jcor}$ calculados com malhas para $1/4$ e $1/2$ do problema.	136

Fig. 6.7.	Aproximação por rectas de $P_j/P_{Bl}$ : original (linhas contínuas) e do modelo analítico proposto (linhas a tracejado).	138
Fig. 6.8.	Valores dos coeficientes numéricos $m^*_{num}$ e analíticos $m^*$ .	138
Fig. 6.9.	Valores dos coeficientes numéricos $b^*_{num}$ e analíticos $b^*$ .	139
Fig. 6.10.	Resultados obtidos por elementos finitos (linhas contínuas) para $P_j/P_{Bl}$ e pelo modelo analítico proposto (linhas a tracejado).	141
Fig. 6.11.	Diferença entre $P_j/P_{Bl}$ derivado da análise por FE e obtido pelo modelo analítico.	141
Fig. 7.1.	Curva de magnetização para o material TTJG13: a) início da saturação; b) saturação muito acentuada.	145
Fig. 7.2.	Variação de $B$ , $H$ e $v$ , para $B$ sinusoidal e um período, como função do $B_{max}$ .	147
Fig. 7.3.	Gráficos normalizados: $H/H_{max}$ e $v/v_{max}$ para $B_{max}$ de 1 T a 2,25 T.	147
Fig. 7.4.	Início do ficheiro <b>MAGNETIZ.BH</b> , contendo, entre outros, uma curva $B-H$ grosseira para um material ferro (genérico).	155
Fig. 7.5.	Curva $B-H$ original para o ferro considerado.	156
Fig. 7.6.	$H(\omega t, B_{max})$ para $B$ sinusoidal, usando $v_{B3}$ , com $N_{int}=5$ e $P_{int}=6$ .	159
Fig. 7.7.	Para $B$ sinusoidal, usando $v_{B3}$ , com $N_{int}=5$ . a) $v(\omega t, B_{max})$ e $v_{eq}$ resultantes; b) $H(\omega t, B_{max})$ e $H_{eq}$ resultantes.	159
Fig. 7.8.	Pontos da curva $B-H$ original para o ferro e curva $B-H$ eficaz, para $v_{B3}$ , com $N_{int}=5$ .	160
Fig. 7.9.	Curva $B-H$ original para o ferro e curva $B-H$ eficaz, para $v_{B3}$ , com $N_{int}=5$ .	160
Fig. 7.10.	Valores de $H$ eficazes equivalentes para $B_{max}=1$ T, em função do número de intervalos de integração, $N_{int}$ .	162
Fig. 7.11.	Valores de $H$ eficazes equivalentes para $B_{max}=1,2$ T, em função do número de intervalos de integração, $N_{int}$ .	162
Fig. 7.12.	Zonas iniciais da curva $B-H$ original para o material do “TEAM Workshop 13”, “TTJG13”, e curva $B-H$ eficaz, “TTJG13EqRtav”, supondo $B$ sinusoidal e utilizando $v_{B3}$ .	163
Fig. 7.13.	Curva $B-H$ original para o material do “TEAM Workshop 13”, “TTJG13”, e curva $B-H$ eficaz, “TTJG13EqRtav”, supondo $B$ sinusoidal e utilizando $v_{B3}$ .	163
Fig. 7.14.	Ficheiro *.pss, com os valores de “ Bmax eqH” para modelos não lineares de correntes induzidas definidos em termos de $\tilde{H}$ , para verificação da correcção do processador e CADyPOS.	168
Fig. 7.15.	Pseudo-código do EDDyNLIN batch.	169
Fig. 7.16.	Ficheiro CMAG03U2.pee para o CADyEXE: faz entrada de dados em modo batch, para preparação dos ficheiros *.pro a processar para o problema 1D.	173
Fig. 7.17.	Extracto de um dos ficheiros resultantes, PUE.pro.	174
Fig. 7.18.	Ficheiro CMAG03U2.peo com lista com a lista dos ficheiros *.pro a processar, as respectivas condições e o nome dos ficheiros *.pos de saída (para problema 1D).	175

Fig. 7.19.	Ficheiro CMAG03U2.pso com os resultados do processamento dos quatro modelos indicados em CMAG03U2.peo, Fig. 7.18, para 1D.	176
Fig. 7.20.	Ficheiro CMAG03U2.pss com os dados do pós-processamento dos quatro modelos considerados para o problema 1D.	178
Fig. 7.21.	Ficheiro CMAG03F1.pso com resultados do processamento para 2D.	179
Fig. 7.22.	Ficheiro CMAG03F1.pss com os dados do pós-processamento dos quatro modelos considerados para o problema 2D.	180
Fig. 7.23.	Zona inicial das curvas $B-H$ eficazes equivalentes para a curva $B-H$ original “TTJG13”.	185
Fig. 7.24.	Curvas $B-H$ eficazes equivalentes para a curva $B-H$ original “TTJG13”.	185
Fig. 7.25.	a) Relutividades em função de $B$ para as curvas $B-H$ original e eficazes; b) ampliação da escala vertical.	186
Fig. 7.26.	a) Relutividades em função de $H$ , para as curvas $B-H$ original e eficazes. b) zona inicial.	186
Fig. 7.27.	Relação entre as perdas por correntes induzidas para 1D calculadas por curvas $B-H$ equivalentes e por <i>time-stepping</i> , para 50 Hz.	188
Fig. 7.28.	Relação entre as perdas por correntes induzidas para 1D calculadas por curvas $B-H$ equivalentes e por <i>time-stepping</i> , para 1000 Hz.	188
Fig. 7.29.	Variação no tempo de $B^a$ para TTJG13.	191
Fig. 7.30.	Variação de $H_s$ para impor $B^a$ para $B_{max}^a = 1,75$ T para TTJG13.	191
Fig. 7.31.	Curva $B^a-H_s$ resultante da análise no domínio do tempo.	192
Fig. 7.32.	Valor instantâneo da densidade de perdas.	192
Fig. 8.1.	Princípio da aplicação de técnicas de homogeneização a um pacote de chapas ferromagnéticas: a) “pacote” de chapas empilhadas; b) substituição por bloco maciço equivalente.	196
Fig. 8.2.	$\tilde{H}_z$ , $\tilde{H}_s$ e correntes induzidas para $\frac{1}{4}$ de uma chapa ferromagnética, com indicação da origem de <i>dte</i> (distância à fronteira do modelo, “ <i>distance to edge</i> ”).	198
Fig. 8.3.	$\tilde{H}_z$ , $\tilde{H}_s$ e correntes induzidas para $\frac{1}{4}$ de uma chapa ferromagnética, com indicação da origem de <i>dte</i> (distância à fronteira do modelo, “ <i>distance to edge</i> ”).	198
Fig. 8.4.	Superfície de integração considerada anteriormente para o cálculo da densidade de perdas por correntes induzidas, $P_J$ .	201
Fig. 8.5.	Percursos de integração para a densidade de perdas por correntes induzidas, $P_{Jd}$ .	201
Fig. 8.6.	Ficheiro CMG032KA.pso com resultados do processamento para $w/d=12$ e $B_{max}^a = 1$ T.	204
Fig. 8.7.	Ficheiro de comandos COMCMGKA.txt para pós-processamento dos modelos indicados na Fig. 8.6.	205

Fig. 8.8.	Ficheiro CMG032KA.pss com alguns resultados do pós-processamento com $w/d=12$ e para $B_{\max}^a = 1$ T.	206
Fig. 8.9.	Pós-processamento do modelo PKB42C.pos ( $w/d=12$ , $f=42,441300$ Hz): a) em modo <i>batch</i> a calcular os integrais de linha da equação (8.2); b) malha, 1386 n./2591 e.; c) níveis de cores de $J_{\max}$ ; d) níveis de cores de $J_{\max}^2$ ; e) localização dos 28 integrais de linha.	207
Fig. 8.10.	Resultados para $B_{\max}^a$ constante, igual a 1 T. a) $w/d=3$ ; b) $w/d=12$ .	208
Fig. 8.11.	Ficheiro CMG032K0.pso relativo ao processamento para $w/d=12$ e $H_s=150$ A/m.	209
Fig. 8.12.	Ficheiro de comandos COMCMGK0.txt para pós-processamento dos modelos indicados na Fig. 8.11.	210
Fig. 8.13.	Ficheiro CMG032K0.pss com resultados do pós-processamento ( $w/d=12$ e $H_s=150$ A/m).	211
Fig. 8.14.	$P_{Jd}/P_{HI}$ para $H_s=150$ A/m, constante. a) $w/d=3$ , com curvas para 10 valores de $d/\delta$ ; b) $w/d=3$ , para 4 valores de $d/\delta$ ; c) $w/d=6$ ; d) $w/d=12$ .	212
Fig. 8.15.	$P_{Jd}/P_{HI}$ para $H_s=150$ A/m, constante. a) $d/\delta=2$ ; b) $d/\delta=3$ ; c) $d/\delta=5$ ; d) $d/\delta=10$ .	213
Fig. 10.1.	Fluxograma do processador térmico original para VAX/VMS, para regime permanente e sem radiação, designado por “TP21GN_ALFAS”.	233
Fig. 10.2.	Motor de indução linear.	234
Fig. 10.3.	Motor de indução linear, para entreferro de 8 mm: a) malha de elementos finitos (1047 nodos, 2009 elementos finitos); b) zoom da malha.	235
Fig. 10.4.	Para entreferro de 8 mm e $I=1,25$ A nos enrolamentos do estator, zoom de: a) linhas isotérmicas espaçadas de 5 K; b) distribuição de temperaturas (“potencial”), em K, por níveis de cor.	235
Fig. 10.5.	Ficheiro <b>materiais.pro</b> com propriedades dos materiais, contendo também as perdas por efeito de Joule e por histerese para o problema em questão.	236
Fig. 10.6.	Ficheiro <b>densidades.pro</b> com as densidades de corrente nas bobinas e com $J=1$ A/mm <sup>2</sup> nos materiais onde se pretende introduzir as densidades de perdas térmicas calculadas no modelo magnetodinâmico.	238
Fig. 10.7.	Ficheiro <b>fluidos.pro</b> com o valor dos coeficientes de convecção e temperaturas dos fluidos.	239
Fig. 10.8.	Ficheiro <b>fronteira.pro</b> contendo os valores das condições de fronteira de Dirichlet a aplicar.	239
Fig. 10.9.	Exemplo de matriz de coeficientes [S] e respectivos vectores a guardar, [SV], [LEFT] e [ILINHA], tirando partido da esparsidade da matriz [S].	249
Fig. 10.10.	Exemplo de matriz de coeficientes [S <sub>11</sub> ] e respectivos vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA], tirando partido da esparsidade e simetria de [S <sub>11</sub> ].	252
Fig. 10.11.	Vector de coeficientes [S <sub>esp</sub> ], [jrow] e [jcol] para a matriz [S <sub>11</sub> ] da Fig. 10.10.	252

Fig. 10.12.	Fluxograma do processador térmico para PC/ <i>Windows</i> , para regime permanente e sem radiação, tirando partido directamente da esparsidade e simetria, “ <b>CARTyTERB</b> ”.	254
Fig. 10.13.	Malha para os modelos tt4 (sem renumerar) e tt4r (nodos renumerados): a) malha para motor de indução linear (semi-modelo) com 4102 nodos, 8036 elementos e 540 lados de elementos finitos com convecção; b) zoom na zona do motor.	256
Fig. 10.14.	Modelo tt9r: malha para motor de indução linear (semi-modelo) com 9971 nodos, 19744 elementos e 1080 lados de elementos finitos com convecção.	257
Fig. 10.15.	Malhas para motor de indução linear (semi-modelos): a) modelo tt16r: 16239 nodos, 32144 elementos e 1080 lados com convecção; b) modelo tt19r 19971 nodos, 39502 elementos e 1080 lados com convecção.	257
Fig. 10.16.	Resultados do processamento dos cinco casos com renumeração de nodos das malhas do motor de indução linear, com os 4 processadores: a) tempos de processamento; b) memória efectivamente usada.	259
Fig. 10.17.	Evolução do número de coeficientes a armazenar: a) em [SV]; b) em [ $S_{esp}$ ].	259
Fig. 10.18.	Pontos onde foram comparadas as temperaturas calculadas pelo novo processador com as do problema original (as coordenadas indicadas no canto inferior esquerdo são do ponto P3).	260
Fig. 11.1.	a) Barra de alternador com 9×2 condutores envolvidos por vários isolantes; b) malha de elementos finitos original (2035 nodos/ 3920 elementos) para ¼ da barra numa ranhura da máquina.	267
Fig. 11.2.	a) Temperatura da barra original; b) distribuição do vector fluxo de calor $\mathbf{F}$ .	269
Fig. 11.3.	a) Linhas de integração para a barra; b) posição das linhas 1 a 3 em relação à malha de elementos finitos original.	271
Fig. 11.4.	Modelos com a mesma distribuição de cobre, “Igual”: a) malha “Fina” (2035 nodos/ 3920 elementos); b) malha “Grosseira” (33 nodos/49 elementos).	273
Fig. 11.5.	Modelos com distribuição de cobre diferente da barra original, concentrado, “Conc.”: a) malha “Fina” (1089 nodos/ 2048 elementos); b) malha “Grosseira” (9 nodos/8 elementos).	273
Fig. 11.6.	Aumento da temperatura máxima, $\Delta T$ , para as diferentes malhas em função da condutividade térmica, $k$ .	275
Fig. 11.7.	Distribuição da temperatura para a mesma distribuição de cobre, “Igual”: a) malha “Fina” (2035 nodos/ 3920 elementos), $k_e = 0,254090$ W/(m·K); b) malha “Grosseira” (33 nodos/49 elementos), $k_e = 0,237946$ W/(m·K).	277
Fig. 11.8.	Distribuição da temperatura para distribuição de cobre diferente da barra original, concentrado “Conc.”: a) malha “Fina” (1089 nodos/ 2048 elementos), $k_e = 0,343945$ W/(m·K); b) malha “Grosseira” (9 nodos/8 elementos), $k_e = 0,299282$ W/(m·K).	277
Fig. 11.9.	Distribuição da temperatura para distribuição de cobre concentrado e igual com malhas ligeiramente menos grosseiras, “Grosseira2”: a) “Conc.” (10 nodos/ 10 elementos), $k_e = 0,319620$ ; b) “Igual” (35 nodos/53 elementos), $k_e = 0,241042$ .	279

Fig. 11.10.	Posição das linhas de integração 1 a 3 em relação às malhas de elementos finitos para as barras equivalentes “Grosseira”: a) concentrado, “Conc.”; b) mesma distribuição de cobre, “Igual”.	282
Fig. 11.11.	Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as várias malhas em função da distância horizontal ao centro da barra. Os três pontos apresentados para cada curva, da esquerda para a direita, correspondem às linhas 1, 2 e 3.	282
Fig. 11.12.	Um dos ficheiros de comandos <i>batch</i> para o <b>CADyPOS</b> , para calcular o fluxo de calor deixando a barra.	284
Fig. 11.13.	Exemplo de comentários possíveis no final do ficheiro de comandos <i>batch</i> , <b>com*.txt</b> , para o <b>CADyPOS</b> , apresentado na Fig. 11.12.	285
Fig. 11.14.	Para a malha “Original (Média)”: a) $F/k$ ; b) $F_{linDesc}/k$ ; c) $F_{linDesc}/k$ , com sobreposição da malha e das linhas 1 a 4 (a vermelho), correspondentes aos percursos de integração.	287
Fig. 11.15.	Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as várias malhas em função da coordenada $x$ da linha considerada: a) grandeza linearizada; b) grandeza linearizada descontínua.	287
Fig. 11.16.	Dois novos caminhos de integração para as barras equivalentes “Grosseira” (só é “Correcta” a linha que passa pelo meio da camada de elementos finitos considerada): a) concentrado, “Conc.”, ficheiro CcQs6.pos; b) mesma distribuição de cobre, “Igual”, ficheiro CdQs6.pos.	289
Fig. 11.17.	Ficheiro de comandos “ <i>batch</i> ” para o <b>CADyPOS</b> , para o cálculo do fluxo de calor atravessando o meio da camada das malhas “Grosseira”.	290
Fig. 11.18.	Exemplo de comentários possíveis no final do ficheiro de comandos “ <i>batch</i> ” apresentado na Fig. 11.17 para o <b>CADyPOS</b> .	291
Fig. 11.19.	Imagem obtida directamente por <i>Print Screen</i> , donde foi extraída a Fig. 11.16b.	292
Fig. 11.20.	Ficheiro de ficheiros *. <b>pes</b> , com cabeçalho e indicação dos ficheiros *. <b>pos</b> a pós-processar.	292
Fig. 11.21.	Ficheiro de saída de resultados *. <b>pss</b> tal como foi gerado pelo <b>CADyPOS</b> , contendo os resultados pretendidos (valor dos integrais de linha).	293
Fig. 11.22.	Comparação entre as fontes térmicas e o fluxo de calor para as malhas “Grosseira”, com o cálculo do integral ao longo do meio da camada de elementos finitos: a) mesma escala da Fig. 11.11; b) escala vertical ampliada.	295
Fig. 12.1.	Estrutura inicial do CADdyMAG.	300
Fig. 12.2.	Estrutura inicial do CADdyTERM.	302
Fig. 12.3.	Estrutura actual do CADdyMAG, incluindo os fenómenos térmicos (**) e o funcionamento em modo batch.	304
Fig. 12.4.	Transformador de intensidade: a) corte; b) malha original, com etiquetas.	311
Fig. 12.5.	Ampliação (zoom), com outline sobreposto: a) malha original; b) malha melhorada.	311
Fig. 12.6.	Evolução do modelo após alguns comandos rápidos: a) estado inicial (975 nodos/1930 elementos); b) estado final (3880 nodos/ 7720 elementos).	311

Fig. 12.7.	Visualização de erros (provocados) na malha: a) com outline sobreposto à malha (opção “S”); b) com outline sem malha (opção “A”, ou qualquer tecla diferente de “S”).	312
Fig. 12.8.	Ficheiro PU.pre criado pelo CADyPRE.	313
Fig. 12.9.	CADyEXE introduzindo, em modo batch, a malha contida em PU.pre e os dados indicados em CMAG03U2.pes num novo ficheiro PUE.pro.	315
Fig. 12.10.	CADyEXE introduzindo, em modo batch, a malha contida em PUD.pro (igual à de PU.pre) e os dados indicados em CMAG03U5.pes num novo ficheiro PUEA.pro.	315
Fig. 12.11.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pos criados pelo EDDyPROC (ficheiro PKC4K2U.pos)	317
Fig. 12.12.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pos criados pelo EDDyNLIN (ficheiro PUEA1k0.pos).	318
Fig. 12.13.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pos criados pelo CARTyTERB (ficheiro CcQ2s5.pos).	319
Fig. 12.14.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pos criados pelo CARTyPRO para modelos electrostáticos (ficheiro Coax2r.pos).	320
Fig. 12.15.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pee para problemas electrostáticos, a resolver com o CARTyPRO (ficheiro Cartypr0.pee, utilizado para introdução dos dados no CADyEXE).	321
Fig. 12.16.	Exemplo do formato dos ficheiros *.peo para indicação dos ficheiros *.pro a processar pelo CARTyPRO e nome dos respectivos ficheiros de saída *.pos (ficheiro Cartypr0.peo).	321
Fig. 12.17.	Exemplo do formato dos ficheiros *.pes para entrada dos modelos a pós-processar no CADyPOS (ficheiro Cartypr0.pes).	322
Fig. 12.18.	Exemplo de ficheiro *.pss criado pelo CADyPOS para um problema electrostático (ficheiro Cartypr0.pss).	322
Fig. 12.19.	Aspecto do CADyPOS para Windows (correndo numa janela pequena).	323
Fig. A3.1.	Malha de elementos finitos com 7 nodos, dos quais 5 com potenciais desconhecidos.	359
Fig. A3.2.	Exemplo de matriz de coeficientes [S] para problema com 7 nodos, dos quais cinco com temperatura desconhecida.	360
Fig. A3.3.	Vectores [SV], [LEFT] e [ILINHA] para a matriz [S] da Fig. A3.2.	362
Fig. A3.4.	Matriz de coeficientes [S11] e respectivos vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA], tirando partido da esparsidade, simetria e reordenação de nodos de [S].	363
Fig. A3.5.	Vector de coeficientes [Sesp] e [jrow], e [jcol] para a matriz [S11] da Fig. A3.4.	363

## ANEXO 2 - ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1.	Permeabilidades relativas para alguns materiais diamagnéticos e paramagnéticos.	24
Tabela 2.2.	Permeabilidades relativas para alguns materiais ferromagnéticos.	25
Tabela 2.3.	Propriedades de materiais ferromagnéticos macios.	33
Tabela 2.4.	Propriedades de materiais ferromagnéticos duros.	34
Tabela 3.1.	Cálculo de $P_{Bl}$ e de $H_s$ variável para utilização nas equações (3.44) a (3.46).	60
Tabela 3.2.	Valores das relações entre as perdas por correntes induzidas calculadas pelas várias expressões analíticas consideradas e a de referência, $P_{Bl}$ , equação (3.37).	63
Tabela 3.3.	Domínio de validade das expressões analíticas para o cálculo das perdas por correntes induzidas para <b>impor o mesmo</b> $B_{max}^a = B_{ref}$ usado em $P_{Bl}$ .	66
Tabela 3.4.	Domínio de validade das expressões analíticas em $H_s$ para o cálculo das perdas por correntes induzidas, com <u><math>H_s</math> constante</u> ( $B_{max}^a$ diminuindo com o aumento da frequência).	66
Tabela 4.1.	Cálculo da condição de fronteira $\tilde{H}_s = H_{sR} + jH_{sI}$ , para $d=0,35$ mm, $\mu=0,001$ H/m ( $\mu_r=796$ ) e $B_{ref}=1,5$ T, frequências de 25 Hz a 10 kHz.	86
Tabela 4.2.	Valores de $H_{sR}$ e $H_{sI}$ , nome dos ficheiros *.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para <b><math>d=0,35</math> mm</b> .	87
Tabela 4.3.	Valores de $H_{sR}$ e $H_{sI}$ , nome dos ficheiros *.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para <b><math>d=0,5</math> mm</b> .	87
Tabela 4.4.	Valores de $H_{sR}$ e $H_{sI}$ , nome dos ficheiros *.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para <b><math>d=0,65</math> mm</b> .	88
Tabela 4.5.	Valores de $H_{sR}$ e $H_{sI}$ , nome dos ficheiros *.pos e resultados numéricos para o problema 1D, para <b><math>d=1</math> mm</b> .	88
Tabela 4.6.	Valores das perdas por correntes induzidas calculadas pela expressão analítica exacta, e erros no cálculo numérico das perdas por correntes induzidas correspondentes a 1D.	96
Tabela 4.7.	Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para <b><math>d=0,35</math> mm</b> .	99
Tabela 4.8.	Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para <b><math>d=0,5</math> mm</b> .	99
Tabela 4.9.	Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para <b><math>d=0,65</math> mm</b> .	99
Tabela 4.10.	Densidade de perdas por correntes induzidas para o problema 2D (resultados numéricos), para <b><math>d=1</math> mm</b> .	100
Tabela 4.11.	$P_j/P_{Bl}$ para o problema 2D, para <b><math>d=0,35</math> e <math>0,5</math> mm</b> .	103

Tabela 4.12.	$P_j/P_{B1}$ para o problema 2D, para $d=0,65$ e $1$ mm.	103
Tabela 4.13.	$P_j/P_{B1}$ para o problema 2D, para $d=0,35$ e $0,5$ mm, e respectivos $d/\delta$ e $w/d$ .	105
Tabela 4.14.	$P_j/P_{B1}$ para o problema 2D, para $d=0,65$ e $1$ mm, e respectivos $d/\delta$ e $w/d$ .	105
Tabela 5.1.	Valores de $H_{sR}+jH_{sI}$ , e $P_{B1}$ correspondentes, para $d/\delta$ entre $0,05$ e $8$ e $d=0,35$ mm.	109
Tabela 5.2.	Valores de $H_{sR}+jH_{sI}$ , e $P_{B1}$ correspondentes, para $d/\delta$ entre $0,05$ e $8$ e $d=0,5$ mm.	109
Tabela 5.3.	Valores de $H_{sR}+jH_{sI}$ , e $P_{B1}$ correspondentes, para $d/\delta$ entre $0,05$ e $8$ e $d=0,65$ mm.	110
Tabela 5.4.	Valores de $H_{sR}+jH_{sI}$ , e $P_{B1}$ correspondentes, para $d/\delta$ entre $0,05$ e $8$ e $d=1$ mm.	110
Tabela 5.5.	$P_j/P_{B1}$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ e $w/d$ .	111
Tabela 5.6.	Valores de $k_1$ e $k_2$ para calcular os $C_i$ e diferença média destes em relação aos $C_i$ obtidos a partir dos dados numéricos.	115
Tabela 5.7.	$B_{max}^a$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ ( $0,05-8$ ) e $w/d$ .	121
Tabela 5.8.	$F_{cor}$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ ( $0,05-8$ ) e $w/d$ .	123
Tabela 5.9.	$P_{Jcor}/P_{B1}$ para o problema 2D em função de $d/\delta$ ( $0,05-8$ ) e $w/d$ .	126
Tabela 5.10.	Exemplo de cálculo de $F_{cor}$ e $P_{Jcor}/P_{B1}$ para $w/d=4$ mm/1 mm=4 (problema 2D).	127
Tabela 6.1.	Comparação entre os nossos resultados numéricos (I) e os de outros autores (II).	133
Tabela 6.2.	Constantes para o cálculo de $Coef$ e $Coef'$ , e diferenças médias entre $b^*$ e $m^*$ calculados analiticamente e os correspondentes $b^*_{num}$ e $m^*_{num}$ numéricos.	140
Tabela 6.3.	Comparação entre os nossos resultados numéricos (I), os de outros autores (II) e os do modelo analítico proposto (IV).	142
Tabela 7.1.	Cálculo da curva $B-H_{eq}$ utilizando a relatividade média no tempo, segundo equação (7.20).	158
Tabela 7.2.	Perdas por correntes induzidas para 1D e 2D, por TTJG13EqRtav, e para 1D, por <i>time-stepping</i> .	181
Tabela 7.3.	Nomes das novas curvas $B-H$ efectivas equivalentes.	182
Tabela 10.1.	Rotinas para resolução de sistemas de equações lineares (da <i>IMSL Math Library</i> de <i>FPS 4.0 Books Online</i> ) testadas para processador térmico em regime permanente para PC.	241
Tabela 10.2.	Resultados da comparação de rotinas para resolução de sistemas lineares (da <i>IMSL Math Library</i> ), testadas para processador térmico em regime permanente para PC/ <i>Windows</i> .	242
Tabela 10.3.	Número total de coeficientes da matriz $[S]$ , número de coeficientes de $[S]$ a armazenar considerando esparsidade e simetria (sem e com renumeração de nodos, método de perfil), e coeficientes no processador térmico em $[SV]$ e $[S_{esp}]$ .	247

Tabela 10.4.	Comparação do processamento das seis malhas usadas para o motor de indução linear, com cada um dos 4 processadores em estudo nesta fase, para incorporação no processador térmico em regime permanente para PC/ <i>Windows</i> .	258
Tabela 11.1.	Materiais da barra do alternador e propriedades respectivas relevantes.	267
Tabela 11.2.	Coefficientes “a” e “b” e condutividade térmica equivalente $k_e$ .	276
Tabela 11.3.	Erros na temperatura máxima para os diversos modelos.	278
Tabela 11.4.	Erros na temperatura máxima para as malhas ligeiramente menos grosseiras (Grosseira2).	278
Tabela 12.1.	Número de nodos e elementos do <b>CADdyMAG</b> e do processador térmico <b>TP21GN_ALFAS</b> , no início do presente trabalho	301
Tabela 12.2.	Estado actual do <b>CADdyMAG</b> .	306
Tabela A.4.1.	Comparação entre designações (“ <i>grades</i> ”) do fabricante italiano Acciai Speciali Terni e algumas designações internacionais, para chapa magnética de grão não orientado [AST1999a[PPL233]].	366
Tabela A.4.2.	Comparação entre as designações (“ <i>grades</i> ”) do fabricante italiano Acciai Speciali Terni e algumas designações internacionais, para chapa magnética de grão orientado [AST1999a[PPL233]].	367
Tabela A.4.3.	Resultado da pesquisa com “IEC and 60404” em <a href="http://webstore.iec.ch">http://webstore.iec.ch</a> , referente a normas para medida de propriedades magnéticas.	368



## ANEXO 3 - ESPARSIDADE, BANDA E ZEROS ESTRUTURAIS DA MATRIZ DE COEFICIENTES

Para clarificar todos os conceitos apresentados em “10.3 Importação do código para PC, recompilação e testes de novos “*solvers*” para as várias matrizes e vectores, bem como as diferenças entre o processador térmico e os outros processadores (por exemplo o **CARTyPRO**), tome-se o exemplo da Fig. A3.1 referente a um problema com sete nodos ( $n\_ptos=7$ ), sendo conhecidos os potenciais (por exemplo a temperatura), dos nodos 6 e 7, marcados com condição fronteira T, tendo portanto os cinco primeiros nodos com potenciais livres.

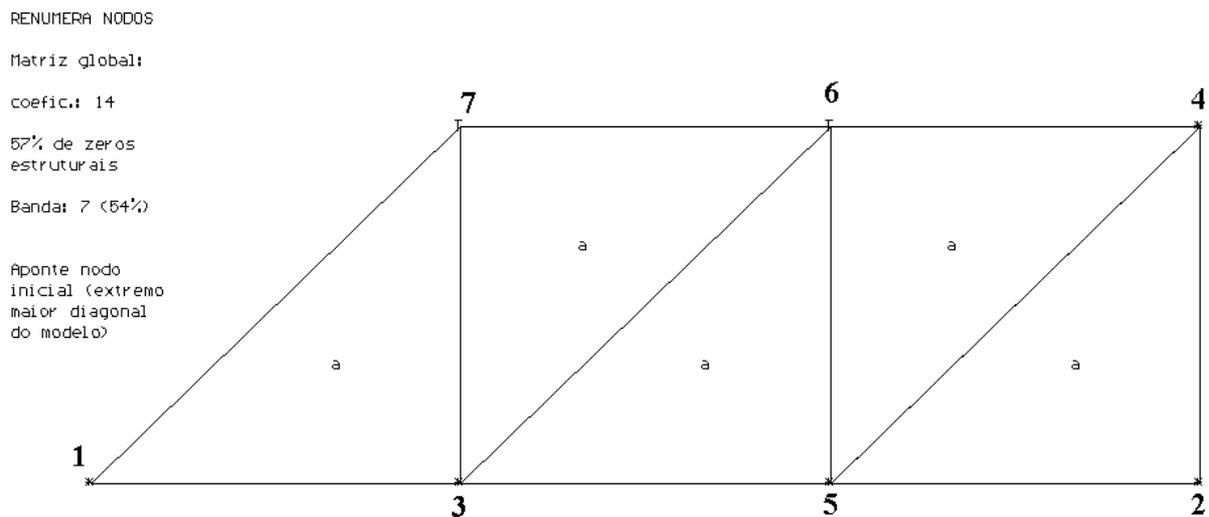


Fig. A3.1. Malha de elementos finitos com 7 nodos, dos quais 5 com potenciais desconhecidos.

Actualmente, todos os processadores tiram partido da esparsidade e simetria da matriz, armazenando apenas os coeficientes relevantes pelo método de perfil. Aqui há duas situações:

- o processador térmico (para regime permanente);
- os restantes processadores do **CADdyMAG**.

Comece-se por referir que os nodos da Fig. A3.1 foram criados pela ordem correspondente aos números indicados na figura. Assim, os nodos 6 e 7 foram os últimos a ser criados (e não foi feita mais nenhuma renumeração dos nodos dentro do pré-processador). Os coeficientes da diagonal principal são os coeficientes próprios de cada nodo, enquanto os outros são os mútuos: o coeficiente  $c \neq 0$  significa que o nodo 3 está ligado ao nodo 1,  $g \neq 0$

significa que o nodo 5 está ligado ao nodo 2, etc. Assim, a matriz global de coeficientes resultante,  $[S]$ , é dada na Fig. A3.2.

$$[S] = \left[ \begin{array}{ccccc|cc} (a) & \mathbf{0} & c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & o \\ \mathbf{0} & (b) & 0 & e & g & 0 & 0 \\ (c & 0 & d) & 0 & h & k & p \\ \mathbf{0} & (e & 0 & f) & i & l & 0 \\ \mathbf{0} & (g & h & i & j) & m & 0 \\ \hline 0 & 0 & k & l & m & (n) & q \\ o & 0 & p & 0 & 0 & q & (r) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right]$$

Fig. A3.2. Exemplo de matriz de coeficientes  $[S]$  para problema com 7 nodos, dos quais cinco com temperatura desconhecida.

Como os nodos 6 e 7, com condição de fronteira T, foram os últimos a ser criados, os coeficientes na matriz  $[S]$  já estão ordenados com os coeficientes relativos apenas aos potenciais conhecidos em último lugar, correspondendo à sub-matriz  $[S_{22}]$ . Isto corresponde à organização normal da matriz  $[S]$  (quer esta seja efectivamente criada ou não) para o processador térmico, em que os potenciais conhecidos são enviados para o final da lista de nodos (cf. Fig. 10.12, página 254). Para os outros processadores só por um grande acaso é que isso aconteceria, pois os nodos com potenciais conhecidos podem estar em qualquer posição na lista de nodos. Mas nada impede que estejam no final (o que acontece no presente caso).

Veja-se agora mais em detalhe as noções de coeficientes a armazenar e banda da matriz (já abordados na nota de rodapé nº92, na página 246, e na Tabela 10.3, página 247), e zeros estruturais.

Para os diversos processadores (que não o térmico), os **coeficientes a armazenar** são os 14 indicados entre parêntesis (para os potenciais conhecidos, só é guardado o coeficiente da diagonal principal). Refira-se no entanto que, tanto para o processador térmico como para os outros, os coeficientes de  $[S_{12}]$  são necessários para o cálculo de  $[B] = [F_{desc}] - [S_{12}][T_{conh}]$ , (cf. equação (10.7), página 231). No entanto, estes coeficientes não são armazenados em  $[SV]$ , sendo directamente introduzida a sua contribuição em  $[B]$ .

A banda da matriz é igual à maior distância de um coeficiente diferente de zero até à diagonal principal e até ao seu simétrico. Assim, para esta matriz  $[S]$ , a maior distância (só para as linhas dos potenciais desconhecidos) ocorre para a linha 5 e coluna 5: desde o coeficiente  $S_{52}=g$  até ao  $S_{55}=j$  e depois até ao  $S_{25}=g$ , pelo que a *banda* desta matriz é 7 (sem

tirar partido da simetria, tal como aparece em [Salon1999] pp.607, para o método de armazenamento de banda). A **banda da matriz** em percentagem, *banda (%)* é calculada por

$$banda (\%) = \text{round}[banda/(2n\_ptos - 1) \times 100\%] \quad (A3.1)$$

Assim, neste caso, a *banda (%)* =  $\text{round}[7/(2 \times 7 - 1) \times 100\%] = \text{round}(53,846\%) = 54\%$ .

Outro parâmetro com algum interesse é o número de **zeros estruturais** da matriz. Isto dá-nos a percentagem de coeficientes que não são considerados no caso de armazenamento sem tirar partido da simetria. Para este caso concreto, são os zeros indicados a negrito na Fig. A3.2 mais os coeficientes não guardados nas linhas e colunas dos potenciais conhecidos, ou seja  $2 \times (3 + 5 + 6) = 28$ . A **percentagem de zeros estruturais**, *% de zeros estruturais*, pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\% \text{ de zeros estruturais} = \text{round} \frac{n\_ptos^2 - 2 \times coef + n\_ptos}{n\_ptos^2} \times 100\% \quad (A3.2)$$

o que para o caso presente, dará  $(7^2 - 2 \times 14 + 7) / 7^2 \times 100\% = 28 / 49 \times 100\% = 57,143\%$ , o que arredondado dá 57%.

São estes os valores de **número de coeficientes**, banda e % de zero estruturais que são apresentados na Fig. A3.1 e que aparecem quando se chama o comando **renumera** nodos no pré-processador (neste caso não há interesse em renumerar pois a numeração indicada já é boa, talvez a melhor possível).

Assim, os elementos de [S] guardados no vector (matriz coluna) [SV] são mostrados na Fig. A3.3. Os restantes elementos da matriz, sendo zeros estruturais ou iguais aos outros já armazenados (devido à simetria da matriz), são ignorados. Recorde-se (cf. página 248) que para se aceder aos elementos da matriz armazenados no vector de coeficientes [SV], são ainda necessários dois vectores auxiliares (matrizes colunas), [LEFT] e [ILINHA]:

- O vector [LEFT] guarda o número da coluna do primeiro elemento diferente de zero de cada linha da matriz.
- O vector [ILINHA], contém o índice desse elemento no vector de coeficientes.

Assim, o coeficiente  $S(i,j)$  de [S] fica armazenado no vector SV na posição  $ILINHA(i) + j - LEFT(i)$ :

$$S(i, j) = S(j, i) = SV( ILINHA(i) + j - LEFT(i) ) \quad (10.10)$$

Assim, os vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA] a guardar relativamente à matriz [S] da Fig. A3.2 são os apresentados na Fig. A3.3

$$[\text{SV}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ d \\ e \\ 0 \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ n \\ r \end{bmatrix}; \quad [\text{LEFT}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad [\text{ILINHA}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Fig. A3.3. Vectores [SV], [LEFT] e [ILINHA] para a matriz [S] da Fig. A3.2.

Visto o que se passa com os outros processadores, veja-se agora o que acontece para o processador térmico, que é ligeiramente diferente. No processador térmico para regime permanente, começa-se sempre por reordenar os nodos (cf. Fig. 10.1 e Fig. 10.12, páginas 233 e 254), o que equivale a fazer uma nova numeração de nodos dentro do processador (não se confunda com a numeração de nodos dentro do pré-processador), por forma a colocar no fim da lista de nodos os que têm os potenciais conhecidos, tal como já acontece na Fig. A3.2. Isto faz com que os únicos coeficientes a guardar no vector a matriz sejam os da sub-matriz  $[S_{11}]$  de [S] na Fig. A3.2. A  $[S_{11}]$  resultante é mostrada na Fig. A3.4, bem como os vectores [SV], [LEFT], e [ILINHA] a guardar relativamente à matriz  $[S_{11}]$ .

Finalmente na Fig. A3.5 apresentam-se os vectores  $[S_{esp}]$ , [jrow] e [jcol] (matrizes colunas) no formato de entrada da rotina DLSLXD da *IMSL Math Library* utilizada no solver do processador **CARTyTERB**.

$$[\mathbf{S}_{11}] = \begin{bmatrix} (a) & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & (b) & 0 & e & g \\ (c) & 0 & (d) & 0 & h \\ 0 & (e) & 0 & (f) & i \\ 0 & (g) & h & i & (j) \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{SV}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ d \\ e \\ 0 \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{LEFT}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{ILINHA}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Fig. A3.4. Matriz de coeficientes  $[\mathbf{S}_{11}]$  e respectivos vectores  $[\mathbf{SV}]$ ,  $[\mathbf{LEFT}]$ , e  $[\mathbf{ILINHA}]$ , tirando partido da esparsidade, simetria e reordenação de nodos de  $[\mathbf{S}]$ .

$$[\mathbf{S}_{esp}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{jrow}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{jcol}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fig. A3.5. Vector de coeficientes  $[\mathbf{S}_{esp}]$  e  $[\mathbf{jrow}]$ , e  $[\mathbf{jcol}]$  para a matriz  $[\mathbf{S}_{11}]$  da Fig. A3.4.

Na Tabela 10.3, página 247, apresentam-se os exemplos concretos para as cinco malhas de elementos finitos utilizadas no sub-capítulo “10 CONVERSÃO DO PROCESSADOR TÉRMICO DE REGIME PERMANENTE DE VAX/VMS PARA PC/WINDOWS”, mostrando o número de coeficientes e o espaço de memória que seriam necessários para guardar todos os coeficientes da matriz  $[\mathbf{S}]$ , tirando ou não partido da esparsidade e da renumeração dos nodos, e os que foram efectivamente utilizados no processador térmico para guardar os coeficientes relevantes de  $[\mathbf{S}_{11}]$  (com nodos renumerados no pré-processador, e tirando partido da simetria e esparsidade, pelo método de perfil) em  $[\mathbf{SV}]$  e  $[\mathbf{S}_{esp}]$ .



## ANEXO 4 - CORRESPONDÊNCIAS ENTRE DESIGNAÇÕES DE CHAPA FERROMAGNÉTICA PARA DIVERSAS NORMAS INTERNACIONAIS (IEC, AISI, ASTM, GOST, JIS)

Na literatura, e nos livros de máquinas eléctricas em particular, encontram-se por vezes referências a chapas ferromagnéticas com designações segundo diversas normas (“standards”), algumas das quais já não estão em vigor.

As principais normas que costumam ser referidas são:

**EN** - *The European Standard*, as normas europeias.  
[www.cenelec.org/Cenelec/About+CENELEC/Our+work/What+is+a+standard/EN+-+The+European+Standard.htm](http://www.cenelec.org/Cenelec/About+CENELEC/Our+work/What+is+a+standard/EN+-+The+European+Standard.htm)

**AISI** - *American Iron and Steel Institute (AISI)*.  
[www.steel.org](http://www.steel.org)

**ASTM** - *American Society for Testing and Materials*.  
[www.astm.org](http://www.astm.org)

**JIS** - *Japanese Industrial Standards*, normas japonesas.  
[www.jisc.go.jp/eng/jis-act/index.html](http://www.jisc.go.jp/eng/jis-act/index.html)

**IEC** - *International Electrotechnical Commission*.  
[www.iec.ch](http://www.iec.ch)

**GOST** - *Gosstandart of Russia's*, normas russas.  
[www.gost.ru/](http://www.gost.ru/), em russo. Em inglês:  
[www.gost.ru/sls/gost.nsf/PVP/CA5400452C7991BEC32566DA004601FA?OpenDocument&ALT](http://www.gost.ru/sls/gost.nsf/PVP/CA5400452C7991BEC32566DA004601FA?OpenDocument&ALT)

As normas europeias de produtos (*European product norms*), representadas por EN, são especificações técnicas impressas e aprovadas pelo CEN (*European Committee for Standardization*) e que devem ser transpostas para as normas nacionais, sendo antecedidas pela designação das normas de cada país. Assim, genericamente, a norma europeia “ENxxx”, deve ser convertida para norma “NP Enxxx” no caso português.

Algumas das normas mais relevantes na área das chapas magnéticas, são:

- **EN 10106** (1996) *Cold rolled non-oriented electrical steel sheet and strip delivered in the fully processed state.*
- **EN 10107** (1996) *Grain-oriented electrical steel sheet and strip delivered in the fully Processed state.*
- **EN 10252** (1997) *Magnetic materials - Methods of measurement of magnetic properties of magnetic steel sheet and strip at medium frequencies. Applicable to*

*electrical steel sheet and strip for the construction of magnetic circuits for use in the frequency range 400 Hz to 1000 Hz.*

Na Tabela A.4.1 é feita uma comparação entre as classificações/designações (“grades”) do fabricante italiano AST, Acciai Speciali Terni [AST1999a] pp.8 e outras designações internacionais, para chapa magnética de grão não orientado.

Tabela A.4.1. Comparação entre designações (“grades”) do fabricante italiano Acciai Speciali Terni e algumas designações internacionais, para chapa magnética de grão não orientado [AST1999a].

ACCIAI SPECIALI TERNI “GRADES”		ESPESSU. NOMINAL mm	I.E.C	EN 10106	U.S.A.			
actual a 1,5 T	anterior a 1,0 T				A.I.S.I.	ASTM	GOST	JIS
2535	(1035)	0,35	250-35 A5	M 250-35 A	M 15	36 F 145	2413	
2735	(1135)	0,35	270-35 A5	M 270-35 A	M 19	36 F 158	2412	35 A 270
3035	(1235)	0,35	300-35 A5	M 300-35 A	M 22	36 F 168	2411	
3335	(1335)	0,35	330-35 A5	M 330-35 A	M 36	36 F 190		
2750	(1150)	0,50	270-50 A5	M 270-50 A				50 A 270
2950	(1250)	0,50	290-50 A5	M 290-50 A	M 15	47 F 168	2413	50 A 290
3150	(1350)	0,50	310-50 A5	M 310-50 A	M 22	47 F 185	2412	50 A 310
3350	(1450)	0,50	330-50 A5	M 330-50 A	M 27	47 F 190		
3550	(1550)	0,50	350-50 A5	M 350-50 A	M 36	47 F 205	2411	50 A 350
4050	(1750)	0,50	400-50 A5	M 400-50 A	M 43	47 F 230	2312	50 A 400
4750	(2050)	0,50	470-50 A5	M 470-50 A			2311	50 A 470
5350	(2350)	0,50	530-50 A5	M 530-50 A	M 45	47 F 305	2212	50 A 530
6050	(2650)	0,50	600-50 A5	M 600-50 A			2112	50 A 600
7050	(3050)	0,50	700-50 A5	M 700-50 A	M 47	47 F 400		
8050	(3650)	0,50	800-50 A5	M 800-50 A		47 F 475	2111	50 A 800
3565	(1565)	0,65	350-65 A5	M 350-65 A	M 19	64 F 208		
4065	(1765)	0,65	400-65 A5	M 400-65 A	M 36	64 F 240		
4765	(2065)	0,65	470-65 A5	M 470-65 A	M 43	64 F 270		
5365	(2365)	0,65	530-65 A5	M 530-65 A			2312	
6065	(2665)	0,65	600-65 A5	M 600-65 A	M 45	64 F 360	2212	65 A 600
7065	(3065)	0,65	700-65 A5	M 700-65 A			2211	
8065	(3665)	0,65	800-65 A5	M 800-65 A	M 47	64 F 490	2112	65 A 800

Na Tabela A.4.2 é feita uma comparação entre as classificações do mesmo fabricante e algumas designações internacionais, para chapa magnética de grão orientado [AST1999b] pp.10.

Tabela A.4.2. Comparação entre as designações (“grades”) do fabricante italiano Acciai Speciali Terni e algumas designações internacionais, para chapa magnética de grão orientado [AST1999a].

ACCIAI SPECIALI TERNI GRADES	ESPESSURA NOMINAL mm	I.E.C. 50 Hz		EN 10107 50 Hz	
		1,5 T	1,7 T	1,5 T	1,7 T
95H23	0.23				
M0H23	0.23				M100-23P
100H27	0.27				
M0H27	0.27				M103-27P
M0H30	0.30				M105-30P
M1H30	0.30				M111-30P
M3T23	0.23	080-23-N5	120-23-S5	M080-23N	M120-23S
M2T27	0.27				
M3T27	0.27				
M4T27	0.27	088-27-N5	130-27-S5	M089-27N	M130-27S
M3T30	0.30				
M4T30	0.30				
M5T30	0.30	097-30-N5	140-30-S5	M097-30N	M140-30S
M6T35	0.35	111-35-N5	155-35-S5	M111-35N	M150-35S

ACCIAI SPECIALI TERNI GRADES	ESPESSURA NOMINAL mm	ASTM 50Hz		A.I.S.I.	JIS 50Hz	
		1,5 T	1,7 T		1,5 T	1,7 T
95H23	0.23					
M0H23	0.23		23P132M			
100H27	0.27					
M0H27	0.27			M0H		27P100
M0H30	0.30			M0H		
M1H30	0.30			M1H		30P110
M3T23	0.23	23G099M	23H154M	M23		
M2T27	0.27					
M3T27	0.27					
M4T27	0.27	27G112M	27H163M	M4	27G140	27G130
M3T30	0.30					
M4T30	0.30					
M5T30	0.30	30G128M	30H183M	M5	30G150	30G140
M6T35	0.35	35G146M	35H207M	M6	35G165	35G155

As normas, se não existirem nos organismos de cada país, podem ser compradas, por exemplo, em <http://webstore.iec.ch> e <http://global.ihs.com/standards.cfm> (nesta, normas de todo o mundo). Por exemplo, a pesquisa com “IEC and 60404”, em <http://webstore.iec.ch>, dá a informação apresentada na Tabela A.4.3, referente a normas para medida de propriedades magnéticas. Cada número da norma é um *link* dando acesso a uma descrição bastante mais detalhada de cada uma das normas ou partes.

Tabela A.4.3. Resultado da pesquisa com “IEC and 60404” em <http://webstore.iec.ch>, referente a normas para medida de propriedades magnéticas.

NORMA	Edição	Custo (CHF)	Tamanho / número de páginas	Título da Norma
<a href="#">IEC 60404-1 (2000-08)</a>	Ed. 2.0	159	648Kb / 115	<i>Magnetic materials - Part 1: Classification</i>
<a href="#">IEC 60404-2 (1996-03)</a>	Ed. 3.0	78	1537Kb / 37	<i>Magnetic materials - Part 2: Methods of measurement of the magnetic properties of electrical steel sheet and strip by means of an Epstein frame</i>
<a href="#">IEC 60404-2 (1996-03)</a>	Ed. 3.0 Spanish	78	101Kb / 20	<i>Versión Oficial en Español - Materiales magnéticos. Parte 2: Métodos de medida de las propiedades magnéticas de chapas y bandas magnéticas de acero por medio del marco de Epstein.</i>
<a href="#">IEC 60404-3 (2002-10)</a>	Consol. Ed. 2.1 (incl. am1)	87	777Kb / 45	<i>Magnetic materials - Part 3: Methods of measurement of the magnetic properties of magnetic sheet and strip by means of a single sheet tester</i>
<a href="#">IEC 60404-3-am1 (2002-09)</a>	Ed. 2.0	33	377Kb / 13	<i>Amendment 1 - Magnetic materials - Part 3: Methods of measurement of the magnetic properties of magnetic sheet and strip by means of a single sheet tester</i>
<a href="#">IEC 60404-4 (1995-02)</a>	Ed. 2.0 Spanish	99	186Kb / 29	<i>Versión Oficial en Español - Materiales magnéticos. Parte 4: Métodos de medida en corriente continua de las propiedades magnéticas del hierro y del acero.</i>
<a href="#">IEC 60404-4 (2000-11)</a>	Consol. Ed. 2.1 (incl. am1)	99	599Kb / 59	<i>Magnetic materials - Part 4: Methods of measurement of d.c. magnetic properties of magnetically soft materials</i>
<a href="#">IEC 60404-4-am1 (2000-07)</a>	Ed. 2.0	22	19Kb / 3	<i>Amendment 1 - Magnetic materials - Part 4: Methods of measurement of d.c. magnetic properties of iron and steel</i>
<a href="#">IEC 60404-4-am1 (2000-07)</a>	Ed. 2.0 Spanish	22	32Kb / 4	<i>VERSION OFICIAL EN ESPANOL - Modificación 1 - Materiales magnéticos. Parte 4: Métodos de medida en corriente continua de las propiedades magnéticas de los materiales magnéticos blandos.</i>
<a href="#">IEC 60404-5 (1993-10)</a>	Ed. 2.0	57	1295Kb / 29	<i>Magnetic materials - Part 5: Permanent magnet (magnetically hard) materials - Methods of measurement of magnetic properties</i>
<a href="#">IEC 60404-6 (2003-06)</a>	Ed. 2.0	87	699Kb / 45	<i>Magnetic materials - Part 6: Methods of measurement of the magnetic properties of magnetically soft metallic and powder materials at frequencies in the range 20 Hz to 200 kHz by the use of ring specimens</i>
<a href="#">IEC 60404-7 (1982-01)</a>	Ed. 1.0	39	623Kb / 17	<i>Magnetic materials. Part 7: Method of measurement of the coercivity of magnetic materials in an open magnetic circuit</i>
<a href="#">IEC 60404-8-1 (2001-04)</a>	Ed. 2.0	112	582Kb / 65	<i>Magnetic materials - Part 8-1: Specifications for individual materials - Magnetically hard materials</i>
<a href="#">IEC 60404-8-2 (1998-05)</a>	Ed. 2.0	71	134Kb / 33	<i>Magnetic materials - Part 8-2: Specifications for individual materials - Cold-rolled electrical alloyed steel sheet and strip delivered in the semi-processed state</i>

NORMA	Edição	Custo (CHF)	Tamanho / número de páginas	Título da Norma
<b>IEC 60404-8-3 (1998-05)</b>	Ed. 2.0	64	128Kb / 31	<i>Magnetic materials - Part 8-3: Specifications for individual materials - Cold-rolled electrical non-alloyed steel sheet and strip delivered in the semi-processed state</i>
<b>IEC 60404-8-4 (1998-05)</b>	Ed. 2.0	78	204Kb / 37	<i>Magnetic materials - Part 8-4: Specifications for individual materials - Cold-rolled non-oriented electrical steel sheet and strip delivered in the fully-processed state</i>
<b>IEC 60404-8-5 (1989-05)</b>	Ed. 1.0	64	1189Kb / 30	<i>Magnetic materials. Part 8: Specifications for individual materials. Section Five: Specification for steel sheet and strip with specified mechanical properties and magnetic permeability</i>
<b>IEC 60404-8-6 (1999-04)</b>	Ed. 2.0	71	198Kb / 33	<i>Magnetic materials - Part 8-6: Specifications for individual materials - Soft magnetic metallic materials</i>
<b>IEC 60404-8-7 (1998-05)</b>	Ed. 2.0	64	137Kb / 31	<i>Magnetic materials - Part 8-7: Specifications for individual materials - Cold-rolled grain-oriented electrical steel sheet and strip delivered in the fully-processed state</i>
<b>IEC 60404-8-8 (1991-09)</b>	Ed. 1.0	57	1220Kb / 29	<i>Magnetic materials - Part 8: Specifications for individual materials - Section 8: Specification for thin magnetic steel strip for use at medium frequencies</i>
<b>IEC 60404-8-9 (1994-08)</b>	Ed. 1.0	44	811Kb / 19	<i>Magnetic materials - Part 8: Specifications for individual materials - Section 9: Standard specification for sintered soft magnetic materials</i>
<b>IEC 60404-8-10 (1994-11)</b>	Ed. 1.0	78	1371Kb / 37	<i>Magnetic materials - Part 8: Specifications for individual materials - Section 10: Specification for magnetic materials (iron and steel) for use in relays</i>
<b>IEC 60404-9 (1987-09)</b>	Ed. 1.0	44	628Kb / 19	<i>Magnetic materials. Part 9: Methods of determination of the geometrical characteristics of magnetic steel sheet and strip</i>
<b>IEC 60404-10 (1988-08)</b>	Ed. 1.0	78	1451Kb / 39	<i>Magnetic materials. Part 10: Methods of measurement of magnetic properties of magnetic sheet and strip at medium frequencies</i>
<b>IEC 60404-11 (1999-01)</b>	Consol. Ed. 1.1 (incl. am1)	39	131Kb / 17	<i>Magnetic materials - Part 11: Method of test for the determination of surface insulation resistance of magnetic sheet and strip</i>
<b>IEC 60404-11-am1 (1998-07)</b>	Ed. 1.0	27	35Kb / 7	<i>Amendment 1 - Magnetic materials - Part 11: Method of test for the determination of surface insulation resistance of magnetic sheet and strip</i>
<b>IEC 60404-12 (1992-11)</b>	Ed. 1.0	51	1044Kb / 25	<i>Magnetic materials - Part 12: Guide to methods of assessment of temperature capability of interlaminar insulation coatings</i>
<b>IEC 60404-13 (1995-09)</b>	Ed. 1.0	64	1400Kb / 30	<i>Magnetic materials - Part 13: Methods of measurement of density, resistivity and stacking factor of electrical steel sheet and strip</i>
<b>IEC 60404-14 (2002-06)</b>	Ed. 1.0	57	551Kb / 27	<i>Magnetic materials - Part 14: Methods of measurement of the magnetic dipole moment of a ferromagnetic material specimen by the withdrawal or rotation method</i>
<b>IEC 60740-2 (1993-06)</b>	Ed. 1.0	78	1398Kb / 38	<i>Laminations for transformers and inductors for use in telecommunication and electronic equipment - Part 2: Specification for the minimum permeabilities of laminations made of soft magnetic metallic materials</i>
<b>IEC/TR 61807 (1999-10)</b>	Ed. 1.0	51	293Kb / 25	<i>Magnetic properties of magnetically hard materials at elevated temperatures - Methods of measurement</i>