

OPTIMIZAÇÃO BASEADA EM FIABILIDADE DE PLACAS CELULARES SOLDADAS

Luis Miguel Cruz Simões¹, József Farkas² e Károly Jármai³

1: Dep. Eng. Civil, Universidade de Coimbra
e-mail: lcsimoes@dec.uc.pt

2: University of Miskolc, Miskolc, Hungary
e-mail: altfar@uni-miskolc.hu

3: University of Miskolc, Miskolc, Hungary
e-mail: altjar@uni-miskolc.hu

Palavras chave: fiabilidade, optimização, placas celulares, coluna com secção em caixão

Resumo. Neste trabalho é optimizada uma placa celular apoiada nos cantos submetida a uma carga vertical uniformemente distribuída. Os momentos flectores e deslocamentos de placas celulares podem ser obtidos utilizando os resultados analíticos de placas isotrópicas que estão disponíveis para diferentes tipos de cargas e apoios. Utilizam-se reforços constituídos por meias secções em I de perfis UB, sendo o banzo soldado à face superior da placa inferior por cordões de soldadura duplos. A face inferior da placa superior é soldada à alma dos reforços por cordões de soldadura. O custo a minimizar inclui o custo dos materiais, montagem, soldadura e pintura. As variáveis de decisão são o número e o perfil que constitui os reforços e as espessuras das placas superior e inferior. É igualmente abordada a optimização de uma coluna encastrada na base com secção em caixão quadrada constituída por placas celulares soldadas. São utilizados reforços de meia secção em I de perfis UB, sendo assegurada uma distancia mínima entre os reforços de modo a permitir que sejam soldados.

O custo é formulado seguindo a sequência de fabrico. Considera-se aleatoriedade do carregamento e propriedades dos materiais. A fiabilidade é calculada utilizando um método de nível II (aproximação de 1ª ordem do método dos segundos momentos). As restrições de fiabilidade estão associadas às tensões normais provocadas por momentos na face superior da placa inferior, tensões de corte nos cantos e o deslocamento vertical máximo. A fiabilidade da estrutura é obtida utilizando o método de Ditlevsen para probabilidades condicionais. No caso da coluna encastrada na base, são formuladas as restrições relativas à encurvadura da estrutura de acordo com as regras da Det Norske Veritas. Impõe-se limites ao deslocamento da parte superior da coluna.

Para resolver o problema de optimização com restrições de fiabilidade é adoptada uma estratégia branch and bound associada a um algoritmo baseado em entropia. Este algoritmo permite obter soluções com variáveis de decisão discretas que constituem limites inferiores para as soluções discretas optimizadas através de um processo de enumeração implícita.

1. INTRODUÇÃO

Podem ser utilizadas placas celulares em diversos tipos de estruturas: pontes, navios, pavimentos e coberturas de edifícios. Estas placas tem vantagem relativamente às reforçadas num dos lados: a) dada a sua elevada rigidez à torção a espessura pode ser reduzida sendo igualmente diminuído o custo de soldadura; b) a superfície plana é mais adequada à protecção contra a corrosão; c) soldaduras simétricas não provocam distorção residual. Em placas quadradas, por simetria tem-se que a rigidez à torção é igual à rigidez à flexão. Por esse motivo são calculadas como isotrópicas para as quais existem soluções analíticas para os momentos flectores e deslocamentos verticais [1]. Placas celulares em navios consistem em duas placas horizontais ligadas por reforços longitudinais e ocos de secção quadrada com soldadura em arco [2]. Neste trabalho é otimizada uma placa celular apoiada nos cantos submetida a uma carga vertical uniformemente distribuída [3]. Utilizam-se reforços constituídos por meias secções em I de perfis UB, sendo o banzo soldado à face superior da placa inferior por cordões de soldadura duplos. A face inferior da placa superior é soldada à alma dos reforços por cordões de soldadura. O custo a minimizar inclui o custo dos materiais, montagem, soldadura e pintura. As variáveis de decisão são o número e o perfil que constitui os reforços e as espessuras das placas superior e inferior.

Na concepção de pontes, edifícios são frequentemente utilizados vigas em caixão e pilares com grande resistência ao carregamento. Foi demonstrado que para compressão uniaxial as placas celulares são mais económicas que as placas com reforços longitudinais [4]. Nas secções em caixão sem reforços a espessura é muito significativa o que torna o dimensionamento pouco económico. É igualmente abordada a optimização de uma coluna encastrada na base com secção em caixão quadrada constituída por placas celulares soldadas. Calcula-se a força de compressão que actua em dois elementos de placa opostos, estando os dois elementos de placa remanescentes sujeitos a flexão composta. Como este carregamento não é tão perigoso tendo em vista a instabilidade elástica como o anterior, só aquele vai ser verificado. Calcula-se a espessura e largura das placas laterais bem como as dimensões dos reforços longitudinais que cumprem os requisitos de fiabilidade e minimizam o custo que inclui o material e o fabrico. São utilizados meios perfis em I como reforços.

As tensões e deslocamentos podem ser calculadas em função de valores determinísticos das cargas, geometria e comportamento material. Alguns códigos especificam probabilidades de rotura máximas num determinado período de referência. Esta probabilidade de rotura é traduzida em factores de segurança e coeficientes para combinação de acções que dividem ou multiplicam a resistência ou cargas aplicadas, de modo a serem obtidos valores característicos que são utilizados no projecto. Pressupõe-se que a estrutura garante a fiabilidade desejada se os estados limites não forem ultrapassados. A vantagem de utilizar um método do nível I (valores determinísticos especificados em Regulamentos ou Códigos) é que os estados limites são verificados para um número deduzido de combinações de variáveis. Os factores de segurança são muito vezes obtidos para os membros sem se conhecer a segurança da estrutura. Este problema pode ser ultrapassado utilizando métodos de fiabilidade mais sofisticados de nível II (Método dos segundos momentos de 1ª e 2ª ordem) e nível III (simulação de Monte-Carlo, amostragem mais representativa). Neste trabalho foi utilizado o

método dos segundos momentos de 1ª ordem [12]. Além de se especificarem as probabilidades de rotura máximas dos modos individuais, foi calculada a probabilidade de rotura da estrutura em que se considera a correlação entre modos de rotura.

Para resolver o problema em que são impostas condicionantes de fiabilidade foi adoptada uma estratégia de árvore combinatória com enumeração implícita (Branch and Bound) em conjunto com um algoritmo de optimização baseado em entropia de informação [16]. Este algoritmo determina variáveis de decisão contínuas que constituem limites inferiores associados aos nós da árvore combinatória, sendo obtidas as soluções discretas por enumeração implícita. São apresentados exemplos que ilustram a influência nos resultados do coeficiente de variação do carregamento e da probabilidade de rotura.

2. PLACA CELULAR APOIADA NOS QUATRO CANTOS

2.1. Variáveis de decisão

As variáveis a optimizar são o número de reforços numa direcção (placa simétrica) n , a altura do perfil em I h , a espessura das placas inferior e do topo t_1 and t_2 . Os perfis UB em I disponíveis são os indicados no catálogo Arcelor (2007) para a gama de alturas h de 607.6 a 1008.1

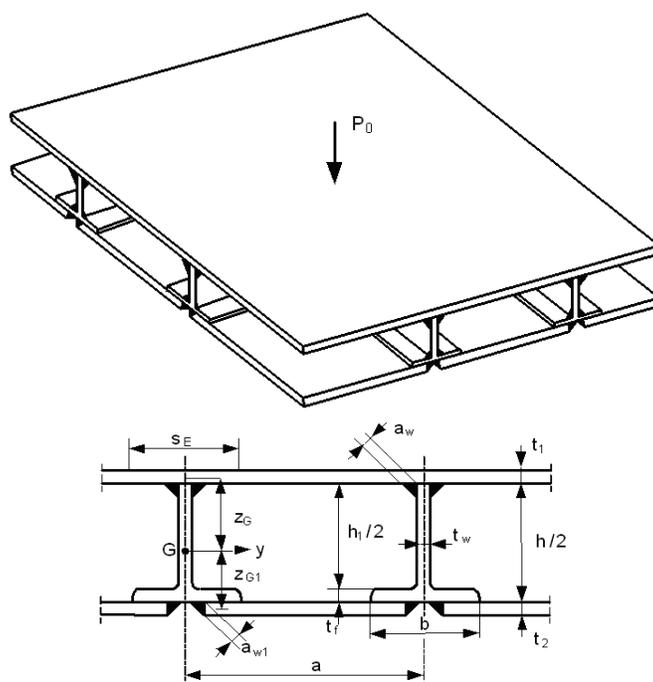


Figura 1 Placa celular e dimensões dos reforços em I cortados ao meio

2.2. Características geométricas, momentos flectores e deslocamentos

De acordo com o ECCS(1998) a largura efectiva da placa comprimida de topo deve ser,

$$s_E = \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (1)$$

Area de metade do perfil em I,

$$A_s = \frac{h_1 t_w}{2} + b t_f, \quad h_1 = h - 2t_f \quad (2)$$

Área do reforço que inclui as placas inferior e do topo,

$$A = s_E t_1 + a t_2 + A_s, \quad a = \frac{L}{n+1} \quad (3)$$

Distancia ao centro de gravidade,

$$z_G = \frac{1}{A} \left[a t_2 \left(\frac{h}{2} + \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} \right) + b t_f \left(\frac{h_1 + t_1 + t_f}{2} \right) + \frac{h_1 t_w}{2} \left(\frac{h_1}{4} + \frac{t_f}{2} \right) \right] \quad (4)$$

$$z_{G1} = \frac{h + t_1 + t_2}{2} - z_G \quad (5)$$

Momento de inércia,

$$I_y = s_E t_1 z_G^2 + a t_2 z_{G1}^2 + b t_f \left(\frac{h_1 + t_1 + t_f}{2} - z_G \right)^2 + I_{y1} \quad (6)$$

$$I_{y1} = \frac{h_1^3 t_w}{96} + \frac{h_1 t_w}{2} \left(\frac{h_1}{4} + \frac{t_f}{2} - z_G \right)^2 \quad (7)$$

A rigidez à flexão e à torção utilizadas na equação de Huber para placas ortotrópicas considerando uma carga aplicada uniformemente distribuída são:

$$B_x = \frac{E_1 I_y}{a_y}; \quad B_y = \frac{E_1 I_x}{a_x}; \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (8)$$

Os momentos flectores e deslocamentos podem ser obtidos em função da rigidez à flexão e torsão. No caso de uma placa celular quadrada, a rigidez à flexão é igual à rigidez à torção ($B_x=B_y=H$) e o momento máximo será,

$$M_{max} = 0,15 p L^2 \quad (9)$$

Deslocamento vertical máximo correspondente:

$$w_{max} = 0,025 p_o L^4 / B_x \quad (10)$$

em que L é o comprimento do bordo da placa, p_o é a carga aplicada uniformemente distribuída e p a carga que inclui o peso próprio da placa.

Rigidez à flexão,

$$B_x = \frac{E_1 I_y}{a}, \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (11)$$

Os volumes de material que correspondem a cada fase de fabrico são os seguintes,

$$V_1 = L^2 t_1 \quad , \quad V_2 = V_1 + (n+2)A_s \quad , \quad V_3 = V_2 + (n+2)A_s \quad , \quad V_4 = V_3 + L^2 t_2 \quad (12)$$

Intensidade do carregamento que inclui o peso próprio,

$$\rho = \rho_o + \frac{\rho_o V_4}{L^2} \quad (13)$$

2.3. Restrições

Restrição da tensão que inclui tensões normais devidas à flexão da placa superior que se admite com bordos encastrados,

$$\sigma_p = 0.3078 \frac{\rho_o a^2}{t_1^2} \quad (14)$$

$$\sigma_2 = \frac{0.15 \rho L^2 z_G}{I_y} + \sigma_p \leq \frac{f_y}{1.1} \quad (15)$$

$$\sigma_1 = \frac{0.15 \rho L^2 z_{G1}}{I_y} \leq \frac{f_y}{1.1} \quad (16)$$

Restrição de corte nos cantos,

$$\tau = \frac{\rho L^2}{4 h_1 t_w} \leq \frac{f_y}{1.1 \sqrt{3}} \quad (17)$$

Deslocamentos máximos,

$$w_{\max} \leq w_{\text{allow}} = \frac{L}{\phi} \quad (18)$$

Para $\phi = 300$.

Espessura mínima,

$$t_{\min} = 4 \text{ mm} \quad (19)$$

Distancia minima entre a alma dos reforços de modo a permitir a soldadura do banzo de reforço à placa do topo,

$$a - b \geq 300 \text{ mm} \quad (20)$$

2.4. Custo

O custo é formulado seguindo a sequência de fabrico. Soldadura da placa superior (18x18m2) a partir de 36 peças de dimensão 6 m x 1.5 m utilizando cordões simples ou duplos permitindo penetração total na ligação (GMAW-C soldadura em arco metal gas com CO₂)

$$K_{w1} = k_w \left[\Theta \sqrt{36 \rho V_1} + 1.3 C_1 t_1^n 13L \right] \quad (21)$$

Factor de custo da soldadura $k_w = 1\text{€/kg}$, coeficiente para a complexidade da montagem $\Theta = 3$

$$\text{Para } t < 15, \quad C_1 = 0,1939 \cdot 10^{-3} ; n_t = 2 \quad (22a)$$

$$\text{Para } t \geq 15, \quad C_1 = 0,1496 \cdot 10^{-3} ; n_t = 1,9029 \quad (22b)$$

Soldadura de $n+2$ reforços contínuos na placa de topo com cordões duplos (GMAW-C)

$$K_{w2} = k_w \left[\Theta \sqrt{(n+3)\rho V_2} + 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_w^2 2(n+2)L \right] \quad (23)$$

$$a_w = 0,4 t_w \text{ com } a_{w\min} = 4\text{mm}$$

Soldadura de $n+2$ reforços na placa inferior (almas com cordões de soldadura, banzos com soldadura de topo GMAW-C)

$$K_{w3} = k_w \left[\Theta \sqrt{(n^2 + 3n + 3)\rho V_3} + T_1 + T_2 \right] \quad (24)$$

$$T_1 = 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_w^2 (h_1 + b) 2 (n+1) (n+2) \quad (25)$$

$$T_2 = 1,3 C_1 t_t^{n_t} 2 b (n+1) (n+2) \quad (26)$$

Soldadura das duas partes da placa de base aos banzos por cordões de soldadura (GMAW-C)

$$K_{w4} = k_w \left[\Theta \sqrt{(n^2 + 2n + 2)\rho V_4} + 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_{w1}^2 4L(n+1) \right] \quad (27)$$

$$a_{w1} = 0,4 t_2 \text{ com } a_{w1\min} = 3\text{mm}$$

Custo do material,

$$K_M = k_M \rho V_4, \quad k_M = 10\text{€/kg} \quad (28)$$

Custo da pintura,

$$K_P = k_P \Theta_p S_p ; \quad \Theta_p = 3 ; \quad k_P = 2 \times 14,4 \times 10^{-6} \text{ \$/mm}^2 \quad (29)$$

Superfície a ser pintada,

$$S_p = 3L^2 + 2L(h_1 + b)(n+2) \quad (30)$$

Custo total,

$$K = K_M + K_{w1} + K_{w2} + K_{w3} + K_{w4} + K_P \quad (31)$$

2.5. Dados numéricos

Comprimento do bordo da placa $L=18$ m, módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, densidade do aço $\rho = 7,85 \cdot 10^{-5}$ N/mm³

3. PILAR QUADRADO COM SECÇÃO EM CAIXÃO CONSTITUÍDO POR PLACAS CELULARES

3.1. Variáveis de decisão

São optimizadas as variáveis de decisão: largura do pilar b_o , espessura das placas interior e exterior t , dimensões e número de reforços h , n . As restantes dimensões são obtidas da série UB do catálogo Arcelor na gama de h de 152,4 até 607,6.

3.2. Características geométricas, momentos flectores e deslocamentos

Area efectiva da secção transversal

$$A_e = \frac{h_1 t_w}{2} + b t_f + 2 s_{ey} t \quad , \quad s_y = \frac{b_o}{n} \quad (32)$$

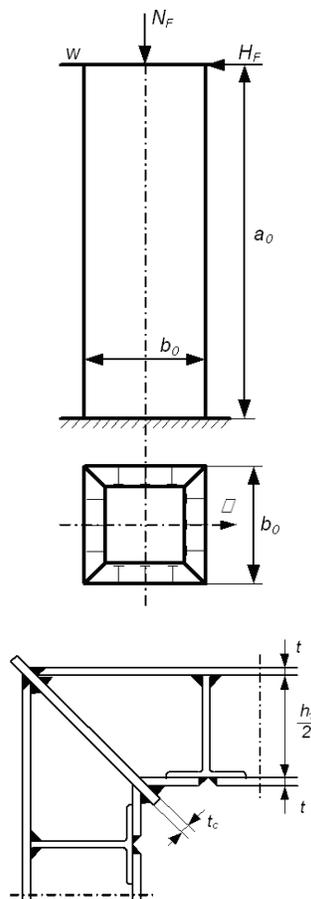


Figura 2. Pilar de secção em caixão quadrada com placas celulares nos lados e canto soldado

Largura efectiva da placa

$$s_{ey} = s_y C \quad \text{em que} \quad C = \frac{1,8}{\beta} - \frac{0,8}{\beta^2} \quad (33)$$

$$\beta = \frac{s_y}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad \text{if } \beta \geq 1 \quad (33)$$

contudo $\beta = 1$ se $\beta < 1$.

Distancia ao centro de gravidade G

$$z_G = \frac{1}{A_e} \left[\frac{h_1 t_w}{2} \left(\frac{h_1}{4} + \frac{t}{2} \right) \right] + b t_f \left(\frac{h+t-t_f}{2} \right) + s_{ey} t \left(\frac{h}{2} + t \right) \quad (34)$$

Momento de Inercia

$$I_y = s_{ey} t z_G^2 + s_{ey} t \left(\frac{h}{2} + t - z_G \right)^2 + \frac{h_1^3 t_w}{96} + \frac{h_1 t_w}{2} \left(\frac{h_1}{4} + \frac{t}{2} - z_G \right)^2 + b t_f \left(\frac{h+t-t_f}{2} - z_G \right)^2 \quad (35)$$

$$W_\xi = \frac{I_\xi}{\frac{b_o}{2} - z_G} \quad ; \quad b_1 = b_o - h - t \quad (36)$$

$$I_\xi = 2 \left\langle \left[I_y + A_e \left(\frac{b_o}{2} - z_G \right)^2 \right] (n-1) + I_{\xi S} + \frac{b_o^3 t}{12} + \frac{b_1^3 t}{12} \right\rangle \quad (37)$$

Se n for par

$$I_{\xi S} = \frac{b^3 t_f}{12} (n-1) + 2 \left(b t_f + \frac{h_1 t_w}{2} \right) \sum_{i=1}^{\frac{n_y-1}{2}} (s_y^2 i^2) \quad (38a)$$

Se n for impar

$$I_{\xi S} = \frac{b^3 t_f}{12} (n-1) + 2 \left(b t_f + \frac{h_1 t_w}{2} \right) \sum_{i=1,3,5}^{n_y-2} \left[\left(\frac{s_y}{2} \right)^2 i^2 \right] \quad (38b)$$

A força de encurvadura é calculada a partir da equação diferencial de Huber para placas ortotrópicas,

$$N_E = \frac{\pi^2}{b_o^2} \left(B_x \frac{b_o^2}{a_o^2} + 2H + B_y \frac{a_o^2}{b_o^2} \right) \quad (39)$$

Rigidez à flexão e torção,

$$B_x = \frac{E_y I_y}{s_y} \quad ; \quad B_y = \frac{E_x I_x}{s_x} = \frac{E_x t (h+2t)^2}{8} \quad ; \quad H = \frac{B_x + B_y}{2} \quad (40)$$

3.3. Restrições

As restrições de encurvadura são formuladas de acordo com as regras da Det Norske Veritas

[7]. Restrição de encurvadura global,

$$\sigma = \frac{N_F}{4A_e(n-1)} + \frac{0.1N_F a_0}{W_\xi} \leq \sigma_{cr} = \frac{f_{y1}}{\sqrt{1+\lambda^4}} \quad (41)$$

onde,

$$\sigma_E = \frac{N_E s_y}{A_e} \quad ; \quad \lambda_i = \sqrt{\frac{f_{y1}}{\sigma_E}} \quad (42)$$

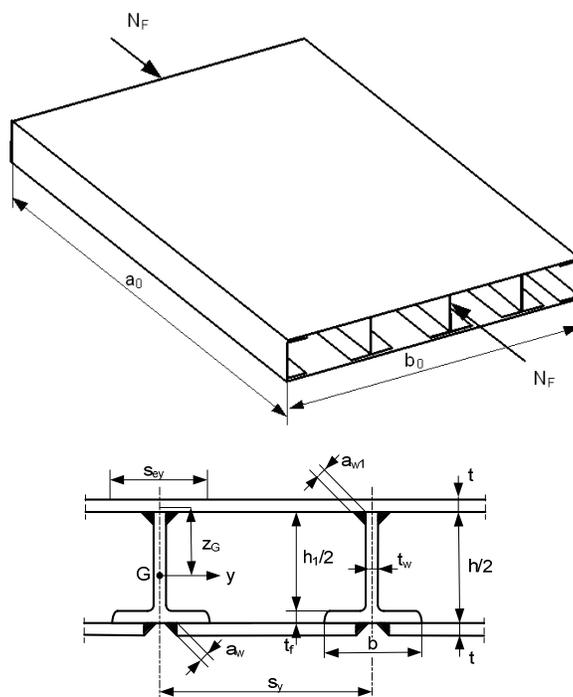


Figura 3 Placa celular com reforços longitudinais

Restrição do deslocamento horizontal no topo do pilar,

$$\omega_{\max} = \frac{H_F}{\gamma_M} \frac{L^3}{3EI_\xi} \leq \frac{L}{\phi} \quad (43)$$

ϕ na gama 300-1000.

Restrição à encurvadura local nos pilares que ligam os reforços,

$$t_c = \frac{\sqrt{2}h}{28\varepsilon} \quad ; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{\sigma}} \quad (44)$$

Limites para as variáveis de decisão $4 < t < 20$ mm, $152 < h < 1016$ mm, $4 < n < n_{\max}$. n_{\max} é obtido utilizando condicionamentos de fabrico.

$$\frac{b_o}{n} - b_y \geq 300 \text{ mm} \quad (45)$$

3.4. Custo

Soldadura da placa de base com soldadura de topo (soldadura em arco submersa): As dimensões de cada elenro de placa fabricada são 6000x1500 mm ou menos.

O factor de custo do fabrico é $k_F = 1,0 \text{ €/min}$, coeficiente para a complexidade da montagem $\Theta_w = 2$

$$K_{F0} = k_F \left[\Theta_w \sqrt{3n\rho V_o} + 1,3 C_w t^{n_1} L_{w1} \right] \quad (46)$$

$$V_o = a_o b_o t \quad ; \quad L_{w1} = 2b_o + a_o(n-1) \quad (47)$$

Para $t < 11$, $C_w = 0,1346 \cdot 10^{-3}$; $n_1 = 2$ (48a)

Para $t \geq 11$, $C_w = 0,1033 \cdot 10^{-3}$; $n_1 = 1,904$ (48b)

Soldadura de (n-1) almas de reforço à placa da base com cordões de soldadura duplos (GMAW-C soldadura em arco metal gas com CO₂):

$$K_{F1} = k_F \left[\Theta \sqrt{n\rho V_1} + 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_{w1}^2 2a_o(n-1) \right] \quad (49)$$

$a_{w1} = 0,4 t_{wx}$ com $a_{w1min} = 3 \text{ mm}$

$$V_1 = a_o b_o t + \left(\frac{h_1 t_w}{2} + b t_r \right) a_o(n-1) \quad (50)$$

Soldadura de (n-2) placas interiores com soldadura de topo,

$$K_{F2} = k_F \left[\Theta \sqrt{3\rho V_2} + 1,3 C_w t^{n_1} 2s_y \right] (n-2) \quad (51)$$

$$V_2 = a_o s_y t \quad (52)$$

Soldadura das placas interiores aos reforços com 2 cordões de soldadura (excluindo os 2 laterais)

$$K_{F3} = k_F \left[\Theta \sqrt{(n-1)\rho V_3} + 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_{w2}^2 2a_o(n-2) \right] \quad (53)$$

$a_{w2} = 0,7 t$ com $a_{w2min} = 3 \text{ mm}$

$$V_3 = V_1 + V_2(n-2) \quad (54)$$

Soldadura das 4 placas exteriores às placas de canto com 4 cordões de soldadura,

$$K_{F4} = k_F \left[\Theta \sqrt{8\rho V_4} + 1,3 \cdot 0,3394 \cdot 10^{-3} a_{w2}^2 16a_o \right] \quad (55)$$

$$V_4 = V_3 + 4t_c a_o \left(\frac{h\sqrt{2}}{2} + 3t_c \right) \quad (56)$$

Soldadura das 8 placas interiores com 3 soldaduras de topo,

$$K_{F5} = k_F \left[\Theta \sqrt{3\rho V_5} + 1,3 C_w t^n 2 \left(s_y - \frac{h}{2} \right) \right] 8 \quad (57)$$

$$V_5 = a_o t \left(s_y - \frac{h}{2} \right) \quad (58)$$

Soldadura das 8 placas interiores às placas dos cantos e almas dos reforços laterais com cordões de soldadura,

$$K_{F6} = k_F \left[\Theta \sqrt{9\rho V_6} + 1,3 0,3394 10^{-3} a_{w2}^2 16a_o \right] 8 \quad (59)$$

$$V_6 = V_4 + 8V_5 \quad (60)$$

O custo da pintura é,

$$K_p = k_p \Theta_p S_p ; S_p = 4 a_o (b_o + b_l) ; \Theta_p = 2, k_p = 2 \times 14,4 \times 10^{-6} \text{ \$/mm}^2 \quad (61)$$

O custom total é formulado de acordo com a sequência de fabrico e inclui o custo do material, montagem, soldadura e pintura.

$$K = K_M + 4(K_{F0} + K_{F1} + K_{F2} + K_{F3} + K_{F4}) + K_{F5} + K_{F6} + K_p \quad (62)$$

Custo do material,

$$K_M = k_M \rho V_6 , k_M = 1,0\text{€} / \text{kg} \quad (63)$$

3.5. Dados numéricos

$a_o = 15000$, módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, módulo de elasticidade transversal $G = 0,81 \cdot 10^5$, densidade $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6}$ kg/mm³, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, perfis UB

4. FIABILIDADE DA ESTRUTURA

Admite-se que: (i) a configuração genérica e o comprimento dos membros são valores determinísticos; (ii) os modos de cedência são a encurvadura global e local e deslocamentos máximos; (iii) a intensidade das cargas estáticas que definem o vector de carga são aleatórios, mas os locais em que estão aplicadas é determinístico; (iv) as tensões e deslocamentos são aleatórios, mas as posições determinísticas. Se a função de estado limite $g(x)$ for linear nas variáveis aleatórias x e seguir a distribuição normal, a probabilidade de rotura pode ser escrita

em termos da margem de segurança M ,

$$P_F = P\{g(x) \leq 0\} = P(M \leq 0) \quad (64)$$

que pode ser obtida a partir da variável normal padronizada

$$P_F = \Phi(-\beta) \quad (65)$$

em que β é o índice de fiabilidade obtido a partir do quociente

$$\beta = \mu_M / \sigma_M \quad (66)$$

O índice de fiabilidade tem a interpretação geométrica da distância da linha (ou hiperplano) que constitui a fronteira entre o domínio seguro e a rótula. Neste caso, a probabilidade de rotura reduz-se a um conjunto simples de cálculos que envolvem as médias e desvios padrões das variáveis aleatórias básicas. Se a função de estado limite não for linear nas variáveis aleatórias x , tem que se linear a superfície de rotura representado no espaço das variáveis padronizadas u ,

$$u_i = (x_i - \mu_{x_i}) / \sigma_{x_i} \quad (67)$$

Como se desconhece à partida o ponto da superfície de rotura a linearizar, utiliza-se um processo iterativo. Admitindo que a função de estado limite é diferenciável, considera-se o algoritmo:

$$\alpha_i = -\partial g(\beta\alpha) / \partial u_i \left[\sum_{j=1}^n \partial g(\beta\alpha)^2 / \partial u_j \right] \quad (68)$$

$$G(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \dots, \beta\alpha_n) \quad (69)$$

que termina no ponto de rotura u^* ao qual corresponde o índice de fiabilidade β .

A probabilidade de rotura que corresponde a β é normalmente muito reduzida. Cada função de estado limite está associada a uma probabilidade de rotura correspondente a esse modo. Para obter a probabilidade de rotura da estrutura tem que se considerar os modos individuais. O procedimento mais simples seria admitir uma dependencia estatística entre modos perfeita (limite inferior de Cornell) ou considerá-los estatisticamente independentes (limite superior de Cornell). O intervalo entre estes limites é normalmente significativo, uma vez que não se considera nesta aproximação a correlação entre modos de rotura. O método de Ditlevsen [8] incorpora a dependência estatística entre dois modos quaisquer e estreita consideravelmente os limites na fiabilidade da estrutura. Outras aproximações à probabilidade de rotura da estrutura evitam o cálculo das probabilidades condicionais entre modos de rotura. Refere-se a título de exemplo o PNET [9] que requer a determinação dos coeficientes de correlação entre pares de modos de rotura. O coeficiente de demarcação define um coeficiente de correlação entre modos. Para valores superiores ao coeficiente de demarcação consideram-se os modos como perfeitamente correlacionados e aqueles com correlação baixa são independentes.

5. ESTRATÉGIA DE OPTIMIZAÇÃO

5.1 Branch and Bound

O problema é não-linear e as variáveis de decisão são discretas. Uma vez que é reduzido o número dessas variáveis foi adoptada uma estratégia de branch and bound com enumeração implícita para obter a solução com menor custo. Os dois ingredientes são uma árvore combinatoria com nós definidos de algum modo e limites inferiores e superiores da solução óptima associados a esse nó. Deste modo é possível eliminar um conjunto significativo de soluções potenciais sem as calcular. Considera-se terminada uma solução parcial quando for obtida uma solução com variáveis discretas ou se o dimensionamento contendo ainda algumas das variáveis contínuas tenha um custo superior a um óptimo temporário. Se uma solução parcial for terminada, isto significa que todas as soluções discretas com base nessa solução contínua foram enumeradas implicitamente. Quando o último dos nós for terminado o algoritmo finaliza sendo o óptimo temporário a solução pretendida. Na árvore combinatoria são enumerados todos os nós de forma implícita ou explícita.

Consideram-se três níveis na árvore combinatoria. Estipula-se no topo da árvore o número de reforços n , correspondendo os dois níveis restantes aos perfis UB e à espessura t da coluna em caixão de secção quadrada. b_0 será obtido uma vez que sejam conhecidas as variáveis restantes.

Os mesmos níveis foram adoptados na placa celular apoiada, sendo determinados t_1 e t_2 no terceiro nível. Foi seguida uma regra forte para obter os nós do nível inferior, ou seja: cada nó pode ser ramificado em n_x nós, cada qual associado ao número de reforços na direcção x . Este procedimento exige a utilização de valores contínuos próximos das características dos perfis UB (b, t_f, t_w). Estas aproximações que dependem da altura são determinadas a partir dos dados correspondentes a todos os perfis. Do mesmo modo obtem-se uma expressão contínua para h . É necessário ter em atenção que as propriedades geométricas assim calculadas sejam subestimativas convexas das propriedades reais, de modo a que a solução obtida utilizando os valores reais dos perfis UB seja mais dispendiosa do que as obtidas utilizando as aproximações contínuas. No segundo nível da árvore combinatoria, os ramos correspondem à selecção dos reforços. As soluções discretas são determinadas no terceiro nível sendo escolhida a menor destas soluções como óptimo temporário.

5.2 Optimização com variáveis de decisão contínuas

Uma subestimativa consiste resolver o problema de optimização admitindo variáveis contínuas em lugar das discretas. Para optimizar em simultaneo o custo e as restrições, todos os objectivos tem de ser normalizados. Se for especificado um custo de referência K_0 , a redução deste objectivo consiste em,

$$g_1(t, n, h) = K(t, n, h) / K_0 - 1 \leq 0 \quad (70)$$

Outro objectivo decorre da restrição sobre a fiabilidade à encurvadura da coluna quadrada com a secção em caixão e a tensão devido à encurvadura local no caso da placa apoiada,

$$g_3(t, n, h) = \sigma_c / \sigma_{cr} - 1 \leq 0 \quad (71)$$

Um terceiro objectivo limita a probabilidade do deslocamento horizontal no topo da coluna ou do deslocamento vertical máximo da placa exceder os limites impostos,

$$g_3(t, h) = w/w_{\max} - 1 \leq 0 \quad (72)$$

A encurvadura local na coluna de secção quadrada é um problema determinístico do qual decorre outro objectivo. No caso da placa basta verificar a tensão de corte nos seus cantos. A optimização de Pareto melhora o dimensionamento, sendo obtidas soluções através da optimização da função escalar convexa [24]:

$$F(t, h) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[\sum_{j=1}^3 \exp \rho(g_j(t, h)) \right] \quad (73)$$

Esta função constitui uma aproximação convexa dos objectivos. Como alguns destes objectivos não tem uma expressão algébrica explícita, a estratégia adoptada consiste em resolver uma sequência de modelos aproximados. Utilizam-se os dois primeiros termos das séries de Taylor, daí resultando o problema de optimização:

$$\text{Min } F(t, h) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[\sum_{j=1}^3 \exp \rho \left(g_0(t, h) + \frac{\partial g_{0j}(t, h)}{\partial t} dt + \frac{\partial g_{0j}(t, h)}{\partial h} dh \right) \right] \quad (74)$$

Este problema possui uma solução analítica em termos das modificações das variáveis de decisão dt e dh . A resolução para um valor numérico particular de g_{0j} constitui uma iteração de (74). Impõe-se limites para as alterações nos valores das variáveis de decisão de modo a garantir a precisão das aproximações. Neste exemplo e como é diminuto o número de variáveis de decisão é possível determinar a solução analítica. No decurso das iterações aumenta-se o parâmetro de controlo ρ de modo a melhorar a qualidade da aproximação.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

De acordo com o dimensionamento tradicional por estados limites (nível I) considera-se a tensão $f_y=355$ MPa para o aço. Utilizando um factor de segurança para o aço de 1,10 e um coeficiente de variação 0,10 corresponde à tensão média 440 MPa. O valor de projecto do carregamento é $p_o= 0,0015$ N/mm² para a placa celular. No exemplo da secção em caixão quadrada considera-se a carga axial de projecto $N_x=3 \cdot 10^7$ N e o factor de segurança $\gamma_M=1,5$ de modo a determinar o a média do carregamento. Supõe-se que as variáveis aleatórias seguem a distribuição normal. A aleatoriedade do módulo de elasticidade não foi aqui considerada para simplificar a formulação, ainda que possa ser introduzida sem dificuldade.

Foi optimizada a placa celular apoiada nos quatro cantos para diferentes valores do coeficiente de variação da carga e p_F . A restrição/objectivo da fiabilidade associada ao deslocamento máximo é sempre activa mesmo que se considere $\phi=300$, sendo seleccionado o maior dos perfis UB disponíveis. As equações de estado limite associadas às restrições de tensão e de corte nos cantos são altamente improváveis. Na Tabela 1 são indicados os custos totais dos óptimos.

Tabela 1 Custo x 10³. Óptimos indicados a negrito

	$p_F=10^{-3}$	$p_F=10^{-4}$	$p_F=10^{-5}$
Cov=0.15	102.3	105.1	106.1
Cov=0.20	102.3	106.1	109.4
Cov=0.25	105.1	109.4	111.0

A Tabela 2 representa os dados correspondentes a estas soluções. Não há conclusões genéricas relativas ao número óptimo de reforços ou como se distribui o peso relativo do custo do material/custo de fabrico quando se alteram os dados. Há um conjunto de soluções discretas com valores próximos do óptimo, sendo este escolhido através da estratégia de enumeração implícita descrita.

A secção em caixão quadrada foi otimizada para diferentes valores do coeficiente de variação da carga e p_F . A restrição/objectivo da fiabilidade associada ao deslocamento máximo é activa quando se considera $\phi=300$ e irrelevante se $\phi=1000$. A equação de estado limite correspondente às tensões conduz a um valor da p_F baixo neste último caso. Na Tabela 3 são indicados os custos totais dos óptimos.

Tabela 2. Dimensionamento (em mm) dos óptimos

Custo x10 ³	n	t_1	t_2	h
102.3	5	4	4	1008
105.1	5	4	5	1008
106.1	5	5	4	1008
102.3	5	4	4	1008
106.1	5	5	4	1008
109.4	6	4	4	1008
105.1	5	4	5	1008
109.4	6	4	4	1008
111.0	4	8	4	1008

Tabela 3 Custo x 10³. Óptimos indicados a negrito

	$\phi=300$	$\phi=1000$
$p_F=10^{-3}$ Cov=0.15	52.0	55.5
$p_F=10^{-4}$ Cov=0.20	58.1	60.2
$p_F=10^{-5}$ Cov=0.25	63.0	63.9

Tabela 4. Dimensionamento (em mm) dos óptimos

Custox10 ³	n	t	b_o	h
52.0	8	5	3770	454.6
55.5	8	5	4800	403.2
58.1	9	5	4400	454.6
60.2	10	5	4875	403.2
63.0	8	5	4570	533.1
63.9	10	5	4985	454.6

Em todas os óptimos foi seleccionada a solução de menor espessura. Para menores deslocamentos foram escolhidas secções com valores maiores de b_o , menor perfil UB e mais reforços. O aumento da p_F e coeficiente de variação das cargas conduz a um aumento de b_o , n e/ou h , sendo efectuada pelo algoritmo a escolha da solução óptima.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Farkas, Discussion to the paper of Evas,R. & Shanmugam,N.E.:Simplified analysis for cellular structures, *J.Struct. Eng. ASCE*, 11 (10), 2269-2271, 1985.
- [2] K. Jarmai and J. Farkas, Cost calculation and optimization of welded steel structures, *J.Const. Steel Research*, 50, 115-135, 1999.
- [3] J. Farkas and K. Jármai, *Design and optimization of metal structures*. Chichester, Horwood, 2008.
- [4] J. Farkas and K. Jarmai, Optimum design and cost comparison of a welded plate stiffened on one side and a cellular plate both loaded by uniaxial compression, *Welding in the World* 50 (7-8), 74-78, 2007.
- [5]A.M. Hasofer and N.C. Lind, Exact and invariant second moment code format, *J.Eng. Mech Div.* 100 (1), 111-121, 1974.
- [6]L.M.C.Simoes, J.Farkas and K. Jarmai, Reliability-based optimum design of a welded stringer-stiffened steel cylindrical shell subject to axial compression and bending, *Struct. and Multidis. Optim.*,31 (2), 147-155,2006.
- [7] Det Norske Veritas (DNV) *Buckling strength analysis*. Classification Notes No.30.1. Høvik, Norway, 1995.
- [8]O. Ditlevsen, Narrow reliability bounds for structural systems, *J.Struct. Mech*, 7 (4), 453-472, 1979.
- [9] A.H.S. Ang and H. Ma, On the reliability of structural systems, Proc. *3rd Int. Conference on Structural Safety*, Trondheim, Norway, 1982.
- [10] L.M.C. Simões and A.B. Templeman, Entropy-based synthesis of pretensioned cable net structures, *Engineering Optimization*, 15, 121-140, 1989