

NOVOS ALGORITMOS DE DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS  
COM COMPORTAMENTO ELASTICO

Luis Miguel da Cruz Simões  
João Henrique Oliveira Negrão  
José Alberto Marques Lapa  
Departamento de Engenharia Civil  
Universidade de Coimbra, Portugal

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas novas técnicas de dimensionamento de estruturas com comportamento elástico, tendo em vista a sua utilização por um engenheiro não familiarizado com a programação matemática. Estes algoritmos são aplicados em dois tipos de situações que correspondem a variáveis de decisão contínuas ou discretas. No primeiro caso, o algoritmo consiste em resolver um conjunto de equações até se conseguir convergência, obtendo-se os multiplicadores surrogados através da maximização da entropia de Shannon. Se as variáveis pertencerem a um conjunto pré-determinado de secções, encontra-se uma boa aproximação para o óptimo pretendido através do método segmental que utiliza apenas a programação linear.

ABSTRACT

Recently developed methods for the sizing of elastic structures are considered in this work. They are extremely simple to operate and efficient, suggesting their potential use by a non-expert in mathematical programming. The algorithms are applied to problems involving continuous or discrete design variables. In the first case, the algorithm consists of solving alternatively a set of equations and maximizing a function of a single variable until convergence. Surrogate multipliers are obtained by maximizing Shannon's entropy function. When the member sizes must be chosen from a discrete set, a good approximation of the solution is found by a segmental method based upon linear programming.

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas que tem sido resolvido mais vezes nos trabalhos publicados sobre optimização de estruturas nos últimos trinta anos consiste em dimensioná-las de modo a reduzir o seu custo. Nas situações mais frequentemente estudadas determinam-se as áreas das barras de treliças hiperestáticas que suportam várias condições de carregamento e impõe-se restrições de modo a limitar tensões, deslocamentos e manter a topologia da estrutura. As treliças são um exemplo das estruturas em que a rigidez é proporcional à massa. Neste conjunto mais lato podem considerar-se discretizações por elementos finitos com elementos do tipo barra, membranas e painéis. Em estruturas reticuladas, quer a rigidez, quer os esforços internos dependem de uma forma não-linear das áreas dos membros. Por esse motivo, o domínio do programa matemático de dimensionamento tem uma forma mais irregular, não-convexa. Tem sido proposto um grande número de métodos que se baseiam em programação matemática, critérios de optimalidade e dualidade que estão referenciados em [1]. Neste trabalho são apresentados algoritmos para síntese elástica extremamente simples de implementar do ponto de vista computacional. A síntese de estruturas com comportamento elástico é efectuada com base na aplicação do princípio da entropia, formulada por Shannon para medir a incerteza num processo estocástico. Este método permite escolher o conjunto de restrições activas através da informação produzida pelo comportamento do modelo. Trata-se de uma grande vantagem em relação aos métodos baseados em critérios de optimalidade. A fase de optimização reduz-se à determinação do valor de um parâmetro (a partir do qual se calculam através de uma expressão simples os multiplicadores) de modo a maximizar o volume da estrutura resistente. Em alternativa, tendo por base os resultados obtidos através da utilização da entropia em programação com objectivos múltiplos que tem por finalidade melhorar simultaneamente um conjunto de condicionantes: custo, tensões, deslocamentos, respostas dinâmicas e fiabilidade. Os resultados são obtidos através da minimização de uma função escalar.

As estratégias que têm sido adoptadas para resolver problemas em que se limita a escolha de membros a um conjunto discretizado, baseiam-se em árvores combinatorias ou planos de corte. Estes algoritmos utilizam dualidade em maior ou menor grau. Como o problema é do tipo NP, o esforço computacional necessário em qualquer destes métodos cresce exponencialmente com o número de variáveis de decisão e para que sejam utilizáveis é necessária uma grande intervenção do programador. Por esse motivo é apresentado um método muito simples que se baseia no conceito de membros segmentais. Os resultados são obtidos por programação linear, evitando a natureza combinatoria da programação discreta.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE SÍNTESE ELÁSTICA

### 2-1. Optimização de Treliças

A escolha da treliça com peso (volume) corresponde ao programa matemático:

$$\min V = \sum_{i=1,n} l_i A_i \quad (1a)$$

$$\text{sa } \sum_{i=1,n} l_i N_{ij} N_{ik} / (E_i A_i) \leq \delta_k \quad ; \quad j = 1, \dots, J \quad (1b)$$

$$s_i^L \leq s_{ij} = N_{ij} / A_i \leq s_i^U \quad ; \quad k = 1, \dots, K \quad (1c)$$

$$A_i \geq A_i^L \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (1d)$$

O vector das variáveis de decisão é constituído pelas áreas das  $m$  barras  $A_i$ .  $l_i$ ,  $E_i$  são, respectivamente, o comprimento e o módulo de elasticidade da barra  $i$ . Nas restrições (1b) são impostos limites aos deslocamentos nodais e  $N_{ij}$ ,  $N_{ik}$  são o esforço normal na barra  $i$  causado pela condição de carregamento  $j$  e o esforço virtual na barra  $i$  associado com a força unitária virtual na coordenada  $k$  e cujo deslocamento é limitado a  $\delta_k$ . Se existirem  $J$  condições de carregamento e  $K$  deslocamentos máximos impostos tem de se considerar  $m=J \times K$  restrições do tipo (1b). (1c) são as restrições que limitam as tensões máximas admissíveis à compressão e à tracção na barra  $i$ , respectivamente  $s_i^L$  e  $s_i^U$ . Entrando apenas com os esforços máximos exercidos em cada uma das barras em todas as condições de carregamento, só há necessidade de considerar  $n$  restrições deste tipo.  $A_i^L$  é a secção mínima admissível para a barra  $i$ . A função objectivo (1a), que representa o volume da estrutura, é uma função linear das variáveis de decisão.

## 2-2. Optimização de Pórticos

Cada secção é caracterizada por três quantidades: área  $A_i$ , momento de inércia  $I_i$  e momento estático  $W_i$ . Admitindo-se uma variação contínua para o valor das áreas e pressupondo que estas quantidades estão relacionadas chega-se, para vigas universais, a expressão não-lineares do tipo:

$$I_i = c_1 A_i^2 = 0.1053 A_i^{2.65} \quad ; \quad W_i = c_3 A_i^4 = 0.2698 A_i^{1.82} \quad (2)$$

onde as unidades de  $I_i$ ,  $W_i$  e  $A_i$  são respectivamente  $\text{cm}^4$ ,  $\text{cm}^3$  e  $\text{cm}^2$ .

O problema de síntese elástica de estruturas reticuladas pode ser formulado do seguinte modo:

$$\min V = \sum_{i=1,n} l_i A_i \quad (3a)$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1,J} l_i M_{ij} \underline{M}_{ik} / (E_i I_i) \leq \delta_k \quad ; \quad j = 1, \dots, J \quad (3b)$$

$$s_i^L \leq s_{ij} = M_{ij} / W_i \leq s_i^U \quad ; \quad k = 1, \dots, K \quad (3c)$$

$$A_i \geq A_i^L \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (3d)$$

onde  $M_{ij}$ ,  $\underline{M}_{ik}$  são o momento flector na barra  $i$  causado pela condição de carregamento  $j$  e o momento virtual na barra  $i$  provocado pelo deslocamento  $k$ . Utilizando a expressão (2) para exprimir as propriedades das secções em termos das áreas, obtêm-se:

$$\min V = \sum_{i=1,n} l_i A_i \quad (4a)$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1,J} l_i M_{ij} \underline{M}_{ik} / (E_i c_1 A_i^2) \leq \delta_k \quad ; \quad j = 1, \dots, J \quad (4b)$$

$$s_i^L \leq s_{ij} = M_{ij} / (c_3 A_i^4) \leq s_i^U \quad ; \quad k = 1, \dots, K \quad (4c)$$

$$A_i \geq A_i^L \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (4d)$$

Este problema não é pois muito diferente da optimização de treliças embora aumente a não-linearidade das variáveis de estado (tensões, deslocamentos) relativamente às variáveis de decisão.

Admitindo que são conhecidos os esforços internos em cada ciclo de optimização e se mantêm constantes, pode escrever-se o problema genérico de

síntese elástica na forma simplificada:

$$\min V = \sum_{i=1,n} l_i A_i \quad (5a)$$

$$\text{sa } \sum_{i=1,n} c_{ik}/A_i^{c_2} \leq 1 \quad ; \quad k=1,\dots,m \quad (5b)$$

$$d_i/A_i^{c_4} \leq 1 \quad ; \quad i=1,\dots,n \quad (5c)$$

$$A_i^L/A_i \leq 1 \quad (5d)$$

Para se resolver o problema (5), as restrições são agrupadas numa única. Tem-se:

$$\min V = \sum_{i=1,n} l_i A_i \quad (6a)$$

$$\text{sa } \sum_{k=1,m} \lambda_k [ \sum_{i=1,n} c_{ik}/A_i^{c_2} - 1 ] + \sum_{j=1,n} \lambda_{m+i} [ d_i/A_i^{c_4} - 1 ]$$

$$+ \sum_{i=1,n} \lambda_{m+n+i} [ A_i^L/A_i - 1 ] \quad (6b)$$

Os multiplicadores  $\lambda_j$ , um para cada restrição, são chamados multiplicadores surrogados e satisfazem as condições de normalização e não negatividade,

$$\sum_{j=1,m+2n} \lambda_j = 1 \quad (7a)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (7b)$$

A utilização de multiplicadores surrogados não é nova na literatura de programação matemática (ref.[2]). Foi demonstrado que existe um conjunto óptimo de multiplicadores  $\lambda^*$  que resolve (6) se as secções das barras  $A_j^*$  daí resultantes também constituírem a solução do problema (5). Fixando os valores de  $\lambda^*$ , o problema (6) tem uma solução algébrica única. Como os multiplicadores não são contudo conhecidos "à priori", a dificuldade está em desenvolver uma metodologia que os permita ir actualizando até se chegar a  $\lambda^*$ . Esse assunto é abordado em seguida, utilizando-se o conceito de entropia de informação para calcular os valores dos multiplicadores  $\lambda$ .

Para determinar a solução algébrica do problema (6), considera-se o Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \beta) = & \sum_{i=1,n} l_i A_i + \beta \{ \sum_{k=1,m} \lambda_k [ \sum_{i=1,n} c_{ik}/A_i^{c_2} - 1 ] \\ & + \sum_{j=1,n} \lambda_{m+i} [ d_i/A_i^{c_4} - 1 ] + \sum_{i=1,n} \lambda_{m+n+i} [ A_i^L/A_i - 1 ] \} \quad (8) \end{aligned}$$

no qual  $\beta$  é o multiplicador de Lagrange que corresponde à restrição surrogada. As condições de estacionaridade de  $L(A, \beta)$  conduzem a um conjunto de  $N+1$  equações a  $N+1$  incógnitas:

$$\begin{aligned} l_i - \beta \{ \sum_{k=1,m} c_2 \lambda_k c_{ik} A_i^{-c_2} - 1 \\ + \lambda_{m+i} d_i A_i^{-c_4} - 1 + \lambda_{m+n+i} A_i^L A_i^{-2} \} = 0 \quad (9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,m} \lambda_k [ \sum_{i=1,n} c_{ik}/A_i^{c_2} ] + \sum_{j=1,n} \lambda_{m+i} [ d_i/A_i^{c_4} ] \\ + \sum_{i=1,n} \lambda_{m+n+i} [ A_i^L/A_i ] - 1 = 0 \quad (9b) \end{aligned}$$

As equações (9a)-(9b) são resolvidas em ordem às variáveis de decisão  $A_j$  e  $\beta$  vão dar o óptimo do problema (6) em função dos multiplicadores  $\lambda$ .

## 3. CONCEITOS BASICOS DE ENTROPIA

O programa de optimização genérico (não-linear e com restrições):

$$\text{Min } f(A) \quad i = 1, \dots, N \quad (10a)$$

$$\text{sa } g_j(A) \leq 0 \quad j = 1, \dots, M \quad (10b)$$

e a sua forma surrogada equivalente,

$$\text{Min } f(A) \quad i = 1, \dots, N \quad (11a)$$

$$\text{sa } \sum_{j=1, M} \lambda_j g_j(A) = 0 \quad (11b)$$

em que os multiplicadores  $\lambda$  satisfazem as condições de não-negatividade e normalização, foi estudada na ref.[3]. Se os multiplicadores forem interpretados de uma forma probabilística, ou seja: cada  $\lambda_j$  representar a probabilidade a probabilidade que a restrição correspondente  $g_j$  seja activa no óptimo, a restrição única (11b) tem um valor esperado nulo. Tendo por base essa interpretação probabilística dos multiplicadores é inteiramente lógico calcular os valores mais prováveis destes através do formalismo da entropia máxima de Jaynes (ref.[4]).

Como esquema de solução, propõe-se um algoritmo de duas fases que resolve o problema (11) e por conseguinte (10). Neste método é escolhido um conjunto inicial e valores para  $\lambda$ , de modo que  $\lambda_j^{[0]} = 1/M$ , ou seja: considera-se que todas as restrições são igualmente prováveis no óptimo. Resolve-se o problema (11) em ordem às variáveis  $A$  para os valores de  $\lambda_j^{[0]}$  especificados, obtendo-se  $A^{[0]}$  e  $g_j(A^{[0]})$ . Com estes valores de  $g_j(A^{[0]})$  obtém-se novas estimativas dos multiplicadores maximizando a entropia:

$$\text{Max } S = -K \sum_{j=1, M} \lambda_j^{[1]} \ln \lambda_j^{[1]} \quad (12a)$$

$$\text{sa } \sum_{j=1, M} \lambda_j^{[1]} = 1 \quad (12b)$$

$$\sum_{j=1, M} \lambda_j^{[1]} g_j(A^{[0]}) = \varepsilon \quad (12c)$$

onde  $S$  é a entropia de Shannon (ref.[5]) e  $K$  é uma constante positiva. A restrição (12c) traduz o valor esperado de (11c). Se no lado esquerdo de (12c) se encontrasse  $g_j(A^{[1]})$ , o lado direito seria nulo. Como não são conhecidos estes valores, a utilização de  $g_j(A^{[0]})$  introduz o erro  $\varepsilon$ . À medida que o processo iterativo converge,  $\varepsilon$  tende para 0. O problema (12) tem como solução analítica:

$$\lambda_j^{[1]} = \frac{\exp[\beta g_j(A^{[0]})/K]}{\sum_{j=1, M} \exp[\beta g_j(A^{[0]})/K]} \quad (13)$$

no qual o multiplicador de Lagrange  $\beta$  para a equação (12c) pode ser determinado substituindo (13) em (12c). Contudo, como  $\varepsilon$  não é unicamente determinado e  $K$  é uma constante, pode utilizar-se como parâmetro de controle  $\beta/K$ . Com os valores de  $\lambda^{[1]}$  obtém-se  $A^{[1]}$  e  $g(A^{[1]})$ . Fixando  $\beta/K$  e repetindo o procedimento, calcula-se  $\lambda^{[2]}$  e as iterações prosseguem até à convergência para  $\lambda^*$  e  $A^*$ , que são as soluções de (11) e (10). Para assegurar a convergência do algoritmo,  $\beta/K$  é positivo e não pode diminuir.

3-1. Algoritmo

1. Iteração  $k = 0$   
 $\lambda_j^{[0]} = 1/M \quad ; \quad j = 1, \dots, M$

2. Resolver:  
 Min  $f(A)$   
 sa  $\sum_{j=1, M} \lambda_j^{[k]} g_j(A) = 0$

que tem por solução  $A^{[k]}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . A solução deste problema pode ser encontrada utilizando as condições de estacionaridade (9a)-(9b). Manipulando estas expressões é possível separar as variáveis  $A_i$  e  $\beta$  que se encontram implicitamente relacionadas.

3. Verificar convergência:  
 $g_j(A^{[k]}) < \epsilon +, \quad \forall j \quad ?$   
 a) SIM  $\Rightarrow$  Terminar  $A^{[k]} = A^*$ .  
 b) NÃO  $\Rightarrow$  Passo 4.

4. Iteração  $k = k+1$  ; Escolher  $p = 1/K$  de modo a maximizar  $\beta$  e garantir que o quociente  $\beta/K$  não diminua.

$$\lambda_j^{[k]} = \frac{\exp[p \beta g_j(A^{[k-1]})]}{\sum_{j=1, M} \exp[p \beta g_j(A^{[k-1]})]} \quad (14)$$

Voltar ao Passo 2. Com este resultado, pode calcular-se em 2. um limite inferior para o ótimo pretendido.

3-2. Exemplos Numéricos

EXEMPLO 1 - São facilmente obtidos mínimos locais em grelhas mesmo que estas tenham pequena dimensionalidade. A grelha representada na Fig.1 está submetida às cargas uniformemente distribuídas  $q_1$  e  $q_2$  e concentrada  $P$ . Impõe-se como restrições as tensões admissíveis nas secções críticas  $s^U = -s^L = 140 \text{ N/mm}^2$ . Para a geometria e condições de carregamento a seguir indicadas,

Caso I	$q_1 = q_2 = 175 \text{ KN/m}$	$P = 0$	$l_1 = 254 \text{ cm}$	$l_2 = 305 \text{ cm}$
Caso II	$q_1 = q_2 = 17.5 \text{ KN/m}$	$P = 4.375 \text{ kN}$	$l_1 = 254 \text{ cm}$	$l_2 = 762 \text{ cm}$

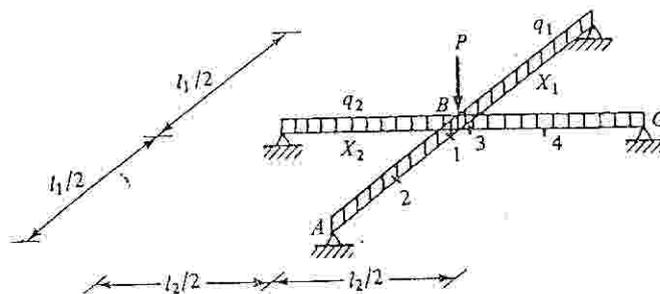


Figura 1

chegou-se aos resultados (ref.[5]):

	Mínimos Locais ( $A_1, A_2$ ) $\text{cm}^2$		Função Objectivo (Volume) $\text{cm}^3$
Caso I	151.6	46.5	52766
	35.5	165.2	58435
	85.8	121.3	57840
Caso II	62.6	39.4	45200
	14.2	121.3	94525

#### Aplicação do algoritmo:

1. Para resolver o Caso I consideram-se duas restrições, cada uma das quais está associada a um membro e representa a tensão máxima na respectiva barra. Para inicializar o algoritmo, faz-se  $d_i = 2.$ ,  $\lambda_i^{[0]} = 0.5.$

2-3. Manipulando as expressões (9a)-(9b), e fazendo  $c_2 = 2.65$  e  $c_4 = 1.82$  chega-se a:

$$\beta^{[k]} = \left\{ \sum_{i=1, \bar{n}} d_i^{1/2.82} \lambda_i^{1/2.82} l_i^{1.82/2.82} \right\}^{2.82/1.82} / 1.82 \quad (15a)$$

$$A_j^{[k]} = (1.82 \beta^{[k]} d_j \lambda_j / l_j)^{1/2.82} \quad (15b)$$

que dão os valores de  $\beta^{[0]} = 2894.$  e as variáveis de decisão  $A_1 = 9.8$   $A_2 = 9.1 \text{ cm}^2.$  Como este resultado excede às tensões admissíveis, aumentam-se proporcionalmente as áreas até ao dimensionamento 119.8 e 112.3  $\text{cm}^2$  com um volume de 64680  $\text{cm}^3$  e que cumpre as restrições.

4-2. Determina-se o valor de  $p$  que maximiza  $\beta^{[1]}$ . Os multiplicadores surrogados  $\lambda_i^{[1]}$  são calculados a partir de (14), utilizando  $\beta^{[0]}$  e  $g(A^{[0]})$ .  $d_i$  é calculado através do quociente  $\max |M_i|/c_3$  que se divide pela tensão admissível respectiva. Obtem-se a solução  $\beta^{[1]} = 30552.$ ,  $A_1 = 119.8$   $A_2 = 82.6 \text{ cm}^2$  com um volume 55601  $\text{cm}^3.$

3-4-2. A solução com áreas proporcionais que pertence ao domínio é  $A_1 = 136.0$   $A_2 = 93.7 \text{ cm}^2$  que tem um volume 63107  $\text{cm}^3.$  Na iteração seguinte chega-se a  $\beta^{[2]} = 29362.$ ,  $A_1 = 135.8$   $A_2 = 62.2 \text{ cm}^2$  com um volume 53438  $\text{cm}^3,$  a que corresponde o ponto pertencente ao domínio  $A_1 = 146.8$   $A_2 = 67.2 \text{ cm}^2$  que tem um volume 57781  $\text{cm}^3.$

Na terceira iteração obtem-se  $\beta^{[3]} = 28425.$ ,  $A_1 = 146.8$   $A_2 = 47.4 \text{ cm}^2$  com um volume 51734  $\text{cm}^3$  a que corresponde o dimensionamento  $A_1 = 150.6$   $A_2 = 48.6 \text{ cm}^2$  que tem um volume 53078  $\text{cm}^3$  que cumpre as restrições impostas. Este resultado difere 0.6 % do óptimo global. Aplicando o mesmo algoritmo ao Caso II verifica-se convergência ao fim de duas iterações.

EXEMPLO 2 - Considere-se a grelha representada na Fig.2 que está sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 175 kN/m nas vigas longitudinais ( $l_1 = 4 \times 152 \text{ cm}$ ) e descarregada nas vigas transversais ( $l_2 = 4 \times 127 \text{ cm}$ ). Admitindo simetria no dimensionamento só se consideram oito variáveis de decisão

$X_1, \dots, X_8 = A_1, \dots, A_8$ . Os momentos de inércia e estático são calculados através das equações (2). Impõe-se limites inferiores nas variáveis de decisão  $A^L = 32 \text{ cm}^2$  e para limites superiores e inferiores nas tensões das barras toma-se para tensões admissíveis,  $s^U = -s^L = 140 \text{ N/mm}^2$ . Esta grelha possui vários mínimos locais, nomeadamente:

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	Volume
208.	250.	202.	237.	47.	44.	48.	45.	428525.
35.	35.	335.	396.	97.	108.	80.	139.	413582.

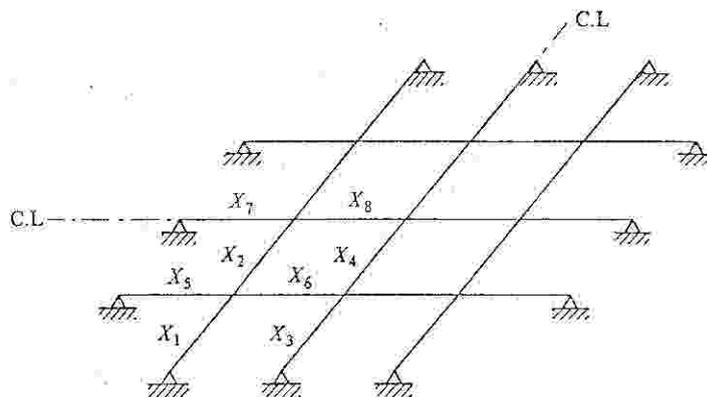


Figura 2

No gráfico da Fig.3 está representada a evolução do volume das soluções obtidas com o número de iterações.

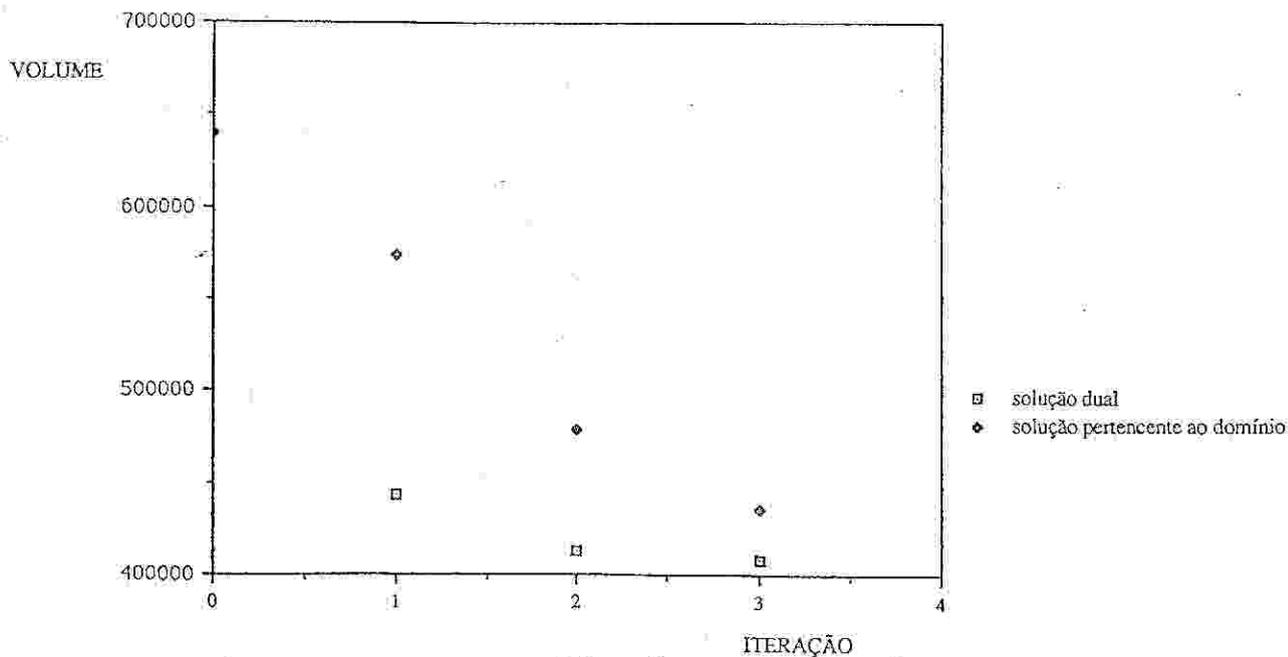


Figura 3

A solução que satisfaz as restrições encontrada ao fim de três iterações é,

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	Volume
96.	96.	280.	351.	55.	59.	162.	191.	435142.

O algoritmo conduz em três iterações a uma solução com um volume superior em 5% ao mínimo local de menor volume. Em relação às soluções obtidas por programação matemática, este resultado conduz a uma distribuição mais harmoniosa das áreas sem que o volume (e o custo) seja muito superior. De notar que foi possível melhorar o volume 47% em relação ao dimensionamento inicial com áreas semelhantes, sendo apenas necessárias três iterações.

#### 4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OBJECTIVOS MÚLTIPLOS

Um outro esquema, que evita as duas fases descritas no algoritmo anterior, explora a ideia da entropia calculando indirectamente os multiplicadores  $\lambda$ . Pretende-se minimizar um conjunto de objectivos e que são no caso de treliças: o volume da estrutura (1a), os deslocamentos (1b), as tensões admissíveis (1c) e os limites inferiores nas áreas dos membros (1d). Em primeiro lugar, formulam-se os objectivos numa forma normalizada. Se  $V$  representar um volume de referência, para reduzir este valor é necessário que,

$$\sum_{i=1,n} l_i A_i \leq V \quad \Rightarrow \quad g_1(A) = \sum_{i=1,n} l_i A_i / V - 1 \leq 0 \quad (16a)$$

De um modo análogo (1b)-(1d) vem,

$$g_2(A) = \sum_{i=1,n} N_{ij} N_{jk} / (E_i A_i \delta_k) - 1 \leq 0 \quad (16b)$$

$$g_3(A) = s_{ij} / s_i^U - 1 \leq 0 \quad (16c)$$

$$g_4(A) = -s_{ij} / s_i^L + 1 \leq 0 \quad (16d)$$

$$g_5(A) = -A_i / A_i^L + 1 \leq 0 \quad (16e)$$

Este problema com objectivos múltiplos pode ser enunciado no formato minimax,

$$\text{Min}_A \quad \text{Max}_{j \in J} (g_1, \dots, g_j, \dots, g_J) \quad (17)$$

##### 4-1. Optimização Minimax

Foi demonstrado na ref.[7] que o problema de optimização minimax (17) pode ser resolvido através da minimização da função escalar:

$$\text{Min}_A \quad \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(A) \rangle = \text{Min}_A (1/\rho) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[\rho g_j(A)] \right\} \quad (18)$$

para valores crescentes de  $\rho$  no intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$ .

Obtem-se a inequação (19) através da desigualdade de Cauchy. Esta expressão transforma-se numa igualdade se o lado direito for maximizado em ordem a  $\lambda$  satisfazendo as condições de normalização e não negatividade dos multiplicadores  $\lambda_j$ .

$$\text{Min}_A \quad \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(A) \rangle \geq \text{Min}_A \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(A) - (1/\rho) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (19)$$

O segundo termo do lado direito da expressão (19) é constante relativamente à minimização nas variáveis  $x \in X$  e tende para 0 à medida que  $\rho \rightarrow \infty$ . A forma deste termo adicional é pois idêntica à função de entropia de Shannon, onde  $k=1/\rho$ .

#### 4.2. Análise das sensibilidades

Para calcular (16) é necessário verificar o modo como uma pequena mudança nas variáveis de decisão afecta o comportamento do sistema expresso através das variáveis de estado: esforços nas barras  $R$ , deslocamentos nodais  $u$ . Das relações da análise de estruturas:

$$K u = P \quad (20)$$

$$R = Q u \quad (21)$$

Diferenciando (20) em ordem a  $A_i$ , tem-se para os deslocamentos nodais:

$$\frac{\partial K}{\partial A_i} u + K \frac{\partial u}{\partial A_i} = \frac{\partial P}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial A_i} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} u \quad (22a)$$

dado que, em consequência da forma da estrutura não se modificar, ser nula a derivada da carga aplicada em ordem às variáveis de decisão. A sensibilidade para os esforços internos é calculada a partir de:

$$\frac{\partial R}{\partial A_i} = \frac{\partial Q}{\partial A_i} u + Q \frac{\partial u}{\partial A_i} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial A_i} = \frac{\partial Q}{\partial A_i} u - Q K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} u \quad (22b)$$

Deste modo as sensibilidades pretendidas podem ser calculadas sem ser necessário efectuar mais análises. Consideram-se carregamentos fictícios na estrutura e utiliza-se a inversa da matriz de rigidez já obtida.

#### 4.2. Optimização da função escalar

O problema minimax (17) tem por solução  $A^*$  que é igualmente a solução do problema de optimização escalar:

$$F = \text{Min}_A (1/\rho) \log \left\{ \sum_{j=1, J} \exp[\rho g_j(A)] \right\} \quad (23)$$

para valores crescentes de  $\rho$  no intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$ . Esta função escalar possui propriedades muito importantes do ponto de vista da optimização. Trata-se de uma aproximação convexa dos critérios, o que permite a utilização de algoritmos para optimização convexa. Por outro lado, o valor de  $\rho$  vai controlar a maneira como os critérios são satisfeitos. Linearizando os critérios  $g(A)$  no ponto  $A^0$  utilizando para isso as sensibilidades (22a)-(22b), tem-se:

$$F = \text{Min}_{\Delta A} (1/\rho) \log \left\{ \sum_{j=1, J} \exp \left\{ \rho \left[ g_j(A^0) + \sum_{i=1, m} (\partial g_j / \partial A_i)^0 \Delta A_i \right] \right\} \right\} \quad (24)$$

para valores crescentes de  $\rho$  no intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$ .

### 4-3. Exemplos numéricos

A grelha de oito barras do EXEMPLO 2 foi analisada pelo algoritmo baseado na optimização da função escalar. Como ponto de partida admite-se que todas as barras possuem as mesmas dimensões. No gráfico da Fig.4 está indicada a evolução do volume das soluções obtidas com o número de iterações. Em todas as iterações se considerou um parâmetro  $\rho$  constante e igual a 20. À medida que as iterações decorrem o intervalo de variação de  $\Delta A_i$  é alterado ( $0.6 A_i$  na primeira iteração que se reduz até  $0.2 A_i$ ). A solução obtida depois de 4 iterações é:

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	Volume
209.	252.	168.	172.	47.	53.	47.	110.	428915.

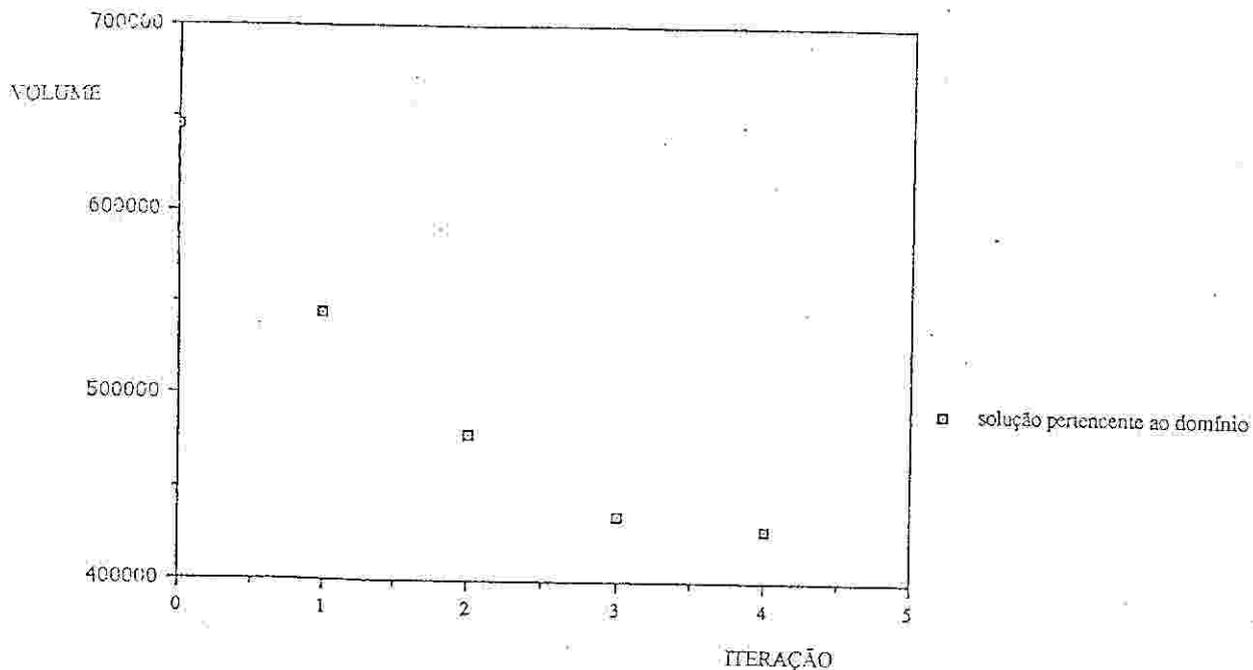


Figura 4

Esta solução é apenas 3.7% superior ao mínimo global e apresenta semelhanças com a primeira das soluções locais referenciadas nesse exemplo. De notar que na iteração anterior se tinha encontrado uma solução com um volume superior em 5.1% ao óptimo global.

No Caso II do EXEMPLO 1 este algoritmo converge à 2ª iteração, supondo que todas as barras tem as mesmas dimensões na 1ª iteração. Contudo, para o Caso I e entrando com o mesmo ponto de partida, o algoritmo converge após duas iterações para o mínimo local  $A_1 = 85.7$   $A_2 = 120.1$   $cm^2$   $V = 58879$   $cm^3$ . A convergência para a solução global só seria possível se no ponto de partida a barra 1 tivesse uma dimensão consideravelmente superior à da barra 2.

### 5. MÉTODO SEGMENTAL

No caso das variáveis de decisão só poderem pertencer a um conjunto pré-determinado de secções é necessário acrescentar a restrição,

$$A_i \in S = (s_d : d = 1, \dots, D) \quad (25)$$

para treliças e,

$$A_i, W_i, I_i \in S = (s_d, s_d', s_d''; d = 1, \dots, D) \quad (26)$$

para problemas de síntese de estruturas reticuladas. Estes problemas pressupõe que os membros tem um comprimento  $l_i$  dado e que as incógnitas a determinar são as secções  $A_i$ . Em lugar desta vai-se considerar que cada membro da estrutura é constituído por  $D$  segmentos, cada um dos quais representa um dos elementos do conjunto discretizado (ref.[8]).  $l_{id}$  passa a ser o comprimento desconhecido do segmento do membro  $i$  que tem por área  $s_d$ ,  $d=1, \dots, D$  (e, no caso de estruturas reticuladas, momento estático  $s_d'$  e momento de inércia  $s_d''$ ). Na Fig.5 está representado um membro constituído por três segmentos.

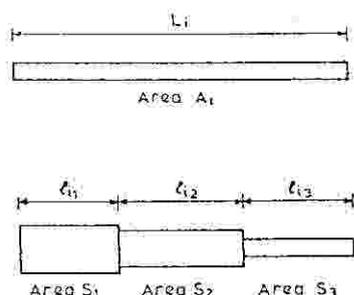


Figura 5 Membro convencional e segmental

As áreas das secções são agora conhecidas e os comprimentos dos segmentos passam a ser as incógnitas. Ao substituir um membro normal por um segmental, os comprimentos totais não se modificam,

$$\sum_{d=1, D} l_{id} = l_i \quad (27)$$

Reformulando o problema (3) de acordo com esta hipótese, tem-se para estruturas reticuladas:

$$\min V = \sum_{i=1, n} \sum_{d=1, D} s_d l_{id} \quad (28a)$$

$$\text{sa } \sum_{i=1, n} \sum_{d=1, D} l_{id} M_{ij} \underline{M}_{ik} / (E_i s_d'') \leq \delta_k \quad (28b)$$

$$\sum_{d=1, D} l_{id} = l_i \quad (28c)$$

$$l_{id} \geq 0 \quad (28d)$$

Adaptando os símbolos, pode redefinir-se o problema de síntese de treliças. A função objectivo de (28) é linear, sendo a soma dos volumes dos segmentos em todos os membros. As restrições relativas aos deslocamentos passam a ser lineares em virtude das variáveis serem os comprimentos dos segmentos e não as secções. A restrição que condiciona a escolha das secções a um conjunto discretizado está considerada implicitamente. As restrições que impõe limites inferiores nas áreas dos membros não são necessárias e são removidas. Igualmente podem ser retiradas as restrições relativas às tensões, desde que não se defina nenhum segmento cuja utilização violaria as tensões admissíveis para os esforços internos dados. As restrições adicionais (28c), uma para cada

um dos membros, e que não aparecem em (1) e (3) decorrem de (27) e asseguram a equivalência do comprimento dos membros segmentais e convencionais. Por outro lado, os comprimentos dos segmentos não podem ser negativos.

### 5-1. Características do método segmental

O programa (28) é linear com  $n \times D$  variáveis e  $n+m$  restrições e pode ser resolvido por um algoritmo do tipo Simplex. Uma das propriedades da programação linear é a existência de uma única solução para o conjunto de esforços internos  $N_{ij}, N_{ik}$ . Em estruturas isostáticas os esforços internos são independentes do dimensionamento. No caso de estruturas hiperestáticas, resolve-se uma sequência de programas lineares segmentais até que se verifique convergência nos valores dos esforços internos. A sequência destas soluções não vai forçosamente convergir para o mínimo global do programa de síntese elástica com variáveis discretas. Contudo, para cada conjunto de valores  $N_{ij}, N_{ik}$  a solução segmental dá um limite inferior bastante aproximado dos resultados da programação discreta. Outras características do método segmental podem ser deduzidas a partir do quadro do Simplex. Se  $m$  representar o número de deslocamentos satisfeitos no limite, a solução do problema (28) tem  $n+m$  comprimentos de segmentos não nulos, sendo pelo menos um para cada um dos membros. Isto quer dizer que a solução possui  $m$  membros com vários segmentos e  $n-m$  membros compostos por um único segmento, o que é excelente porque  $m$  é um número muito pequeno, muito menor que o número de membros  $n$ .

### 5-2. Determinação de uma solução discreta

O dimensionamento da estrutura com variáveis discretizadas só pode ter um segmento por membro. Por esse motivo é necessário arredondar a solução do método segmental. Para isso pode simplesmente escolher-se em cada um dos membros com mais do que um segmento a maior secção. O resultado obtido satisfaz todas as restrições e constitui um limite superior ao resultado da programação discreta bastante aproximado em virtude do arredondamento só se efectuar num número reduzido de membros. Ainda é possível refinar esta aproximação no quadro do Simplex obtido depois do arredondamento, substituindo por pivotagem cada um dos membros por secções com menor calibre e verificar se estas soluções continuam a satisfazer as restrições.

### 5-3. Exemplo Numérico

EXEMPLO 3 - Para exemplificar a utilização do método segmental dimensiona-se o pórtico da Fig.6 utilizando o conjunto de perfis INP 24 a 32. Estes perfis tem características geométricas próximas, o que constituiria uma dificuldade para a convergência da programação discreta dado o elevado número de soluções potenciais com um volume semelhante. Para simplificar o exemplo não se consideram efeitos de encurvadura e instabilidade lateral. O carregamento é constituído por cargas horizontais de 20 kN actuantes ao nível de andar e cargas verticais de 60 kN em todos os nós e a meio das vigas. Todos os tramos tem 6 m de vão e os andares 3 m de altura. Impõe-se tensões admissíveis  $s^U = -s^L = 140 \text{ N/mm}^2$ . Os deslocamentos de qualquer membro, bem como os deslocamentos relativos dos andares não podem exceder  $l/400$ , onde  $l$  é o comprimento do vão (ou altura).

Utilizando uma secção constante em todas as barras (igual ao perfil mais elevado) para estabelecer os esforços internos na iteração inicial, observa-se

que os afundamentos das vigas do andar superior e as translação dos andares (com excepção do andar inferior) constituem as restrições do tipo (28b) potencialmente mais críticas.

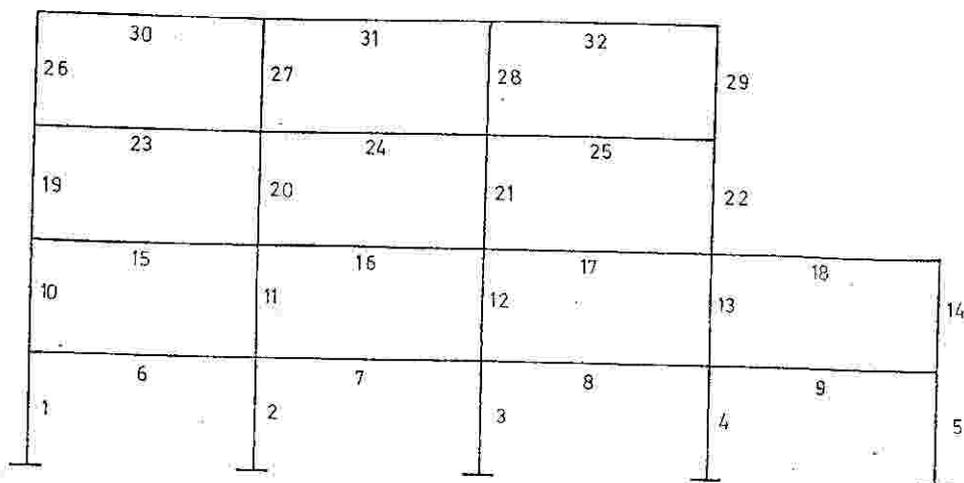


Figura 6

A solução do programa linear (28) conduziu a 2 troços com mais de um segmento: membros 18 e 25. Em todas as outras barras foi obtido um único segmento. No segundo ciclo o dimensionamento utiliza estes perfis e a secção maior nos membros com mais do que um segmento.

Reanaliza-se a estrutura a fim de obter o conjunto de esforços internos correspondente. O momento flector obtido na secção 30 conduz a tensões superiores às admissíveis. Por esse motivo, na iteração seguinte não se permite este membro seja constituído por troços representativos de secções que não resistem ao momento flector aplicado. A solução do programa linear (28) com o novo conjunto de esforços internos possui 2 troços segmentados, que correspondem aos membros 22 e 29.

Este procedimento foi repetido até que na 4ª iteração o algoritmo converge para uma solução com um volume 859927 cm<sup>3</sup>. O dimensionamento correspondente será:

INP	membros
24	1, 10, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32
26	30
28	7, 8, 13, 24
30	9, 12, 16, 22
32	2, 3, 4, 5, 6, 11, 14, 15, 17, 20, 21, 23

De notar que a utilização de diferentes pontos de partida poderiam conduzir a soluções distintas. Por exemplo, a utilização na 1ª iteração dos esforços internos obtidos utilizando as secções com menor calibre conduziria a um dimensionamento com um volume 859810 cm<sup>3</sup> na 5ª iteração. Relativamente ao dimensionamento acima indicado, este diferia nas barras 7 (onde seria necessário um INP 30) e 13 (INP 26).

## CONCLUSÕES

A utilização do formalismo da entropia máxima conduz a um processo simples e rápido de actualizar os multiplicadores associados às restrições do problema de síntese de estruturas com comportamento elástico. Em lugar de seleccionar quais são as restrições activas e não activas na solução óptima e estimar os multiplicadores de Lagrange associados às primeiras, esta metodologia considera simultaneamente todas as restrições, embora com os diferentes pesos conferidos com base probabilística. Foram dimensionadas grelhas que são caracterizadas por um comportamento não-convexo. O número de iterações necessárias para obter uma solução satisfatória é diminuto, o que torna este método competitivo em comparação com outros algoritmos muito mais sofisticados. Em todos os exemplos estudados verificou-se convergência para a solução global no algoritmo de duas fases. No segundo algoritmo apresentado, que utiliza a entropia de um modo implícito, a convergência podia verificar-se para qualquer uma das soluções locais sendo determinante o ponto de partida.

O conceito de membros segmentais permite dimensionar estruturas cujos membros pertencem a um conjunto pré-determinado de secções, utilizando quase sem alteração, rotinas de análise e de programação linear. Obtem-se com facilidade um limite inferior para o óptimo discreto e que se aproxima mais desta solução do que o resultado obtido no programa de síntese em que se admite variação contínua das secções. Não se pode contudo garantir que o limite superior obtido por arredondamento da solução segmental coincida com o mínimo global correspondente à programação discreta. Este só pode ser encontrado através de um algoritmo do tipo combinatório. Pode impor-se sem quaisquer dificuldades simetria no dimensionamento e/ou agrupamento de membros com as mesmas secções.

## AGRADECIMENTOS

Os autores desejam agradecer o apoio financeiro concedido pela JNICT (Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, Proj. 87.230).

## BIBLIOGRAFIA

1. Atrek, E., Gallagher, R.H., Ragsdell, K.M. e Zienkiewicz, O.C. (Ed.) "New Directions in Optimum Structural Design", Wiley, 1984.
2. Greenberg, H.J. e Pierskalla, "Surrogate Mathematical Programming", Op. Res., 18 924-939, 1970.
3. Templeman, A.B. e Li, X.S., "A Maximum Entropy Approach to Constrained Non-linear Programming", Engrg. Opt., 12, 191-205, 1987.
4. Jaynes, E.T. "Information Theory and Statistical Mechanics", The Physical Review, 106, 620-630, 1957.
5. Shannon, C.E. "A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, 27, 379-428, 1948.
6. Moses, F. e Onoda, S. "Minimum Weight Design with application to Elastic Grillages", Int. J. Num. Meth. Engrg., 1, 311-331, 1969.
7. Simões, L.M.C. e Templeman, A.B., "Entropy based Synthesis of Pretensioned Cable Net Structures", Engrg. Opt., 15, 1989.
8. Yates, D.F., Boffey, T.B. e Templeman, A.B., "A Heuristic Method for the Design of Minimum Weight Trusses using Discrete Member Sizes", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 37, 37-55, 1983.