

A Utilização de Normas Algébricas Para o Dimensionamento de Estruturas

The Use of Algebraic Norms for the Design of Structures

Luis Miguel da Cruz Simões*

SUMÁRIO

Neste artigo dá-se conta de uma nova metodologia que serve de base ao dimensionamento de treliças em que as tensões e deformações se encontram dentro de limites admissíveis, cuja implementação se revela de grande simplicidade. Dado que em estruturas hiperstáticas o número de equações que se tem de satisfazer é muito superior ao número de variáveis, toma-se para solução a estrutura associada à norma mínima.

ABSTRACT

This paper describes a new method that can be used as a basis for the sizing of trusses and frames behaving elastically. Since in redundant structures the number of equations that need to be solved is far smaller than number of undeterminacies one takes for solution the structure giving the least norm. Its implementation amounts to a great deal of simplicity and the results obtained are reasonably close to the optimum design.

1 — INTRODUÇÃO

O problema de optimização que corresponde ao dimensionamento de uma estrutura de peso mínimo é não-linear e não-convexo.

Contudo, as rotinas de programação matemática que são geralmente utilizadas para o resolver só podem garantir convergência para um mínimo local, dado que utilizam uma aproximação convexa do domínio do problema de síntese da estrutura.

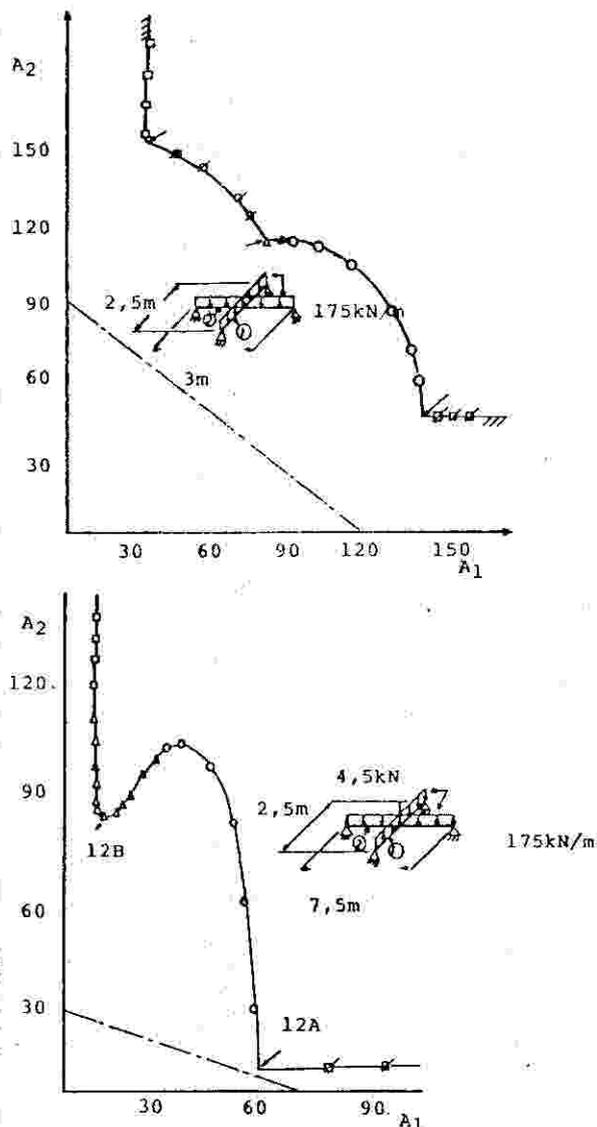
Um exemplo flagrante de comportamento não-convexo em estruturas reporta-se à grelha representada na Fig. 1.

Por outro lado, grande parte dos algoritmos geralmente disponíveis que linearizam o domínio não possuem uma manipulação fácil, sendo necessária a intervenção do programador em várias fases do processo de solução.

Parece pois justificável o desenvolvimento de uma metodologia alternativa que inclui algumas noções algébricas e que permite, na sequência de um número reduzido de reanálises, a obtenção de uma estrutura cujo custo se aproxima daquela em que o dispêndio de material seja mínimo.

Neste trabalho não se pretende obter o mínimo absoluto do programa de optimização (que só pode ser conseguido à custa de métodos mais apropriados a domínios não-convexos), nem tão pouco estudar em que condições é exacto o resultado fornecido por um algoritmo de programação matemática convexa.

Vai-se utilizar um método aproximado que conduz a uma estrutura, cujo consumo de material é muito próximo do mínimo absoluto. Fundamenta-se na solução de um sistema indeterminado de equações em que a soma do quadrado dos componentes é mínima.



(*) Professor Auxiliar, Departamento de Engenharia Civil Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra

Fig. 1.

2 — SÍNTESE ELÁSTICA DE TRELIÇAS HIPERSTÁTICAS

As equações de equilíbrio estático não são por si só suficientes para calcular os esforços nos membros de uma estrutura indeterminada, pelo que o problema de dimensionamento de treliças hiperstáticas, além de possuir um largo espectro de aplicações, possui interesse intrínseco. Problemas formulados para este tipo estrutural, onde só se consideram esforços axiais, podem ser facilmente adaptados de modo a permitir resolver estruturas reticuladas e laminares (lajes).

Na síntese elástica de treliças pretende-se minimizar o volume (/peso/custo) de material a utilizar, ie:

$$\min \{l\}^T \{a\} \quad (1)$$

onde $\{l\}$ é um vector que indica os comprimentos das barras e $\{a\}$ o vector que representa as variáveis de decisão: áreas dos membros.

Este objectivo é condicionado por restrições que dizem respeito à topologia da peça que se mantém constante, limitando para isso inferiormente as áreas de cada membro:

$$\{a\} \geq \{a_1\} \quad (2)$$

No método da rigidez-nodal, os deslocamentos dos nós provocados pelas cargas externas $\{\lambda\}$ são dados pelas equações:

$$[A] [K] [A]^T \{d\} = \{\lambda\} \quad (3)$$

onde $[A]$ é a matriz dos cosenos directores ($\beta \times m$), $[K]$ é uma matriz diagonal ($m \times m$) onde cada elemento representa a rigidez do membro correspondente (Ea_i/l_i . E é o módulo de Elasticidade) e $\{d\}$ é o vector das variáveis de estado: deslocamentos nodais.

No método das malhas-flexibilidade, as equações de equilíbrio podem ser obtidas escrevendo os esforços nos membros em termos da soma dos esforços provocados pelas cargas aplicadas $\{\lambda\}$ e pelas incógnitas hiperstáticas $\{p\}$.

$$\{n\} = [B_0] \{\lambda\} + [B] \{p\} \quad (4)$$

Uma característica das estruturas é que o produto da matriz de cosenos directores $[A]$ por $[B]$ conduz a uma matriz nula, ie:

$$[A] [B] = 0 \quad (5)$$

Em treliças o espaço das variáveis de decisão do problema tem dimensão $m = \alpha + \beta$. De notar que as linhas de $[A]$ definem um sub-espaço de dimensão β enquanto as colunas de $[B]$ estão associadas a um sub-espaço de dimensão α (grau de indeterminação estática).

Se os membros se comportarem de um modo elástico, as tensões nos membros tem de satisfazer as tensões admissíveis:

$$\{\sigma_1\} \leq \{\sigma\} = [S] [A]^T \{d\} \leq \{\sigma_u\} \quad (6)$$

De notar que o vector $\{\sigma\}$ é uma combinação linear de deslocamentos nodais, onde os elementos da matriz diagonal $[S]$ são os quocientes entre o módulo de elasticidade do membro e os respectivos comprimentos. Para entrar com os efeitos da encurvadura, podem-se diminuir as tensões de compressão (em primeira aproximação) de acordo com os resultados da coluna de Euler. No membro j , tem-se:

$$-a_j \sigma_{j1} - (\gamma \pi^2 E a_j^2 / l_j^2) \leq 0 \quad (7)$$

Limitando os deslocamentos nodais:

$$-\{d_u\} \leq \{d\} \leq \{d_u\} \quad (8)$$

Do exposto, pode concluir-se que para efectuar a optimização do volume/peso de uma treliça se minimiza (1) estando o domínio restringido pelas equações bilineares (3), inequações lineares (2), (6), (8) e inequações quadráticas (7).

Quando se pretender otimizar estruturas reticuladas, efectuem-se as necessárias adaptações nas matrizes A e F , mantendo-se o mesmo tipo de equações vectoriais basicamente inalteradas. Contudo as tensões admissíveis vão ser dadas pelo quociente entre o momento aplicado na secção crítica e o momento estático respectivo. Por outro lado podem-se impor novas restrições relacionadas com elementos estruturais e em particular nos pilares da base.

Quando se consideram vigas universais, chega-se aos resultados que relacionam as áreas das secções com outras propriedades geométricas:

$$a_j = 0.77 z_j^{2/3} ; a_j = 0.559 I_j^{1/2} \quad (9)$$

Estas expressões não alterando o tipo de problema, vão aumentar a não-linearidade.

3 — SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA

Se no sistema de equações

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad (10)$$

a matriz $[A]$ tiver β linhas e m colunas ($m > \beta$) e x, b forem vectores com m e β elementos, respectivamente, há um número infinito de soluções que satisfazem a igualdade.

Qualquer inversa $[A_{\#}]$ em que,

$$[A] [A_{\#}] [A] = [A] \quad (11)$$

designa-se pseudo-inversa de $[A]$. Uma pseudo-inversa vai dar a solução de mínima norma do sistema (que é independente de $\{b\}$) se $[A_{\#}] \{b\}$ tiver a mínima norma de entre todas as soluções desse sistema, ie:

$$\|A_{\#} b\| = \min \|x\| \quad (12)$$

Recorde-se que se a norma algébrica $\|x\|$ for definida pela expressão,

$$\|x\| = \sqrt{x^T C x} \quad (13)$$

onde $[C]$ é uma matriz positiva-definida (todos os valores próprios são positivos) e $[A]$ tiver traço β , a norma mínima é única.

A pseudo-inversa associada a essa solução é dada pelo produto.

$$[A_{\#}] = [C]^{-1} [A]^T ([A] [C]^{-1} [A]^T)^{-1} \quad (14)$$

A solução de norma mínima de $[A] \{x\} = \{b\}$ é equivalente ao programa matemático quadrático:

$$\min 1/2 \{x\}^T [C] \{x\} \quad (15)$$

$$sa \quad [A] \{x\} = \{b\}$$

$\{x\}$ é um vector de elementos reais

Conclui-se que a pseudo-inversa que permite obter a solução de norma mínima também pode ser obtida a partir do Lagrangeano.

4 — INTERPRETAÇÃO FÍSICA

Como as equações de equilíbrio podem ser escritas quer na forma rigidez nodal.

$$[A] \{n\} = \{\lambda\} \quad (16)$$

quer utilizando as relações malha-flexibilidade:

$$\{n\} = [B_0] \{\lambda\} + [B] \{p\} \quad (17)$$

Pode-se decompor o vector dos esforços axiais $\{n\}$ em duas componentes ortogonais $[P] \{n\}$ e $[T] \{n\}$ de modo que os traços de $[P]$ e $[T]$ sejam α e β , respectivamente.

Assim, tem-se:

$$([P] \{n\}, [T] \{n\}) = 0 \quad (18)$$

e

$$[P] \{n\} + [T] \{n\} = \{n\} \quad (19)$$

Multiplicando (19) por $[P]$ e $[T]$, onde $[T]$ vai ser dado pelo produto,

$$[T] = [A]^T ([A] [A]^T)^{-1} [A] = [A_{\#}] \quad (20)$$

chega-se a:

$$[P] \{n\} = [P] [B_0] \{\lambda\} + [B] \{p\} \quad (21)$$

$$[T] \{n\} = [T] [B_0] \{\lambda\} \quad (22)$$

em virtude de $[A] [P] = 0$, $[A] [T] = [A]$ e $[A] [B] = 0$.

Então o vector $[P] \{n\}$ é auto-equilibrante e em particular o vector $[P] [B_0] \{\lambda\}$ equilibra o carregamento $\{\lambda\}$.

Por outro lado o vector $[T] \{n\} = \{n_f\}$ está em equilíbrio com $\{\lambda\}$ de acordo com o indicado na Fig. 2.

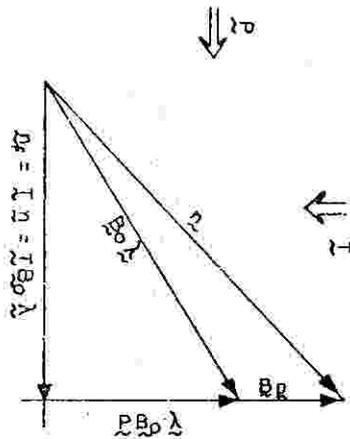


Fig. 2

$$\begin{aligned} \{n_f\} &= [T] \{n\} = [T] [B_0] \{\lambda\} \\ &= [A]^T ([A] [A]^T)^{-1} [A] \{n\} \\ &= [A]^T ([A] [A]^T)^{-1} \{\lambda\} \end{aligned} \quad (23)$$

De notar que $\{n_f\}$ é uma solução única que pode ser obtida conhecendo quer $\{\lambda\}$ quer qualquer conjunto de $\{n\}$. A partir da desigualdade de Cauchy-Schwartz pode concluir-se que o vector $[T] \{n\} = \{n_f\}$ no seu sub-espaço é o vector de menor comprimento.

$$([T] \{n\}, \{n\})^2 \leq ([T] \{n\}, [T] \{n\}) (\{n\}, \{n\}) \quad (24)$$

ou seja,

$$\{n_f\}^T [T] \{n\} = \{n_f\}^T \{n_f\} \leq \{n\}^T \{n\} \quad (25)$$

onde,

$$\{n_f\}^T \{n_f\} = \sum_{j=1, n} (n_{jf})^2 = \|n_f\|^2 \quad (26)$$

Da relação (27) pode inferir-se que numa estrutura isostática $\|n_f\|$ chega ao seu valor máximo, ie: $n_f^e = n^0 = n$, o que significa que $\|n_f^0\| = \|n^0\|$. Deste modo, numa estrutura hiperstática a área definida pela distribuição $\{n_f\}$ é a mínima entre todas as distribuições alternativas de $\{n\}$ em equilíbrio com $\{\lambda\}$.

5 — REANÁLISE DE RESULTADOS

Dado que o processo a seguir indicado é iterativo é de toda a conveniência a utilização de uma forma que permita obter facilmente uma boa aproximação da inversa da matriz de rigidez (positiva definida) de modo a reduzir o CPU utilizado para efectuar as inversões, sendo apenas necessário calcular uma vez $[K]_i^{-1}$. Como a topologia dos membros e ligações se mantém e o carregamento não se altera, os valores de $[A]$ e $\{\lambda\}$ não se modificam. Para,

$$[\Delta K]_i = [K]_{i+1} - [K]_i \quad (27)$$

Vai-se escrever o somatório

$$\begin{aligned} [K]_{i+e}^{-1} &= [K]_i^{-1} - [K]_i^{-1} [\Delta K]_i [K]_i^{-1} \\ &+ [K]_i^{-1} [\Delta K]_i [K]_i^{-1} [\Delta K]_i [K]_i^{-1} - \dots \end{aligned} \quad (28)$$

A convergência de (30) vai depender das mudanças operadas na rigidez dos elementos Δk_j . Para que se consiga convergência para valores de Δk_j acima de 0,4 decompõe-se o processo num dado número de passos até que o valor total de Δk_j seja atingido.

Uma treliça hiperstática possui como característica a invariância do vector das tensões/deslocamentos: Os seus esforços internos são função das secções dos membros. Contudo se todas as áreas forem multiplicadas por um factor de escala ρ positivo e as forças dos membros permanecerem constantes:

$$n(\rho a) = n(a) \quad (29)$$

Os esforços são pois funções homogéneas de grau $n=0$ das variáveis de decisão. A tensão em cada um dos membros j , $\sigma_j = n_j/a_j$ é pois uma função homogénea de grau $n-1$ em termos de

$$\sigma_j(\rho a) = 1/\rho \sigma_j(a) \quad (30)$$

Os deslocamentos nodais seriam igualmente afectados por um factor $1/\rho$ em virtude de serem uma combinação linear das tensões dos membros.

Fixando o conjunto das áreas, é possível determinar de uma forma única as tensões/deslocamentos que lhe corresponderia por inversão das equações de equilíbrio. Se as tensões/deslocamentos forem todas inferiores aos seus valores máximos é possível aumentá-las ($0 < \rho < 1$), de modo a reduzir o volume da peça até que pelo menos uma das tensões/deslocamentos atinja o valor máximo. Caso contrário, ie: se as tensões/deslocamentos forem superiores aos seus valores máximos (em valor absoluto), as variáveis de decisão teriam que ser multiplicadas por $\rho > 1$ de modo a reduzir as variáveis de estado até que estas pertençam ao domínio do problema.

6 — ALGORITMO

O algoritmo a seguir indicado permite obter soluções próximas dos óptimos dados pelas rotinas de programação matemática

Passo 1

1.1] Iteração $i=1$

Efectua-se a mudança de variáveis:

$$y_j = l_j n_j \quad (31)$$

Como ponto de partida vai-se determinar a norma $\{n\}$ (vector dos esforços axiais) a partir do sistema indeterminado.

$$[A] \{n\} = \{\lambda\} \quad (32)$$

que é equivalente a

$$[B]_1 \{y\} = \{\lambda\} \quad (33)$$

A solução deste sistema, que está em equilíbrio com $\{\lambda\}$ e tem a norma mínima obtida a partir do produto matricial:

$$\{n\} = [A]^T ([A]_1 [A]^T)^{-1} \{\lambda\} \quad (34)$$

Esta solução tem o significado geométrico da minimização da soma das superfícies formadas pelos componentes de $\{n\}$ em cada membro da estrutura, de entre todas as soluções em equilíbrio com $\{\lambda\}$.

Os valores das variáveis de decisão iniciais são obtidas a partir dos quocientes:

$$a_j = \max \{y_j / (l_j \sigma_{jt}), y_j / (l_j \sigma_{jw})\} \quad (35)$$

Passo 2

2.1] Iteração $= i+1$

Com os valores de $\{a\}$ e $\{\sigma\}$ obtidos na iteração anterior, determinar a solução de norma mínima que corresponde ao sistema de equações:

$$[B]_i \{x\}_{i+1} = \{\lambda\} \quad (36)$$

onde

$$[B]_i = [A] [D]_i$$

$[D]_i$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os produtos das tensões nos membros obtidos na iteração i , σ_{ji} pelas raízes quadradas do quociente das variáveis x_{ji} a dividir pelo comprimento do membro correspondente l_j . O vector x_{i+1} permite determinar um novo conjunto de áreas a_{j+1} , ie:

$$a_{j+1} = x_j / l_j \quad (37)$$

2.2] Com os valores de a^{i+1} assim obtidos, analisar a estrutura, proporcionando-a de modo a ter um volume mínimo sem deixar de cumprir as restrições relativas às variáveis de estado.

2.3] Convergência

- a) Se $\sum_{j=1, m} (a_{j+1} - a_j)^2 < \varepsilon$ Terminar.
b) Caso contrário, regressar ao passo 2.1].

7 — APLICAÇÕES

Os exemplos a seguir indicados encontram-se geralmente referenciados na literatura, servindo para verificar a eficácia dos resultados obtidos por diversos algoritmos.

TRELIÇA DE TRÊS BARRAS SUJEITA A UMA CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO

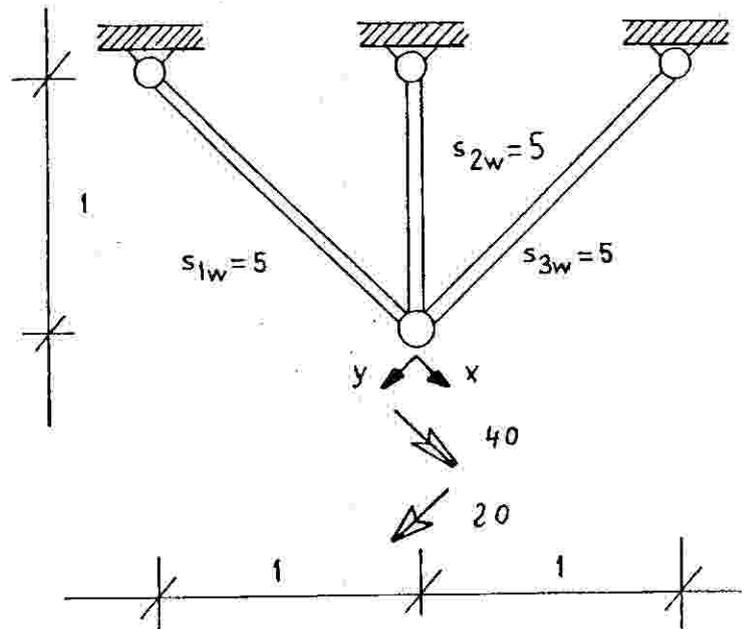


Fig. 3

Passo 1

Para,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{?} \\ [B]_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{?}$$

Obtém-se,

$$\{y\}^T = 28.3 \quad 28.3 \quad 0.0 \rightarrow \{a\}^T = 4.0 \quad 5.7 \quad 0.0 \\ \{\sigma\}^T = 5.0 \quad 5.0 \quad 0.0$$

Passo 2

$$[B] = \begin{bmatrix} 7.41 & 8.03 & 0. \\ 0. & 8.03 & 1.32 \end{bmatrix}$$

Colocando limites inferiores nos valores das áreas e reduzindo à escala, obtém-se,

$$\{a\}^T = 4.0 \quad 5.7 \quad 0.1 \\ \{\sigma\}^T = 5.0 \quad 5.0 \quad 0.0$$

que coincide com o valor obtido atrás e que corresponde a treliça com peso mínimo.

TRELIÇA DE TRÊS BARRAS SUJEITA A DUAS CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO ALTERNATIVAS

Neste problema toma-se para primeira estimativa dos esforços nos membros:

$$n_j = \max \{y_j^{1/2} / l_j, y_j^{2/3} / l_j\}$$

A matriz $[B_{ij}]$ é obtida a partir de $[B]^1$ e $[B]^2$, que são definidas a partir das tensões nas barras correspondentes a cada uma das condições de carregamento:

$$\{x\} = [B_{\#}]_{i+1} \{\lambda\} = [B]_{i+1}^T \left([B]_{i+1}^{-1} [B]_{i+1}^T + [B]_{i+1}^{-2} [B]_{i+1}^T \right)^{-1} \{\lambda\}^1 + [B]_{i+1}^T \left([B]_{i+1}^{-1} [B]_{i+1}^T + [B]_{i+1}^{-2} [B]_{i+1}^T \right)^{-1} \{\lambda\}^2$$

Resultado após 2 iterações 1% superior ao ótimo

	a_1	a_2	a_3
	6.97	2.28	2.81
Ótimo	7.02	2.14	2.76

Na Fig. 4 a evolução da percentagem de erro envolvida no decurso do processo iterativo está representada em gráfico.

TRELIÇA DE DEZ BARRAS CUJOS MEMBROS POSSUEM LIMITES INFERIORES NAS ÁREAS

Aplicando à treliça representada na Fig. 5 o algoritmo indicado, obtém-se após 4 iterações um resultado 2% superior a ótimo.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	8.2	.1	8.4	3.9	.1	.1	5.9	5.7	5.6	.1
Ótimo	7.9	.1	8.1	3.9	.1	.1	5.7	5.6	5.6	.1

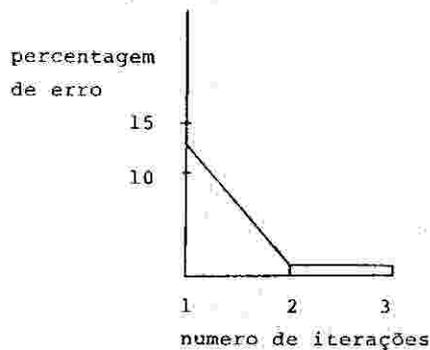


Fig. 4

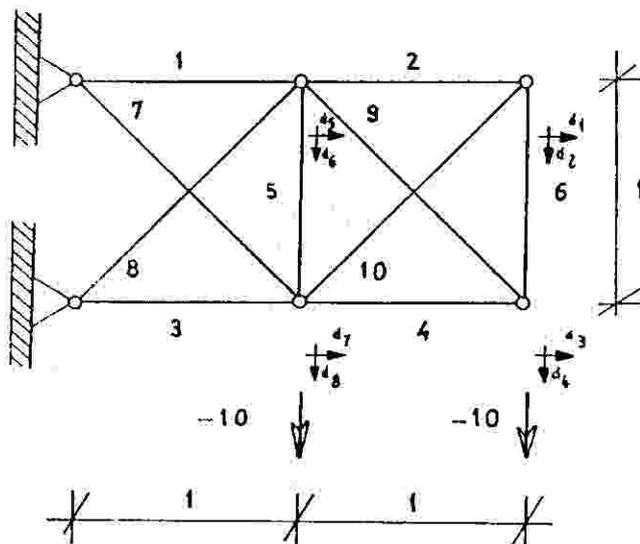


Fig. 5

A evolução do erro, que corresponde a diferença entre as soluções obtidas por este algoritmo e a solução ótima, estão representados a seguir.

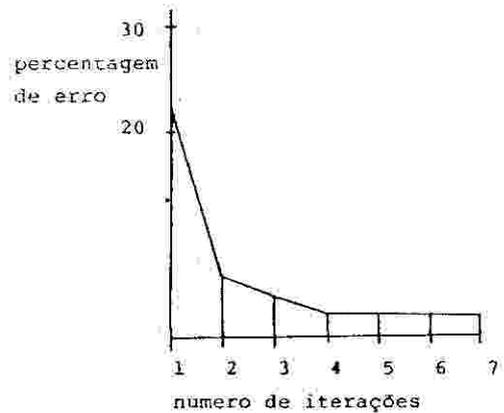


Fig. 6

TRELIÇA DE DEZ BARRAS EM QUE O MEMBRO 9 POSSUI UMA TENSÃO DE CEDÊNCIA SUPERIOR

Resultado após 4 iterações 4% superior ao ótimo

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	8.0	.1	8.3	4.3	.1	.1	5.9	5.5	4.0	.2
Ótimo	7.9	.1	8.1	3.9	.1	.1	5.8	5.5	3.7	.1

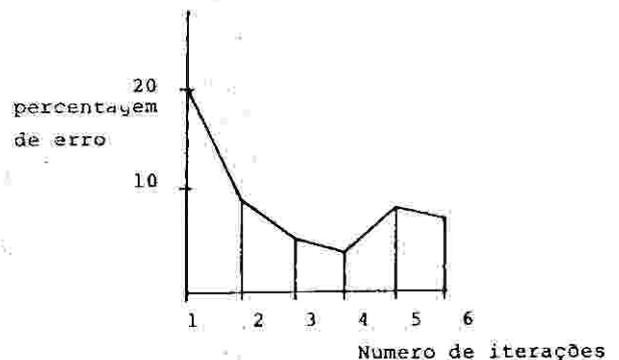


Fig. 7

TRELIÇA DE DEZ BARRAS ONDE OS DESLOCAMENTOS NODAIS SÃO LIMITADOS

Resultado após 6 iterações 13% superior ao ótimo

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	46.	.1	46.	22.	.1	.1	33.	32.	32.	.1
Ótimo	49.	.1	36.	24.	.1	1.	9.	34.	34.	.1

8 — CONCLUSÕES

Nesta comunicação foi apresentada uma nova metodologia para o dimensionamento de estruturas que se revela de grande simplicidade. A extensão para a síntese de lages, embora possível não é aqui desenvolvida. Estes resultados permitem ainda obter um ponto de partida para os diversos algoritmos de programação matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ARGYRIS, J. H., BRONHUMEL, O. E., ROY, J. R. E SCHARPF, D. W. — *A direct modification procedure for the displacement method*. AIAA J.9 1861-1869, 1971.
- [2] FUCHS, M. — *Linearized homogeneous constraints in structural design*. Int. J. Mech. Science 22, 33-40, 1980.
- [3] MOSES, F. E ONODA, S. — *Minimum weight design of structures xiii. applications to elastic grillages*, Int. J. for Num. Meth. in Engng. 1, 311-331, 1969.
- [4] KAVLIE, D. E POWELL, G. H. — *Efficient reanalysis of modified structures*, J. Struct. Division ASCE 97, 377-392, 1971.
- [5] PENROSE, P. — *A generalised inverse for matrices*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51, 406, 1955.
- [6] SIMÕES, L. M. C. — *Avoiding Local Optima in least volume trusses with discrete member sizes*. EURO VIII, Lisbon, 1986.
- [7] SIMÕES, L. M. C. — *Search for the global optimum in structural optimization*. NATO-ASI on Computer Aided Optimal Design, Tróia, 1986.
- [8] SIMÕES, L. M. C. — *Determinação do mínimo absoluto em problemas de síntese de estruturas*, VII Cong. Latino-Americano Met. Comp. em Engenharia, S. Paulo, Brasil, 1986.
- [9] RAO, C. R. E MITRA, S. K. — *A generalized inverse of matrices and its applications*, Wiley, 1971.
- [10] WILKINSON, J. H. — *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford University Press, 1965.

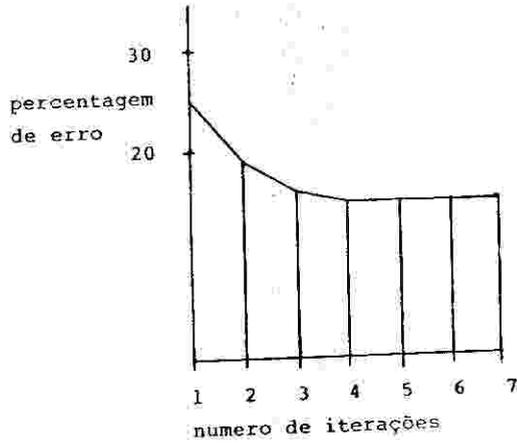


Fig. 8

TRELIÇA ESPACIAL

O resultado foi obtido após 6 iterações 11% superior ao ótimo.

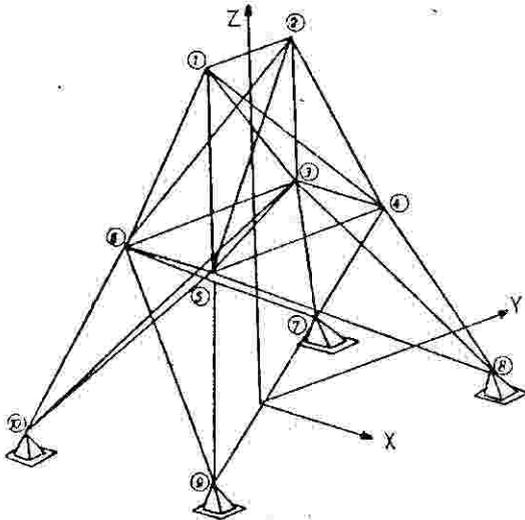


Fig. 9

PÓRTICO

O resultado foi obtido após 4 iterações 8% superior ao ótimo.

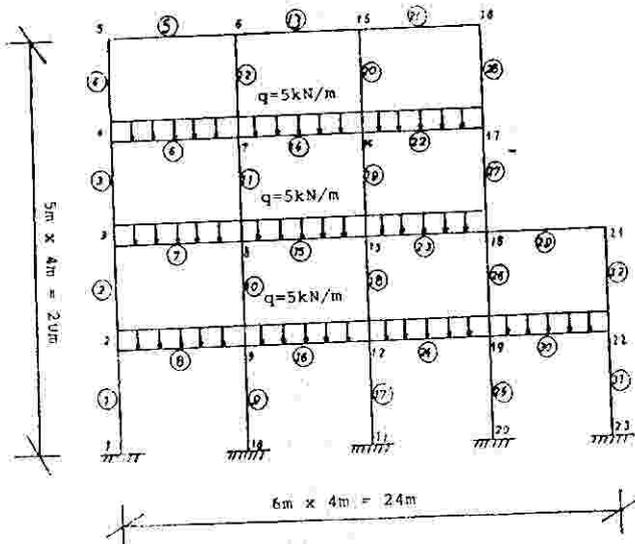


Fig. 10