

A Utilização da Programação Linear com Entrada Restringida na Base da Optimização Não-Convexa de Estruturas

Restricted Basis Linear Programming in Nonconvex Structural Optimization

Luis Miguel da Cruz Simões*

SUMÁRIO

Há muito tempo que é conhecido que as variáveis duais dão uma informação insuficiente em algoritmos aplicados a modelos de programação matemática não convexos. Neste artigo apresenta-se uma metodologia em que se utilizam funções duais em lugar de variáveis duais o que permite obter um limite inferior do óptimo global da síntese de estruturas em cada iteração. Este método consiste basicamente de um algoritmo de programação linear que inclui uma regra adicional em que uma relação de complementaridade tem de ser satisfeita em cada mudança de pivots (entrada na base restringida). O algoritmo é implementado através de exemplos numéricos simples.

ABSTRACT

It has long been recognized that dual variable provide insufficient information for the algorithms arising from mathematical programming models involving nonconvexities. In this paper it is presented a procedure where dual functions are used instead of dual variables, giving at each iteration a lower bound on the global optimum of elastic structures designed for minimum volume consumption. This method essentially consists of a linear programming algorithm supplemented by an additional rule which enforces a complementarity relation among variables at each pivotal step ("restricted basis"). The appropriateness of this strategy is verified by means of some simple numerical examples.

1 — INTRODUÇÃO

Há disponíveis um grande número de códigos de programação matemática especialmente desenvolvidos para problemas de optimização do peso/volume de uma estrutura e que utilizam aproximações convexas das funções envolvidas. Contudo em quase todos esses programas o ponto de partida vai ser determinante para prever o esforço computacional e a rapidez da convergência. Como na maior parte dos problemas o domínio não é convexo — e por esse motivo existem mínimos locais — o algoritmo vai convergir para a solução que mais se aproxima do ponto de partida. Por esse motivo não é possível excluir o risco de se chegar a uma solução local.

Os métodos de optimização combinatoria podem ultrapassar este tipo de problemas, embora a um custo de computação proibitivo [1]. Contudo, em algumas situações da optimização de estruturas o mínimo encontrado é o único e qualquer um dos métodos convexas chega rapidamente à solução.

Na referência [2] é apresentada uma condição que, se for satisfeita, garante que o mínimo local encontrado por um algoritmo de programação matemática convexa é o mínimo global em treliças. Infelizmente não existe uma única regra que permita clarificar o comportamento dos programas de optimização de estruturas em convexas e não convexas, dado que estes podem ser de qualquer tipo, dependendo dos valores dados às constantes do problema.

Os limites do domínio são impostos através de restrições no valor das tensões e deslocamentos admissíveis. Numa estrutura isostática e escolhendo devidamente o sistema de coordenadas estas restrições formam planos, o que não é válido em situação de hiperestaticidade. Aqui, os limites passam a ser curvos e em alguns dos casos constituindo um domínio não convexo, como acontece em problemas de optimização de grelhas [3].

Nos últimos quinze anos, o estado de complementaridade em programação matemática foi uma matéria prolífica. O método desenvolvido neste trabalho está centrado num algoritmo de programação linear ligeiramente modificado pela introdução de uma restrição de complementaridade, pelo que o esforço computacional necessário em cada iteração é da mesma ordem de grandeza que em programação linear. O problema de síntese elástica de treliças é transformado numa sequência de programas lineares com entrada na base restringida (PLBR) que permitem obter, em cada iteração, um limite inferior para a treliça de menor volume. No final de cada ciclo a solução anterior é cortada, adicionando-se ao PLBR novas variáveis ligadas por uma relação de complementaridade até que se encontre uma solução próxima do óptimo.

A utilização de PLBR em estruturas foi pela primeira vez utilizada para determinação do parâmetro da segurança em estruturas plásticas com encorçoamento [4], seguindo-se a sua aplicação na determinação da deformada no estado de colapso plástico incipiente [5] e na referência [6] onde foi efectuada uma análise não holonómica elasto-plástica.

* Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

2 — FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 — Optimização de Treliças

A escolha da treliça com volume mínimo tem a ver normalmente, com quatro tipos de restrições: equações de equilíbrio (2), tensões admissíveis (3), limites para os deslocamentos nodais (4) e áreas das secções (5). A estrutura articulada só pode suportar cargas aplicadas nos nós. A função objectivo(1), que representa o volume da estrutura, é uma função linear das variáveis de decisão (áreas dos membros), m é o número de membros e β o grau de hiperstaticidade cinemática.

$$\min \sum_{i=1,m} l_i a_i \quad (1)$$

$$\text{sa } \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,n} h_{ij} a_i d_j = \lambda_j \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \quad (2)$$

$$\sigma_i^l \leq \sum_{j=1,n} r_{ji} d_j \leq \sigma_i^u \quad (3)$$

$$d_j^l \leq d_j \leq d_j^u \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \quad (4)$$

$$a_i^l \leq a_i \leq a_i^u \quad ; \quad i=1,2,\dots,m \quad (5)$$

A não linearidade e não convexidade do programa matemático surge em consequência da bilinearidade das equações de equilíbrio.

2.2 — Optimização de pórticos

Cada secção é caracterizada por três quantidades: área a_i , momento de inércia I_i e momento estático W_i . Admitindo-se uma variação contínua para o valor das áreas e pressupondo que estas quantidades estão relacionadas chega-se, para vigas universais, a expressões não-lineares do tipo:

$$I_i = 0.1053 a_i^{2.65} \quad ; \quad W_i = 0.2698 a_i^{1.82} \quad (6)$$

onde as unidades de I_i , W_i e a_i são respectivamente cm^4 , cm^3 e cm^2 .

Formulação em programação matemática do problema de síntese elástica de estruturas

$$\min \sum_{i=1,m} l_i a_i \quad (7)$$

$$\text{st } \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,n} h_{ij} I_i d_j = \lambda_j \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \quad (8)$$

$$\sigma_i^l \leq (\sum_{k=1,m} \sum_{j=1,n} r_{kj} I_k d_j) / W_i \leq \sigma_i^u \quad (9)$$

$$d_j^l \leq d_j \leq d_j^u \quad ; \quad j=1,2,\dots,n \quad (10)$$

$$a_i^l \leq a_i \leq a_i^u \quad ; \quad i=1,2,\dots,m \quad (11)$$

3 — EXEMPLOS DE NÃO CONVEXIDADE EM ESTRUTURAS EM QUE O NÚMERO DE MEMBROS É FIXO

Apresentam-se em seguida exemplos onde o comportamento não convexo é visível.

3.1 — Exemplo

Minimização do volume de uma grelha. Este exemplo foi inicialmente apresentado em [3]. A grelha é constituída por duas vigas e tem de satisfazer as tensões admissíveis. As relações entre as características das secções a_i , I_i e W_i são as indicadas em (6). Consideram-se duas situações que a seguir se indicam.

3.1.a) Vigas com 3.0 e 2.5 m de comprimento, respectivamente a suportar uma carga uniformemente distribuída de 175 KN/m.

Este problema possui três mínimos distintos.

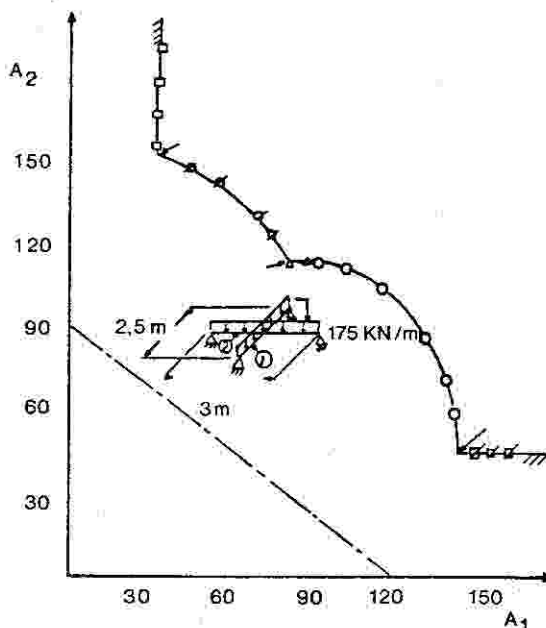


Fig. 1

3.1.b) Vigas com comprimentos 7.5 e 2.5 m carregadas com 175 KN/m e uma carga pontual de 4.5 KN aplicada no nó central.

Neste problema existem dois mínimos.

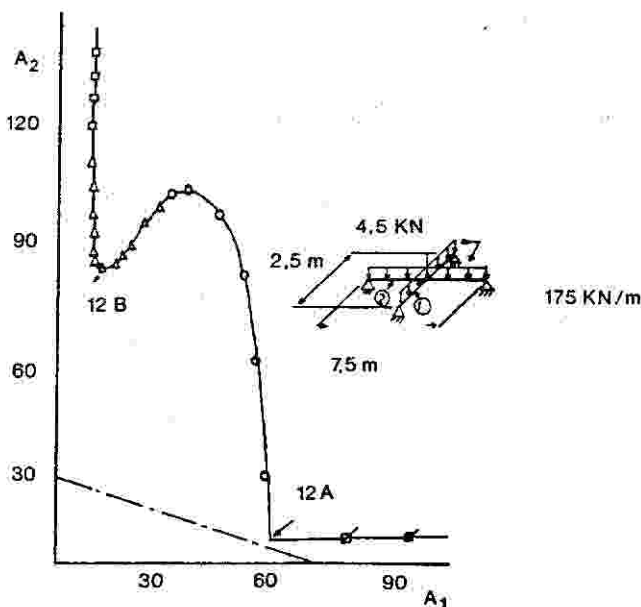


Fig. 2

3.2 — Exemplo

Minimização do volume de uma grelha. Este problema tem uma formulação idêntica ao primeiro e diz respeito à minimização do volume de uma grelha constituída por um material "sandwich". Pretende-se agora avaliar o efeito de

uma relação linear utilizada para relacionar momentos de inércia e o momento estático à área da secção. Foram analisadas duas situações:

3.2.a) As vigas têm de comprimento 30 e 31 m, inpectoriamente e estão sujeitas a uma carga uniformemente distribuída de 0.8 KN/m.

$$W_i = 0.5 y_i ; I_i = 0.3 y_i ; \sigma_i^U = -\sigma_i^L = 15 ; \\ y_i^L = 5.0 ; i = 1,2$$

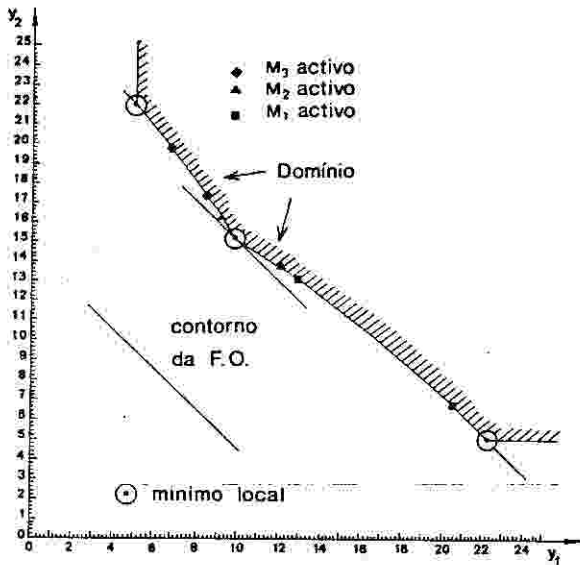


Fig. 3

Este problema é idêntico a 1.a), possuindo três mínimos locais. Ainda que se reduza a não linearidade das restrições que definem o domínio, o problema é do tipo não convexo. De notar que este problema é do tipo bilinear, portanto idêntico ao da optimização de treliças.

1.2.b) Vigas com 21 e 24 m carregadas por 1.2 KN/m e uma força pontual de 25 KN.

$$W_i = 5.0 y_i ; I_i = 25.0 y_i ; \sigma_i^U = -\sigma_i^L = 5 ; \\ y_i^L = 1.0 ; i = 1,2$$

Tal como 1.b), surgem dois mínimos. Mesmo com estes exemplos simples, podem-se tirar conclusões sobre a fiabilidade dos algoritmos que determinam o mínimo global.

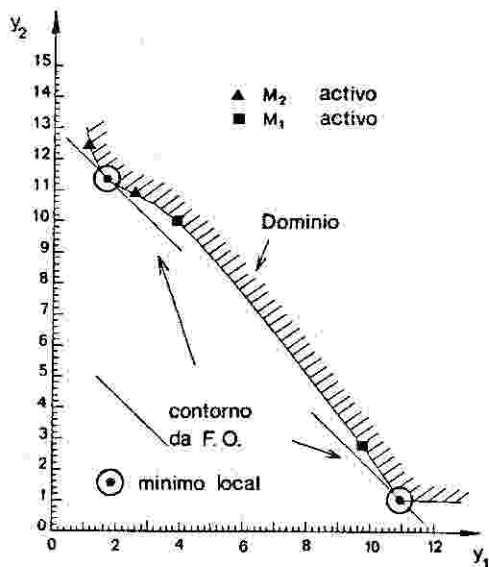


Fig. 4

3.3 — Exemplo

Minimização do volume de uma placa — Este exemplo diz respeito a optimização do volume de uma placa garantindo que as tensões e deslocamentos não ultrapassem os limites impostos. A placa é idealizada em 30 elementos e as variáveis são as espessuras de cada elemento. Com este problema de optimização pretende-se chegar à forma e posição óptima dos elementos que vão aumentar a rigidez da placa. A escolha do ponto de partida em [9] foi uma placa com espessura uniforme e que satisfaz as restrições impostas. Durante o processo iterativo representado na figura 5 foram encontrados mínimos locais, alguns dos quais estão indicados.

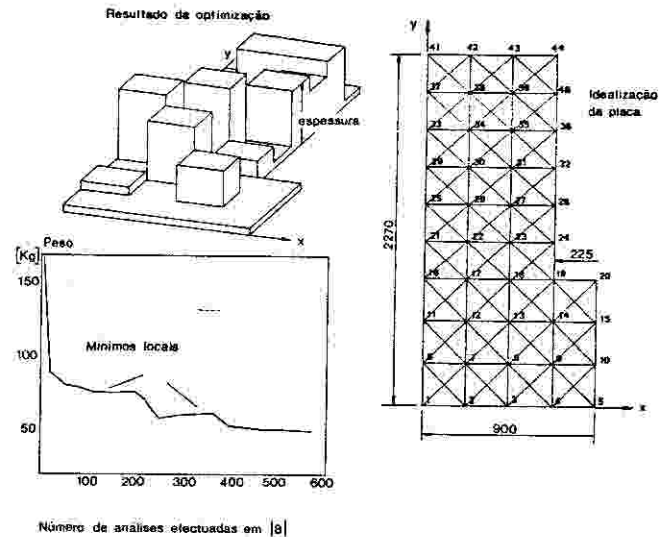


Fig. 5

4 — FORMULAÇÃO DAS FUNÇÕES DUAS

Fixando os valores das áreas dos membros numa treliça $\{a\}$, obtêm-se as tensões nos membros $\{\sigma\}$ e os deslocamentos nodais $\{d\}$ que lhes correspondem por inversão das equações de equilíbrio. Se alguns desses valores excederem as tensões admissíveis ou os deslocamentos máximos seria possível reduzir os valores das variáveis de estado (tensões, deslocamentos nodais) de um factor ρ se as áreas de todos os membros fossem multiplicadas por ρ . Deste modo é sempre possível chegar-se a uma solução em que um dos membros atinja a tensão limite ou que o deslocamento de um nó seja igual ao valor máximo estipulado. Com as necessárias modificações e aproximações, esta propriedade pode ser aplicada a estruturas reticuladas.

O problema de síntese elástica da treliça vai ser resolvido a partir de um conjunto de subproblemas. Utiliza-se a representação dual do domínio de modo a definir um problema colateral que é resolvido em cada iteração. Em cada um desses problemas, as restrições de equilíbrio e de comportamento são substituídas por um outro conjunto de restrições.

Ao fixar $\{a\} = \{a^L\}$ (na primeira iteração), o problema primal:

$$\min \{1\}^T \{a\} \quad (12)$$

$$\text{sa } \{g_i\}^T \{a\} + \{d\}^T \{H_i\} \{a\} + \{f_i\}^T \{d\} - b_i = 0 ; \\ i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\{0\} \leq \{d\} \leq \{d^U\} \quad (14)$$

Não tiver solução no seu domínio, isto significa que existe um raio dual, isto é: a função objectivo dual cresce de um modo infinito segundo uma direcção determinada. Para tanto, é necessário que a função objectivo dual seja positiva quando a não pertencer ao domínio do problema (1)-(5).

$$\max \sum_{i=1,s} u_i (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) - \sum_{j=1,n} v_j d_j^U \quad (15)$$

$$\text{st } [\sum_{i=1,s} u_i (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j - v_j \leq 0 \quad (16)$$

$$v_j \leq 0 \quad (17)$$

Isto é,

$$\max_{u,v} \sum_{i=1,s} u_i (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) - \sum_{j=1,n} v_j d_j^U \quad (18)$$

$$\text{st } v_j \geq [\sum_{i=1,s} u_i (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j \quad (19)$$

$$v_j \geq 0 \quad (20)$$

Ou seja,

$$\max_u \sum_{i=1,s} u_i (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) - \sum_{j=1,n} [\sum_{i=1,s} u_i (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j + d_j^U \quad (21)$$

onde os termos $[...]^+$ significam $\max\{[...]; 0\}$.

Se $\{u\}$ for a solução deste programa, conclui-se que a nãoção de corte,

$$-\sum_{i=1,s} u_i (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) + \sum_{j=1,n} [\sum_{i=1,s} u_i (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j + d_j^U \geq 0 \quad (22)$$

elimina o conjunto de variáveis de decisão $\{a\}$ que não pertencem ao domínio do programa primal. Ligando as variáveis duais através de uma restrição de normalização,

$$\sum_{i=1,s} u_i = 1 \quad (23)$$

O problema colateral que elimina os pontos $\{a\} = \{a^H\}$ é:

$$\min \{1\}^T \{a\} \quad (24)$$

$$\text{sa } -\sum_{i=1,s} u_i (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) + \sum_{j=1,n} [\sum_{i=1,s} u_i (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j + d_j^U \geq 0 \quad (25)$$

$$\{a^L\} \leq \{a\} \leq \{a^U\} \quad (26)$$

A solução de (24)-(26) vai ser testada para se saber se satisfaz as restrições (2)-(5). Se o problema primal ainda não tiver solução, determina-se uma segunda função de corte a partir do problema dual que é adicionada ao problema colateral. Este ciclo só terminará quando se obtiver uma solução suficientemente próxima do volume mínimo da treliça.

Como cada um dos problemas colaterais fornece uma estimativa inferior e não decrescente do resultado final, as variáveis de estado vão estar fora do domínio ($\rho > 1$) até que se chegue à solução óptima. Pode provar-se, utilizando para isso analogias com os métodos de programação com variáveis inteiras (por exemplo [9], [10]), que este tipo de algoritmo converge para a solução óptima com erro ϵ .

5 — FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COLATERAL EM PLBR

Cada problema colateral pode transformar-se num problema de complementaridade linear (LCP) através de introdução de duas variáveis reais não-negativas r_j e q_j e uma restrição por cada um dos termos $\max\{..., 0\}$ em (25), ou seja:

$$\min \{1\}^T \{a\} \quad (27)$$

$$\text{st } \sum_{i=1,s} u_i^e (b_i - \{g_i\}^T \{a\}) + \sum_{j=1,n} r_j^e d_j^U \geq 0 \quad (28)$$

$$q_j^e - r_j^e + [\sum_{i=1,s} u_i^e (\{a\}^T \{H_i\} + \{f_i\})]_j = 0 \quad (29)$$

$$\{a^L\} \leq \{a\} \leq \{a^U\} \quad (30)$$

$$r_j^e \geq 0; q_j^e \geq 0 \quad (31)$$

$$r_j^e q_j^e = 0; j=1,2,\dots,n; e=1,2,\dots,c \quad (32)$$

Para obter a solução do programa (27)-(32) é necessário cumprir as equações (32). O domínio deferido pelas restrições (28)-(32) é não convexo e a minimização do volume sujeito a esse conjunto de restrições é à primeira vista não-linear e não-convexo.

A característica mais saliente deste é que a única não-linearidade é constituída por condições de complementaridade, ou seja: em cada par de variáveis reais não negativas associadas por esta condição, uma tem de ser nula.

Esta situação conduz a que se adopte a seguinte estratégia para resolver o programa colateral: minimizar o volume sujeito às restrições lineares pelo método Simplex de programação linear e impor a condição de complementaridade impedindo que as variáveis $\{r\}$ e $\{q\}$ possam estar simultaneamente na base com valores positivos.

Estas restrições não são mais que uma regra adicional a ser satisfeita na operação de selecção do pivot para a mudança de base no algoritmo de programação linear e pode ser facilmente implementada no Simplex sem que daí resultem custos adicionais. O método de solução modificado nos termos propostos designa-se programação linear com selecção de base restringida (PLBR).

6 — APLICAÇÕES

6.1 — Exemplo

O Programa matemático que representa a grelha de duas barras indicada em 3.1.a) é:

$$\min l_1 y_1 + l_2 y_2 \quad (33)$$

$$\text{sa } 6E [I_1/(l_1/2)^3 + I_2/(l_2/2)^3] d_B = \lambda \quad (34)$$

$$\sigma_1^L \leq \sigma_1 = m_1/W_1 \leq \sigma_1^U \quad (35)$$

$$\sigma_2^L \leq \sigma_2 = m_2/W_1 \leq \sigma_2^U \quad (36)$$

$$\sigma_3^L \leq \sigma_3 = m_3/W_2 \leq \sigma_3^U \quad (37)$$

$$\sigma_4^L \leq \sigma_4 = m_4/W_2 \leq \sigma_4^U \quad (38)$$

$$y_1 \geq y_1^L; y_2 \geq y_2^L \quad (39)$$

onde, $l_1 = 250 \text{ cm}; l_2 = 750 \text{ cm}; E = 207 \text{ kN/mm}^2$;

$$a_1^L = a_2^U = 10 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_1^U = -\sigma_1^L = 140 \text{ N/mm}^2; i=1,\dots,4$$

$$\lambda = 5(q_1 l_1 + q_2 l_2)/8 + P = 114 \text{ KN}$$

Os momentos flectores m_1 e m_3 são dados pela expressão,

$$i_1 = m_{01} - [3EI_1/(l_1/2)^2] d_B \quad (40)$$

$$m_3 = m_{03} - [3EI_2/(l_2/2)^2] d_B \quad (41)$$

onde m_{01} e m_{03} são momentos de encastramento perfeito. As reacções nos apoios A e B são obtidas em função de m_1 e m_3 . A partir destas pode calcular-se m_2 e m_4 :

$$\text{Se } F_A = F_{0A} - m_1/(l_1/2) < q_1 l_1 \Rightarrow m_2 = F_A^2/(2q_1) \quad (42)$$

$$\text{Se } F_B = F_{0B} - m_3/(l_2/2) < q_2 l_2 \Rightarrow m_4 = F_B^2/(2q_2) \quad (43)$$

Para aplicar o algoritmo é necessário estabelecer um limite superior para o afundamento do ponto B,

$$d_B^U = l_2/200 = 3.75 \text{ cm} \quad (44)$$

e um critério para determinação do algoritmo: limitar o erro máximo da solução final a 1% ($\rho = 1.01$).

Inicia-se a resolução supondo que as áreas são iguais aos seus próprios limites inferiores:

$$a_1 = a_2 = 10 \text{ cm}^2 \Rightarrow W_1 = W_2 = 17.8 \text{ cm}^3; I_1 = I_2 = 47 \text{ cm}^4$$

O afundamento correspondente seria $d_B = 36.7 \text{ cm}$ e a restrição (36) é a que se encontra mais afastada dos seus limites ($\rho = 26.1$).

A partir da solução inicial, obtém-se o ponto seguinte que pertence ao domínio:

$$a_1 = a_2 = 60.07 \text{ cm}^2 \Rightarrow W_1 = W_2 = 465.8 \text{ cm}^3; I_1 = I_2 = 5443 \text{ cm}^4$$

Pode-se construir um raio com base na restrição mais afastada dos seus limites e na equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial d_B = 0 &\Rightarrow u_1 6E [I_1 / (l_1/2)^3 + \\ &+ I_2 / (l_2/2)^3] + u_2 3E [-I_1 / (l_1/2)^2] = 0 \\ \sum_{k=1,5} u_k = 0 &\Rightarrow u_1 + u_2 = 1 \end{aligned}$$

onde L é o Lagrangeano do problema inicial e $I_1 = I_2 = 47 \text{ cm}^4$.

Então,

$$u_1 = 0.4133; u_2 = 0.5867$$

Se o conjunto de variáveis $\{x\}$ representar qualquer uma das características das secções (área a_i , momento de inércia I_i ou momento estático W_i), a restrição que corta esta solução é:

$$-\sum_{k=1,5} u_k (b_k - \{g_k\}^T \{x\}) + [\sum_{k=1,5} u_k (\{x\}^T \{H_k\} + \{f_k\}) d_B^U]^+ \geq 0 \quad (45)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -48350 \times 0.5867 + (3418 + 140 W_1) \times 0.4133 \\ + \max \{ [(15.84 I_1 + 0.5867 I_2 - \\ - 16.43 I_1) \times 3.75]; 0 \} \geq 0 \end{aligned} \quad (46)$$

O problema colateral pode ser convertido num PLBR introduzindo o par de variáveis não-negativas r_1 e q_1 , e uma restrição de complementaridade:

$$\min l_1 a_1 + l_2 a_2 \quad (47)$$

$$\text{sa } -28323 + 1413 + 57.9 W_1 + r_1 \geq 0 \quad (48)$$

$$q_1 - r_1 - 2.2 I_1 + 2.2 I_2 = 0 \quad (49)$$

$$r_1 q_1 = 0 \quad (50)$$

$$a_1 \geq 10; a_2 \geq 10; r_1 \geq 0; q_1 \geq 0 \quad (51)$$

Para resolver este programa matemático é necessário linearizar I_i e W_i em ordem a a_i . Para isso utiliza-se os dois primeiros termos de desenvolvimento em série de Taylor da expressão (7):

$$I_i \cong I_i^0 + (\partial I_i / \partial a_i)^0 (a_i - a_i^0) \quad (52)$$

$$W_i \cong W_i^0 + (\partial W_i / \partial a_i)^0 (a_i - a_i^0) \quad (53)$$

A solução do problema daí resultante é a $a_1 = 60.07 \text{ cm}^2$ e $a_2 = 10 \text{ cm}^2$. A partir destes valores, que constituem um limite inferior para o óptimo global, e fazendo a análise da estrutura conclui-se que a tensão mais elevada é a que corresponde à tensão (38), sendo necessário aumentar as áreas de $\rho = 12.3$ para se chegar a um ponto pertencente ao domínio do problema (33)-(39).

Como se tem $I_1 = 5443 \text{ cm}^4$ e $I_2 = 47 \text{ cm}^4$, o raio dual que elimina este resultado é:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial d_B = 0 &\Rightarrow u_1 6E [I_1 / (l_1/2)^3 + I_2 / (l_2/2)^3] + \\ &+ u_2 3E [I_2 / (l_2/2)^2] = 0 \\ \sum_{k=1,5} u_k = 0 &\Rightarrow u_1 + u_2 = 1 \end{aligned}$$

Então,

$$u_1 = -0.00141; u_2 = 1.0014$$

e a restrição que elimina a solução não pertencente ao domínio,

$$68.01 - 30805 + 140.2 W_2 + \max \{ [-0.124 I_1 + 12.58 I_2]; 0 \} \geq 0 \quad (54)$$

tem de ser adicionada ao problema colateral, a solução do PLBR daí resultante é,

$$a_1 = 60.07 \text{ cm}^2; a_2 = 39.7 \text{ cm}^2$$

que está bastante próximo do mínimo global ($\rho = 1.025$) que seria obtido na iteração seguinte.

$$a_1 = 60.93 \text{ cm}^2; a_2 = 39.71 \text{ cm}^2$$

6.2 — Exemplo

O volume óptimo da treliça de três barras representada na figura 6 que está submetida a duas condições de carregamento alternadas sujeitas a limites impostos nos valores das tensões, limites inferiores nas áreas das barras e adoptando o método dos deslocamentos para representar as equações de equilíbrio é:

$$\min \sqrt{2} a_1 + a_2 + \sqrt{2} a_3 \quad (55)$$

$$\text{st } \sqrt{2/2} a_1 d_1^1 + 1/2 a_2 (d_1^1 + d_2^1) = 40 \quad (56)$$

$$1/2 a_2 (d_1^1 + d_2^1) + \sqrt{2/2} a_3 d_2^1 = 0 \quad (57)$$

$$\sqrt{2/2} a_1 d_1^2 + 1/2 a_2 (d_1^2 + d_2^2) = 0 \quad (58)$$

$$1/2 a_2 (d_1^2 + d_2^2) + \sqrt{2/2} a_3 d_2^2 = 20 \quad (59)$$

$$0 \leq \sqrt{2/2} d_1^1 \leq 5; -5 \leq \sqrt{2/2} d_1^2 \leq 0 \quad (60)$$

$$0 \leq \sqrt{2/2} (d_1^1 + d_2^1) \leq 5; 0 \leq \sqrt{2/2} (d_1^2 + d_2^2) \leq 5 \quad (61)$$

$$-5 \leq \sqrt{2/2} d_2^1 \leq 0; 0 \leq \sqrt{2/2} d_2^2 \leq 5 \quad (62)$$

$$1 \leq a_1 \leq 11; 1 \leq a_2 \leq 4; 1 \leq a_3 \leq 5 \quad (63)$$

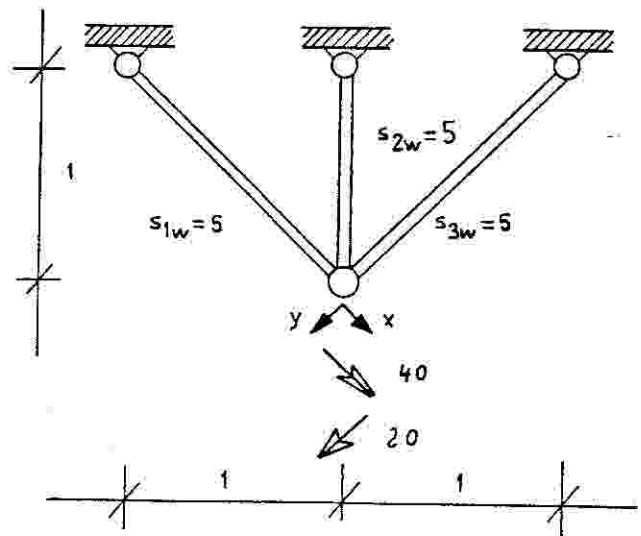


Fig. 6

Iniciando a resolução do problema com os limites inferiores (LI) das áreas,

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

De $\{d\}^k = \{K\}^{-1} \{\lambda\}^k$ ($k=1,2$), tira-se:

$$\{d\}^1 = [40. \ -16.6]^T ; \quad \{d\}^2 = [-8.3 \ 20.]^T$$

É necessário aumentar as áreas de 5.667 para que a tensão no membro 1, quando a estrutura está sujeita à 1.ª condição de carregamento, seja igual à tensão admissível máxima e as outras tensões sejam admissíveis.

Para excluir o ponto de partida constrói-se uma função de corte a partir de

$$\begin{aligned} \{u\}^1 &= [0.5 \ -0.207 \ 0. \ 0. \ 0.707 \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 0.]^T \\ \{a\}^T \{H_1\} &= [(\sqrt{2}/2a_1 + 1/2a_2) \ 1/2a_2 \ 0. \ 0.] \\ \{a\}^T \{H_2\} &= [1/2a_2 \ (\sqrt{2}/2a_3 + 1/2a_2) \ 0. \ 0.] \\ \{a\}^T \{H_3\} &= [0. \ 0. \ (\sqrt{2}/2a_1 + 1/2a_2) \ 1/2a_2] \\ \{a\}^T \{H_4\} &= [0. \ 0. \ 1/2a_2 \ (\sqrt{2}/2a_3 + 1/2a_2)] \\ \{f_5\} &= [-\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0. \ 0.] ; \{f_6\} = [-\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0.] \\ \{f_7\} &= [0. \ -\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0.] ; \{f_8\} = [0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2 \ 0.] \\ \{f_9\} &= [0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2.] ; \{f_{10}\} = [0. \ 0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2.] \\ \{b\}^T &= [40. \ 0. \ 0. \ 20. \ -5. \ -5. \ 5. \ 5. \ -5. \ -5.] \end{aligned}$$

conduzindo à seguinte restrição.

$$\begin{aligned} -40.(0.5) + 5.(0.707) + 5\sqrt{2} [0.5(\sqrt{2}/2a_1 + 1/2a_2) - \\ -0.207/2a_2 - \sqrt{2}\sqrt{2}/2]^+ + \{(-5\sqrt{2})[0.5/2a_2 - \\ 0.207(\sqrt{2}/2a_3 + 1/2a_2)]\}^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (64)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} -16.464 + (2.5a_1 + 1.036a_2 - 3.536)^+ + \\ + (-1.036a_2 + 1.036a_3)^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Linearizando a restrição à custa da introdução de variáveis reais e impondo complementaridade o óptimo do problema colateral é na primeira iteração $LI = \{1\}^T$
 $\{a\} = 13.142$ é:

$$a_1 = 7.586 ; \quad a_2 = 1. ; \quad a_3 = 1.$$

Invertendo as equações de equilíbrio,

$$\{d\}^1 = [7.070 \ -2.929]^T ; \quad \{d\}^2 = [-1.469 \ 17.175]^T$$

de modo que $\rho = 2.43$ corresponde ao valor máximo de tensão no membro 2, $\sigma_2 = \sqrt{2}/2d_2^2$ quando a treliça está sujeita à segunda condição de carregamento. O vector de multiplicadores de Lagrange que corresponde ao raio dual é:

$$\{u\} = [0. \ 0. \ -0.033 \ 0.390 \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 0.643]^T$$

Obtém-se a desigualdade a seguir indicada:

$$\begin{aligned} 20.(-0.390) + 5.(0.603) + \{(-5\sqrt{2})[-0.033(1/2a_2 + \\ + \sqrt{2}/2a_1) + 0.390/2a_2]\}^+ + \{5\sqrt{2}[-0.033/2a_2 + \\ 0.390(1/2a_2 + \sqrt{2}/2a_3) - 0.643\sqrt{2}/2]\}^+ \geq 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -4.585 + [0.165a_1 - 1.262a_2]^+ + [1.95a_3 + \\ + 1.262a_2 - 3.215]^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (65)$$

que vai ser adicionada ao domínio do problema colateral. O problema PLRB daí resultante tem por solução $LI = 14.968$ e

$$a_1 = 6.343 ; \quad a_2 = 4. ; \quad a_3 = 1.463$$

$\rho = 1.19$ está associado a um limite superior em d_2^2

Se o erro máximo especificado for de 3% ($\rho \leq 1.03$) são necessárias 5 iterações para o problema colateral convergir, chega-se a um limite inferior do óptimo igual a 15.55:

$$a_1 = 6.864 ; \quad a_2 = 1.945 ; \quad a_3 = 2.742$$

que é um valor bastante próximo da solução exacta:

$$FO = 15.969 ; \quad a_1 = 7.024 ; \quad a_2 = 2.138 ; \quad a_3 = 2.756$$

6.3 — Exemplo

O terceiro exemplo de aplicação é também muito conhecido na literatura de síntese elástica de treliças. Trata-se da minimização do volume da treliça hiperestática de dez barras representada na figura 7. Se a treliça for sujeita a duas cargas verticais com a intensidade 10 e as tensões admissíveis nos membros forem limitadas a ± 2.5 , tem um comportamento convexo e a solução encontrada é o mínimo único. Contudo impondo deslocamentos nodais máximos de ± 3.5 o comportamento passa a ser não convexo em virtude de existirem diversos mínimos locais [2].

Este exemplo foi resolvido pelo método descrito nesta publicação, obtendo-se uma solução com 4% de erro depois de 12 ciclos. Na figura 8 está representado o processo iterativo.

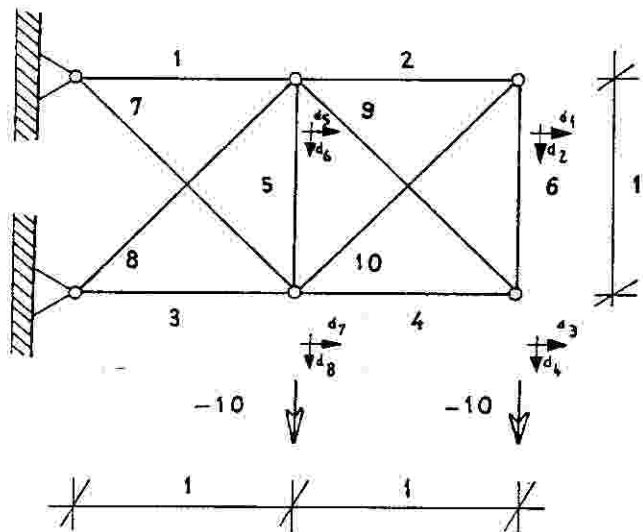


Fig. 7

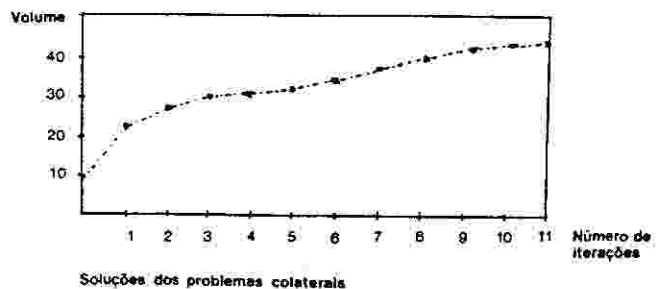


Fig. 8

7 — COMENTÁRIOS FINAIS

7.1 — Utilizando funções duais em vez de variáveis duais, o domínio do problema inicial é substituído por um conjunto de regiões que o contém definindo um problema colateral. Os termos não convexos daí resultantes são reformulados à custa de introdução de variáveis reais e de uma condição de complementaridade, o que permite transformar o problema colateral num programa linear com entrada na base restringida. O número de cortes que é necessário introduzir para que o problema colateral convirja está directamente relacionado quer com o número de variáveis de decisão, quer com o tamanho do domínio, podendo ser este escolhido pelo utilizador.

7.2 — Sob o ponto de vista de programação matemática, o ingrediente principal deste método utiliza um algoritmo derivado da programação linear. Por esse motivo, o PLRB implica sob o ponto de vista da computação um tempo praticamente idêntico a um programa linear com o mesmo tamanho.

7.3 — Em muitos casos, utilizando métodos de programação convexa em problemas de síntese elástica de estruturas chega-se a um mínimo local que é único. Esta metodologia directamente aplicável como verificação no domínio que rodeia uma solução local.

REFERÊNCIAS

- [1] SIMÕES, L. M. C. — *Search for the global optimum of least volume trusses*. Eng. Ppt., 11, 49-23, 1987.
- [2] SIMÕES, L. M. C. — *On the uniqueness of local optima in the least volume design of trusses*. submitted to J. Opt. Theory Appl.
- [3] MKSES, F. e ONODA, S. — *Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages*. Int. J. Num. Theory Appl.
- [4] DE DONOTO, D. e MAIER, G. — *Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity*, Int. J. Num. Meth. Eng., 4, 307-328, 1972.
- [5] MAIER, G., GIERSON, D. E. e BEST, M. J. — *Mathematical programming methods for deformation analysis at plastic collapse*. Comp. and Struct., 7, 599-612, 1977.
- [6] SMITH D. L. — *The Wolfe-Markowitz algorithm for nonholonomic elastoplastic analysis*. Eng. Struct., 1, 8-16, 1978.
- [7] SIMÕES, L. M. C. — *Exhaustive Search for the Global Optimum of Least Volume Structures*. Ph. D. Thesis, University of London, 1982.
- [8] KANARACHOS, A., MAKRI, P. e KOCH, M. — *Location of Multi-constrained Optima and Avoidance of Local Optimum in Structural Optimization Problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 51, 79-106, 1985.
- [9] TIND, J. e WOLSEY, L. A. — *A Unifying framework for Duality Theory in Mathematical Programming*. CORE discussion paper 7834, Louvain-la-Neuve, 1979.
- [10] FISHER, M. — *The Lagrangian Relaxation for solving IP Problems*. Management Science, 20, 1-18, 1981.