

MONITORIZAÇÃO DOS RESULTADOS DA OPTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS UTILIZANDO UMA ESTIMATIVA DUAL

L. M.C. SIMOES (I) E A.J.B. TADEU(II)

SUMARIO: No método que a seguir se apresenta utiliza-se um algoritmo de programação linear que gera multiplicadores de Lagrange de modo a maximizar o volume do programa dual da síntese elástica de treliças ajudando deste modo a seleccionar o conjunto de restrições activas, que podem incluir limites nas variáveis de decisão (áreas) e de estado (tensões e deslocamentos). O programa escrito em Fortran conta com cerca de 2500 instruções, das quais cerca de metade constitui a rotina de programação linear da biblioteca científica Harwell. São apresentados alguns exemplos de aplicação desta técnica.

1. INTRODUÇÃO

Um aspecto importante a ter em conta no projecto de treliças é que estas suportem as acções que sobre elas se exercem com a utilização de um volume de material mínimo. Com o desenvolvimento dos meios de cálculo automático, esta necessidade conduziu ao desenvolvimento de programas de optimização utilizados em paralelo com programas de análise de estruturas. Uma das formas de conseguir uma estrutura com um volume mínimo é forçar a que um critério de optimalidade seja satisfeito. Em complemento a esse critério calcula-se a partir dos multiplicadores de Lagrange em cada iteração uma estimativa dual do volume, o que permite estabelecer o intervalo que delimita o volume mínimo. Os valores máximos das variáveis duais são utilizados para a actualização do critério de optimalidade. Os multiplicadores nulos obtidos estão associados a restrições que deixam de pertencer ao conjunto das restrições activas.

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Para se simplificar a formulação algébrica do trabalho, apresenta-se a seguir o programa matemático que corresponde à optimização de treliças, cujos membros têm um comportamento elástico. A função objectivo consiste em minimizar o custo, que está de algum modo associado ao volume do material utilizado:

$$V = \sum_{i=1,m} l_i a_i = \sum_{i=1,m} l_i /x_i \quad (1)$$

(I) Eng.º Civil, Professor Associado da Universidade de Coimbra
(II) Eng.º Civil, Assistente Estagiário da Universidade de Coimbra

O termo genérico somatório refere-se ao membro i da área a_i e de comprimento l_i . Utilizam-se variáveis x_i recíprocas das áreas neste tipo de algoritmos em face da simplificação que resulta de se supor que as restrições são lineares nas variáveis recíprocas. De notar que este raciocínio só é válido para estruturas isostáticas.

Os deslocamentos modais u são obtidos a partir do vector de carga λ por inversão das equações de equilíbrio do método dos deslocamentos:

$$\sum_{k=1,n} K_{jk} u_k = \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

onde K_{ij} é o elemento genérico da matriz de rigidez da estrutura K e n o número de deslocamentos nodais associados ao grau de indeterminação cinemática.

Se os membros se comportarem de um modo elástico, as tensões nos membros tem de satisfazer as tensões admissíveis:

$$\sigma^l = -\sigma^u \leq \sigma = S A^T u \leq \sigma^u \quad (3)$$

De notar que o vector σ é uma combinação linear de deslocamentos nodais, onde os elementos da matriz diagonal S são os quocientes entre o módulo de elasticidade do membro e os respectivos comprimentos. Para entrar com os efeitos da encurvadura, podem-se diminuir as tensões de compressão de acordo com os resultados da coluna de Euler. No membro j , tem-se:

$$-a_j \sigma_{il} - (\gamma \pi^2 E a_i^2) / l_i^2 \leq 0 \quad (4)$$

Limitando os deslocamentos nodais:

$$-u_k^u \leq u_k \leq u_k^u \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

De uma forma genérica as restrições (2)-(4) podem ser escritas :

$$g_k \leq c_k \quad (6)$$

Para manter constante a topologia da treliça constante são adicionados limites inferiores nos valores das áreas dos membros:

$$a_i \geq a_i^l \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

o que é idêntico a impor limites superiores nos valores das variáveis recíprocas:

$$x_i \leq 1/a_i^l \quad i = 1, \dots, m \quad (8)$$

Para completar a definição do problema, é necessário referir as restrições:

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

que nunca são activas no óptimo.

Efectuar a optimização do volume/peso de uma treliça equivale a minimizar-se (1) estando o domínio restringido pelas equações bilineares (2), inequações lineares (3), (5), (7) ou (8) e inequações quadráticas (4). Por vezes em lugar de entrar com as desigualdades (4) reduz-se a tensão admissível de compressão σ^l em (3).

A razão de maior vulto que tem causado algumas das dificuldades encontradas no desenvolvimento de programas para síntese de treliças elásticas é que as restrições que traduzem o comportamento da estrutura tem sob o ponto de vista numérico características divergentes. Estas restrições são funções não lineares das variáveis de decisão (áreas dos membros), pelo que o programa matemático é não linear. Por outro lado o cálculo exacto das tensões e deslocamentos nodais obriga a que a estrutura seja reanalisada em cada iteração. Para evitar os custos proibitivos em tempo de computação de que resultaria uma aplicação directa de um código genérico de programação matemática, a investigação tem-se concentrado na utilização de metodologias que ultrapassam essas dificuldades.

Uma dessas técnicas consiste em substituir a estrutura inicial por um modelo aproximado em que as restrições relativas ao comportamento da estrutura são funções explícitas das variáveis de decisão. A actualização do modelo assegura convergência para um óptimo local. Gera-se o modelo aproximado substituindo as restrições relativas às variáveis de estado por desenvolvimentos em séries de Taylor (em ordem ao ponto a_0) e desprezando os termos não lineares. Invertendo as equações de equilíbrio e substituído os deslocamentos nodais em função das áreas, as restrições relativas às tensões limites vêm:

$$\sigma^l \leq \sigma_0 + J_\sigma (a - a_0) \leq \sigma^u \quad (10)$$

onde J_σ é a matriz de Jacobiano da tensão no ponto a , ou seja:

$$\sigma^l - 2\sigma_0 \leq J_\sigma a \leq \sigma^u - 2\sigma_0 \quad (11)$$

As tensões nos membros podem ser portanto calculadas a partir das áreas dos membros:

$$J_\sigma a + \sigma = 0 \quad (12)$$

Do mesmo modo poderiam ser obtidas as restrições para o problema linearizado relativas aos deslocamentos nodais.

Resultados numéricos levam a concluir que se as variáveis inversas das áreas $x_i = 1/a_i$ forem utilizadas como variáveis de decisão, melhora a qualidade das aproximações lineares das tensões e deslocamentos nodais. Este fenómeno é explicado porque se a estrutura for isostática, as restrições são funções lineares de x . Em estruturas hiperestáticas espera-se que as restrições apresentem algumas dessas características, sobretudo se o grau de hiperestaticidade for baixo. As restrições relativas às tensões admissíveis no espaço das variáveis inversas é:

$$\sigma^l \leq \sigma_0 + J'_\sigma (x - x_0) \leq \sigma^u \quad (13)$$

onde J'_σ é o Jacobiano de σ em ordem a x .

2. PROPRIEDADES CARACTERISTICAS DE TRELIÇAS ELASTICAS

Uma das propriedades básicas de uma treliça é a invariância escalar do vector dos esforços N . Os esforços nos membros de uma estrutura isostática são calculados a partir das equações de equilíbrio independentemente das áreas das barras a . Contudo, se a estrutura for hiperestática os esforços são funções dessas áreas, mas os esforços não variam se as áreas forem multiplicadas pelo mesmo factor ρ ($\rho > 0$).

$$N(\rho a) = N(a) \quad (14)$$

Por esse motivo, os esforços nas barras são funções homogêneas de grau $n=0$ nas variáveis de decisão a . A tensão no membro i da estrutura $\sigma_i = N_i/a_i$ é uma função homogênea de a com grau $n=-1$.

$$\sigma_i(\rho a) = 1/\rho \sigma_i(a) \quad (15)$$

Como os deslocamentos nodais são combinações lineares das tensões nas barras, gozam das mesmas propriedades das tensões.

Pelo Teorema de Euler para funções homogêneas tem-se que:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(y)}{\partial y_j} y_j = n h(y) \quad (16)$$

onde $h(y)$ é uma função diferenciável homogênea de grau n nos m componentes do vector y .

Considere-se a restrição que dá o limite superior da tensão no membro i . De (3), vem:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma_i}{\partial a_j} a_j \leq \sigma_i^* - 2 \sigma_i \quad (17)$$

onde as derivadas parcial e a tensão são calculadas no ponto a , σ_i^* é o elemento i do vector σ e m é o número de membros. Se a^* for a intersecção da linha que modifica proporcionalmente todas as áreas (e que passa por a) com a restrição $\sigma_i = \sigma_i^*$, tem-se:

$$a = \rho a^* \quad (18)$$

Como a derivada de uma função homogênea de grau n é homogênea e tem grau $(n-1)$ a equação (17) vem:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma_i}{\partial a_j} a_j \leq f(\rho) \sigma_i^* \quad (19)$$

onde,

$$f(\rho) = \rho (\rho - 2) \quad (20)$$

Conclui-se que uma restrição relativa a uma tensão admissível linearizada através de um desenvolvimento em série de Taylor, pode ser substituída pelo produto de uma expressão em termos das derivadas parciais da tensão calculada no ponto de intersecção a^* por uma função quadrática $f(\rho)$ da distância de a à origem.

Como o vector dos esforços é também invariante no espaço inverso, as tensões $\sigma_i = N_i x_i$ e deslocamentos nodais são funções homogêneas de grau $n = 1$ nas variáveis x .

$$\sigma(\rho x) = \rho \sigma(u) \quad (21)$$

$$u(\rho x) = \rho u(x) \quad (22)$$

Considerando o limite superior da tensão na barra i ,

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} x_j \leq \sigma_i^* \quad (23)$$

Se x^* for a intersecção da linha que modifica proporcionalmente todas as áreas (e que passa por x) com a restrição $\sigma_i = \sigma_i^*$, como as derivadas parciais $(\partial \sigma / \partial x_j)$ são funções homogêneas de grau $n=0$ no espaço x , a equação anterior vem:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} x_j \leq \sigma_i^* \quad (24)$$

ou seja: A restrição no valor da tensão limite é idêntica para todos os pontos que estejam na mesma linha de escala. Como a aproximação da restrição é um hiperplano tangente ao ponto de intersecção x^* , as restrições que traduzem o comportamento da estrutura dão valores mais aproximados no espaço das variáveis inversas das áreas que quando se tomam directamente as áreas.

4. FORMULAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE ESTACIONARIDADE

Para resolver o programa matemático (1)-(6)-(8)-(9) é necessário obter os pontos estacionários do Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = V + \sum_{k=1}^c \alpha_k (g_k - c_k) + \sum_{i=1}^m \mu_i \left(x_i - \frac{1}{a_i} \right) - \sum_{i=1}^m \gamma_i x_i \quad (25)$$

onde as variáveis α , μ e γ que foram introduzidas no Lagrangiano são denominadas variáveis duais ou multiplicadores de Lagrange. É condição necessária para que um ponto do Lagrangiano seja estacionário que as derivadas parciais de \mathcal{L} em ordem às variáveis primais e duais seja nulo - condições de Karush-Kuhn-Tucker. As derivadas em ordem às variáveis primais x_i são denominadas condições de optimalidade em problemas de otimização de Treliças:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^c \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \mu_i - \gamma_i = 0 \quad (26a)$$

$$\alpha_k, \mu_i, \gamma_i \geq 0 \quad ; \quad i=1, \dots, m \quad (26b)$$

As derivadas em ordem às variáveis duais,

$$\alpha_k (g_k - c_k) = 0 \quad (27a)$$

$$\mu_i (x_i - 1/a_i^1) = 0 \quad (27b)$$

$$\gamma_i x_i = 0 \quad (27c)$$

asseguram que quando as restrições são satisfeitas como igualdades (restrições activas) o multiplicador de Lagrange correspondente é diferente de zero. Como a restrição (9) nunca é activa, o vector γ é nulo.

5. CRITÉRIO DE OPTIMALIDADE

A utilização do critério de optimalidade permite determinar as áreas a_i que satisfazem as condições de K-K-T a partir das variáveis duais α_k .

Como,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{l_i}{x_i^2} = -l_i a_i^2 \quad (28)$$

Tem-se:

$$a_i^2 = \frac{1}{l_i} \sum_{k=1}^c \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \quad (29)$$

desde que não seja activa a restrição associada ao limite inferior de a_i (e superior de x_i), ou seja: $\mu_i = 0$. Contudo, se:

$$\sum_{k=1}^c \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} < l_i x_i^2 \quad (30)$$

passa a ser activo o limite:

$$a_i = a_i^l \quad (x_i = 1/a_i^l) \quad (31)$$

Donde,

$$\mu_i = l_i a_i^2 - \sum \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \quad (32)$$

Em estruturas isostáticas ($\partial g_k / \partial x_i$) é independente do ponto em relação ao qual são calculadas as derivadas e por esse motivo o sistema de equações (28)-(32) possui uma só solução. Em treliças hiperestáticas esta propriedade deixa de ser válida e os x_i óptimos são obtidos resolvendo iterativamente as equações (28).

Deste modo as condições necessárias de estacionaridade (26) só são satisfeitas se for possível modificar os valores dos multiplicadores α_k de modo a cumprir as condições (27). A metodologia que a seguir se apresenta para determinar um ponto de estacionaridade baseia-se na informação dada pelos multiplicadores de Lagrange.

6. PROGRAMA DUAL

O programa de que se parte, ou primal, é a minimização do Lagrangiano (25) cujo domínio é constituído por pontos que satisfazem as restrições (27). Desprezando os termos do desenvolvimento em série de Taylor de ordem superior a um, estas restrições são aproximadas por funções lineares das variáveis recíprocas das áreas. O dual deste programa linear corresponde à maximização do Lagrangiano, sobre um domínio formado pelos pontos que satisfazem as condições de optimalidade, isto é: Fixando a_i , a resolver o dual consiste em determinar o óptimo de um programa linear nas variáveis α_k e μ_i que satisfazem as condições de optimalidade.

Embora esta solução não corresponda normalmente ao óptimo do programa primal (de entre todos os valores de a_i possíveis), é uma subestimativa de (1). A partir desta subestimativa ou volume dual é possível saber-se entre que limites se encontra o volume óptimo da treliça.

Multiplicando cada uma das equações (26):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^c \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \mu_i = 0 \quad (33)$$

pelo valor de x_i correspondente e adicionando os produtos obtidos, chega-se a:

$$-V + \sum_{k=1}^c \alpha_k g_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad (34)$$

Deste modo, o volume dual D a maximizar é obtido a partir de (25) e (34):

$$D = 2V - \sum_{k=1}^c \alpha_k c_k - \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{a_i^l} \quad (35)$$

Este programa matemático tem a mesma solução que a minimização de:

$$F = \sum_{i=1}^c \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{a_i^l} \quad (36)$$

sujeito às restrições:

$$\sum_{k=1}^c \alpha_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \mu_i \geq - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, m \quad (37a)$$

$$\alpha_k \geq 0 \quad \mu_i \geq 0 \quad (37b)$$

O volume dual é dado pela expressão:

$$D = 2V - F \quad (38)$$

Conclui-se que valores de α_k e μ_i que satisfaçam (37) se forem substituídos em (36) permitem o cálculo de uma estimativa dual. Para obter a melhor estimativa possível utilizam-se rotinas de programação linear.

O limite inferior dado pelo volume dual é melhorado através da operação que a seguir se indica e que utiliza a propriedade da invariância escalar do vector dos esforços. Multiplicando todas as áreas

por um factor ρ , os multiplicadores de Lagrange que lhe correspondem passam a ser $\rho^2 \alpha_k$ e $\rho^2 \mu_i$, o volume primal ρV e o óptimo da função objectivo de em (36) é $\rho^2 F$. O limite inferior para uma treliça cujas áreas são ρa_i é:

$$D = 2 V \rho - F \rho^2 \quad (39)$$

Maximizando D em ordem a ρ tem-se:

$$2V - 2F \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad D = V^2/F \quad (40)$$

Como o limite (40) é superior a (38) constitui uma subestimativa dual de melhor qualidade.

De notar que estes limites inferiores só são válidos depois de ser efectuada uma linearização convexa do problema de síntese elástica e não para a formulação inicial deste problema, que tem restrições não lineares e não convexas.

7. EXEMPLOS

Foram resolvidos dois exemplos muito conhecidos da literatura de optimização de treliças.

7-1. Treliça de dez barras

Pretende-se optimizar o volume da treliça de dez barras representada na figura 1 e que está sujeita a uma única condição de carregamento. Supõe-se que a tensão admissível na barra 9 é três vezes superior à tensão admissível nas outras barras.

Partiu-se de uma solução inicial com um volume cerca de 2.5 vezes superior ao mínimo obtido após 6 iterações. Neste problema a estimativa dual do volume convergiu para a solução após 4 iterações, mais rapidamente que o volume do programa primal. Este comportamento justifica-se face ao elevado número de tensões admissíveis activas na solução.

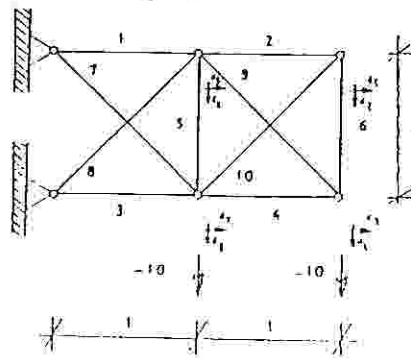


Figura 1

7-2. Treliça espacial de vinte cinco barras

Pretende-se optimizar o volume da torre representada na figura 2 e que está sujeita a seis condições de carregamento alternativas. Impondo simetria na estrutura, por agrupamento de conjuntos de barras

com a mesma área só se consideram 8 variáveis de decisão independentes. São impostos limites máximos para as translacções das articulações.

Iniciou-se o problema com uma treliça com um volume 50% mais elevado que o óptimo local, que foi obtido após quatro iterações. Ao contrário do primeiro problema em que a estimativa dual converge mais rapidamente, neste caso chegou-se a um volume primal igual à solução no final da 1ª iteração. Isto acontece em virtude do elevado número de equações de equilíbrio que restringem o domínio do problema (grau de liberdade cinemático \times número de condições de carregamento). A maior dificuldade reside agora em encontrar um ponto do domínio que satisfaça as tensões admissíveis, sem ultrapassar os deslocamentos nodais máximos.

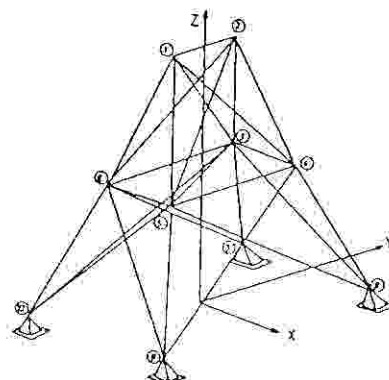


Figura 2

8. CONCLUSOES

Este programa utiliza um critério de optimalidade que através de um método Newton dá estimativas dos multiplicadores de Lagrange. Em problemas de optimização onde a solução tem de satisfazer um critério de optimalidade, um dos principais problemas é reduzir o número de análises da estrutura necessárias até se atingir a convergência. Por esse motivo há vantagens em se utilizar um processo que dê limites para a solução, permitindo detectar se o algoritmo diverge ou termina com bons resultados. A diferença entre o volume primal e dual é o intervalo de dualidade que dá uma indicação sobre a convergência do programa de optimização.

Este programa prevê que vários membros com a mesma área sejam representados pela mesma variável de decisão. Além disso é possível extendê-lo para a optimização de placas isotrópicas sujeitas a cargas axiais onde a variável de decisão é a espessura da placa. O algoritmo converge para um ponto que é pelo menos um mínimo local.

BIBLIOGRAFIA

1. VENKAYYA, V.B., KHOT, N.S. e BERKE, L., "Application of Optimality Criteria Approaches to Automated Design of Large Practical Structures", AGARD CP-123 Second Symposium of Structural Optimization (1973) Milan, Italy.
2. BARTHOLOMEW, P. e MORRIS, A.J., "A Unified Approach to Fully-stressed Design", Eng. Opt. Vol.2 (1976) 3-15.
3. FLEURY, C., "A Unified Approach to Structural Weight Minimization", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. Vol 20 (1979) 17-38