



FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS  
E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA

# **Modelação numérica da erosão de dunas: inclusão do efeito de ressalto após colisão de partículas com o solo**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica na Especialidade de Energia e Ambiente

**Autor**

**Pedro Miguel Santos Severino**

**Orientadores**

**Luis Adriano Alves de Sousa Oliveira**

**António Manuel Gameiro Lopes**

**Júri**

**Presidente** Professor Doutor **Pedro de Figueiredo Vieira Carvalho**  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Vogal** Professor Doutor **Almerindo Domingues Ferreira**  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Coimbra, Julho, 2011**

Se vi mais longe foi porque me apoiei nos ombros de gigantes.

Isaac Newton

Aos meus Pais.

## Agradecimentos

O trabalho aqui apresentado representa o culminar de todo um esforço realizado ao longo dos vários anos de frequência do curso, que não teria sido possível sem a colaboração de um conjunto de pessoas, as quais gostaria de prestar o meu sincero reconhecimento.

Aos orientadores, Professor Doutor Luis Adriano Oliveira e Professor Doutor António Manuel Gameiro Lopes, por toda a disponibilidade e dedicação que demonstraram ao longo da realização deste trabalho que contribuiu imenso para o meu desenvolvimento. Sem a vossa dedicação teria sido certamente mais difícil. Muito obrigado.

Ao Professor Doutor Almerindo Domingues Ferreira, pela paciência que demonstrou ter, ao longo do desenvolvimento do trabalho, para me retirar dúvidas e disponibilizar material escrito.

Aos meus amigos de infância e faculdade, por todas as alegrias que vivemos e por todas as tristezas que partilhámos. O percurso que agora termina nunca pareceu difícil, pois vocês sempre estiveram a meu lado.

Aos meus familiares, que sempre me apoiaram e nunca me deixaram desistir, em especial aos meus pais, que certamente abdicaram de muitas comodidades e sonhos para que todo este trabalho fosse possível.

## Resumo

É apresentado e implementado um método de cálculo, com base em expressões empíricas, que pretende representar o efeito pós-colisão de uma partícula com uma superfície granulosa, constituída por partículas de  $500 \mu m$  de diâmetro, sendo aplicado num código que já se encontra amplamente validado a nível do cálculo da fase contínua, modelada através do *Canyon*, Lopes (2001).

Os resultados obtidos, para uma superfície plana e uma duna de perfil sinusoidal, são posteriormente comparados a outros obtidos experimentalmente de modo a validar o código de cálculo.

Verificou-se que a ejeção de partículas devido a colisão é um processo de transporte de massa com um papel bastante importante, ainda que a modelação pela via apresentada não seja a ideal.

**Palavras-chave:** Colisão, Ejeção novas partículas, CFD, escoamento bifásico, Erosão.

## Abstract

It is presented and implemented a method of calculation, based on empirical expressions, which aims to represent the effect of a post-collision particle with a granular surface, consisting of particles of  $500 \mu m$ , being applied in a code that is largely validated at the calculation of the continuous phase, modeled through the Canyon program, Lopes (2001).

The results obtained, for a flat surface and a dune with a sinusoidal profile, are then compared with those obtained experimentally in order to validate the code calculation.

It was found that the ejection of particles due to collision is a process of mass transport with a very important role, albeit through the modeling presented is not optimal.

**Keywords** Collision, Ejection new particles, CFD, Splash, Erosion.

## Índice

Índice de Figuras .....	v
Simbologia e Siglas .....	vii
Simbologia.....	vii
Siglas .....	x
1. INTRODUÇÃO.....	11
2. MODELAÇÃO NUMÉRICA .....	13
2.1. Erosão .....	13
2.1.1. Equações do caudal erodido .....	13
2.2. Dinâmica de uma partícula .....	14
2.2.1. Equações de movimento de uma partícula .....	14
2.2.2. Determinação da posição e velocidade da partícula.....	15
2.2.3. Determinação do passo de tempo .....	16
2.3. Turbulência .....	17
2.3.1. Modelação do fenómeno .....	17
2.4. Colisão com a superfície.....	19
2.4.1. Método utilizado.....	19
2.5. Ejeção de partículas devida à colisão de terceiras .....	22
2.5.1. Método utilizado.....	23
2.6. Deformação do solo .....	25
2.6.1. Cálculo do escoamento da fase contínua e discretização da superfície do solo 25	
2.6.2. Balanço mássico numa superfície de controlo .....	26
2.6.3. Deformação do solo.....	27
3. RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO.....	31
3.1. Superfície plana .....	31
3.2. Duna.....	33
4. CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS.....	44
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	46

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática do cálculo da trajectória após colisão (autoria de A. M. Gameiro Lopes). .....	19
Figura 2- Evolução da velocidade inicial das partículas ejectadas em função da quantidade de movimento das incidentes.....	23
Figura 3 – Evolução do número de partículas ejectadas em função da quantidade de movimento das incidentes. ....	24
Figura 4 - Evolução do <i>death rate</i> em função do diâmetro das partículas incidentes.....	25
Figura 5 - Esquema do processo de cálculo. ....	26
Figura 6 – Esquema do impacto de uma partícula com o solo. ....	27
Figura 7 – Trajectória típica de um conjunto de partículas erodidas.....	28
Figura 8 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	31
Figura 9 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	32
Figura 10 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	32
Figura 11 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	32
Figura 12 – Resultado obtido experimentalmente em túnel de vento. ....	33
Figura 13 – Trajectória das partículas .....	34
Figura 14 – Trajectórias das partículas (zoom). ....	34
Figura 15 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	35
Figura 16 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	36
Figura 17 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	37
Figura 18 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	37
Figura 19 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	38
Figura 20 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	38
Figura 21 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	39
Figura 22 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u\tau; \sigma = 0.5\mu)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	40
Figura 23 - Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u\tau; \sigma = 0)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	41
Figura 24 - Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u\tau; \sigma = 0)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.3$ ).....	41
Figura 25 - Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u\tau; \sigma = 0)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	42

---

Figura 26 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u\tau; \sigma = 0)$ , $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$ e $\rho = 0.6$ ).....	42
---	----



## SIMBOLOGIA E SIGLAS

### Simbologia

$A$  – Área de uma superfície de controlo

$A, P$  – Pontos

$A, B$  – Constantes que surgem na equação que determina a posição e velocidade de uma partícula ao fim de um passo de tempo Lagrangeano

$A_b$  – Coeficiente da equação da velocidade de atrito limite

$C_1$  – Coeficiente da equação da velocidade de atrito limite para superfícies de inclinação arbitrária

$C_D$  – Coeficiente de arrasto

$C_{\dot{m}}$  – Constante que surge na equação do caudal mássico erodido

$C_\mu$  – Constante do modelo  $k-\varepsilon$

$d^p$  – Diâmetro da partícula

$D$  – Diâmetro característico

$D^{in}$  – Diâmetro de uma partícula que colide com o solo

$F_j$  – Força exercida numa partícula

$g$  – Aceleração gravítica

$h$  – Constante que surge na equação cartesiana da recta

$K_0$  – Factor de correcção da equação que determina o tempo de relaxação de uma partícula

$l$  – Componente de um vector normal ao plano segundo  $x$

$l_x$  – Cosseno director segundo a direcção  $x$

$l_y$  – Cosseno director segundo a direcção  $y$

$l_z$  – Cosseno director segundo a direcção  $z$

$L_{sat}$  – Comprimento de saturação

$m$  – Componente de um vector normal ao plano segundo  $y$

$\dot{m}^{ej}$  – Caudal mássico ejectado devido a colisões

$\dot{m}_{er}$  – Caudal mássico erodido

- $m^{in}$  – Caudal mássico que colide com uma superfície de controlo  
 $\dot{m}^{in}_{total}$  – Caudal mássico total que colide com uma superfície de controlo  
 $\dot{m}^{out}_{total}$  – Caudal mássico total que abandona uma superfície de controlo  
 $m^p$  – Massa de uma partícula  
 $\dot{m}^{rb}$  – Caudal mássico reflectido  
 $M^{in}$  – Quantidade de movimento de uma partícula  
 $n$  – Componente de um vector normal ao plano segundo x  
 $N^{ej}$  – Número de partículas ejectadas  
 $\vec{r}$  – Vector  
 $Re^p$  – Número de Reynolds de uma partícula  
 $St$  – Número de Stokes  
 $S_\varphi$  – Termo fonte da propriedade  $\varphi$   
 $t$  – Tempo  
 $t_e$  – Tempo de vida de um turbilhão  
 $t_r$  – Tempo de residência de uma partícula no interior de um turbilhão  
 $T_j^p$  – Intervalo de tempo do cálculo da fase dispersa  
 $u^f$  – Velocidade do fluido  
 $u_i^{f'}$  – Flutuação da velocidade segundo a direcção i  
 $u_i^f$  – Velocidade instantânea do fluido segundo a direcção i  
 $\overline{u_i^f}$  – Velocidade média do fluido segundo a direcção i  
 $u_{0i}^p$  – Velocidade inicial da partícula segundo a direcção i  
 $u_i^p$  – Velocidade de uma partícula segundo a direcção i  
 $u_\tau$  – Velocidade de atrito  
 $u_{\tau,t}$  – Velocidade de atrito limite  
 $u_{\tau,t}^*$  – Velocidade de atrito limite para superfícies de inclinação arbitrária  
 $V^{in}$  – Velocidade de uma partícula que colide com o solo  
 $V^{rb}$  – Velocidade de uma partícula após colisão  
 $V^{ej}$  – Velocidade de ejeção devido à colisão de partículas  
 $x_{0i}^p$  – Posição inicial de uma partícula segundo uma coordenada i

$x_i^p$  – Posição de uma partícula segundo uma coordenada  $i$  ao fim de um passo de tempo Lagrangeano

$\alpha_{rep}$  – Ângulo de repouso

$\alpha^{in}$  – Ângulo entre a trajectória da partícula incidente e a superfície que define o solo

$\alpha^{ej}$  – Ângulo entre a trajectória da partícula ejectada e a superfície que define o solo

$\alpha^{rb}$  – Ângulo entre a trajectória da partícula e a superfície que define o solo, após colisão

$\delta$  – Dimensão característica da malha

$\Gamma_{ef,\varphi}$  – Coeficiente de difusão da propriedade  $\varphi$

$\Delta h$  – Variação de cota de um nodo

$\Delta \dot{m}$  – Variação do caudal mássico numa superfície de controlo

$\Delta t$  – Passo de tempo Lagrangeano

$\Delta x$  – Dimensão de uma superfície de controlo segundo a coordenada  $x$

$\Delta y$  – Dimensão de uma superfície de controlo segundo a coordenada  $y$

$\varepsilon$  – Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta

$\zeta_i$  – Variável aleatória de média nula e desvio padrão unitário

$\eta^{dr}$  – *Death rate*

$\mu$  – Média de uma distribuição Gaussiana

$\mu^f$  – Viscosidade dinâmica do fluido

$\theta$  – Inclinação de uma superfície de controlo

$k$  – Energia cinética turbulenta

$\rho$  – Coeficiente de restituição

$\rho^f$  – Massa volúmica do fluido

$\rho^p$  – Massa volúmica da partícula

$\sigma$  – Desvio padrão de uma distribuição Gaussiana

$\tau_0$  – Tensão de atrito parietal

$\tau^f$  – Tempo de relaxação do fluido

$\tau^p$  – Tempo de relaxação de uma partícula

$\tau^s$  – Tempo de relaxação de uma partícula considerando apenas a força de arrasto

$\tau^{stab}$  – Limite de estabilidade

$\varphi$  – Propriedade específica do escoamento, por unidade de massa

## **Siglas**

FORTRAN – Formula Translation

PEDM – Particle-Eddy Dispersion Model

## 1. INTRODUÇÃO

Com a crescente capacidade de cálculo computacional tem sido possível a adopção de modelos numéricos cada vez mais complexos e realistas, que permitem a realização de várias operações, entre as quais a simulação numérica de escoamentos, tornando-se assim uma ferramenta de cálculo indispensável no ramo da Engenharia. É assim possível simular um problema prático com custos temporais e monetários inferiores às análises experimentais, sendo ainda possível a manipulação de várias variáveis, o que muitas vezes se torna difícil, senão impossível, em ambiente experimental. Podem desta forma ser resolvidos problemas da área da Mecânica dos Fluidos, tais como, o transporte de partículas no seio de um escoamento (escoamento bifásico), dos quais se podem destacar a determinação da dispersão de poluentes, simulação de tratamentos superficiais ou o processo de erosão.

Os escoamentos bifásicos são constituídos, tal como o seu nome indica, por duas fases distintas. No presente trabalho, é analisado um escoamento dessa natureza composto por uma fase contínua (fluido) e uma dispersa (partículas), sendo a sua modelação realizada através de uma aproximação do tipo Euler-Lagrange, devido à baixa concentração da fase dispersa na contínua. A fase contínua é modelada através de um código, Lopes (2001), onde as equações que determinam as propriedades do escoamento são integradas através do método de volumes de controlo, sendo a influência da turbulência no escoamento médio modelada através do modelo  $k - \epsilon$  de alto número de Reynolds. Para determinar as propriedades da fase dispersa é utilizada a Segunda Lei de Newton, considerando que as partículas estão apenas sujeitas à acção das forças de arrasto aerodinâmico, gravidade e ainda a gerada pelo gradiente local de pressão, uma vez que a massa volúmica das partículas é muito superior à do fluido.

Para a modelação do fenómeno de erosão recorre-se a um modelo, adoptado por Oliveira et al. (2009), baseado no valor da velocidade de atrito local e sua respectiva relação com o valor limite, acima do qual é desencadeado um processo contínuo de remoção de massa, constituído por partículas de características iguais, cuja trajectória é representada por apenas uma delas.

Ao colidirem com uma superfície, as partículas registam alterações de quantidade de movimento, o que pode provocar modificações na configuração do solo, devido à deposição e ejeção de material granular, fenómeno que não é contemplado por Oliveira et al. (2009) e que se tenta ultrapassar no presente trabalho. O cálculo das trajectórias após colisão é efectuado com recurso a um método presente em Lapa (2004). O seu efeito, quantidade de partículas ejectadas devido à troca de energia com o solo e sua velocidade, é modelado com recurso às expressões empíricas obtidas por Li e Zhou (2007). Estes autores definem ainda uma expressão empírica que determina a fracção de partículas que ficam depositadas no solo após colisão, denominada de *death rate*.

Pretende-se assim a construção de um método de cálculo simples e robusto que permita simular o efeito da colisão de partículas com uma superfície granulosa, constituída por partículas de areia com características iguais.

O presente trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos, nos quais são apresentados vários subcapítulos.

No Capítulo 2 é apresentado o método de cálculo da fase dispersa, nomeadamente as expressões que regem o fenómeno da erosão, a mecânica da partícula, o processo de seguimento, e o efeito de colisão com a superfície, ou seja, trajectória após colisão, quantidade de material ejectado e suas propriedades e método de cálculo da evolução da topografia ao longo do tempo.

No Capítulo 3 são apresentados e discutidos os resultados obtidos para duas configurações de superfície distintas, uma plana e uma duna sinusoidal perpendicular ao escoamento, utilizando diferentes valores de velocidade e ângulo de ejeção, devido à erosão, e diferentes coeficientes de restituição, cujas simulações são confrontadas com os resultados práticos obtidos por Fino (2011). As conclusões retiradas através da comparação dos vários resultados obtidos encontram-se descritas no Capítulo 4, onde são também apresentadas algumas sugestões com vista a melhorar o código proposto.

## 2. MODELAÇÃO NUMÉRICA

No presente capítulo será apresentado e desenvolvido um método numérico de resolução do problema em causa, ou seja o efeito após colisão. Considera-se que uma partícula é representativa de um caudal mássico de partículas semelhantes, admitindo que estas são lisas, rígidas, esféricas e que não apresentam movimento de rotação. Resta referir que a superfície é constituída por partículas de diâmetro igual,  $d^p = 500 \mu\text{m}$ , e de massa volúmica  $\rho^p = 2650 \text{ kg/m}^3$ .

### 2.1. Erosão

Para a modelação do fenómeno da erosão é utilizado um modelo com base no valor local da velocidade de atrito,  $u_\tau$ , e seu valor limite,  $u_{\tau,t}^*$ , acima do qual é desencadeado o processo contínuo de remoção de partículas de características iguais, com caudal mássico  $\dot{m}_{er}$ , cuja trajectória é representada por uma partícula. O método utilizado encontra-se descrito em Oliveira *et al.* (2009).

#### 2.1.1. Equações do caudal erodido

Tal como foi acima referido, apenas ocorre erosão eólica quando o valor da velocidade de atrito local,  $u_\tau$ , toma valor igual ou superior ao da velocidade de atrito limite,  $u_{\tau,t}$ . As expressões, definidas por Bagnold (1941), que determinam esses parâmetros são as seguintes:

$$u_\tau = \left( \frac{\tau_0}{\rho^f} \right)^{0.5} \quad (1)$$

$$u_{\tau,t} = A_b \sqrt{(\rho^p / \rho^f) g d^p} \quad (2)$$

onde  $\tau_0$  representa a tensão de atrito parietal,  $A_b$  é um coeficiente que pode variar entre 0.1 e 0.2 para partículas com diâmetros iguais ou superiores a  $100 \mu\text{m}$  e  $\rho^f$  a massa volúmica do fluido. A expressão apresentada para o cálculo da velocidade de atrito limite apenas se aplica a superfícies que estejam dispostas horizontalmente, sendo necessário utilizar a seguinte correcção, descrita por Iversen and Rasmussen (1994), para a tornar aplicável a superfícies de inclinação arbitrária:

$$u_{\tau,t}^* = u_{\tau,t} C_1 \quad (3)$$

em que  $C_1$  é definido através de:

$$C_1 = \sqrt{\cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{\tan(\alpha_{rep})}} \quad (4)$$

sendo que  $\theta$  corresponde ao ângulo de inclinação da superfície e  $\alpha_{rep}$  é o ângulo de repouso, que toma aqui o valor de  $32^\circ$ , determinado por Iversen and Rasmussen (1994).

Após serem atingidas as condições necessárias à ocorrência deste fenómeno, é ejectado um caudal mássico de partículas a partir do nodo onde se está a efectuar o cálculo, o qual pode ser determinado através da seguinte expressão, descrita por Andreotti et al (2002):

$$\dot{m}_{er} = \frac{\Delta_x \Delta_y}{L_{sat}} C_m \left(\frac{d^p}{D}\right)^{0.5} \left(\frac{\rho^f}{g}\right) u_\tau (u_\tau^2 - u_{\tau,t}^{*2}) \quad (5)$$

em que  $\Delta_i$  representa a dimensão da superfície de controlo, segundo a direcção  $i$  ( $i \equiv x, y$ ),  $L_{sat}$  o comprimento de saturação, que apresenta valores entre 0.6 e 2.3m,  $C_m$  uma constante que pode variar entre 1.5 e 2.8 e  $D$  um diâmetro de referência igual a 0.25mm, segundo Bagnold (1941). No sistema de coordenadas Cartesianas ( $x, y, z$ ) aqui usado,  $z$  representa a coordenada segundo a direcção vertical.

Considera-se que a velocidade e ângulo de ejeção das partículas, devido à erosão, segue uma distribuição Gaussiana, com média e desvio padrão definidos pelo utilizador do código.

## 2.2. Dinâmica de uma partícula

### 2.2.1. Equações de movimento de uma partícula

O movimento de um corpo de massa  $m^p$  e velocidade  $u_i^p$ , numa dada direcção  $i$ , pode ser descrito pelo recurso à segunda lei de Newton, através da seguinte expressão:

$$m^p \frac{du_i^p}{dt} = \sum_{j=1}^n F_j \quad (6)$$

No primeiro membro da expressão encontra-se o produto da massa pela variação da velocidade com o tempo, aceleração, e no segundo o somatório das forças aplicadas ao corpo. Segundo Oliveira (1998), uma vez que as partículas em estudo



apresentam uma massa volúmica muito superior à do fluido, ar, apenas serão consideradas as forças gravítica, de arrasto e a gerada pelo gradiente local de pressão, reduzindo deste modo a complexidade do problema. Assim, a expressão (6) toma a seguinte forma:

$$\frac{du_i^p}{dt} = g_i \left(1 - \frac{\rho^f}{\rho^p}\right) + \frac{3}{4} \frac{\mu^f}{\rho^p (d^p)^2} C_D Re^p (u_i^f - u_i^p) - \frac{1}{\rho^p} \frac{\partial p^f}{\partial x_i} \quad (7)$$

sendo que os três termos do segundo membro representam as forças anteriormente descritas, pela mesma ordem. A determinação do número de Reynolds da partícula,  $Re^p$ , e do coeficiente de arrasto,  $C_D$ , é efectuada com recurso às expressões abaixo apresentadas, propostas por Wallis (1969) :

$$Re^p = \frac{\rho \sqrt{(u_i^f - u_i^p)^2} d^p}{\mu^f} \quad (8)$$

$$C_D Re^p = \begin{cases} 24 + 3.6(Re^p)^{0.687} & (Re^p \leq 1000) \\ 0.44 Re^p & (Re^p > 1000) \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2.2. Determinação da posição e velocidade da partícula

A velocidade de uma partícula, num dado instante, apresenta a seguinte relação com a trajectória:

$$\frac{dx_i^p}{dt} = u_i^p \quad (10)$$

Assim, é possível determinar as propriedades em questão através da integração da equação (6), para determinar a velocidade, e da expressão (10), para determinar a posição. Este problema pode ser resolvido de duas formas alternativas: ou utilizando um método numérico, Runge-Kutta de 4ª ordem; ou através de um método analítico, apresentado por Azevedo e Pereira (1990). A utilização da segunda via pressupõe que, durante o passo de tempo escolhido,  $\Delta t$ , as propriedades do escoamento são constantes. Segundo estes autores, a expressão (6) pode ser representada da seguinte forma:

$$\frac{du_i^p}{dt} = A - Bu_i^p \quad (11)$$

onde A e B representam constantes da equação. Integrando a expressão (10) e (11), são obtidas as seguintes expressões:

$$u_i^p = u_{0i}^p e^{-B \Delta t} + \frac{A}{B} (1 - e^{-B \Delta t}) \quad (12)$$

$$x_i^p = x_{0i}^p + \frac{A}{B} \Delta t + \frac{1}{B} \left( x_{0i}^p - \frac{A}{B} \right) (1 - e^{-B \Delta t}) \quad (13)$$

em que  $x_{0i}^p$  e  $u_{0i}^p$  representam, respectivamente, a posição e a velocidade para  $t = t_0$ .

### 2.2.3. Determinação do passo de tempo

A posição e a velocidade de uma partícula inserida no escoamento, num dado instante ( $t + \Delta t$ ), são obtidas com base no conhecimento destas mesmas propriedades no instante anterior ( $t$ ). Para tal, é necessário definir o passo de tempo,  $\Delta t$ . O cálculo deste factor é baseado no número de Stokes,  $St$ , que se define de seguida:

$$St = \frac{\tau^p}{\tau^f} \quad (14)$$

em que  $\tau^p$  representa o tempo de relaxação da partícula, definido como o tempo que esta demora, desde o repouso, a atingir uma velocidade de  $(1 - e^{-1})u^f$ , e  $\tau^f$  o tempo de relaxação do fluido. O tempo de relaxação da partícula é obtido através da expressão:

$$\tau^p = -\tau^s \ln \left[ 1 - \frac{(1 - e^{-1})/\tau^s}{1/(\tau^p + K_0)} \right] \quad (15)$$

Na expressão anterior surgem duas novas variáveis: o tempo de relaxação da partícula quando se encontra apenas sob acção da força de arrasto,  $\tau^s$ ; e um factor de correcção,  $K_0$ , que toma em conta as restantes forças aplicadas na partícula. As expressões que permitem o cálculo destas duas incógnitas são as seguintes:

$$\tau^s = \frac{4}{3} \frac{\rho^p (d^p)^2}{\mu^f} (C_D Re^p)^{-1} \quad (16)$$

$$K_0 = \frac{\sum \left| \frac{\vec{F}}{m^p} \right|}{\sqrt{(u^f)^2}} \quad (17)$$

O tempo de relaxação do fluido é determinado através de:

$$\tau^f = \frac{\delta}{\sqrt{(u^f)^2}} \quad (18)$$

em que  $\delta$  representa a dimensão característica da malha de cálculo adoptada.

Se  $St \ll 1$ , o passo de tempo a adoptar será  $\Delta t = 0.1\tau^f$ ; caso este seja igual ou superior à unidade, será  $\Delta t = 0.1\tau^p$ . Resta referir que  $\Delta t$  nunca deverá exceder o limite de estabilidade,  $\tau^{stab} = 0.9\tau^p$ , no caso de se recorrer ao método de Runge-Kutta para a integração das equações.

## 2.3. Turbulência

Um escoamento pode apresentar três tipos de comportamentos diferentes, ou regimes: laminar, turbulento e de transição. Este último regime ocorre, como o próprio nome indica, na passagem de laminar a turbulento, sendo a referida transição determinada pelo número de Reynolds crítico. Abaixo deste valor, as perturbações que surgem no interior do fluido são dissipadas, devido à predominância das forças viscosas, permitindo que as várias camadas de fluido deslizem de forma ordeira, nunca se cruzando, e com velocidades semelhantes, comportamento que caracteriza o regime laminar. Mas a partir do momento que o valor crítico é atingido e ultrapassado, as forças de inércia tendem a predominar, amplificando essas mesmas perturbações, desenvolvendo-se assim estruturas com linhas de corrente em forma de espiral e de comportamento aleatório, os turbilhões, nos quais as camadas de fluido apresentam velocidades e trajectórias completamente distintas. Assim, é impresso ao escoamento um movimento altamente rotacional e uma flutuação de velocidades, cujo domínio depende da escala de comprimentos de onda dos turbilhões, que é limitada inferiormente pela acção das forças viscosas e superiormente pelas condições limite do escoamento.

Uma partícula inserida num escoamento turbulento, ao atravessar uma destas estruturas, poderá ser arrastada ou poderá atravessá-la, dependendo da inércia da mesma, sendo este fenómeno modelado através do modelo PEDM (Particle-Eddy Dispersion Model), descrito em Oliveira (1998).

### 2.3.1. Modelação do fenómeno

No modelo acima referenciado, a partícula atravessará diversos turbilhões durante a sua trajectória, considerando que no interior destes a componente das flutuações da velocidade do fluido é constante ao longo do escoamento e que não existem interacções entre turbilhões adjacentes. O tempo de interacção do turbilhão com a partícula depende da inércia, tal como foi anteriormente referido, sendo este escolhido entre o tempo de vida do

turbilhão,  $t_e$ , e o tempo de residência da partícula no interior do mesmo,  $t_r$ , seleccionando-se o de menor valor. Seguidamente são apresentadas as expressões que permitem calcular os tempos acima referidos.

$$t_e = \frac{l_e}{\sqrt{2k/3}} \quad (19)$$

$$t_r = -\tau^p \ln \left( 1 - \frac{l_e}{\tau^p \sqrt{(u^f - u^p)^2}} \right) \quad (20)$$

$$l_e = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{\varepsilon} \quad (11)$$

em que  $l_e$  representa a escala de turbulência,  $k$  a energia cinética turbulenta,  $\varepsilon$  a taxa de dissipação dessa mesma energia cinética e  $C_\mu$  uma constante utilizada no modelo  $k$ - $\varepsilon$ , de valor igual a 0.09.

Segundo Oliveira e Lopes (2007), os valores da velocidade instantânea do fluido podem ser obtidos através da aplicação da decomposição de Reynolds, somando-se as flutuações aleatórias,  $u_i^{f'}$ , ao escoamento médio,  $\overline{u_i^f}$ , obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$u_i^f = \overline{u_i^f} + u_i^{f'} \quad (22)$$

em que a componente média é obtida através de:

$$\overline{u_i^f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_i^f dt \quad (23)$$

e a flutuante através de:

$$u_i^{f'} = \sqrt{2k/3} \zeta_i \quad (24)$$

onde  $\zeta_i$  representa uma variável aleatória de média nula e desvio padrão unitário.

## 2.4. Colisão com a superfície

### 2.4.1. Método utilizado

Considere-se uma partícula com uma trajectória AB que entra em rota de colisão com uma superfície de controlo do solo, definida pelos pontos 1, 2 e 3. Esta situação encontra-se representada na Figura 1, retirada de Lapa (2004).

O método de cálculo é efectuado da seguinte forma:

- Definição da equação do plano da superfície e da recta que representa a trajectória da partícula,  $L_i$ ;
- Cálculo do ponto de intersecção da trajectória com o plano da superfície, definido por 0;
- Determinação do ponto 4, considerando que este pertence à linha  $L_n$ , que é normal ao plano e contém o ponto A;
- Determinação do ponto C, considerando que a distância entre os pontos A a C é o dobro de A a 4;
- Determinação da equação da recta que passa por C e 0, que forma a trajectória reflectida  $L_r$ .

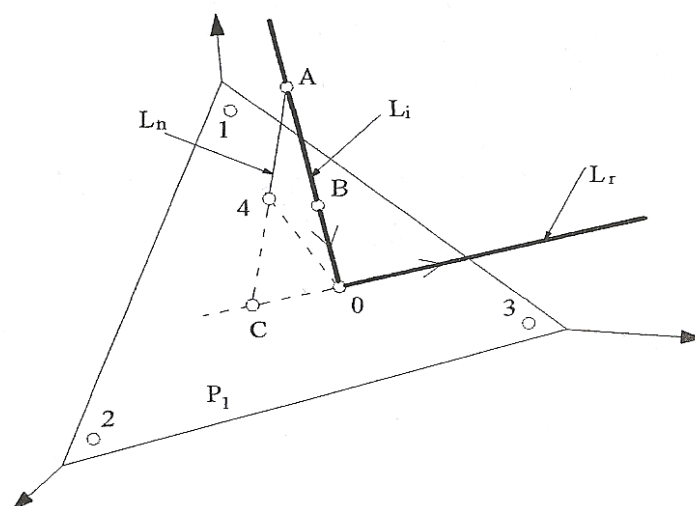


Figura 1 – Representação esquemática do cálculo da trajectória após colisão (autoria de A. M. Gameiro Lopes).

As expressões resultantes do processo acima definido são obtidas da seguinte forma. Considere-se que o plano que define a superfície contém os pontos 1, de

coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ , 2, de coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$ , e 3, de coordenadas  $(x_3, y_3, z_3)$ . A expressão que define o plano é a seguinte:

$$lx + my + nz = q \quad (25)$$

em que  $l, m$  e  $z$  representam as componentes, segundo  $x, y$  e  $z$  respectivamente, de um vector normal à superfície. As expressões que determinam estas componentes são as seguintes:

$$l = y_1(z_2 - z_3) - z_1(y_2 - y_3) + (y_2z_3 - y_3z_2) \quad (26.1)$$

$$m = z_1(x_2 - x_3) - x_1(z_2 - z_3) + (z_2x_3 - z_3x_2) \quad (26.2)$$

$$n = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) \quad (26.3)$$

$$q = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \quad (26.4)$$

A equação cartesiana de uma recta no espaço é a seguinte:

$$P = A + h\vec{r} \quad (27)$$

em que  $P$  é um ponto genérico da recta, de coordenadas  $(x, y, z)$ ,  $A$  um ponto conhecido da recta, de coordenadas  $(x_A, y_A, z_A)$ ,  $\vec{r}$  um vector que pertence à recta (neste caso é definido através dos pontos  $A$  e  $B$ ,  $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ ), e  $h$  uma constante que pode tomar qualquer valor real. Resolvendo a expressão anterior para as três coordenadas espaciais, obtém-se a seguinte expressão que define a recta  $L_i$ :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad (28)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y = y_A + a(x - x_A); a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad (29.1)$$

$$z = z_A + b(x - x_A); b = \frac{z_A - z_B}{x_A - x_B} \quad (29.2)$$

$$x = x_A + c(y - y_A); c = \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} \quad (29.3)$$

$$z = z_A + d(y - y_A); d = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B} \quad (29.4)$$

$$y = y_A + e(z - z_A); e = \frac{y_A - y_B}{z_A - z_B} \quad (29.5)$$

$$x = x_A + f(z - z_A); f = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B} \quad (29.6)$$

Conjugando as expressões que definem o plano e a recta incidente,  $L_i$ , obtêm-se as coordenadas do ponto de intersecção, que são as seguintes:

$$x_0 = \frac{q - nz_A - my_A + x_A(am + bn)}{l + am + bn} \quad (30.1)$$

$$y_0 = \frac{q - nz_A - lx_A + y_A(cl + dn)}{m + cl + dn} \quad (30.2)$$

$$z_0 = \frac{q - lx_A - my_A + z_A(fl + em)}{n + fl + em} \quad (30.3)$$

Poderão surgir algumas indeterminações que podem ser ultrapassadas da seguinte forma:

- Se  $x_A = x_B$ , então  $x_0 = x_A = x_B$ ;
- Se  $y_A = y_B$ , então  $y_0 = y_A = y_B$ ;
- Se  $z_A = z_B$ , então  $z_0 = z_A = z_B$ .

Para determinar o ponto 4, recorre-se à utilização de uma recta que passe pelo ponto A e que tenha um vector  $\vec{r}$  de componentes  $(l, m, n)$ , pois este é perpendicular ao plano. As equações da linha normal,  $L_n$ , tomam formas semelhantes às da incidente, sendo necessário proceder às seguintes substituições:

$$a = \frac{m}{l}; b = \frac{n}{l}; c = \frac{l}{m}; d = \frac{n}{m}; e = \frac{m}{n}; f = \frac{l}{n} \quad (31)$$

Assim, o ponto 4, resultante da intersecção da linha normal com o plano, tem as seguintes coordenadas:

$$x_4 = \frac{q - nz_A - my_A + x_A \left( \frac{m^2 + n^2}{l} \right)}{l + \frac{m^2 + n^2}{l}} \quad (32.1)$$

$$y_4 = \frac{q - nz_A - lx_A + y_A \left( \frac{l^2 + n^2}{m} \right)}{m + \frac{l^2 + n^2}{m}} \quad (32.2)$$

$$z_4 = \frac{q - lx_A - my_A + z_A \left( \frac{l^2 + m^2}{l} \right)}{n + \frac{l^2 + m^2}{n}} \quad (32.3)$$

As indeterminações que podem sugerir no decorrer do cálculo podem ser ultrapassadas da seguinte forma:

- Se  $l = 0$ , então  $x_4 = x_A$ ;
- Se  $m = 0$ , então  $y_4 = y_A$ ;
- Se  $n = 0$ , então  $z_4 = z_A$ .

Como foi anteriormente referido, a distância do ponto A a C é o dobro da de A a 4.

Assim:

$$x_c = 2x_4 - x_c \quad (33.1)$$

$$y_c = 2y_4 - y_c \quad (33.2)$$

$$z_c = 2z_4 - z_c \quad (33.3)$$

Deste modo, é possível determinar a recta reflectida,  $L_r$  (utilizando o ponto C e o vector  $\vec{C0}$ , de componentes  $(x_0 - x_c; y_0 - y_c; z_0 - z_c)$ ), que tem a seguinte forma:

$$\frac{x - x_c}{x_0 - x_c} = \frac{y - y_c}{y_0 - y_c} = \frac{z - z_c}{z_0 - z_c} \quad (34)$$

cujos cossenos directores são:

$$l_x = \frac{|x_0 - x_c|}{\sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2}} \quad (35.1)$$

$$l_y = \frac{|y_0 - y_c|}{\sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2}} \quad (35.2)$$

$$l_z = \frac{|z_0 - z_c|}{\sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2}} \quad (35.3)$$

Devido às perdas de energia que ocorrem durante a colisão da partícula com a superfície, torna-se necessário considerar um factor, o coeficiente de restituição. Segundo a bibliografia disponível, Rice et al. (1995) e Shao (2008), o módulo da velocidade de uma partícula após colisão é cerca de 60% do módulo da sua velocidade imediatamente antes do impacto, ou seja, o coeficiente de restituição,  $\rho$ , toma um valor de 0.6.

## 2.5. Ejecção de partículas devida à colisão de terceiras

Actualmente existem diversos métodos disponíveis na bibliografia, nomeadamente Shao (2008), para o cálculo das propriedades das partículas ejectadas devido a colisões, ou



seja, caudal, velocidade e ângulo de ejeção, mas estes apresentam alguma complexidade que compromete a flexibilidade, robustez e rapidez de cálculo. Pretende-se assim a concepção de um método de cálculo simples, que permita a simulação do problema em questão e que consiga ultrapassar as dificuldades acima referidas, utilizando equações empíricas e resultados experimentais obtidos por diversos autores.

### 2.5.1. Método utilizado

Para determinar a velocidade de ejeção das partículas, recorre-se à expressão empírica obtida por Li e Zhou (2007):

$$V^{ej} = 0.43 + 0.77 \ln(M^{in} + 0.029) \quad (36)$$

em que  $M^{in}$  representa a quantidade de movimento da partícula incidente. Esta expressão encontra-se abaixo representada na forma de gráfico.

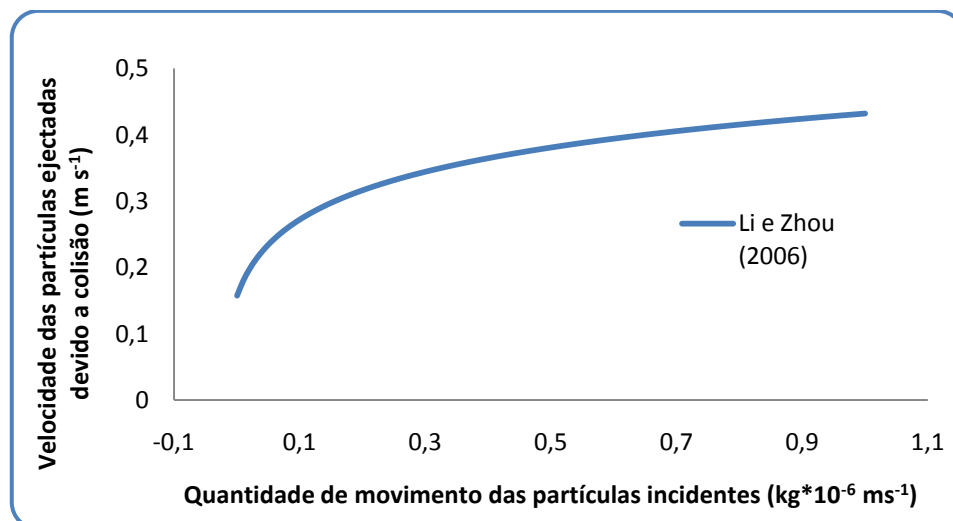


Figura 2- Evolução da velocidade inicial das partículas ejetadas em função da quantidade de movimento das incidentes.

Estes mesmos autores obtiveram uma expressão empírica que define o número de partículas ejetadas em função da quantidade de movimento da partícula incidente:

$$N^{ej} = 17.96 + 18.05 \ln(M^{in} + 0.37) \quad (37)$$

cuja representação gráfica é a seguinte:

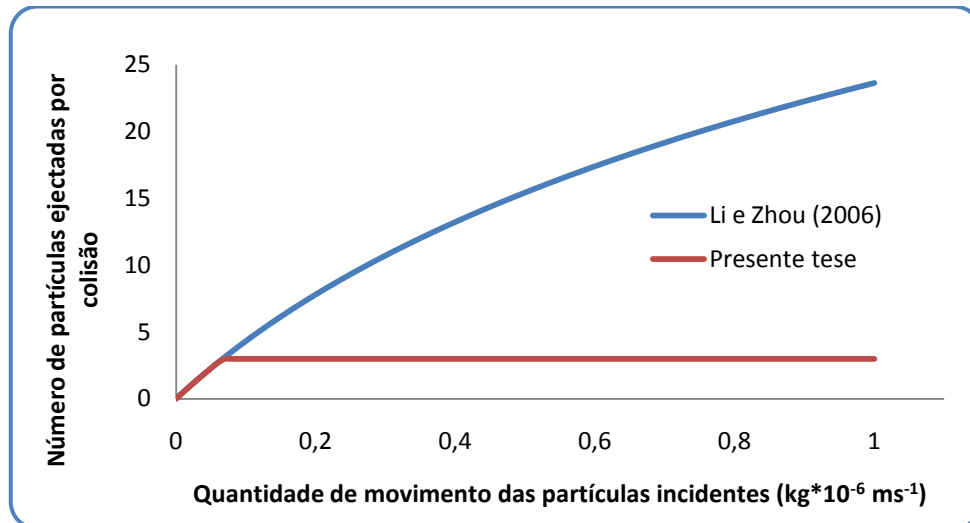


Figura 3 – Evolução do número de partículas ejetadas em função da quantidade de movimento das incidentes.

Os resultados são obtidos considerando que as partículas que constituem a superfície apresentam dimensões que seguem uma distribuição Gaussiana, com desvio padrão  $\sigma = 1.7$  e média  $\mu = 2.81$ . Mas como no presente trabalho apenas é considerada uma dimensão característica é necessário ajustar essa mesma função. Segundo Riceet al (1995), o número de partículas ejetadas, de  $500 \mu m$ , provocado pela colisão de terceiros das mesmas dimensões, não ultrapassa o valor de três. Assim, limita-se a função superiormente ao valor obtido pelos referidos autores, sendo que esta solução se encontra representada na figura anterior.

Li e Zhou (2006) introduzem ainda um parâmetro, *death rate*, que representa a fracção de partículas que, ao colidirem com o solo, ficam depositadas no mesmo:

$$\eta^{dr} = 0.064 e^{\frac{D^{in}}{349}} - 0.036 \quad (38)$$

onde  $D^{in}$  representa o diâmetro das partículas incidentes.

A representação gráfica da expressão acima definida é a seguinte:

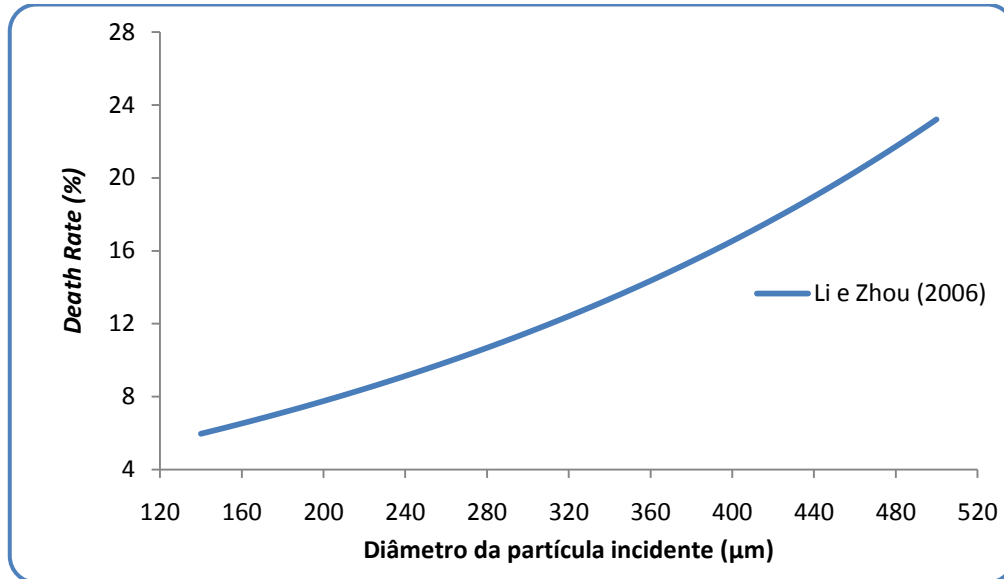


Figura 4 - Evolução do *death rate* em função do diâmetro das partículas incidentes.

Estes autores definem ainda um ângulo típico de ejeção de 60° a 80°.

## 2.6. Deformação do solo

### 2.6.1. Cálculo do escoamento da fase contínua e discretização da superfície do solo

Segundo Oliveira (1998), as propriedades de um escoamento tridimensional em regime permanente podem ser obtidas através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^f u_i^f \varphi - \Gamma_{ef,\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = S_\varphi \quad (39)$$

em que  $\varphi$  representa uma propriedade específica, por unidade de massa,  $\Gamma_{ef,\varphi}$  o coeficiente de difusão da propriedade  $\varphi$ , e  $S_\varphi$  o termo fonte dessa mesma propriedade. Para a simulação do efeito da turbulência no escoamento, é utilizado o modelo  $k - \varepsilon$  de alto número de Reynolds, cujos valores da energia cinética turbulenta,  $k$ , e sua correspondente taxa de dissipação,  $\varepsilon$ , são obtidos através de equações de transporte, descritas pela expressão geral (39). Para a resolução da expressão (39) é realizada uma transformação de coordenadas, de cartesianas para generalizadas, e sua posterior integração utilizando o método de volumes de controlo, utilizando uma malha desviada. A malha horizontal ( $x, y$ ) apresenta um espaçamento uniforme entre os nodos. A coordenada vertical é uma

coordenada que segue a superfície de cálculo, sendo a malha gerada algebricamente utilizando um factor de expansão constante nessa mesma direcção. Para o cálculo da fase contínua foi utilizado um modelo proposto por Lopes (2001), denominado de *Canyon*.

O método de cálculo global é realizado da seguinte forma:

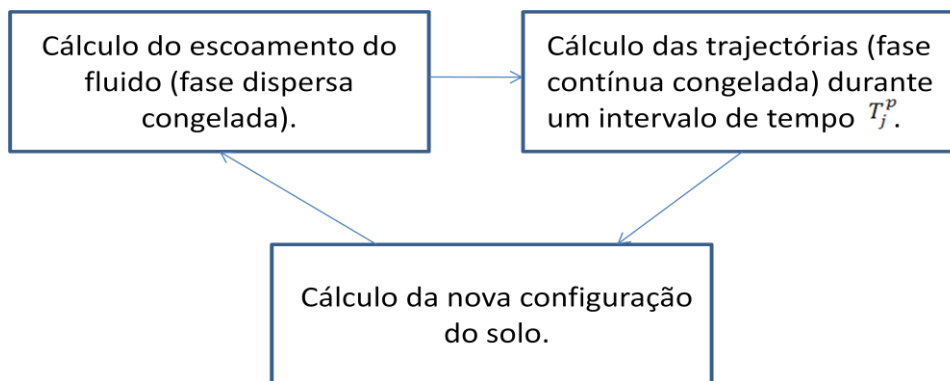


Figura 5 - Esquema do processo de cálculo.

O processo de cálculo termina quando a soma dos tempos parciais,  $T_j^p$ , que têm valores iguais, atinge o tempo total de cálculo definido pelo utilizador.

### 2.6.2. Balanço mássico numa superfície de controlo

Para determinar as variações de cota dos nodos que constituem a superfície, é necessário definir os balanços mássicos devidos à ejeção e/ou deposição de massa, que decorrem nas imediações dos mesmos. Considere-se uma partícula que representa um caudal mássico de partículas com as mesmas características, com velocidade e ângulo de incidência,  $V^{in}$  e  $\alpha^{in}$ , respectivamente, que colide com a superfície, sendo depois reflectida com velocidade e ângulo de reflexão,  $V^{rb}$  e  $\alpha^{rb}$ , respectivamente, em que esta velocidade representa uma fracção da incidente, inerente às perdas de energia aquando da colisão. Esta troca de energia com o solo pode provocar a ejeção de novos elementos (dependendo da quantidade de movimento da partícula incidente), com velocidade e ângulo de ejeção,  $V^{ej}$  e  $\alpha^{ej}$ , respectivamente. A situação descrita encontra-se representada esquematicamente na Figura 6.

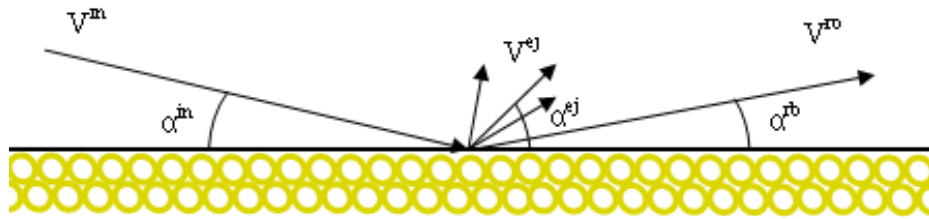


Figura 6 – Esquema do impacto de uma partícula com o solo.

Tal como foi referido anteriormente, existe uma quantidade de partículas que, ao colidirem com o solo, ficam depositadas neste, ou seja, o caudal mássico reflectido,  $\dot{m}^{rb}$ , representa uma fracção do incidente,  $\dot{m}^{in}$ , sendo esta fracção determinada pelo *death rate*, cuja expressão foi apresentada na secção 2.5.1. Existem ainda algumas partículas que são erodidas do solo (ver secção 2.1.1), cujo caudal é denotado por  $\dot{m}^{er}$ . Estas não se encontram representadas na figura de modo a torná-la clara. Encontram-se, assim, reunidas as condições para formular o balanço de massa na superfície:

$$\dot{m}^{in}_{total} = \dot{m}^{in} \quad (40)$$

$$\dot{m}^{out}_{total} = \dot{m}^{rb} + \dot{m}^{ej} + \dot{m}^{er} = (1 - \eta^{dr})\dot{m}^{in} + \dot{m}^{ej} + \dot{m}^{er} \quad (41)$$

Um grão de areia, ao colidir com a superfície, provoca a ejeção de  $N^{ej}$  partículas e, como este representa um caudal de partículas semelhantes, são geradas  $N^{ej}$  novas trajectórias de partículas com caudal mássico dependente do incidente. No presente estudo, o caudal mássico ejetado, para cada trajectória  $N^{ej}$ , é metade do incidente, pois segundo a bibliografia disponível, Shao (2008), a probabilidade de uma partícula provocar a ejeção de outra, devido a colisão, é de 50%, podendo a equação anterior ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{m}^{out}_{total} = (1 - \eta^{dr})\dot{m}^{in} + 0.5N^{ej}\dot{m}^{in} + \dot{m}^{er} \quad (42)$$

A variação local de massa no solo pode ser definida da seguinte forma:

$$\Delta\dot{m} = \dot{m}^{in}_{total} - \dot{m}^{out}_{total} \quad (43)$$

No caso de uma partícula terminar a sua trajectória, o valor da variação do caudal total será, obviamente, igual ao incidente,  $\dot{m}^{in}$ .

### 2.6.3. Deformação do solo

A variação da cota do nodo representativo da célula que contém o ponto em estudo é determinada pela seguinte expressão:

$$\Delta h = \frac{\Delta \dot{m} T_j^p}{\rho^p A} \quad (44)$$

em que  $\Delta \dot{m}$  representa a variação do caudal mássico associada ao nodo em questão,  $T_j^p$  o tempo de cálculo parcelar da fase dispersa e  $A$  a área da base do volume de controlo que contém o ponto de impacto ou de ejeção. Verifica-se que: se o caudal mássico que entra na superfície de controlo for superior ao que a abandona, o nodo sofrerá uma variação de cota positiva, ascendente; caso contrário, sofrerá uma variação de cota negativa, descendente, como seria de esperar. Seguidamente é apresentada uma figura, 7, que exemplifica o funcionamento do código em estudo.

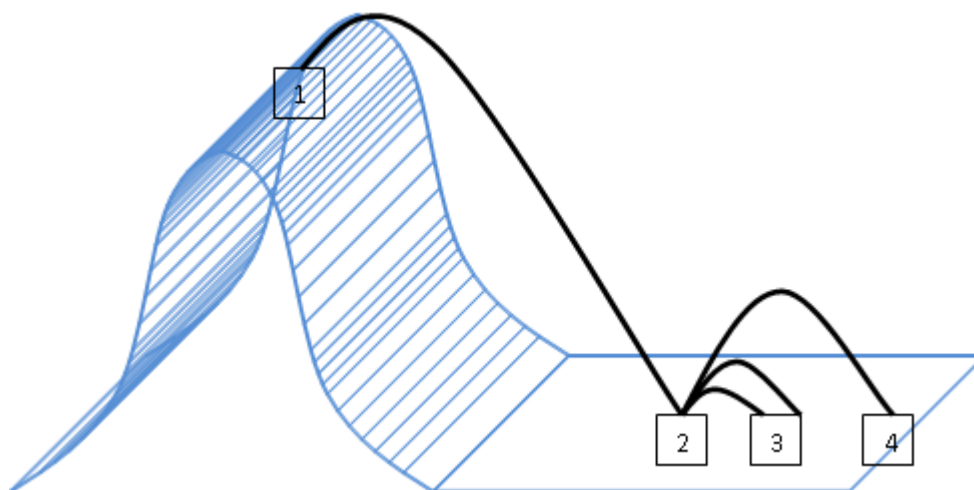


Figura 7 – Trajectória típica de um conjunto de partículas erodidas.

Através da figura 7 verifica-se que num nodo, ponto 1, onde a velocidade de atrito local é superior ou igual à crítica, é permanentemente erodido, durante um intervalo de tempo  $T_j^p$ , um caudal mássico, definido no subcapítulo 2.1. Esta quantidade de massa, representada por uma partícula, colide com o solo, ponto 2, sendo reflectida e terminando a sua trajetória em 4. Devido a esta colisão, novas partículas podem ser ejetadas, terminando as suas trajetórias em 3. Abaixo, são apresentadas as variações de cotas e de massa nos pontos acima definidos.

**Caso 1 – Erosão ( $u_\tau \geq u_{\tau,t}^*$ )**

Como nesta situação não existe nenhuma partícula a incidir, o único fenómeno responsável pela variação de massa, na zona em causa, será a erosão. Assim, os caudais mássicos, que entram e abandonam a superfície de controlo, e a variação de cota do nodo, serão dados por:

$$\dot{m}^{in}_{total} = 0 \quad (45.1)$$

$$\dot{m}^{out}_{total} = \dot{m}^{er} \quad (45.2)$$

$$\Delta h = -\frac{\dot{m}^{er} T_j^p}{\rho^p A} \quad (45.3)$$

Verifica-se, assim, uma diminuição da cota, como seria de esperar.

### Caso 2 – Colisão e ejeção de novas partículas

O caudal mássico proveniente do nodo onde ocorreu a erosão colide com a superfície, ocorrendo assim a deposição de alguma quantidade de massa, definida pelo *death rate*, e a ejeção de massa para o escoamento. Os caudais mássicos, que entram e abandonam a superfície onde ocorre a colisão, e a variação de cota do nodo que contém essa mesma superfície, são obtidos através de:

$$\dot{m}^{in}_{total} = \dot{m}^{er} \quad (46.1)$$

$$\dot{m}^{out}_{total} = (1 - \eta^{dr})\dot{m}^{er} + 0.5N^{ej}\dot{m}^{er} \quad (46.2)$$

$$\Delta h = \frac{\dot{m}^{er}(\eta^{dr} - 0.5N^{ej}) T_j^p}{\rho^p A} \quad (46.3)$$

Verifica-se que: se  $\eta^{dr} > 0.5N^{ej}$ , existe um aumento da cota do nodo; caso contrário, ocorre uma diminuição.

### Casos 3 e 4 – Final da trajectória

Ao fim de uma ou várias colisões com o solo, as partículas não têm quantidade de movimento suficiente para serem reflectidas, terminando a sua trajectória no ponto onde se deu a última colisão. A baixa quantidade de movimento também não permite a ejeção de novas partículas para o escoamento. Assim, os caudais mássicos, que entram e abandonam a superfície, e a variação de cota do nodo que contém essa mesma superfície, são dados através de:

Para o caso 3:

$$\dot{m}^{in}_{total} = 0.5 \dot{m}^{er} \quad (47.1)$$

$$\dot{m}^{out}_{total} = 0 \quad (47.2)$$

$$\Delta h = \frac{0.5 \dot{m}^{er} T_j^p}{\rho^p A} \quad (47.3)$$

Para o caso 4:

$$\dot{m}^{in}_{total} = (1 - \eta^{dr})\dot{m}^{er} \quad (48.1)$$

$$\dot{m}^{out}_{total} = 0 \quad (48.2)$$

$$\Delta h = \frac{\dot{m}^{er}(1 - \eta^{dr}) T_j^p}{\rho^p A} \quad (48.3)$$

Nas expressões dos casos 2, 3 e 4 não são considerados os caudais mássicos de partículas que possam ser erodidas ( $u_\tau \geq u_{\tau,t}^*$ ) nesses nodos, pois o cálculo da fase dispersa é realizado varrendo todos os nodos da superfície de cálculo, calculando as trajectórias das partículas onde as condições para tal estão reunidas, sendo os nodos a montante da crista da duna os primeiros a serem visitados. Assim, é necessário, no final de varrer o domínio, calcular a variação de massa total que ocorre em cada superfície de controlo, que não é mais do que a soma das várias variações que ocorreram durante o processo de cálculo.



### 3. RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

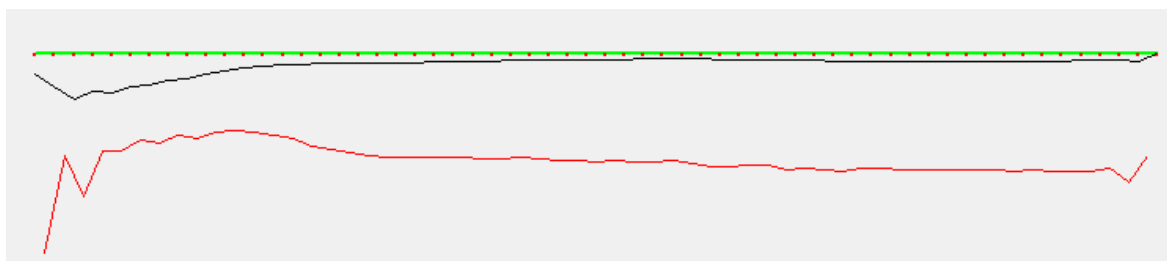
Nesta secção do trabalho, apenas se pretende confrontar os resultados obtidos numericamente, sob a forma gráfica, entre si e com resultados experimentais, de modo a avaliar a qualidade das soluções obtidas. Todas as simulações foram realizadas para um espaço temporal de 720 s e para uma velocidade de escoamento não perturbado de 10 m/s. Resta referir que a linha verde e a linha preta representam a superfície antes e depois de ser exposta à acção do escoamento, respectivamente, correspondendo a linha vermelha ao valor da tensão de atrito ao longo do solo.

#### 3.1. Superfície plana

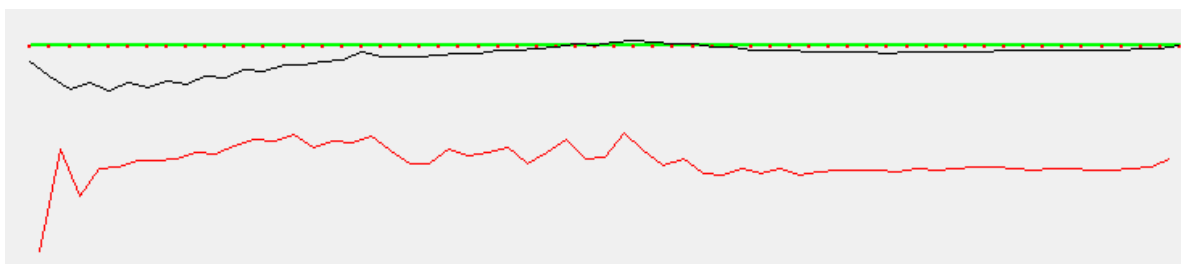
Neste subcapítulo apenas serão apresentados resultados obtidos pelo código em estudo, devido à indisponibilidade de dados obtidos experimentalmente. A velocidade de ejeção é seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$ . O ângulo de ejeção também é seleccionada a partir do mesmo processo, considerando uma média  $\mu = 30^\circ$  e desvio padrão  $\sigma = 0.1\mu$ . Ao contactar com a superfície, o fluido desenvolve uma camada limite, no qual os valores de velocidade de atrito são superiores na zona inicial, devido à adaptação a novas condições, apresentando uma diminuição com o aumento da distância a essa zona. Uma vez que o escoamento se encontra desenvolvido, a velocidade de atrito toma valores aproximadamente constantes.

**Caso 1** – Coeficiente de restituição de 0.3:

Utilizando os dados acima definidos, obtiveram-se os seguintes resultados:



**Figura 8** – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).



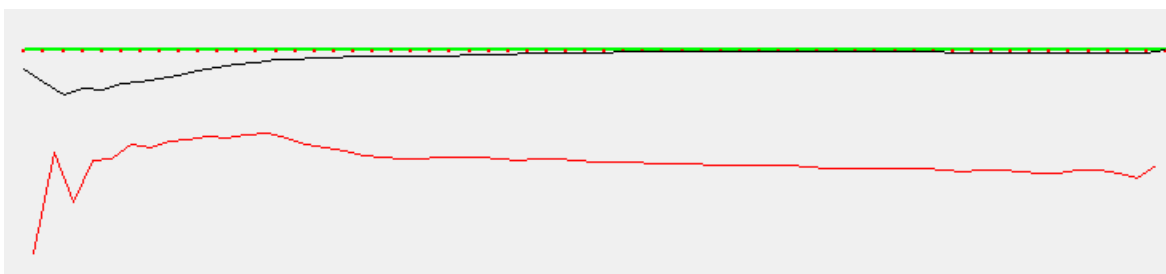
**Figura 9 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).**

Através da análise da Figura 8, verifica-se que a erosão se desencadeia principalmente na zona inicial, devido ao fenómeno de desenvolvimento da camada limite, sendo o material transportado para todo o domínio de cálculo.

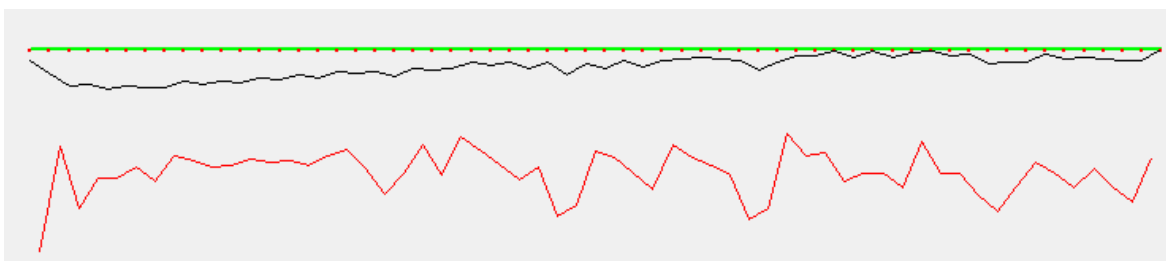
Através da introdução do processo de ejeção devido a colisão, Figura 9, verifica-se que a zona inicial foi mais afectada, houve maior remoção de material e a área afectada foi superior, e que após esta, no centro da figura, surge uma zona com cota superior à inicial devido à deposição de material proveniente da zona a montante.

**Caso 2 – Coeficiente de restituição de 0.6:**

Utilizando os dados acima definidos, obtiveram-se os seguintes resultados:



**Figura 10 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).**



**Figura 11 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).**

Observando a Figura 10, conclui-se que a utilização de um coeficiente de restituição diferente, 0.6, conduz a resultados muito diferentes dos obtidos anteriormente. Verifica-se que a zona inicial continua a ter uma configuração semelhante à obtida para um

coeficiente de 0.3, mas o aumento de velocidade após colisão apenas permite uma pequena deposição de material ao longo da superfície e localizada no final do domínio de cálculo.

Pela Figura 11, verifica-se que o aumento do coeficiente de restituição provoca uma grande remoção de material, quando comparado a resultados anteriores. Isto deve-se ao facto de as partículas colidirem com o solo com velocidades superiores, após a primeira colisão, provocando a ejeção de maior quantidade de partículas e com maior velocidade, pois estes factores dependem da quantidade de movimento da partícula incidente. Quando comparada com a Figura 10, pode-se observar que o domínio se encontra afectado na totalidade, pois as partículas ejetadas devido a colisões apresentam velocidades muito inferiores às que lhe dão origem, apresentando trajectórias de comprimentos inferiores, colidindo com zonas diferentes.

### 3.2. Duna

Os resultados obtidos numericamente, utilizando diversos coeficientes de restituição, velocidades e ângulos de ejeção, serão posteriormente comparados aos obtidos experimentalmente. A duna apresenta uma altura  $H = 75 \text{ mm}$  e uma relação altura comprimento de  $L/H = 5.8$ .

**Caso 1** – Dados obtidos experimentalmente.

Os resultados obtidos experimentalmente por Fino (2011) encontram-se abaixo representados.

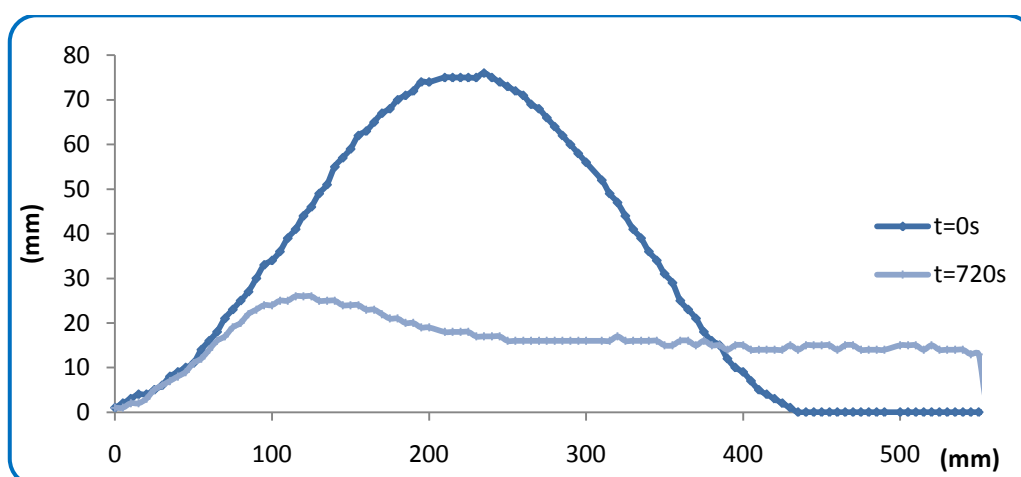


Figura 12 – Resultado obtido experimentalmente em túnel de vento.

**Caso 2** – Considerando que todas as trajectórias podem ejetar partículas.

Qualquer partícula que colida com o solo pode, em princípio, ejectar novas partículas para o seio do fluido, desde que tenham quantidade de movimento suficiente. Os resultados obtidos para este caso são os seguintes:

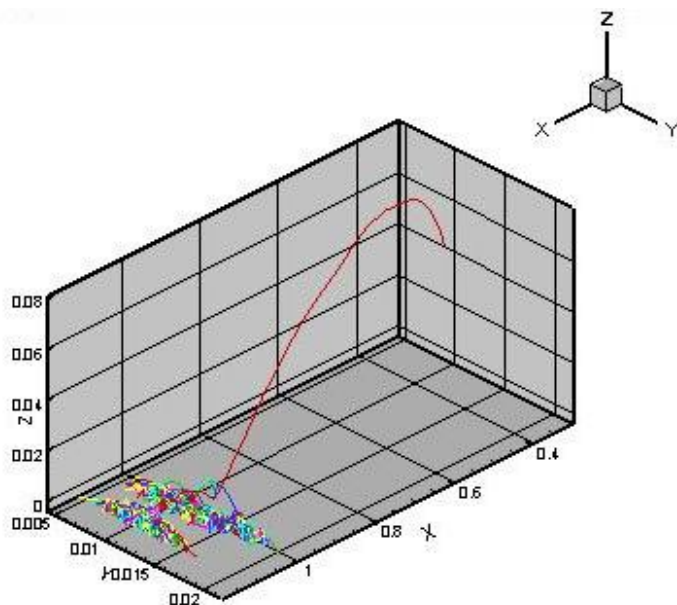


Figura 13 – Trajectória das partículas

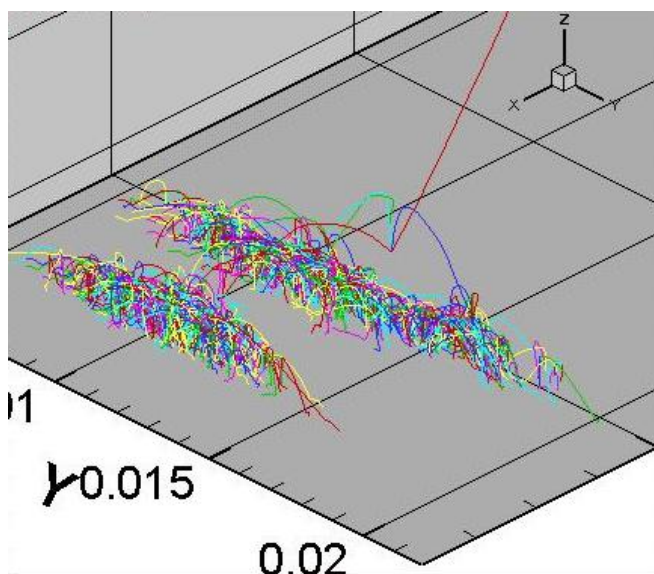
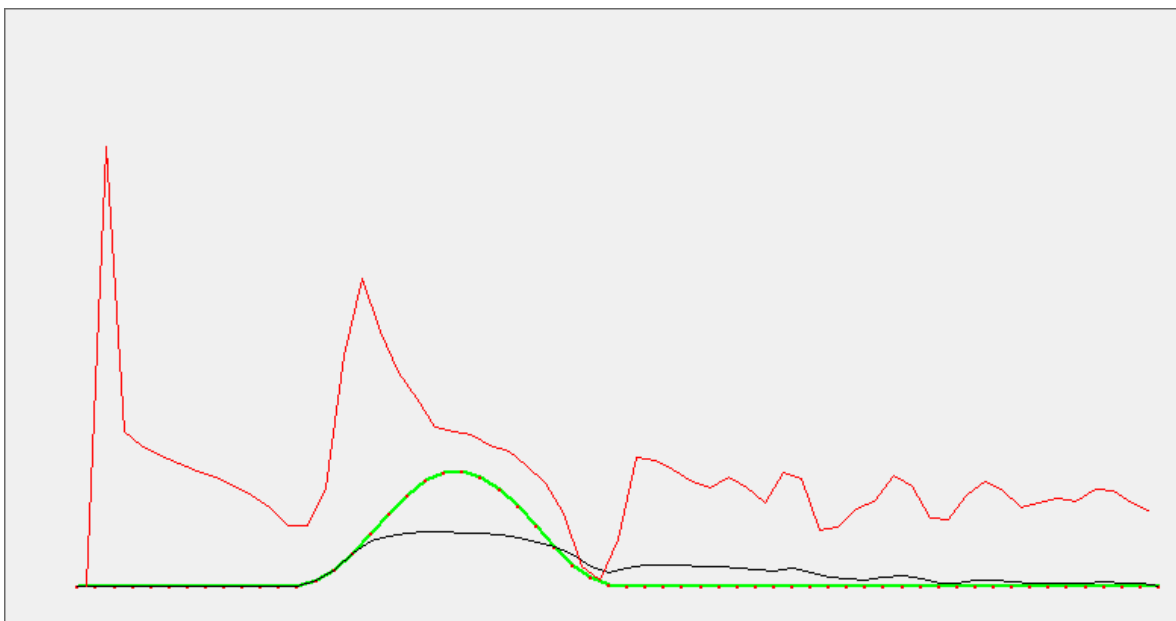


Figura 14 – Trajectórias das partículas (zoom).

Verifica-se que o pressuposto acima definido vai gerar um ciclo infinito, o que não faz sentido. Através da análise da expressão que determina o número de partículas ejectadas devido a colisão, verifica-se que a velocidade mínima para que ocorra a ejeção de material, ou seja, uma partícula, é de, aproximadamente,  $0.019 \text{ m/s}$ , o que corresponde a uma velocidade de ejeção de  $0.020 \text{ m/s}$ , que é semelhante, não estando em

concordância com os resultados obtidos na bibliografia, que demonstram que a velocidade de ejeção é aproximadamente 10% da incidente. Verifica-se que só se obtêm relações desta ordem para velocidades de impacto superiores a 5 m/s. Assim, e devido ao seu grande ângulo de ejeção, entre 60 a 80°, as partículas são inseridas no escoamento através da colisão, conseguindo ganhar quantidade de movimento suficiente para ejectar outras, desencadeando assim um longo processo, que é irrealista. Considerou-se, assim, que apenas a trajectória principal, gerada pela erosão, tem a capacidade de realizar o fenómeno de ejeção de nova quantidade de material.

**Caso 3** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$ . Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 30^\circ$  e desvio padrão  $\sigma = 0.1\mu$ . O coeficiente de restituição toma o valor de 0.3.



**Figura 15** – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).

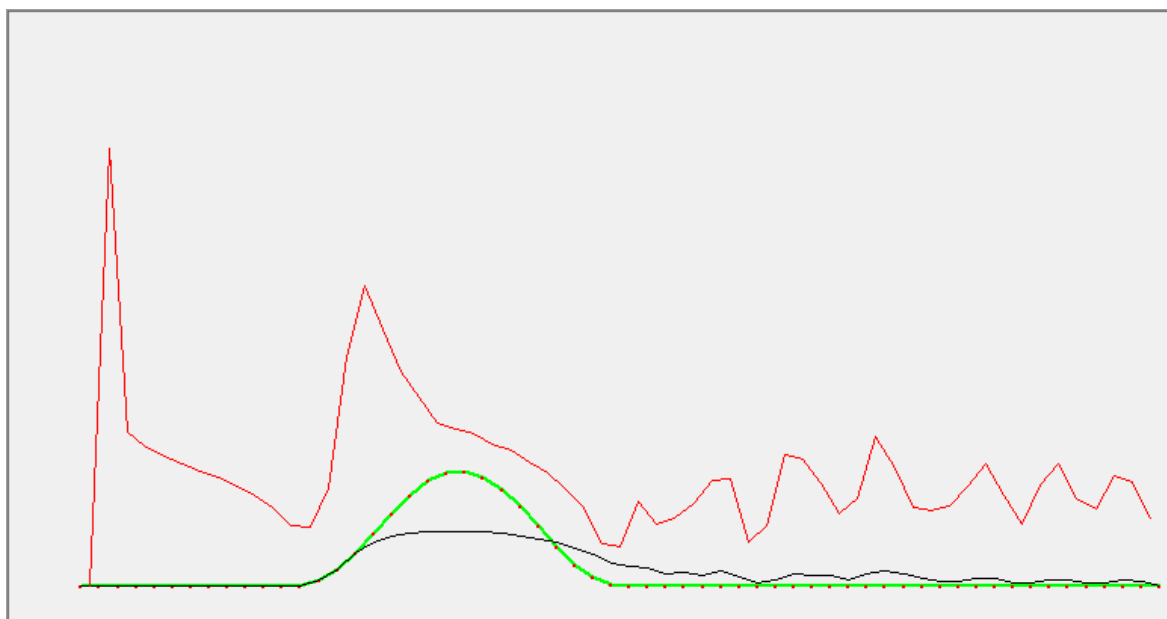
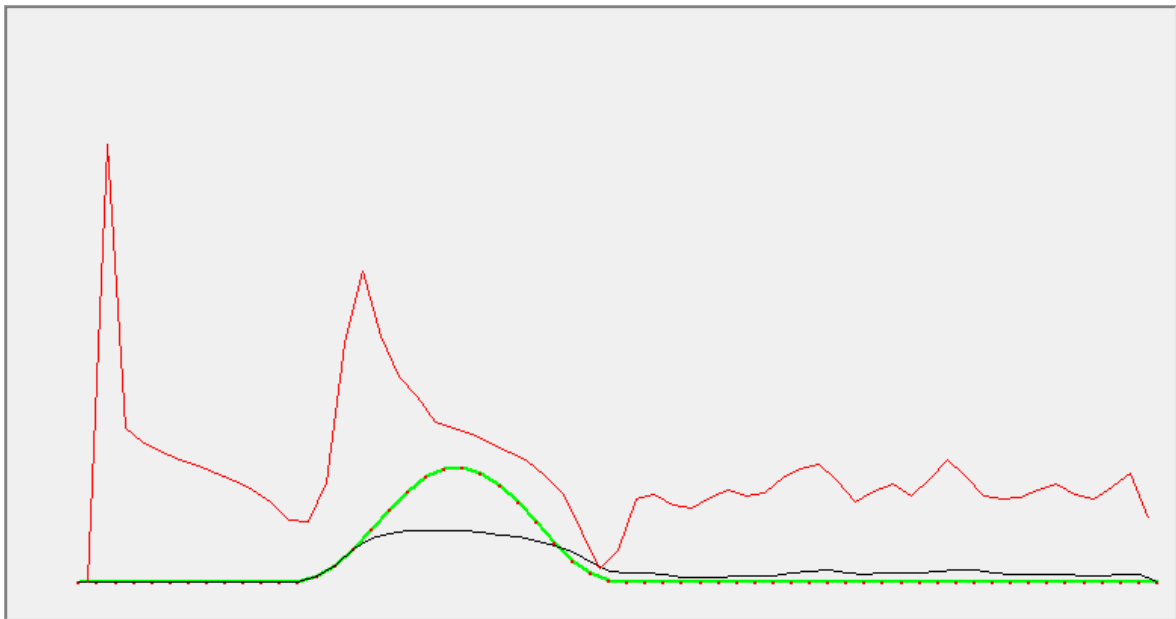


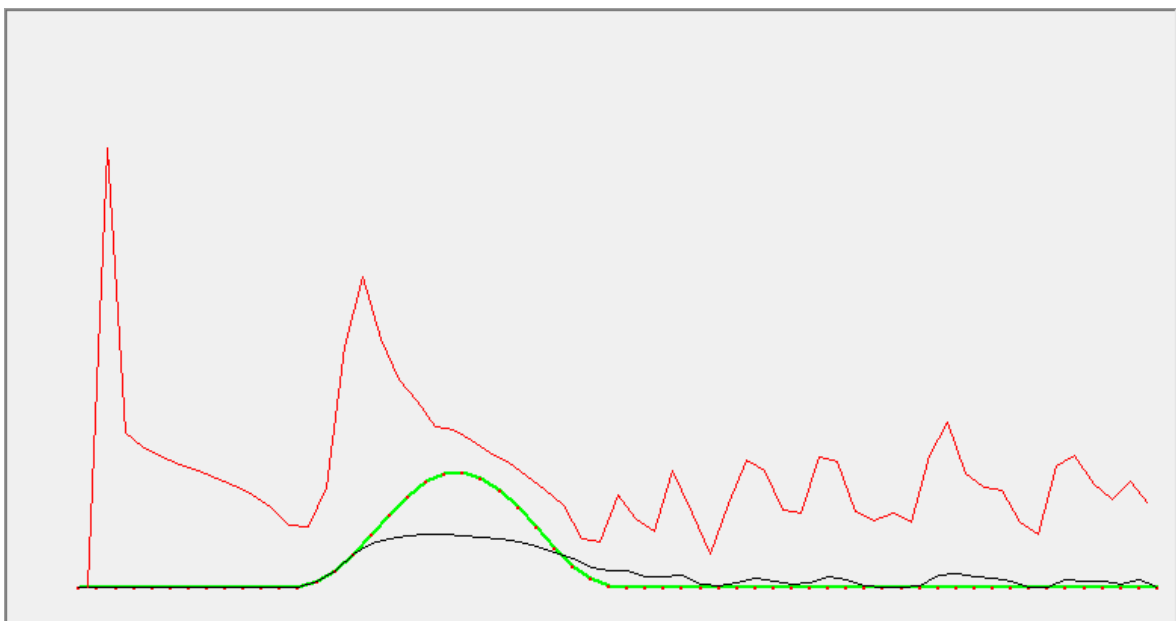
Figura 16 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).

Analisando a Figura 15, verifica-se que grande parte do material erodido localiza-se na zona a jusante da base da duna, que inicialmente era plana, e que a transição entre a zona da duna erodida e o material depositado não se faz de um modo suave, como demonstram os resultados práticos, mas sim através de uma zona de cota inferior. Verifica-se que o material que inicialmente se encontrava presente na duna ocupa uma extensão superior à dimensão da base da duna. Após a implementação do método descrito ao longo do trabalho, Figura 16, a transição acima descrita é feita de forma mais suave, aproximando-se um pouco dos resultados experimentais, pois grande parte das partículas fica depositada nas imediações da base a jusante da duna, o que não acontecia anteriormente.

**Caso 4** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$ . Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 30^\circ$  e desvio padrão  $\sigma = 0.1\mu$ . O coeficiente de restituição toma o valor de 0.6.



**Figura 17 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_{\tau}; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^{\circ}; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).**

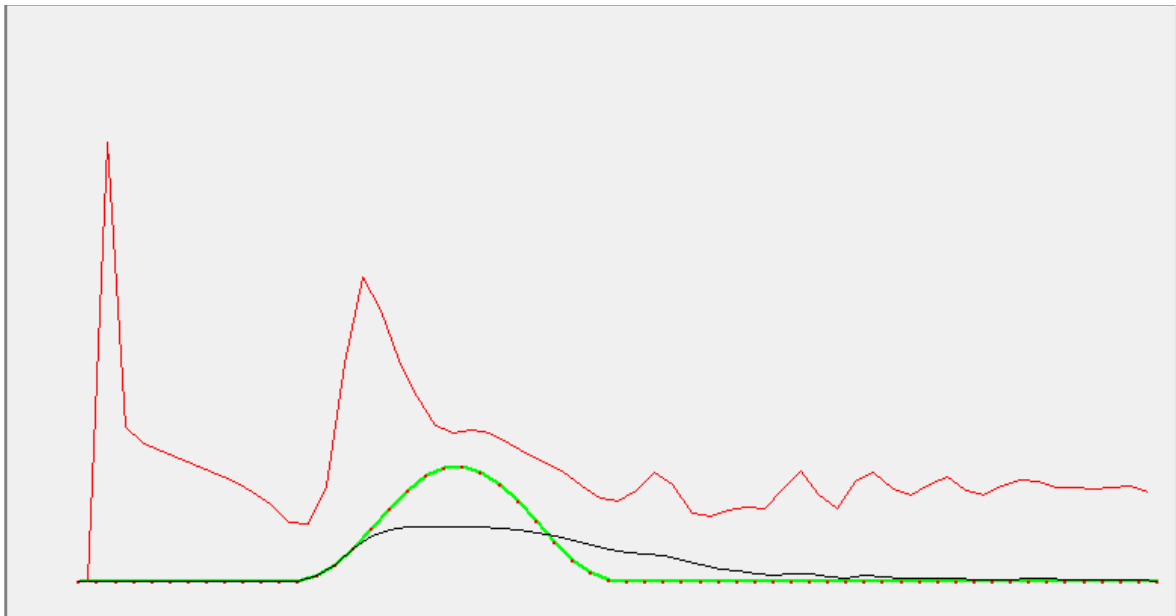


**Figura 18 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_{\tau}; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 30^{\circ}; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).**

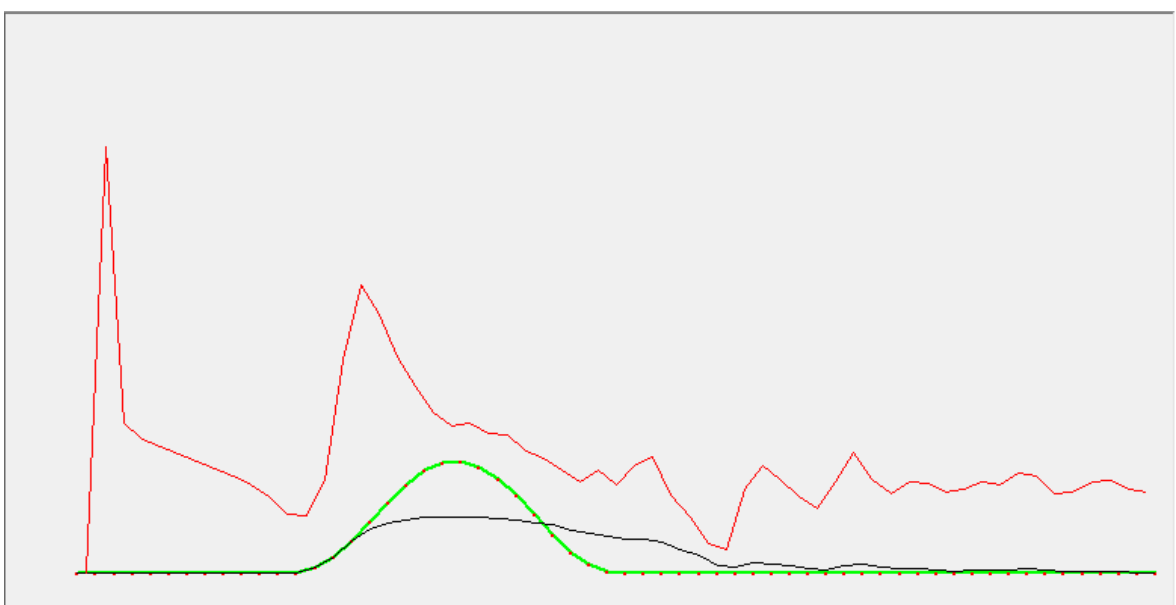
Os resultados obtidos para um coeficiente de restituição superior, 0.6, mas para condições de velocidade e ângulo de ejeção iguais aos do caso 3, apresentam diferenças muito significativas. Verifica-se que em ambos os casos, Figuras 17 e 18, os resultados obtidos numericamente não se aproximam dos obtidos experimentalmente, muito pelo contrário, pois o material erodido distribui-se ao longo de toda a superfície a jusante da duna, mas não na zona da base como seria de esperar. Os resultados obtidos utilizando o

método descrito na presente tese mostram que existe uma maior acumulação de partículas nas proximidades da duna, aproximando-se um pouco dos resultados práticos, mas não sendo realista.

**Caso 5** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$ . Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 10^\circ$  e desvio padrão  $\sigma = 0.1\mu$ . O coeficiente de restituição toma o valor de 0.3.



**Figura 19** – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).



**Figura 20** – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).



Ao comparar os resultados obtidos, Figuras 19 e 20, com os obtidos no caso 3, que apenas diferem no valor médio do ângulo de ejeção, é possível verificar uma melhoria dos resultados, com e sem a injeção de partículas devido a colisão de terceiros.

Comparando as Figuras 15 e 19, verifica-se que grande parte das partículas encontra-se agora depositada na zona da base da duna e que a transição, entre a duna e o material a jusante, é feita de forma suave, reflectindo uma melhoria dos resultados numéricos.

Através da comparação das Figuras 16 e 20, é possível verificar que existe uma maior quantidade de material depositado na zona da base a jusante da duna, verificando-se assim uma melhor aproximação aos resultados experimentais.

A alteração do ângulo de ejeção conduziu a uma melhoria global dos resultados, sendo os da Figura 19 os mais realistas, quando comparados com os práticos.

**Caso 6** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$ . Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 10^\circ$  e desvio padrão  $\sigma = 0.1\mu$ . O coeficiente de restituição toma o valor de 0.6.

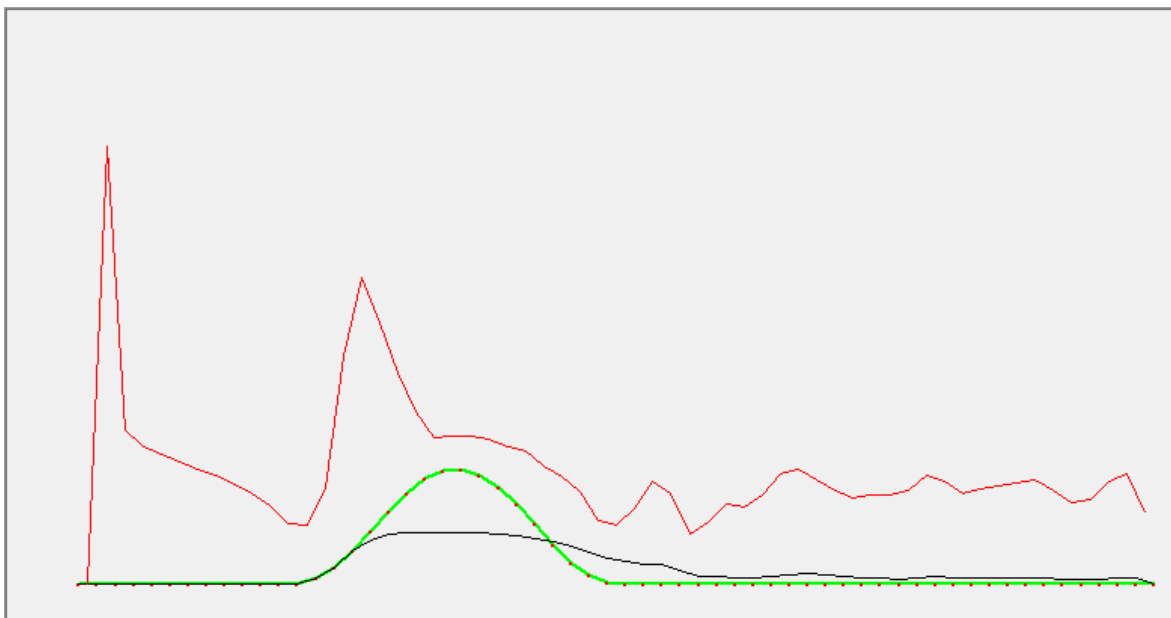


Figura 21 – Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).

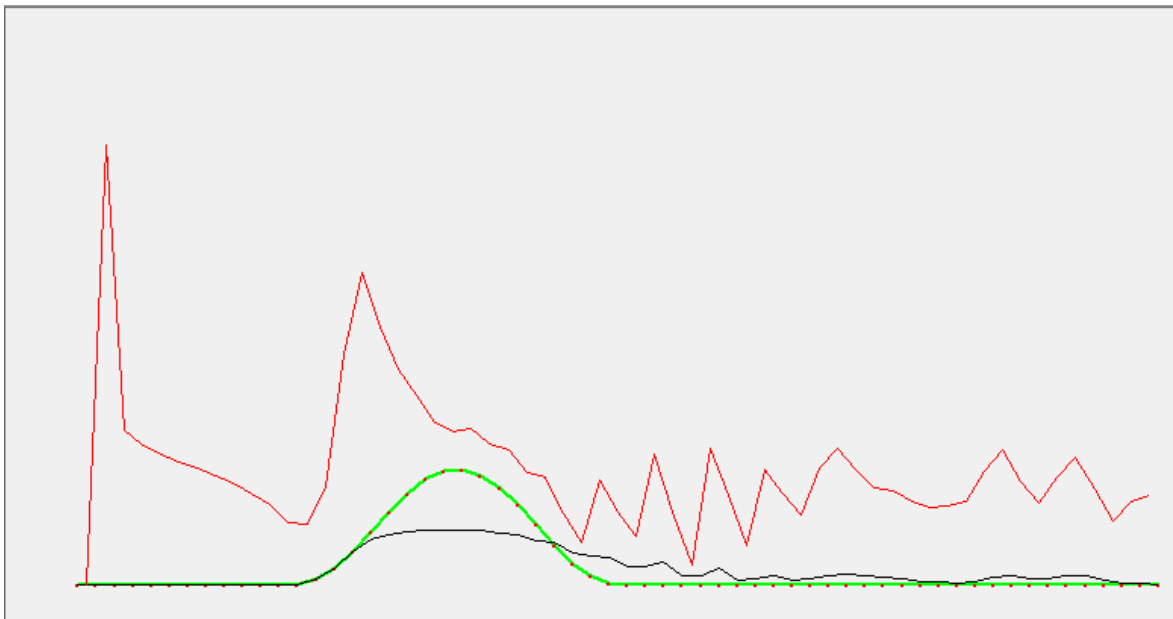
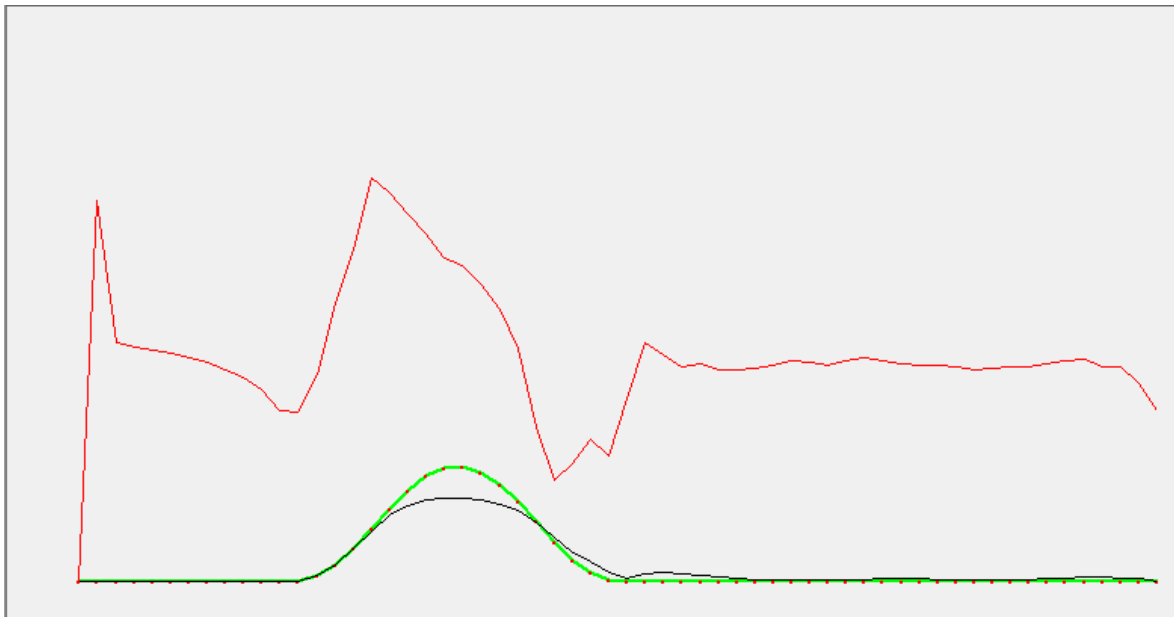


Figura 22 – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = u_\tau; \sigma = 0.5\mu)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).

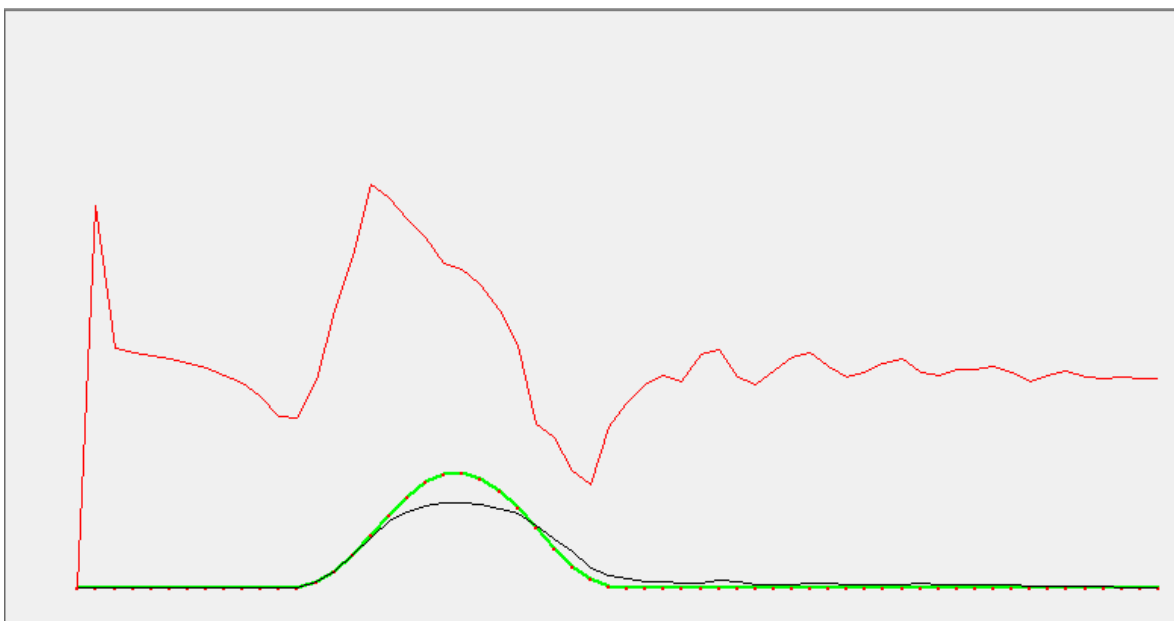
Comparando estes resultados com os obtidos no caso 7, que apenas diferem no valor do coeficiente de restituição, verifica-se que existe uma grande diferença entre os resultados obtidos, afastando-se do que é esperado, ou seja, existe uma menor acumulação de massa na zona da base a jusante da duna, devido à menor perda de energia entre as colisões, permitindo que as partículas tenham trajectórias de dimensões superiores.

No entanto, nota-se um aumento na qualidade dos resultados quando comparados aos obtidos no caso 5, que apresenta um ângulo de ejeção superior, demonstrando assim a importância determinante desse factor.

**Caso 7** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = 0.7u_\tau$  e desvio padrão nulo. Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 10^\circ$  e desvio padrão nulo. O coeficiente de restituição toma o valor de 0.3.



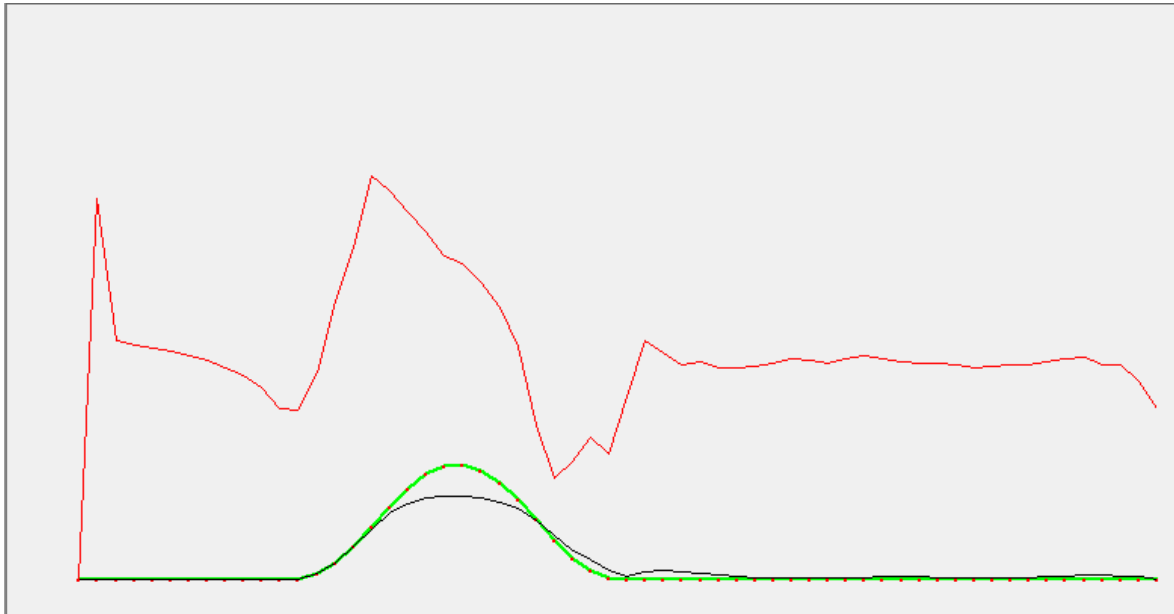
**Figura 23 - Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u_\tau; \sigma = 0)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).**



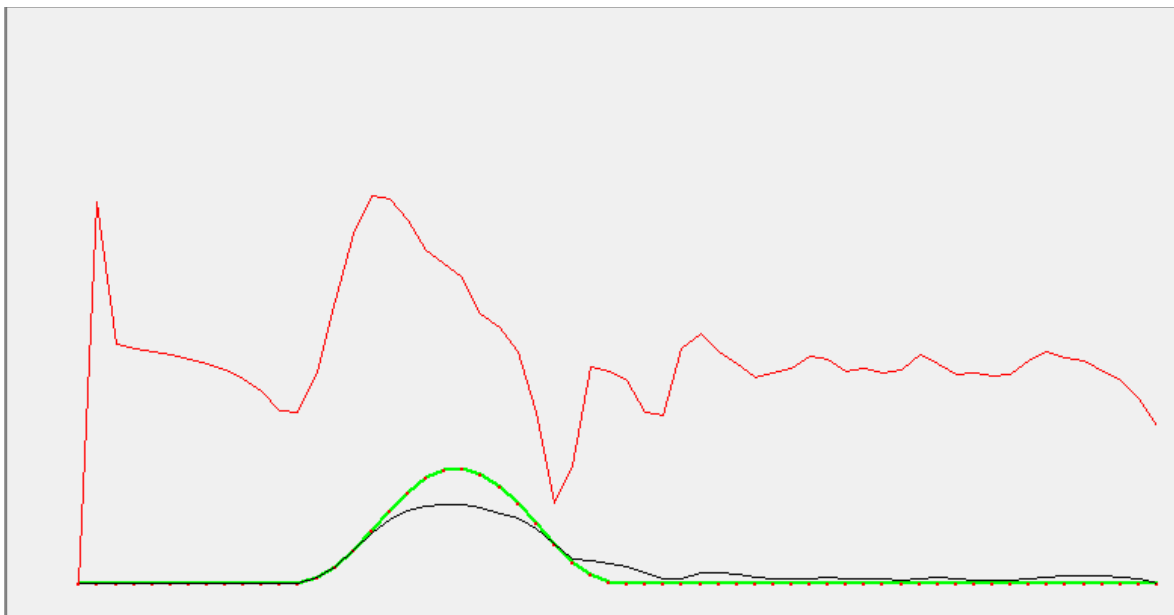
**Figura 24 - Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u_\tau; \sigma = 0)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.3$ ).**

Alterando os parâmetros da velocidade de ejeção, diminuindo o valor do desvio padrão e média, verifica-se que os resultados obtidos em nada se assemelham aos experimentais. Comparando as Figuras 23 e 24, pode-se observar um aumento de massa na zona da base da duna, representando uma melhoria de resultados devido à inclusão do efeito de ejeção de partículas devido a colisões.

**Caso 8** – Velocidade de ejeção seleccionada a partir de uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = 0.7u_\tau$  e desvio padrão nulo. Ângulo de ejeção seleccionado a partir do mesmo processo com média  $\mu = 10^\circ$  e desvio padrão nulo. O coeficiente de restituição toma o valor de 0.6.



**Figura 25** - Resultado obtido sem considerar a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u_\tau; \sigma = 0)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).



**Figura 26** – Resultado obtido considerando a ejeção de partículas devido a colisões ( $V \sim N(\mu = 0.7u_\tau; \sigma = 0)$ ,  $\alpha \sim N(\mu = 10^\circ; \sigma = 0.1\mu)$  e  $\rho = 0.6$ ).

Aumentando o valor do coeficiente de restituição, em relação ao caso estudado anteriormente, os resultados perdem qualidade quando comparados aos experimentais, verificando-se ainda assim um aumento da quantidade de material, entre as Figuras 25 e 26, na base da duna devido à introdução do método abordado neste trabalho.

## 4. CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS

Através da análise global dos resultados obtidos numericamente, conclui-se que o efeito de ejeção de partículas devido à colisão de terceiros representa um papel importante no transporte global de massa que não pode ser, de algum modo, ignorado, pois verificou-se sempre uma melhoria de resultados quando confrontados com simulações que não integravam este processo.

Verificou-se uma grande discrepância quando se fizeram variar os parâmetros que determinam a velocidade de ejeção devido à erosão, sendo os resultados obtidos com média  $\mu = u_\tau$  e desvio padrão  $\sigma = 0.5\mu$  os que apresentam melhor qualidade, devido à grande proximidade com os experimentais obtidos por Fino (2011). Ao ser alterado o ângulo de ejeção devido à erosão, os dados obtidos também apresentaram diferenças significativas, mostrando que este parâmetro deverá estar mais próximo de  $10^\circ$  do que de  $30^\circ$ .

Os valores do coeficiente de restituição utilizados, 0.3 e 0.6, também conduziram a resultados muito diferentes, como esperado, sendo que as melhores aproximações aos resultados experimentais foram obtidas para 0.3, o que não se revelou coerente com a bibliografia disponível. É, pois, necessária uma avaliação mais criteriosa da velocidade de ejeção devido à erosão, diminuindo assim essa velocidade e não permitindo a deposição de material em zonas muito distantes da base a jusante da duna.

No caso 2 do subcapítulo 3.2, conclui-se que a expressão empírica utilizada com vista a determinar a velocidade de ejeção devido a colisão não é apropriada para baixos valores de quantidade de movimento, pois não são obtidos valores realistas. Isto deve-se, provavelmente, ao facto de esta ter sido obtida para um ensaio em que o solo é composto por grãos de várias dimensões. O mesmo acontece para a expressão que determina a quantidade de partículas ejectadas por colisão. Devido a isso, considerou-se que apenas a trajectória principal (a que provém de um nodo erodido) pode provocar a ejeção de material novo para o seio do escoamento, o que pode ser de alguma forma irrealista, já que nas colisões em que a partícula possui grande quantidade de movimento podem ser ejectadas novas partículas com quantidades de movimento consideráveis.

De modo a poder melhorar o código utilizado, propõem-se as seguintes alterações:

1. Deveria ser utilizado um método que contemple a influência da fase dispersa na contínua, tornando os resultados mais realistas, uma vez que

diminuiria a velocidade do fluido na zona próxima à superfície e consequentemente a velocidade das partículas, não permitindo assim que estas fossem depositadas em zonas muito distantes à base da duna. Em Lapa (2004), encontra-se descrito um método que permite aplicar a sugestão descrita.

2. Os valores da velocidade de atrito obtidos numericamente poderiam ser comparados com os experimentais, nomeadamente Pinheiro (2011), de modo a afinar o método de cálculo numérico.
3. Devido às falhas demonstradas pelo método utilizado para determinar o número e velocidade das partículas ejectadas, propõe-se a utilização do método definido em Shao (2008), pág. 191 a 193.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andreotti, B., Claudin, P., Douady, S. (2002), "Selection of dune shapes and velocities. Part 2: A two-dimensional modeling", *Eur. Phys. J. B* 28, 341-352.
- Azevedo, J. L. T., Pereira, J. F. C. (1990), "Prediction of gas-particle turbulent free or confined jet flows", *Part. Part. Syst. Charact.*, nº7, p.171.
- Bagnold, R. A. (1941), "The Physics of Blown Sand and Desert Dunes", Methuen, London.
- Fino, M. R. (2011), "Estudo experimental da erosão, por acção do vento, de colinas sinusoidais constituídas por um material granular". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica. Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Iversen, J. D., Rasmussen, K. R. (1994), "The effect of surface slope on saltation threshold", *Sedimentology* 41, 721-728.
- Lapa, J. P. (2004), "Modelação Numérica do Transporte de Partículas em Escoamentos de Geometria Complexa". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica. Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Li, W. and Zhou, Y. (2007), "Statistical behaviors of different-sized grains lifting off in a stochastic collisions between sand grains and the bed in aeolian saltation", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 112, D22106, 1-9.
- Lopes, A. M. G. (2001), "WindStation – a software for the simulation of atmospheric flows over complex topography", *Environmental Modelling & Software* 18 (2003) 81–96.
- Oliveira, L. A. (1998), "Modelação Numérica da Dispersão de Partículas Sólidas no Escoamento de um Fluido: Conjugação de uma Estratégia Lagrangeana com o Método dos Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controlo" – Actas de Eventos do Centro Internacional de Matemática (CIM), nº 6, Setembro de 1998 – "Escola de Elementos Finitos e Aplicações", Universidade de Coimbra, 22 de Setembro a 2 de Outubro de 1998 (publicação nº 5).
- Oliveira, L. A., Ferreira, A. D., Pinto, J. P. e Costa, V. A. F. (2009), "Modelação numérica do transporte eólico de areia: evolução da topografia do solo, consequência dos fenómenos de deposição e de erosão". Actas da "III Conferência Nacional de Mecânica de Fluidos, Termodinâmica e Energia". Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal, 17 e 18 de Setembro de 2009.
- Oliveira, L. A. e Lopes, A. M. G. (2007), "Mecânica do Fluidos", 2ª Ed, Lidel.
- Pinheiro (2011), "Caracterização experimental da zona de recirculação no rasto de uma colina sujeita à erosão por acção do vento". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica. Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Rice, M. A., Willetts, B. B. and McEwan, I. K. (1995), "An experimental study of



multiple grain-size ejecta produced by collisions of saltating grains with a flat bed”, *Sedimentology* 42, 695-706.

Shao, Y. (2008), “Physics and modeling of wind erosion”, 2<sup>a</sup> Ed., Springer.

Wallis, G. B. (1969), “One Dimensional Two-Phase Flow”, McGraw-Hill