Margarida Abreu de Carvalho

KAN-INJECTIVIDADE E KZ-REFLECTIVIDADE EM CATEGORIAS ENRIQUECIDAS COM ORDEM

Tese de Doutoramento em Matemática, especialidade Matemática Pura, orientada pela Professora Doutora Maria de Lurdes da Costa e Sousa e pela Professora Doutora Maria Manuel Pinto Lopes Ribeiro Clementino e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Abril 2015

· U C ·

Universidade de Coimbra

Resumo

No contexto das categorias enriquecidas com ordem estudamos Kan-injectividade à direita e subcategorias KZ-reflectivas.

O trabalho é iniciado com a apresentação do conceito de Kan-injectividade à direita. Estudamos classes de morfismos determinadas por Kan-injectividade à direita a partir de uma subcategoria de uma dada categoria $\mathcal{X}$ enriquecida na categoria **CPO**, dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monótonas. Entre outras propriedades, verificamos que estas classes são fechadas para a composição e contêm todos os adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$. Mostramos ainda que satisfazem uma certa estabilidade para somas amalgamadas e somas amalgamadas múltiplas que sejam conjuntamente epimórficas relativamente à ordem. Caracterizamos várias classes de imersões da categoria **CPO**, em termos de Kan-injectividade à direita relativamente a certos conjuntos parcialmente ordenados finitos.

Mostramos que os objectos e morfismos de uma categoria $\mathcal{X}$ que são Kan-injectivos à direita relativamente a uma classe de morfismos definem uma subcategoria que, entre outras propriedades, é fechada para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem. Verificamos que a Kan-injectividade determina uma conexão contravariante de Galois entre o conglomerado das subcategorias de uma determinada categoria $\mathcal{X}$ e o conglomerado das classes de morfismos de $\mathcal{X}$, o que nos leva à definição de invólucro Kan-injectivo de uma subcategoria.

Numa segunda etapa introduzimos o conceito de subcategoria KZ-reflectiva de uma categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO** e encontramos condições necessárias e suficientes, em termos de Kan-injectividade, para que uma subcategoria de $\mathcal{X}$ seja KZ-reflectiva. Estudamos um tipo de morfismos com especial relevância no contexto das subcategorias KZ-reflectivas, as F-imersões, onde F é o functor reflector. Usando esta noção mostramos que uma subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos coincide com o seu invólucro Kan-injectivo. Isto garante que em categorias enriquecidas em **CPO**, onde os limites são conjuntamente monomórficos relativamente à ordem, as subcategorias KZ-reflectivas fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos são fechadas para limites. Dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, ambas subcategorias de $\mathcal{X}$, relacionamos o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ com o de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$. Verificamos ainda que toda a subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos coincide com a categoria das álgebras de Eilenberg-Moore determinada por alguma mónada de Kock-Zöberlein em $\mathcal{X}$.

Por fim, analisamos os conceitos e resultados apresentados anteriormente em duas categorias específicas: a categoria $\mathbf{Top}_0$ dos espaços topológicos que satisfazem o axioma T_0 e das funções contínuas; e a categoria **RetLoc** dos reticulados locais e das funções que preservam ínfimos finitos e supremos arbitrários. Em $\mathbf{Top}_0$ definimos filtros de abertos n-primos, para cada cardinal n, e verificamos que estes filtros definem em $\mathbf{Top}_0$ mónadas F_n do tipo KZ, para as quais as F_n-imersões são precisamente as imersões que aqui designamos por imersões n-planas. Para cada cardinal n, obtemos uma caracterização das classes destas imersões em termos de Kan-injectividade, a partir de subcategorias finitas, e apresentamos uma cadeia, indexada pela classe de todos os cardinais, de subcategorias KZ-reflectivas de $\mathbf{Top}_0$, dadas pelo invólucro Kan-injectivo de determinadas subcategorias finitas de $\mathbf{Top}_0$. A sua união é a subcategoria **Sob** dos espaços sóbrios. Obtemos então uma subcategoria de **Sob** cujo invólucro Kan-injectivo quer em $\mathbf{Top}_0$ quer em **Sob** é a categoria **Sob**.

Depois de apresentarmos as definições de Kan-projectividade à direita, KZ-co-reflectividade e H-quociente, duais das noções de Kan-injectividade à direita, KZ-reflectividade e F-imersão, estudamo-las na categoria **RetLoc**. Em particular, caracterizamos vários tipos de sobrejecções de **RetLoc** - que designamos por quocientes n-planos - em termos de Kan-projectividade à direita relativamente a certas subcategorias pequenas de **RetLoc** e obtemos uma cadeia infinita de subcategorias KZ-co-reflectivas da categoria **RetLoc** cuja união é toda a categoria **RetLoc**. A caracterização dos objectos e dos morfismos destas categorias em termos de uma generalização da relação binária "$\ll$", usualmente utilizada em reticulados contínuos, é aqui apresentada. Encontramos ainda uma subcategoria da categoria **RetEsp** dos reticulados espaciais cujos invólucros Kan-projectivos em **RetEsp** e em **RetLoc** não coincidem: no primeiro caso obtemos **RetEsp** e no segundo obtemos **RetLoc**.

Alguns dos resultados desta tese foram já objecto de publicação em [12, 13].

PALAVRAS CHAVE: Conjuntos parcialmente ordenados, categorias, categorias enriquecidas com ordem, Kan-injectividade, reflectividade, mónadas de Kock-Zöberlein, álgebras de Eilenberg-Moore, imersões, imersões planas, espaços topológicos T_0, espaços sóbrios, reticulados locais, reticulados espaciais.

Abstract

In the context of order-enriched categories we study right Kan-injectivity and KZ-reflective subcategories.

This work starts with the presentation of the concept of right Kan-injectivity. We study classes of morphisms determined by right Kan-injectivity in a category $\mathcal{X}$ enriched in the category **CPO**, of partially order sets and monotonous functions. Among other properties, we show that these classes are closed under composition and contain all right reflective adjoints of $\mathcal{X}$. We also show that they are stable under all those pushouts and multiple pushouts which are jointly epimorphic with respect to the order. We characterize several classes of embeddings of **CPO** in terms of right Kan-injectivity for certain finite partially ordered sets.

We show that the objects and morphisms of a category $\mathcal{X}$ that are right Kan-injective with respect to a class of morphisms define a subcategory which, among other properties, is closed to limits that are jointly monomorphic with respect to the order. We verify that Kan-injectivity sets a contravariant Galois connection between the conglomerate of the subcategories of a given category $\mathcal{X}$ and the conglomerate of classes of morphisms of $\mathcal{X}$, which leads us to the definition of Kan-injective hull of a subcategory.

In a second step we introduce the concept of KZ-reflective subcategory of an order-enriched category $\mathcal{X}$ and we find necessary and sufficient conditions, in terms of right Kan-injectivity, for a subcategory of $\mathcal{X}$ to be KZ-reflective. We study a type of morphisms with particular relevance in the context of KZ-reflective subcategories, the F-embeddings, where F is the reflector functor. Using this notion we show that a KZ-reflective subcategory closed for right co-reflective adjoints coincides with its Kan-injective hull. This ensures that in order-enriched categories the KZ-reflective subcategories closed to right co-reflective adjoints are closed for jointly order-monic limits. Given a subcategory $\mathcal{A}$ of $\mathcal{B}$, both subcategories of $\mathcal{X}$, we relate the Kan-injective hull of $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ with the Kan-injective hull of $\mathcal{A}$ in $\mathcal{X}$. We also verify that all KZ-reflective subcategories closed for right co-reflective adjoints coincide with the category of Eilenberg-Moore algebras determined by a Kock-Zöberlein monad in $\mathcal{X}$.

Finally, we analyze the concepts and results presented above in two specific categories: the category $\mathbf{Top}_0$ of topological spaces satisfying the axiom T_0 and continuous functions, and the category **RetLoc** of frames and functions that preserve finite meets and arbitrary joins. In $\mathbf{Top}_0$ we define n-primes open filters, for each cardinal n, and we show that these filters define monads F_n of KZ type in $\mathbf{Top}_0$, for which the F_n-embeddings are precisely the embeddings that we designate as n-flat embeddings. For every cardinal n, we get a characterization of the classes of these embeddings in terms of right Kan-injectivity of finite subcategories, and we present a chain, indexed by the class of all cardinals, of KZ-reflective subcategories of $\mathbf{Top}_0$, given by the Kan-injective hull of certain finite subcategories of $\mathbf{Top}_0$. Their union is the subcategory **Sob** of sober spaces. Then we obtain a subcategory of **Sob** whose Kan-injective hull in $\mathbf{Top}_0$ and in **Sob** is the same: the category **Sob**.

After introducing the definitions of right Kan-projectivity, KZ-co-reflectivity and H-quotient, the dual notions of right Kan-injectivity, KZ-reflectivity and F-embedding, we study them in the category **RetLoc**. In particular, we characterize several types of surjections of **RetLoc** - that we call n-flat quotients - in terms of right Kan-projectivity for certain small subcategories of **RetLoc** and we obtain an infinite chain of KZ-co-reflective subcategories of **RetLoc** whose union is the entire category **RetLoc**. The characterization of these categories in terms of a generalization of the binary relation "$\ll$", usually used in continuous lattices, is presented here. We also found a subcategory of the category **RetEsp** of spatial lattices whose Kan-projective hulls in **RetEsp** and in **RetLoc** are different: in the former case we obtain **RetEsp** and in the latter one we obtain **RetLoc**.

Some of the results of this thesis have already been published in [12, 13].

KEYWORDS: Partially ordered sets, categories, order-enriched categories, Kan-injectivity, reflectivity, Kock-Zöberlein monads, Eilenberg-Moore algebras, embeddings, flat embeddings, topological spaces, sober spaces, frames, spatial frames.

Introdução

Uma categoria enriquecida com ordem, ou, mais precisamente, enriquecida na categoria **CPO** dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monótonas, é uma categoria cujos conjuntos de morfismos entre dois objectos são parcialmente ordenados, sendo a ordem preservada pela composição à esquerda e à direita. Entre muitos exemplos, citamos a categoria dos espaços topológicos T_0 e das funções contínuas, a categoria **CPO** e várias subcategorias suas, em particular a categoria **RetLoc** dos reticulados locais e das funções que preservam ínfimos finitos e supremos arbitrários.

No contexto das categorias enriquecidas em **CPO** existem diversos estudos sobre injectividade, em particular na categoria $\mathbf{Top}_0$ e, dualmente, de projectividade, por exemplo na categoria **RetLoc**. Algum desse trabalho pode ser visto em [6, 7, 18, 19, 20, 21, 25, 27].

Nesta dissertação estudamos um tipo especial de injectividade - a Kan-injectividade à direita - também estudada em alguns dos artigos acima citados, mas com uma distinção fundamental: aqui a Kan-injectividade à direita é definida não só para objectos mas também para morfismos. Quando consideramos $\mathcal{X}$ enriquecida com a ordem trivial dada pela igualdade, a Kan-injectividade à direita para objectos é exactamente a ortogonalidade em $\mathcal{X}$.

A par com a Kan-injectividade à direita estudamos subcategorias KZ-reflectivas. Este conceito está intimamente ligado ao de mónada de Köck-Zoberlein, abreviadamente, mónada KZ, estudado numa série de artigos por Escardó e Flagg ([18, 19, 20, 21]). Aí, os autores observaram que vários casos de injectividade obedecem a um padrão geral: os objectos Kan-injectivos à direita relativamente a T-imersões, com T uma mónada KZ, são precisamente os suportes das álgebras de Eilenberg-Moore da mónada. Usando os resultados de Escardó em [19] conclui-se imediatamente que a categoria das álgebras de Eilenberg-Moore de uma mónada KZ sobre uma categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO** é uma subcategoria reflectiva de $\mathcal{X}$, cujo reflector R é um functor localmente monótono (i.e., preserva a ordem dos morfismos) e satisfaz a condição $\eta_{FX} \leq F\eta_X$, para cada objecto X de $\mathcal{X}$, onde η é a unidade da adjunção. Às subcategorias nestas condições chamamos subcategorias KZ-reflectivas. Notemos que, em geral, as subcategorias KZ-reflectivas não são plenas mas, se considerarmos $\mathcal{X}$ enriquecida com a ordem trivial dada pela igualdade, a KZ-reflectividade de uma subcategoria significa que esta, além de reflectiva, é plena: obtemos assim uma generalização do conceito de subcategoria reflectiva plena.

Existem vários artigos que estudam as propriedades da ortogonalidade, em particular, a sua relação com subcategorias plenas e reflectivas, como é o caso de [1, 2, 24, 36, 39, 41, 42, 43]. Neste trabalho, usando os conceitos de Kan-injectividade e KZ-reflectividade, obtemos várias generalizações de resultados bem conhecidos sobre ortogonalidade e a sua relação com subcategorias reflectivas e plenas, no contexto das categorias enriquecidas em **CPO**.

Acompanhamos este estudo de vários exemplos, nomeadamente na categoria **CPO** e em algumas subcategorias suas, bem como em $\mathbf{Top}_0$ e **RetLoc**, sendo os capítulos 3 e 4 dedicados a estas duas últimas categorias.

Apresentamos agora os assuntos que vão ser abordados ao longo deste trabalho.

No capítulo 0 são brevemente apresentadas as notações, definições e referências bibliográficas gerais usadas ao longo de todo o texto.

Os primeiros dois capítulos contêm resultados já publicados em [12].

Os capítulos 3 e 4 incluem resultados de [13].

No primeiro capítulo é introduzido o conceito de Kan-injectividade à direita relativamente a um morfismo, quer para objectos quer para morfismos. Este assunto é tratado na primeira secção onde são apresentados alguns exemplos na categoria **CPO**, assim como nas suas subcategorias $\mathbf{SRet}_1$ dos inf-semi-reticulados com elemento último e das funções que preservam ínfimos finitos e **RetLoc**.

Na segunda secção estudamos classes de morfismos determinadas por Kan-injectividade a partir de uma subcategoria de uma dada categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO**. Entre outras propriedades, verificamos que estas classes são fechadas para a composição e contêm todos os adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$. Além disso, mostramos que estas classes de morfismos verificam uma certa estabilidade para somas amalgamadas e somas amalgamadas múltiplas que sejam conjuntamente epimórficas relativamente à ordem. Estudamos vários exemplos na categoria **CPO** e em algumas das suas subcategorias, bem como na categoria $\mathbf{Top}_0$, e caracterizamos várias classes de imersões da categoria **CPO** em termos de Kan-injectividade relativamente a determinados conjuntos parcialmente ordenados finitos.

Na secção seguinte verificamos que os objectos e morfismos de uma categoria $\mathcal{X}$ que são Kan-injectivos relativamente a uma classe $\mathbb{H}$ de morfismos, definem uma subcategoria que, entre outras propriedades, é fechada para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem. No caso em que $\mathcal{X}$ está enriquecido com a ordem trivial dada pela igualdade, temos exactamente a subcategoria plena de $\mathcal{X}$ cujos objectos são os objectos de $\mathcal{X}$ ortogonais a todos os morfismos de $\mathbb{H}$.

Terminamos o capítulo 1 com a secção 4. Aqui verificamos que a Kan-injectividade determina uma conexão contravariante de Galois entre o conglomerado das subcategorias de uma determinada categoria $\mathcal{X}$ e o conglomerado das classes de morfismos de $\mathcal{X}$, o que nos leva à definição de invólucro Kan-injectivo de uma subcategoria.

No capítulo 2 começamos, na secção 1, por introduzir o conceito de subcategoria KZ-reflectiva de uma dada categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO**. Em seguida encontramos condições necessárias e suficientes, em termos de Kan-injectividade, para que uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ seja KZ-reflectiva. Apresentamos vários exemplos na categoria **CPO**, bem como em algumas das suas subcategorias, que retomamos nas secções seguintes.

Na segunda secção estudamos um tipo de morfismos com especial relevância no contexto das subcategorias KZ-reflectivas, as F-imersões, onde F é o functor reflector. Usando este conceito mostramos que se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos então $\mathcal{A}$ coincide com o seu invólucro Kan-injectivo. Este facto garante que em categorias enriquecidas em **CPO** onde os limites são conjuntamente monomórficos relativamente à ordem as subcategorias KZ-reflectivas fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos são fechadas para limites.

Na terceira secção estudamos a relação entre a Kan-injectividade numa subcategoria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$ e a Kan-injectividade em $\mathcal{X}$. Nomeadamente, dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, relacionamos o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ com o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$.

Na secção 4 verificamos que toda a subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos coincide com a categoria das álgebras de Eilenberg-Moore determinada por alguma mónada de Kock-Zöberlein em $\mathcal{X}$, completando resultados estabelecidos por Escardó sobre este assunto em [21].

Nos dois últimos capítulos analisamos os conceitos e resultados apresentados anteriormente em duas categorias específicas: a categoria $\mathbf{Top}_0$ dos espaços topológicos que satisfazem o axioma T_0 e das funções contínuas, e a categoria **RetLoc** dos reticulados locais e funções que preservam ínfimos finitos e supremos arbitrários.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo da Kan-injectividade em $\mathbf{Top}_0$. Na secção 1 retomamos o trabalho de Escardó em [20] e de Escardó e Flagg em [18] que nestes artigos estudaram, entre outras, a mónada KZ dos filtros dos abertos, bem como a dos filtros de abertos primos de um espaço topológico T_0. Inspirados nesta ideia, definimos filtros de abertos n-primos, para cada cardinal n, e verificamos que, à imagem do que é feito por Escardó e Flagg, estes filtros também definem em $\mathbf{Top}_0$ mónadas KZ.

Na secção 2 mostramos que para as mónadas F_n do tipo KZ encontradas na secção anterior as F_n-imersões são precisamente as imersões que aqui designamos por imersões n-planas. Para cada cardinal n, obteremos no Capítulo 4 uma caracterização das classes destas imersões em termos de Kan-injectividade a partir de subcategorias finitas. Verificamos ainda que se $1 \leq n < m$ com m um cardinal regular, então existem imersões n-planas que não são m-planas.

Na terceira e última secção deste capítulo apresentamos uma cadeia, indexada pela classe de todos os cardinais, de subcategorias KZ-reflectivas de $\mathbf{Top}_0$ dadas pelo invólucro Kan-injectivo de determinadas subcategorias finitas de $\mathbf{Top}_0$, de tal modo que a união das subcategorias da cadeia encontrada é a subcategoria plena **Sob** dos espaços sóbrios. Obtemos então uma subcategoria $\mathcal{A}$ de **Sob** cujo invólucro Kan-injectivo quer em $\mathbf{Top}_0$ quer em **Sob** é a categoria dos espaços sóbrios.

No capítulo 4 aplicamos à categoria **RetLoc** os conceitos duais de Kan-injectividade à direita, de KZ-reflectividade e de F-imersão, definidos nos capítulos 1 e 2. Na secção 1, apresentamos as definições de Kan-projectividade à direita, KZ-co-reflectividade e H-quocientes, enunciando, de seguida, os duais dos resultados dos dois capítulos iniciais, necessários para o que se segue.

Na secção 2 estudamos estas noções na categoria **RetLoc**. Em particular, caracterizamos vários tipos de sobrejecções de **RetLoc** - que designamos por quocientes n-planos - em termos de Kan-projectividade à direita relativamente a certas subcategorias pequenas de **RetLoc**.

Na terceira e última secção deste capítulo, fazendo uso de alguns resultados de Banaschewski ([6]), obtemos uma cadeia infinita de subcategorias KZ-co-reflectivas da categoria **RetLoc** cuja união é toda a categoria **RetLoc**. A caracterização dos objectos destas categorias em termos de uma generalização da relação binária "$\ll$", usualmente utilizada no contexto dos reticulados contínuos, sai imediatamente do estudo feito em [6]. Aqui, completamos esse resultado caracterizando também os morfismos. Finalmente encontramos uma subcategoria $\mathcal{D}$ da subcategoria plena de **RetLoc** dos reticulados espaciais, **RetEsp**, cujos invólucros Kan-projectivos em **RetEsp** e em **RetLoc** não coincidem: no primeiro caso obtemos **RetEsp** e no segundo caso obtemos **RetLoc**.

Agradecimentos

Quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos às minhas orientadoras, Doutora Maria Manuel Pinto Lopes Ribeiro Clementino e Doutora Maria de Lurdes da Costa e Sousa pela disponibilidade e pela importante contribuição para o meu desenvolvimento em Matemática.

Em particular, agradeço à Doutora Maria de Lurdes da Costa e Sousa pelo modo infatigável com que sempre me incentivou a prosseguir este trabalho e pelo seu incansável esforço em supervisionar o meu estudo, promovendo variadíssimos encontros de trabalho ao longo de todo o tempo de preparação desta dissertação.

Agradeço todo o apoio do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O meu reconhecimento vai, especialmente, para o grupo de investigação da linha de Teoria de Categorias. Foi deveras estimulante poder assistir aos inúmeros seminários, workshops e outras iniciativas científicas deste grupo de investigação.

Agradeço também à Escola Superior de Tecnologia do Instituto Politécnico de Viseu por me ter acolhido nos vários encontros de trabalho que aí tive com a Doutora Maria de Lurdes da Costa e Sousa.

Quero registar o meu reconhecimento ao ISCAC - IPC, instituição onde trabalho, e à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) pelo apoio dado ao abrigo do PROTEC II - Programa de apoio à formação avançada de docentes do Ensino Superior Politécnico.

É com muito gosto que nomeio aqui os professores que me ensinaram a gostar de Álgebra nos primeiros dois anos da minha licenciatura: o Doutor Marques Sá e o Doutor Sousa Pinto.

Agradeço a todos os que de alguma forma, directa ou indirectamente, me ajudaram a levar este trabalho a bom termo.

Dedicado à memória do António Vaz.

Conteúdo

Capítulo 0

Ao longo deste trabalho, usamos as letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... para representar categorias genéricas. A classe dos objectos de uma categoria $\mathcal{A}$ é representada por $Obj(\mathcal{A})$ e a classe dos morfismos por $Mor(\mathcal{A})$, sendo que, não resultando daí confusão, muitas vezes abreviamos $A \in Obj(\mathcal{A})$ para $A \in \mathcal{A}$, tal como $f \in Mor(\mathcal{A})$ para $f \in \mathcal{A}$.

Dados dois objectos A e B de $\mathcal{A}$, o conjunto dos morfismos de A em B é denotado por $\mathcal{A}(A, B)$. Para cada objecto A de uma categoria $\mathcal{A}$, representamos por id_A o respectivo morfismo identidade. Em geral representamos classes de morfismos usando as letras $\mathbb{H}$, $\mathbb{G}$,...

Denotamos por **Conj** a categoria dos conjuntos e funções. **CPO** representa a categoria dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monótonas. Dado um conjunto parcialmente ordenado A, representamos, caso existam, o último elemento de A por 1_A e o primeiro por 0_A.

Trabalhamos no contexto das *categorias enriquecidas em* **CPO**, i.e., categorias $\mathcal{X}$ tais que cada conjunto de morfismos $\mathcal{X}(A, B)$, com $A, B \in Obj(\mathcal{X})$, está munido de uma relação de ordem parcial, tal que a composição de morfismos é monótona, ou seja:

$$f \leq g \text{ implica } f \cdot h \leq g \cdot h \text{ e } j \cdot f \leq j \cdot g,$$

para quaisquer morfismos f, g, h, j de $\mathcal{X}$ para os quais sejam possíveis as composições enunciadas.

Observemos que toda a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é automaticamente uma categoria enriquecida em **CPO** já que, para quaisquer $A, B \in Obj(\mathcal{A})$, a ordem em $\mathcal{A}(A, B)$ é a restrição da ordem em $\mathcal{X}(A, B)$ a $\mathcal{A}(A, B)$. Por exemplo, a categoria **CPO** é enriquecida em **CPO**, considerando a ordem definida ponto-a-ponto. Por outro lado, qualquer categoria pode ser considerada enriquecida em **CPO**, tomando a ordem trivial dada pela igualdade.

Em geral, entre categorias enriquecidas em **CPO** usamos functores localmente monótonos. Dadas as categorias $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, enriquecidas em **CPO**, um functor $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ diz-se *localmente monótono* se, para quaisquer morfismos f e g de $\mathcal{X}$ com mesmo domínio e codomínio,

$$Ff \leq Fg, \quad \text{sempre que } f \leq g. \tag{1}$$

Nos dois últimos capítulos iremos dar especial atenção a duas categorias enriquecidas em **CPO**:

- A categoria $\mathbf{Top}_0$ dos espaços topológicos que satisfazem o axioma T_0, ou seja, espaços topológicos tais que, para qualquer par de pontos distintos existe um aberto que contém exactamente um dos pontos, e das funções contínuas.

- A categoria **RetLoc** dos reticulados locais, i.e., dos reticulados completos cujos ínfimos finitos se distribuem relativamente a supremos de quaisquer famílias, e das funções monótonas que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer.

Como referência geral para espaços topológicos, usamos [22]. No contexto dos reticulados locais as referências usadas são [33] e [25].

As referências de base em Teoria de Categorias são os livros [3], [10] e [31].

Em apêndice é apresentada uma tabela com as categorias usadas ao longo deste trabalho.

Capítulo 1

Kan-injectividade

Na primeira secção deste capítulo introduzimos a noção de *Kan-injectividade à direita relativamente a um morfismo*, para objectos e morfismos de uma categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO**. É de notar que a noção de Kan-injectividade à direita coincide com a noção de ortogonalidade em categorias arbitrárias, quando consideradas enriquecidas em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade. Por outro lado, basta dualizar a relação de ordem em cada conjunto de morfismos $\mathcal{X}(A, B)$ entre objectos A e B de $\mathcal{X}$ para obtermos o conceito de Kan-injectividade à esquerda.

Nesta secção apresentamos ainda vários exemplos na categoria **CPO** e em algumas suas subcategorias.

Na segunda secção estudamos as classes $\mathcal{A}^{KInj} \subseteq Mor(\mathcal{X})$, constituídas pelos morfismos relativamente aos quais todos os objectos e morfismos de uma determinada subcategoria $\mathcal{A}$ são Kan-injectivos à direita. Entre outras propriedades destas classes, verificamos que são fechadas para a composição e contêm todos os adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$; em particular, $\mathcal{X}^{KInj}$ é constituída por todos os morfismos que têm esta característica. Além disso, mostramos que as classes de morfismos da forma $\mathcal{A}^{KInj}$ verificam uma certa estabilidade para somas amalgamadas e somas amalgamadas múltiplas que sejam conjuntamente epimórficas relativamente à ordem. Estudamos vários exemplos na categoria **CPO** e em algumas suas subcategorias, bem como na categoria $\mathbf{Top}_0$.

Na secção seguinte, verificamos que os objectos e morfismos de $\mathcal{X}$ Kan-injectivos à direita relativamente a todos os morfismos de uma dada classe $\mathbb{H}$ de morfismos de $\mathcal{X}$ constituem uma subcategoria não plena de $\mathcal{X}$, e mostramos que as subcategorias obtidas desta forma (que denotamos por $KInj(\mathbb{H})$ e designamos por *subcategorias Kan-injectivas*) são fechadas para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem. No caso em que $\mathcal{X}$ está enriquecido com a ordem trivial dada pela igualdade, $KInj(\mathbb{H})$ é exactamente a subcategoria plena de $\mathcal{X}$ cujos objectos são os objectos de $\mathcal{X}$ ortogonais a todos os morfismos de $\mathbb{H}$. Além disso, apresentamos vários exemplos e prosseguimos o estudo de exemplos apresentados nas secções anteriores.

Na quarta e última secção, constatamos, associada ao conceito de Kan-injectividade à direita, a existência de uma conexão de Galois entre o conglomerado das classes de morfismos e o conglomerado das subcategorias de uma dada categoria $\mathcal{X}$. Além disso, verificamos que dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, a subcategoria $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$ é a menor subcategoria Kan-injectiva à direita que contém $\mathcal{A}$, o que nos leva a designá-la por invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$. No caso de categorias enriquecidas com a ordem trivial dada pela igualdade $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$ é o invólucro ortogonal de $\mathcal{A}$.

Ao longo de todo o texto, $\mathcal{X}$ representará uma categoria enriquecida em **CPO**.

1.1 Kan-injectividade

Definições 1.1. Seja $f : X \to Y$ um morfismo de $\mathcal{X}$.

1. Dizemos que um objecto A de $\mathcal{X}$ é *Kan-injectivo à direita relativamente a* f se para cada morfismo $g : X \to A$ existe um morfismo $g' : Y \to A$ que satisfaz as seguintes condições:

   (a) $g' \cdot f = g$, i.e., o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "g'"] \\ A & \end{tikzcd}$$

   (b) para cada morfismo $t : Y \to A$ se $t \cdot f \leq g$ então $t \leq g'$.

   Representamos o morfismo g' (quando existe) por g/f.

2. Dizemos que um morfismo $h : A \to B$ de $\mathcal{X}$ é *Kan-injectivo à direita relativamente a* f se A e B são ambos Kan-injectivos à direita relativamente a f e, para cada $g : X \to A$, se tem:

$$(h \cdot g)/f = h \cdot (g/f),$$

   i.e., o triângulo inferior do seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "g/f"] \arrow[d, "(h \cdot g)/f"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Observação 1.2. É imediato que se A e B são Kan-injectivos à direita relativamente a f então no diagrama anterior tem-se sempre a desigualdade $h \cdot (g/f) \leq (h \cdot g)/f$, já que $h \cdot (g/f) \cdot f = h \cdot g$. A desigualdade recíproca caracteriza, então, os morfismos Kan-injectivos à direita relativamente a f.

Observações 1.3. Recordemos que um objecto A é *injectivo* relativamente a um morfismo $f : X \to Y$ se para cada $g : X \to A$ existe um morfismo g' tal que $g' \cdot f = g$; e é *ortogonal* a f se, além disso, g' é único. É claro que estes conceitos se relacionam com a noção de Kan-injectividade à direita; nomeadamente:

1. Um objecto A é Kan-injectivo à direita relativamente a um morfismo $f : X \to Y$ se e só se é injectivo relativamente a f e todo o morfismo $g : X \to A$ possui uma Kan-extensão direita ao longo de f.

   Recordemos que, dados dois morfismos $f : X \to Y$ e $g : X \to A$, um morfismo $\overline{g} : Y \to A$ diz-se uma *Kan-extensão direita* de g ao longo de f se $\overline{g} \cdot f \leq g$ e $\overline{g}$ é o supremo nestas condições.

   Seja $\overline{g}$ a Kan-extensão direita de g ao longo de f e seja A injectivo relativamente a f, com $g' : Y \to A$ tal que $g' \cdot f = g$. Por definição de $\overline{g}$, $g' \leq \overline{g}$ o que, atendendo ao facto de $\mathcal{X}$ ser enriquecida em **CPO**, implica $g' \cdot f \leq \overline{g} \cdot f$, i.e., $g \leq \overline{g} \cdot f$. Como $\overline{g} \cdot f \leq g$ concluímos que $\overline{g} \cdot f = g$. Uma vez que $\overline{g}$ satisfaz a condição 1(b) de 1.1 então $\overline{g} = g/f$, portanto A é Kan-injectivo à direita relativamente a f. A recíproca é evidente.

   Por conseguinte, podemos dizer que um morfismo $h : A \to B$ entre objectos Kan-injectivos à direita relativamente a f é Kan-injectivo à direita relativamente a f se e só se preserva Kan-extensões à direita relativamente a f.

2. Considerando uma categoria arbitrária $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade é imediato que um objecto A é Kan-injectivo à direita relativamente a um morfismo f se e só se é ortogonal a f. E, qualquer morfismo $k : A \to B$, com A e B ortogonais a f, é Kan-injectivo à direita relativamente a f.

Observação 1.4. Alguns autores, como J. Adámek, L. Sousa e J. Velebil em [4], usam em categorias enriquecidas em **CPO** o conceito de Kan-injectividade à esquerda.

1. Um objecto A é *Kan-injectivo à esquerda* relativamente ao morfismo $h : X \to Y$ se para cada $g : X \to A$ existe um morfismo de Y em A, que aqui denotamos por $g \backslash h$, tal que $(g \backslash h) \cdot h = g$ e, para cada $t : Y \to A$,

$$\text{se } g \leq t \cdot h \text{ então } g \backslash h \leq t.$$

Um morfismo $f : A \to B$ é *Kan-injectivo à esquerda* relativamente a h se A e B o são e

$$f \cdot (g\backslash h) = (f \cdot g)\backslash h.$$

2. Dados $h : X \to Y$ e $g : X \to A$ então é claro que $g\backslash h \leq g/h$, caso existam estes morfismos.

3. Consideremos a categoria $\mathcal{X}'$ obtida a partir da categoria $\mathcal{X}$, dualizando a ordem em cada um dos conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{X}(X, Y)$, com $X, Y \in \mathcal{X}$. Então, dados os morfismos $h : X \to Y$ e $g : X \to A$, existe $g\backslash h$ em $\mathcal{X}$ se e só se existe g/h em $\mathcal{X}'$, sendo nesse caso iguais.

4. É claro que em categorias arbitrárias $\mathcal{X}$ enriquecidas em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade ambos os conceitos coincidem.

Na definição seguinte recordamos o conceito de adjunção entre morfismos no contexto de categorias enriquecidas em **CPO**, a ser usado com frequência no decorrer deste trabalho.

Definição 1.5. Um morfismo $e : X \to Y$ é o *adjunto esquerdo* do morfismo $d : Y \to X$ (e d é o *adjunto direito* de e) se

$$e \cdot d \leq id_Y \quad \text{e} \quad id_X \leq d \cdot e.$$

Dizemos que este par de morfismos constitui uma adjunção e escrevemos

$$e \dashv d.$$

A adjunção é reflectiva se $e \cdot d = id_Y$, abreviadamente, $e \dashv_R d$. Neste caso dizemos que e é um *adjunto esquerdo reflectivo* e que d é um *adjunto direito reflectivo*. Se a adjunção $e \dashv d$ satisfizer $id_X = d \cdot e$, dizemos que é *co-reflectiva*, abreviadamente, $e \dashv_C d$. Neste caso e e d dizem-se *adjunto esquerdo co-reflectivo* e *adjunto direito co-reflectivo*, respectivamente.

Note-se que existindo adjunto direito (respectivamente, esquerdo), ele é único a menos de isomorfismo.

Uma vez que $\mathcal{X}$ é enriquecida em **CPO** então, para quaisquer objectos X e A de $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}(X, A)$ é um conjunto parcialmente ordenado e, para cada $h : A \to B$, a função

$$\mathcal{X}(X, h) : \mathcal{X}(X, A) \to \mathcal{X}(X, B)$$

definida por

$$\mathcal{X}(X, h)(g) = h \cdot g,$$

é monótona. Do mesmo modo, para cada $f : X \to Y$ a função

$$\mathcal{X}(f, A) : \mathcal{X}(Y, A) \to \mathcal{X}(X, A),$$

definida por

$$\mathcal{X}(f, A)(k) = k \cdot f,$$

é também monótona. Assim, podemos considerar o functor

$$\mathcal{X}(X, -) : \mathcal{X} \to \mathbf{CPO},$$

definido em objectos por $\mathcal{X}(X, -)(A) = \mathcal{X}(X, A)$, $A \in \mathcal{X}$, e, em morfismos por $\mathcal{X}(X, -)(f) = \mathcal{X}(X, f)$, para cada $f : A \to B$.

Na próxima proposição caracterizamos a relação de Kan-injectividade à direita usando estes conceitos, generalizando o que acontece em categorias não enriquecidas arbitrárias nas quais um objecto A é ortogonal a um morfismo $f : X \to Y$ se e só se a função $\mathcal{X}(f, A)$ é um isomorfismo.

Proposição 1.6. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de $\mathcal{X}$.*

Um objecto A é Kan-injectivo à direita relativamente a f se e só se a função $\mathcal{X}(f, A)$ possui adjunto direito reflectivo $(\mathcal{X}(f, A))_*$ em **CPO**. *Além disso, nesse caso é satisfeita a igualdade*

$$(\mathcal{X}(f, A))_*(g) = g/f,$$

para cada $g \in \mathcal{X}(X, A)$.

Um morfismo $a : A \to B$ é Kan-injectivo à direita relativamente a f se e só se $\mathcal{X}(f, A)$ e $\mathcal{X}(f, B)$ possuem adjuntos direitos reflectivos em **CPO** *e o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(X, A) \arrow[r, "(\mathcal{X}(f,A))_*"] \arrow[d, "\mathcal{X}(X,a)"'] & \mathcal{X}(Y, A) \arrow[d, "\mathcal{X}(Y,a)"] \\
\mathcal{X}(X, B) \arrow[r, "(\mathcal{X}(f,B))_*"'] & \mathcal{X}(Y, B)
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponhamos que A é Kan-injectivo à direita relativamente a f e consideremos a função

$$(\mathcal{X}(f, A))_* : \mathcal{X}(X, A) \to \mathcal{X}(Y, A)$$

definida por

$$(\mathcal{X}(f, A))_*(g) = g/f, \text{ para cada } g \in \mathcal{X}(X, A).$$

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{X}(X, A)$, tais que $g_1 \leq g_2$. Como $(g_1/f) \cdot f = g_1 \leq g_2$, então, por definição de g_2/f, temos $g_1/f \leq g_2/f$, portanto $(\mathcal{X}(f, A))_*$ é, de facto, um morfismo de **CPO**.

De modo a concluir que $\mathcal{X}(f, A) \dashv_R (\mathcal{X}(f, A))_*$, vamos verificar que

$$\mathcal{X}(f, A) \cdot (\mathcal{X}(f, A))_* = id_{\mathcal{X}(X,A)} \quad \text{e} \quad id_{\mathcal{X}(Y,A)} \leq (\mathcal{X}(f, A))_* \cdot \mathcal{X}(f, A).$$

Temos

$$(\mathcal{X}(f,A)\cdot(\mathcal{X}(f,A))_*)(g)=\mathcal{X}(f,A)(g/f)=(g/f)\cdot f=g$$

e, para cada $k:Y\to A$,

$$((\mathcal{X}(f,A))_*\cdot\mathcal{X}(f,A))(k)=(\mathcal{X}(f,A))_*(k\cdot f)=(k\cdot f)/f$$

o que, por definição de $(k\cdot f)/f$, implica $k\leq(k\cdot f)/f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "k"'] \arrow[dl, bend left, "(kf)/f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, supondo que $\mathcal{X}(f,A)$ possui adjunto direito reflectivo $(\mathcal{X}(f,A))_*$ então, para cada $g:X\to A$,

$$(\mathcal{X}(f,A)\cdot(\mathcal{X}(f,A))_*)(g)=g,$$

ou seja,

$$((\mathcal{X}(f,A))_*)(g)\cdot f=g.$$

Além disso, para cada $t:Y\to A$, se $t\cdot f\leq g$, então $\mathcal{X}(f,A)(t)\leq g$, logo

$$(\mathcal{X}(f,A))_*\cdot(\mathcal{X}(f,A)(t))\leq(\mathcal{X}(f,A))_*(g)$$

o que, atendendo à existência da adjunção $\mathcal{X}(f,A)\dashv_R(\mathcal{X}(f,A))_*$, implica a desigualdade

$$t\leq(\mathcal{X}(f,A))_*(g).$$

Logo, $g/f=(\mathcal{X}(f,A))_*(g)$.

Relativamente à segunda parte do enunciado, seja $a:A\to B$ um morfismo Kan-injectivo à direita relativamente a f. Então para cada $g:X\to A$ existem g/f e $(ag)/f$ tais que $a\cdot(g/f)=(ag)/f$, ou seja,

$$a\cdot((\mathcal{X}(f,A))_*(g))=(\mathcal{X}(f,B))_*(ag),$$

logo

$$(\mathcal{X}(Y,a)\cdot(\mathcal{X}(f,A))_*)(g)=((\mathcal{X}(f,B))_*\cdot\mathcal{X}(X,a))(g).$$

De modo análogo se conclui que a comutatividade do diagrama apresentado implica a Kan-injectividade de a relativamente a f. □

Exemplos 1.7. Dada uma categoria $\mathcal{X}$, enriquecida em **CPO**:

1. Para cada morfismo $g:X\to A$, $g/id_X=g$.

2. Se $\mathcal{X}$ possui elemento terminal T então T é Kan-injectivo à direita relativamente a cada morfismo $h : X \to Y$ com $t_X/h = t_Y$, onde, para cada objecto Z, t_Z representa o único morfismo do conjunto $\mathcal{X}(Z, T)$.

3. Todo o objecto e todo o morfismo de $\mathcal{X}$ é Kan-injectivo à direita relativamente a morfismos adjuntos direitos reflectivos, como decorre do ponto 2 da Proposição 1.20 a seguir.

Observações 1.8. Consideremos a categoria **CPO** enriquecida em **CPO** com a *ordem ponto-a-ponto.*

1. Uma função monótona, $f : P \to Q$, com $P, Q \in \mathbf{CPO}$, é uma *imersão* se e só se, dados quaisquer $x, y \in P$,
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y). \tag{1.1}$$
Notemos que, de facto, as imersões são exactamente os monomorfismos extremais de **CPO**.

2. Para cada conjunto parcialmente ordenado P, seja $As(P)$ o reticulado completo dos subconjuntos ascendentes de P, com o ínfimo e o supremo definidos pela intersecção e pela união.

Se $f : P \to Q$ é uma função monótona então:

(a) A função $f^{-1} : As(Q) \to As(P)$ é monótona e preserva supremos, portanto possui adjunto direito, nomeadamente,
$$(f^{-1})_* : As(P) \to As(Q),$$
definido por:
$$(f^{-1})_*(U) = \cup\{V \in As(Q) : f^{-1}(V) \subseteq U\}, \tag{1.2}$$
para cada $U \in As(P)$.

(b) f é uma imersão se e só se a adjunção $f^{-1} \dashv (f^{-1})_*$ é reflectiva.

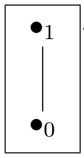
De facto, já sabemos que $f^{-1} \cdot (f^{-1})_* \leq id_{As(P)}$, portanto basta mostrar que $f : P \to Q$ é uma imersão se e só se, para cada ascendente $U \in As(P)$, $U \subseteq f^{-1} \cdot (f^{-1})_*(U)$, isto é, para cada $x \in U$,
$$x \in (f^{-1} \cdot (f^{-1})_*)(U),$$
ou seja,
$$f(x) \in (f^{-1})_*(U).$$
Suponhamos que f é uma imersão e seja $x \in U$, com $U \in As(P)$. De modo a concluir que $f(x) \in (f^{-1})_*(U)$, consideremos o ascendente $V_0 = \uparrow f(x)$. É claro que $f(x) \in V_0$. Além disso,
$$f^{-1}(V_0) \subseteq U.$$

Com efeito, se $a \in f^{-1}(V_0)$, i.e., se $f(a) \in V_0$, então $f(x) \leq f(a)$ o que, pela hipótese, implica $x \leq a$, ou seja, $a \in \uparrow x$, portanto, $a \in U$. Atendendo a (1.2) concluímos que $f(x) \in (f^{-1})_*(U)$.

Reciprocamente, suponhamos que a adjunção $f^{-1} \dashv (f^{-1})_*$ é reflectiva. Então f^{-1}, sendo um epimorfismo cindido, é sobrejectivo portanto, para cada $a \in P$, existe $V_a \in As(Q)$, tal que $f^{-1}(V_a) = \uparrow a$.

Consideremos $x, y \in P$ tais que $f(x) \leq f(y)$. Claro que $x \in f^{-1}(V_x)$, ou seja, $f(x) \in V_x$ logo $f(y) \in V_x$, i.e., $y \in f^{-1}(V_x)$ portanto $y \in \uparrow x$.

Exemplo 1.9. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado

$D =$  .

Vamos verificar que, dado um morfismo $j : P \to Q$ em **CPO**, D é Kan-injectivo à direita relativamente a j se e só se j é uma imersão.

(a) De facto, dada uma aplicação monótona $j : P \to Q$, suponhamos que $j(x) \leq j(y)$, com $x, y \in P$, e consideremos a função monótona $g_x : P \to D$, definida por:

$$g_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq p \\ 0, & \text{se } x \not\leq p, \end{cases}$$

para cada $p \in P$. Então existe em **CPO** o morfismo $g_x/j : Q \to D$ e temos:

$$\begin{aligned} j(x) \leq j(y) \quad &\Rightarrow \quad (g_x/j)(j(x)) \leq (g_x/j)(j(y)) \\ &\Rightarrow \quad g_x(x) \leq g_x(y) \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq g_x(y) \\ &\Rightarrow \quad g_x(y) = 1 \\ &\Rightarrow \quad x \leq y. \end{aligned}$$

Então j satisfaz a condição (1.1) da Observação 1.8, portanto é uma imersão em **CPO**.

(b) Reciprocamente, consideremos uma imersão $j : P \to Q$ e seja $g : P \to D$ uma função monótona. Consideremos a função $\overline{g} : Q \to D$ definida por:

$$\overline{g}(x) = \bigwedge \{g(a) : a \in j^{-1}(\uparrow x)\}, x \in Q.$$

Vamos verificar que, de facto, $\overline{g} = g/j$, concluindo-se assim que D é Kan-injectivo à direita relativamente a j.

$\overline{g}$ é monótona atendendo a que, dados $a, b \in Q$, temos:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow \uparrow b \subseteq \uparrow a \\ &\Rightarrow j^{-1}(\uparrow b) \subseteq j^{-1}(\uparrow a) \\ &\Rightarrow \bigwedge_{y \in j^{-1}(\uparrow a)} g(y) \leq \bigwedge_{y \in j^{-1}(\uparrow b)} g(y) \\ &\Rightarrow (g/j)(a) \leq (g/j)(b). \end{aligned}$$

Além disso, para cada $p \in P$, $j(p) \in \uparrow j(p)$, ou seja, $p \in j^{-1}(\uparrow j(p))$. Por outro lado, atendendo a que j é uma imersão, temos a seguinte série de implicações:

$$\begin{aligned} y \in j^{-1}(\uparrow j(p)) &\Rightarrow j(y) \in \uparrow j(p) \\ &\Rightarrow j(p) \leq j(y) \\ &\Rightarrow p \leq y \\ &\Rightarrow g(p) \leq g(y). \end{aligned}$$

Então obtemos:

$$\begin{aligned} (\overline{g} \cdot j)(p) &= \overline{g}(j(p)) \\ &= \bigwedge \{g(y) : y \in j^{-1}(\uparrow j(p))\} \\ &= g(p). \end{aligned}$$

Suponhamos que $t : Q \to D$ é um morfismo de **CPO** tal que $t \cdot j \leq g$. De modo a concluir que $t \leq \overline{g}$, seja $x \in Q$ e consideremos $\overline{g}(x)$. Temos:

$$\begin{aligned} y \in j^{-1}(\uparrow x) &\Rightarrow j(y) \in \uparrow x \\ &\Rightarrow x \leq j(y) \\ &\Rightarrow t(x) \leq t \cdot j(y) \\ &\Rightarrow t(x) \leq g(y). \end{aligned}$$

Como $\overline{g}(x)$ é o ínfimo do conjunto de elementos da forma $g(y)$, com $y \in j^{-1}(\uparrow x)$, concluímos que $t(x) \leq \overline{g}(x)$.

Observação 1.10. Uma adaptação fácil do exemplo anterior leva a outra caracterização das imersões em **CPO**: elas são, também, precisamente os morfismos de **CPO** relativamente aos quais D é Kan-injectivo à esquerda (no sentido definido na Observação 1.4). Além disso, se $j : P \to Q$ é uma imersão então, para cada $g : P \to D$ em **CPO**, o morfismo $g\backslash j : Q \to D$ é definido, para cada $x \in Q$, por:

$$g\backslash j(x) = \bigvee \{g(a) : a \in j^{-1}(\downarrow x)\}.$$

Exemplo 1.11. Se R é um reticulado completo e $j : P \to Q$ é uma imersão, então R é Kan-injectivo à direita relativamente a j e, para cada $g : P \to R$ em **CPO**, o morfismo g/j é definido também pela fórmula:

$$(g/j)(x) = \bigwedge \{g(a) : a \in j^{-1}(\uparrow x)\}. \tag{1.3}$$

A verificação deste facto é análoga à feita no Exemplo 1.9.(b).

Observação 1.12. Consideremos a categoria **CPO**.

1. Existe uma correspondência biunívoca entre morfismos $g : P \to D$ e subconjuntos ascendentes U de P: nomeadamente, a g corresponde o ascendente $g^{-1}(\{1\})$ e a U corresponde o morfismo χ_U definido por, para cada $p \in P$:

$$\chi_U(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in U \\ 0, & \text{se } p \notin U. \end{cases}$$

   Claro que $g = \chi_{g^{-1}(\{1\})}$.

2. Se $j : P \to Q$ é uma imersão então a fórmula (1.3) para g/j é equivalente a:

$$g/j = \chi_W, \tag{1.4}$$

   com $W = (j^{-1})_*(g^{-1}(\{1\}))$.

   Com efeito, atendendo à adjunção $j^{-1} \dashv_R (j^{-1})_*$ mostra-se facilmente que, dado o morfismo $g = \chi_U$, com $U = g^{-1}(\{1\})$, então $g' = \chi_W$ satisfaz as condições do ponto 1 da definição de Kan-injectividade à direita, enunciada em 1.1.

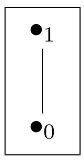
Exemplo 1.13. Dada uma imersão $j : P \to Q$ em **CPO** dizemos que ela é *densa* se, para cada $y \in Q$,

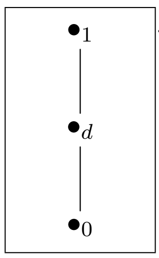
$$(j^{-1})(\uparrow y) \neq \emptyset.$$

Equivalentemente, se

$$(j^{-1})_*(\emptyset) = \emptyset. \tag{1.5}$$

Consideremos em **CPO** as cadeias D, como no Exemplo 1.9, e D_1:

$D =$ 

e $D_1 =$ 

.

Seja $h : D \to D_1$ a imersão definida por

$$h(0) = 0 \quad \text{e} \quad h(1) = d.$$

Vamos mostrar que um morfismo $j : P \to Q$ de **CPO** é uma imersão densa se e só se o morfismo h é Kan-injectivo à direita relativamente a j.

Seja $j : P \to Q$ uma imersão densa e $f : P \to D$ um morfismo de **CPO**. Como D e D_1 são reticulados completos sabemos por (1.3) que, para cada $y \in Q$,

$$(f/j)(y) = \bigwedge\{f(x) : j(x) \geq y\}$$

e

$$((h \cdot f)/j)(y) = \bigwedge\{(h \cdot f)(x) : j(x) \geq y\}.$$

Mas, nitidamente, h preserva ínfimos não vazios e, por hipótese, $j^{-1}(\uparrow y) \neq \emptyset$. Então h preserva o ínfimo de $\{f(x) : j(x) \geq y\}$, isto é,

$$\begin{aligned}
(h \cdot (f/j))(y) &= h(\bigwedge\{f(x) : j(x) \geq y\}) \\
&= \bigwedge\{h \cdot f(x) : j(x) \geq y\} \\
&= ((h \cdot f)/j)(y).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $j : P \to Q$ um morfismo relativamente ao qual h é Kan-injectivo à direita. Então D é Kan-injectivo à direita relativamente a j, logo j é uma imersão. De modo a verificar que j é densa, consideremos o morfismo $\chi_\emptyset : P \to D$. Como h é Kan-injectivo à direita relativamente a j, sabemos que

$$((h \cdot \chi_\emptyset)/j)(x) = h \cdot ((\chi_\emptyset/j)(x) \in \{0, d\},$$

portanto, $((h \cdot \chi_\emptyset)/j)(x) \neq 1$, para cada $x \in Q$. Atendendo a (1.4), concluímos que

$$(j^{-1})_*(h^{-1}(\{1\})) = \emptyset,$$

ou seja, $(j^{-1})_*(\emptyset) = \emptyset$. Então j é densa.

Exemplo 1.14. Seja $\mathbf{Top}_0$ a categoria dos espaços topológicos $(X, \mathcal{O}(X))$, que satisfazem o axioma T_0, e das funções contínuas entre eles. Consideremos $\mathbf{Top}_0$ enriquecida em **CPO** com a *ordem de especialização ponto-a-ponto*: dados $f, g : X \to Y$,

$$f \leq g \text{ se e só se, para cada } x \in X, f(x) \in \overline{\{g(x)\}}, \tag{1.6}$$

onde $\overline{\{g(x)\}}$ representa o fecho de $g(x)$.

Ou, de modo equivalente,

$$f \leq g \text{ se e só se, para cada } x \in X, \text{ e cada aberto } V \in \mathcal{O}(Y), f(x) \in V \Rightarrow g(x) \in V. \tag{1.7}$$

Ou ainda,

$$f \leq g \text{ se e só se } f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U), \text{para cada aberto } U \in \mathcal{O}(Y), \tag{1.8}$$

Como habitualmente nesta categoria, chamamos *imersão* a toda a função contínua $f : X \to Y$, injectiva e tal que

$$\mathcal{O}(X) = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Seja A_0 o espaço de Sierpiński, i.e., $A_0 = (\{0,1\}, \mathcal{O}(A_0))$, com o conjunto $\mathcal{O}(A_0)$ dado pelos subconjuntos ascendentes da cadeia $0 < 1$. Uma aplicação contínua $j : X \to Y$ é uma imersão se e só se A_0 é Kan-injectivo à direita relativamente a j. Este exemplo e vários outros em $\mathbf{Top}_0$ serão estudados em detalhe no Capítulo 3.

1.2 Morfismos determinados por Kan-injectividade

Notação 1.15. Dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, em geral não plena, representamos por

$$\mathcal{A}^{KInj}$$

a classe dos morfismos de $\mathcal{X}$ relativamente aos quais todos os objectos e todos os morfismos de $\mathcal{A}$ são Kan-injectivos à direita.

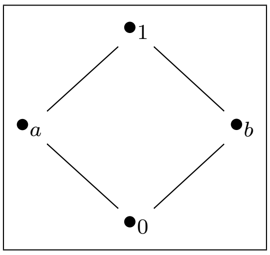
Em seguida vamos estudar algumas propriedades da classe de morfismos $\mathcal{A}^{KInj}$, definida a partir de uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$. Começamos por observar alguns exemplos.

Exemplos 1.16. Tendo em conta os exemplos 1.9 e 1.13 da secção anterior, em **CPO** temos:

1. Para a subcategoria $\mathcal{A}$ cujo único objecto é D e cujo único morfismo é o morfismo identidade de D:
$$\mathcal{A}^{KInj} = Im(\mathbf{CPO}),$$
onde $Im(\mathbf{CPO})$ representa a classe das imersões de **CPO**.

2. Para a subcategoria $\mathcal{A}$ cujos únicos objectos são D e D_1 e cujo único morfismo não trivial é $h : D \to D_1$:
$$\mathcal{A}^{KInj} = Imd(\mathbf{CPO}),$$
onde $Imd(\mathbf{CPO})$ representa a classe das imersões densas de **CPO**.

Exemplo 1.17. Consideremos a subcategoria $\mathcal{A}$ de **CPO** constituída pelos objectos D (como nos Exemplos 1.9 e 1.13) e

$A =$ 

e tendo por único morfismo não trivial $k : A \to D$, tal que

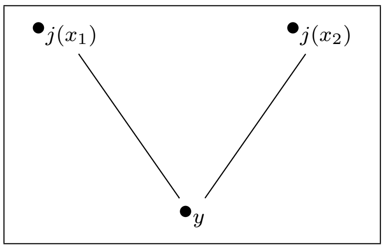
$$k(a) = k(b) = k(1) = 1 \quad \text{e} \quad k(0) = 0.$$

Vamos mostrar que a classe $\mathcal{A}^{KInj}$ é constituída por todas as imersões $j : P \to Q$ de **CPO** com a seguinte propriedade:

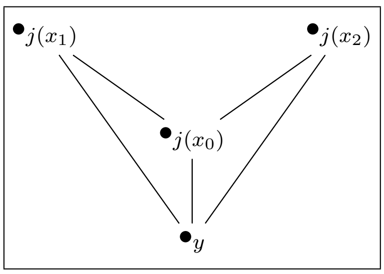
(*) Dados $y \in Q$ e $x_1, x_2 \in P$ tais que $x_1, x_2 \in j^{-1}(\uparrow y)$, existe $x_0 \in P$, tal que:

$$x_0 \leq x_1, x_2 \quad \text{e} \quad j(x_0) \geq y.$$

Quer dizer, a propriedade (*) garante que numa situação do tipo



existe $x_0 \in P$, com $x_0 \leq x_1, x_2$, de modo que $j(x_0) \geq y$:



Seja $j : P \to Q$ um morfismo de **CPO** com a propriedade (*) e seja $f : P \to A$. Como A e D são reticulados completos, atendendo à fórmula (1.3) temos, para cada $y \in Q$,

$$(f/j)(y) = \bigwedge \{f(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\}.$$

e

$$((k \cdot f)/j)(y) = \bigwedge\{(k \cdot f)(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\}.$$

A aplicação k preserva todos os ínfimos excepto os dos subconjuntos de A contendo a e b, sem conter 0. Para comprovar que

$$k \cdot (f/j)(y) = ((k \cdot f)/j)(y),$$

basta assegurar que se o conjunto $\{f(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\}$ contiver a e b também conterá 0. Com efeito, se for esse o caso, sejam x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ e $x_1, x_2 \in j^{-1}(\uparrow y)$. Então existe x_0 nas condições de (*). E é claro que para este x_0 se tem necessariamente $f(x_0) = 0$.

Reciprocamente, seja $j : P \to Q$ tal que k é Kan-injectivo à direita relativamente a j. O morfismo j é uma imersão, já que D é Kan-injectivo à direita relativamente j (ver Exemplo 1.9). Sejam $y \in Q$ e $x_1, x_2 \in P$, nas condições de (*). Se x_1 e x_2 são comparáveis então podemos escolher um deles para x_0. Caso contrário, seja $f : P \to A$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq x_1 \text{ e } x \leq x_2; \\ a, & \text{se } x \leq x_1 \text{ e } x \nleq x_2; \\ b, & \text{se } x \nleq x_1 \text{ e } x \leq x_2; \\ 1, & \text{nos outros casos }. \end{cases}$$

É claro que f é uma aplicação monótona, tendo-se $f(x_1) = a$ e $f(x_2) = b$. Como $x_1, x_2 \in j^{-1}(\uparrow y)$, a e b pertencem a $\{f(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\}$. Logo

$$\begin{aligned} (k \cdot (f/j))(y) &= k(\bigwedge\{f(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\}) \\ &= k(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} ((k \cdot f)/j)(y) &= \bigwedge\{k \cdot f(x) : x \in j^{-1}(\uparrow y)\} \\ &= (k \cdot (f/j))(y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $k \cdot f(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in j^{-1}(\uparrow y)$. Além disso, $k \cdot f(x_0) = 0$ implica $f(x_0) = 0$. Portanto, $x_0 \leq x_1$ e $x_0 \leq x_2$.

Exemplos 1.18. No Capítulo 3 apresentamos várias classes de morfismos em $\mathbf{Top}_0$ da forma $\mathcal{A}^{KInj}$, para convenientes subcategorias $\mathcal{A}$.

Também para a categoria dual da categoria dos reticulados locais, apresentamos, no Capítulo 4, várias classes de morfismos deste tipo.

Observação 1.19. Numa categoria arbitrária $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade, para cada subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, a classe $\mathcal{A}^{KInj}$ é formada pelos morfismos de $\mathcal{X}$ relativamente aos quais todos os objectos de $\mathcal{A}$ são ortogonais.

Em seguida apresentamos algumas propriedade da classe de morfismos $\mathcal{A}^{KInj}$, para uma dada subcategoria $\mathcal{A}$.

Proposição 1.20. *Para cada subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, a classe $\mathcal{A}^{KInj} \subseteq Mor(\mathcal{X})$ satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para cada $(f : X \to Y) \in \mathcal{A}^{KInj}$, se $r, s : X \to A$ são morfismos de $\mathcal{X}$, com $A \in \mathcal{A}$, tais que $r \leq s$, então $r/f \leq s/f$.*

2. *Todos os morfismos adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$ são elementos de $\mathcal{A}^{KInj}$.*

3. *$\mathcal{A}^{KInj}$ é fechada para a composição. Além disso, para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{A}^{KInj}$, se $h : X \to A$ é um morfismo de $\mathcal{X}$ com $A \in \mathcal{A}$, então $h/(g \cdot f) = (h/f)/g$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "h/f"] & Z \arrow[dll, "(h/f)/g=h/(g\cdot f)"] \\ A & & \end{tikzcd}$$

4. *Para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, se $g \cdot f \in \mathcal{A}^{KInj}$, então são válidas as seguintes propriedades:*

   (a) *Se $g \in \mathcal{A}^{KInj}$ então também $f \in \mathcal{A}^{KInj}$.*

   (b) *Se f é um epimorfismo então $g \in \mathcal{A}^{KInj}$ (consequentemente, também $f \in \mathcal{A}^{KInj}$).*

Demonstração. 1. Se $f : X \to Y$ é um elemento de $\mathcal{A}^{KInj}$, $A \in \mathcal{A}$ e $r, s : X \to A$ são tais que $r \leq s$, então, como $r = (r/f) \cdot f$ obtemos $(r/f) \cdot f \leq s$, o que, por definição de s/f, implica $r/f \leq s/f$.

2. Sejam $d : X \to Y$ um adjunto direito reflectivo, com $e : Y \to X$, tal que $e \dashv_R d$. Seja $A \in \mathcal{A}$ e $g : X \to A$ um morfismo de $\mathcal{X}$. Então $g/d = g \cdot e$: como $e \cdot d = id_X$ é claro que $(g \cdot e) \cdot d = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[l, bend left, "e"] \arrow[dl, "g/d"] \arrow[d, "(a\cdot g)/d"] \\ A \arrow[r, "a"] & B \end{tikzcd}$$

Por outro lado, pelo facto de $id_Y \leq d \cdot e$, a condição $t \cdot d \leq g$ implica que $t \leq g \cdot e$. Se $a : A \to B$ é óbvio que $a \cdot (g/d) = a \cdot g \cdot e = (a \cdot g)/d$. Assim, $d \in \mathcal{A}^{KInj}$.

3. Suponhamos que $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ estão em $\mathcal{A}^{KInj}$ e seja $h : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$. Então A é Kan-injectivo à direita relativamente a $g \cdot f$, com $h/(g \cdot f) = (h/f)/g$ pois, por um lado,

$$((h/f)/g) \cdot g \cdot f = (((h/f)/g) \cdot g) \cdot f = (h/f) \cdot f = h;$$

pelo outro, se $t : Z \to A$ é tal que $t \cdot g \cdot f \leq h$, então $t \cdot g \leq h/f$, donde se obtém $t \leq (h/f)/g$.

Além disso, se $a : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$, então

$$(a \cdot h)/(g \cdot f) = ((a \cdot h)/f)/g = (a \cdot (h/f))/g = a \cdot (h/f)/g = a \cdot (h/(g \cdot f)),$$

portanto a é Kan-injectivo à direita relativamente a $g \cdot f$.

4. Sejam f e g morfismos nas condições do enunciado.

   (a) Sejam $A \in \mathcal{A}$ e $h : X \to A$. Como $g \cdot f \in \mathcal{A}^{KInj}$ então existe $h/(g \cdot f)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "(h/(g\cdot f))\cdot g"] & Z \arrow[dll, bend left, "h/(g\cdot f)"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

   Vamos verificar que $h/f = (h/(g \cdot f))g$. É claro que

$$((h/(g \cdot f))g) \cdot f = (h/(g \cdot f)) \cdot (g \cdot f) = h.$$

   Por outro lado, dado um morfismo $t : Y \to A$ existe $t/g : Z \to A$ e, atendendo à seguinte cadeia de implicações:

$$\begin{aligned}
t \cdot f \leq h \quad &\Rightarrow \quad (t/g) \cdot g \cdot f \leq h \\
&\Rightarrow \quad t/g \leq h/(g \cdot f) \\
&\Rightarrow \quad t \leq (h/(g \cdot f)) \cdot g
\end{aligned}$$

   concluímos que, de facto,

$$h/f = (h/(g \cdot f)) \cdot g,$$

   portanto A é Kan-injectivo à direita relativamente a f.

Consideremos um morfismo $a : A \to B$ de $\mathcal{A}$. Já sabemos que, nas condições do enunciado, A e B são também Kan-injectivos à direita relativamente a f, tendo-se $(a \cdot h)/f = ((a \cdot h)/(g \cdot f))g$. Além disso, como por hipótese a é Kan-injectivo à direita relativamente a $g \cdot f$, tem-se

$$a \cdot (h/f) = a \cdot (h/(g \cdot f)) \cdot g = ((a \cdot h)/(g \cdot f)) \cdot g = (a \cdot h)/f$$

donde concluímos que a é Kan-injectivo à direita relativamente a f.

(b) Seja $h : Y \to A$, com $A \in \mathcal{A}$. Como $g \cdot f \in \mathcal{A}^{KInj}$, então existe o morfismo $(h \cdot f)/(g \cdot f)$ e satisfaz a igualdade

$$((h \cdot f)/(g \cdot f))g \cdot f = h \cdot f,$$

o que, pelo facto de f ser um epimorfismo, implica que $((h \cdot f)/(g \cdot f)) \cdot g = h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "hf"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "h"] & Z \arrow[dll, bend left, "(hf)/(gf)"] \\ A & & \end{tikzcd}$$

Além disso, se t é tal que $t \cdot g \leq h$ então $t \cdot g \cdot f \leq h \cdot f$, logo $t \leq (h \cdot f)/(g \cdot f)$. Assim,

$$h/g = (h \cdot f)/(g \cdot f).$$

Por outro lado, se $a : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$, então, usando a fórmula anterior, obtemos:

$$a \cdot (h/g) = a \cdot ((h \cdot f)/(g \cdot f)) = (a \cdot h \cdot f)/(g \cdot f) = (ah)/g.$$

Portanto a é também Kan-injectivo à direita relativamente a g. Então $g \in \mathcal{A}^{KInj}$.

$\square$

Observação 1.21. Claro que do ponto 2 da Proposição 1.20 se conclui imediatamente que $\mathcal{A}^{KInj}$ contém todos os isomorfismos de $\mathcal{X}$.

Corolário 1.22. *A classe $\mathcal{X}^{KInj}$, de todos os morfismos Kan-injectivos à direita relativamente a todos os objectos e morfismos de $\mathcal{X}$, é constituída pelos morfismos adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Como já foi visto no ponto 2 da Proposição 1.20, todos os objectos e morfismos de $\mathcal{X}$ são Kan-injectivos à direita relativamente aos morfismos adjuntos direitos reflectivos.

Reciprocamente, seja $f : X \to Y$ um morfismo de $\mathcal{X}$ relativamente ao qual todos os objectos e morfismos de $\mathcal{X}$ são Kan-injectivos à direita. Vamos verificar que então f é um adjunto direito reflectivo. Por hipótese existem os morfismos $id_X/f : Y \to X$ e $f/f : Y \to Y$ tais que

$$(id_X/f) \cdot f = id_X \text{ e } id_Y \leq f/f.$$

Mas f é Kan-injectivo à direita relativamente a f, portanto,

$$f/f = (f \cdot id_X)/f = f(id_X/f)$$

donde obtemos

$$id_Y \leq f \cdot (id_X/f).$$

□

Na próxima proposição obtemos uma propriedade da classe $\mathcal{A}^{KInj}$ relativamente a somas amalgamadas para a qual necessitamos de algumas definições.

Definição 1.23. Um morfismo $f : X \to Y$ diz-se um *epimorfismo relativamente à ordem* se, para quaisquer morfismos $g, h : Y \to Z$,

$$g \cdot f \leq h \cdot f \text{ implica } g \leq h.$$

Dualmente, $f : X \to Y$ diz-se um *monomorfismo relativamente à ordem* se, para quaisquer morfismos $g, h : Z \to X$,

$$f \cdot g \leq f \cdot h \text{ implica } g \leq h.$$

Dizemos que uma família de morfismos com o mesmo codomínio, $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$, é *conjuntamente epimórfica relativamente à ordem* quando, dados $g, h : X \to Y$,

$$g \leq h \text{ sempre que } g \cdot f_i \leq h \cdot f_i, \text{ para cada } i \in I.$$

Dualmente, a família de morfismos $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ é *conjuntamente monomórfica relativamente à ordem* se, para quaisquer morfismos $g, h : Y \to X$,

$$g \leq h \text{ sempre que } f_i \cdot g \leq f_i \cdot h,\ i \in I.$$

Dizemos que um *limite é conjuntamente monomórfico relativamente à ordem* se o correspondente cone-limite o é. Analogamente falamos de *colimites conjuntamente epimórficos relativamente à ordem.*

Observações 1.24. 1. É imediato que todo o epimorfismo relativamente à ordem é um epimorfismo e, analogamente, todo o monomorfismo relativamente à ordem é um monomorfismo.

2. Mais geralmente, toda a família de morfismos, $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$, conjuntamente epimórfica relativamente à ordem é *conjuntamente epimórfica*, i.e.,

$$g = h \text{ sempre que } g \cdot f_i = h \cdot f_i, \text{ para cada } i \in I.$$

Analogamente toda a família de morfismos, $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$, conjuntamente monomórfica relativamente à ordem é *conjuntamente monomórfica*, i.e.,

$$g = h \text{ sempre que } f_i \cdot g = f_i \cdot h, \text{ para cada } i \in I.$$

Exemplo 1.25. Consideremos a categoria **CPO** enriquecida em **CPO** com a ordem ponto-a-ponto. Nesta categoria temos as propriedades seguintes:

1. Uma família de morfismos $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem se e só se para quaisquer $x, x' \in X$,

$$x \leq x' \text{ sempre que } f_i(x) \leq f_i(x'), \text{ para cada } i \in I.$$

Para verificar a condição necessária basta considerar as funções constantes

$$g_x : \{*\} \to X \text{ e } g_{x'} : \{*\} \to X$$

definidas por

$$g_x(*) = x \text{ e } g_{x'}(*) = x',$$

respectivamente. A recíproca é também imediata. Em particular, um morfismo $f : X \to Y$ é um monomorfismo relativamente à ordem se e só se é uma imersão (ver 1.1).

2. Se $(L, (l_i : L \to X_i)_{i\in I})$ é um limite em **CPO** então a família $(l_i)_{i\in I}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem.

Com efeito, sabemos que, dado um diagrama $D : I \to CPO$, com $D_i = (X_i, \leq_i)$, $i \in I$, o limite de D se obtém formando o cone-limite de D na categoria **Conj**, digamos $(L, (l_i : L \to X_i)_{i\in I})$, e equipando L com a ordem parcial definida por:

$$(x_i)_{i\in I} \leq (x'_i)_{i\in I} \text{ se e só se, para cada } i \in I,\ x_i \leq x'_i,$$

para quaisquer $(x_i)_{i\in I}$ e $(x'_i)_{i\in I}$ em L.

3. Se $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ é uma família de morfismos conjuntamente sobrejectiva, i.e., se

$$X = \cup_{i\in I} f_i[X_i]$$

então é também conjuntamente epimórfica relativamente à ordem. Com efeito, sendo $(f_i)_{i\in I}$ conjuntamente sobrejectiva, consideremos os morfismos $g, h : X \to Y$ tais que, para cada $i \in I$,

$$g \cdot f_i \leq h \cdot f_i.$$

Então, para cada $i \in I$ e para cada $x_i \in X_i$,

$$g(f_i(x_i)) \leq h(f_i(x_i)).$$

Como, para cada $x \in X$, existe $i \in I$ e existe $x_i \in X_i$ tais que

$$x = f_i(x_i),$$

então, para cada $x \in X$,

$$g(x) \leq h(x),$$

ou seja, $g \leq h$. Deste modo concluímos que as famílias de morfismos conjuntamente epimórficas são exactamente as famílias conjuntamente sobrejectivas. Em particular, em **CPO**, epimorfismos relativamente à ordem, epimorfismos e sobrejecções coincidem.

4. Uma vez que são conjuntamente sobrejectivos, em **CPO** os colimites são conjuntamente epimórficos relativamente à ordem.

5. Qualquer subcategoria de **CPO** fechada para limites (tal como a categoria dos reticulados locais, por exemplo) tem também limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem.

Exemplo 1.26. 1. Em $\mathbf{Top}_0$ toda a imersão, i.e., toda a função contínua $f : X \to Y$, onde X tem a topologia inicial induzida por f, é um monomorfismo relativamente à ordem.

Para concluir a proposição enunciada suponhamos, sem perda de generalidade, que $f : X \to Y$ é a inclusão em Y de um seu subespaço X. Sejam $g, h : Z \to X$ morfismos de $\mathbf{Top}_0$, tais que

$$f \cdot g \leq f \cdot h,$$

ou seja, para cada $z \in Z$ e cada aberto V de Y, se

$$z \in (f \cdot g)^{-1}(V)$$

então também

$$z \in (f \cdot h)^{-1}(V).$$

Como cada aberto U de X é a imagem inversa por f de um aberto de Y, é claro que, para cada $z \in Z$,

$$z \in g^{-1}(U) \text{ implica } z \in h^{-1}(U), \text{ portanto } g \leq h.$$

2. Analogamente seja $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos de $\mathbf{Top}_0$ onde X tem a topologia inicial, ou seja, cujos abertos são uniões de conjuntos da forma

$$U = \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i),$$

com J finito, tal que $J \subseteq I$ e com U_i aberto de X_i. Então $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem.

3. Em $\mathbf{Top}_0$ os limites são conjuntamente monomórficos relativamente à ordem. De facto, dado um diagrama $D : I \to \mathbf{Top}_0$, com $D_i = (X_i, \mathcal{O}(X_i))$, para cada $i \in I$, depois de construído o cone-limite na categoria $\mathbf{Conj}$, digamos $(L, (l_i : L \to X_i)_{i \in I})$, obtemos o limite de D equipando L com a topologia gerada pela sub-base

$$\bigcup_{i \in I} \{l_i^{-1}(U) : U \in O(X_i)\}.$$

De modo a concluir que $(l_i : L \to X_i)_{i \in I}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem, sejam $g, h : M \to L$ dois morfismos de $\mathbf{Top}_0$ tais que, para cada $i \in I$, $l_i \cdot g \leq l_i \cdot h$. Atendendo à definição de ordem de especialização, isto significa que, para cada $m \in M$ e cada aberto U_i de X_i,

$$l_i \cdot g(m) \in U_i \Rightarrow l_i \cdot h(m) \in U_i.$$

Ou seja,

$$g(m) \in l_i^{-1}(U_i) \Rightarrow h(m) \in l_i^{-1}(U_i),$$

isto é, $g \leq h$.

4. Em $\mathbf{Top}_0$ famílias conjuntamente sobrejectivas (em particular, colimites) são conjuntamente epimórficas relativamente à ordem.

Exemplos 1.27. 1. Consideremos a subcategoria $\mathbf{SRet}_1$ de $\mathbf{CPO}$ cujos objectos são os conjuntos parcialmente ordenados A com ínfimos finitos (incluindo o ínfimo do conjunto vazio, portanto com elemento 1_A), e cujos morfismos são as funções $f : A \to B$ que preservam ínfimos finitos e o último elemento. Nesta categoria os colimites são conjuntamente epimórficos relativamente à ordem. De facto, sabemos que em $\mathbf{SRet}_1$ os co-igualizadores são sobrejectivos, portanto epimórficos relativamente à ordem. Vamos verificar que também os coprodutos o são. É sabido que os morfismos do coproduto de uma família de objectos $A_i \in \mathbf{SRet}_1$, com $i \in I$, são dados por:

$$A_j \xrightarrow{\gamma_j} \overline{\prod}_{i\in I} A_i \ ,$$

onde

$$\overline{\prod}_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} : a_i \neq 1 \text{ só para um número finito de i´s}\}$$

e $\gamma_j(a) = (a_i)_{i\in I}$, com $a_j = a$ e $a_i = 1$, para $i \neq j$ (ver, por exemplo, [33], IV-4.2). É fácil verificar que a família $(\gamma_i)_{i\in I}$ é conjuntamente epimórfica relativamente à ordem.

2. Consideremos agora a subcategoria **RetLoc** de $\mathbf{SRet}_1$ constituída pelos reticulados locais, isto é, reticulados completos L cujos ínfimos finitos se distribuem relativamente a supremos quaisquer, ou seja, tais que, dados $a \in L$ e $b_i \in L$, com $i \in I$,

$$a \bigwedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = \bigvee_{i\in I} (a \wedge b_i),$$

e cujos morfismos são as funções que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer. Vamos verificar que também em **RetLoc** os colimites são conjuntamente epimórficos relativamente à ordem. Tal como no caso anterior, os co-igualizadores são sobrejectivos. Relativamente aos coprodutos, recorde-se que estes são construídos a partir dos coprodutos em $\mathbf{SRet}_1$, usando o conhecido functor adjunto esquerdo da inclusão de **RetLoc** em $\mathbf{SRet}_1$, dado pelos descendentes $D(S) = \{U \subseteq S : U =\downarrow U\}$, para cada $S \in \mathbf{SRet}_1$, com as reflexões dadas por $\lambda_S : S \to D(S)$, com $\lambda_S(x) =\downarrow x$, para cada $x \in S$. Nomeadamente, os morfismos do coproduto de uma família de objectos $A_i \in \mathbf{RetLoc}$, com $i \in I$, são dados por:

$$A_j \xrightarrow{\gamma_j} S \xrightarrow{\lambda_S} D(S) \xrightarrow{\nu} D(S)/R \ ,$$

com $S = \overline{\prod}_{i\in I} A_i$, onde os morfismos γ_j são os morfismos do coproduto em $\mathbf{SRet}_1$ e ν é um certo morfismo sobrejectivo (ver, por exemplo, [33], IV-4.3). Por outro lado, como iremos verificar no Exemplo 2.11 do Capítulo 2, a reflexão D é uma KZ-reflexão no sentido da Definição 2.27; então, pelo Teorema 2.5, é válida, para quaisquer morfismos $f, g : D(S) \to L$ em **RetLoc**, a seguinte implicação $g \cdot \lambda_S \leq g \cdot \lambda_S \Rightarrow g \leq f$.

Pretendemos mostrar que dados dois morfismos de **RetLoc**, $f, g : D(S) \to L$, $g \leq f$ sempre que

$$g \cdot (\nu \cdot \lambda_S \cdot \gamma_i) \leq f \cdot (\nu \cdot \lambda_S \cdot \gamma_i).$$

Como em $\mathbf{SRet}_1$ os coprodutos são conjuntamente epimórficos relativamente à ordem, da desigualdade anterior obtemos

$$g \cdot (\nu \cdot \lambda_S) \leq f \cdot (\nu \cdot \lambda_S).$$

Como a reflexão é KZ, obtemos $g \cdot \nu \leq f \cdot \nu$ e, uma vez que ν é uma sobrejecção, é epimórfica relativamente à ordem, portanto concluímos que $g \leq f$.

Definição 1.28. Dizemos que uma classe de morfismos $\mathbb{H}$ é *estável para somas amalgamadas* se sempre que o par (f', g') é a soma amalgamada de (f, g) e $f \in \mathbb{H}$ então também $f' \in \mathbb{H}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ Z \arrow[r, "f'"] & P \end{tikzcd}$$

Dizemos que é *estável para somas amalgamadas múltiplas* se, dada uma soma amalgamada múltipla de uma família de morfismos $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "p"'] & X_i \arrow[d, "t_i"] \\ & P \end{tikzcd}$$

o morfismo $p : X \to P$ pertence a $\mathbb{H}$ sempre que todos os morfismos f_i estão em $\mathbb{H}$.

Proposição 1.29. *A classe de morfismos $\mathcal{A}^{KInj}$ é estável para somas amalgamadas e somas amalgamadas múltiplas que sejam conjuntamente epimórficas relativamente à ordem.*

Demonstração. 1. Seja (P, f', g') a soma amalgamada de (f, g), com $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$. Suponhamos que $f \in \mathcal{A}^{KInj}$. Então, para cada $h : Z \to A$, com $A \in \mathcal{A}$, existe $(h \cdot g)/f : Y \to A$ tal que $(h \cdot g)/f)f = h \cdot g$, o que, porque (P, f', g') é a soma amalgamada de (f, g), implica a existência de um único morfismo $t : P \to A$ tal que

$$t \cdot g' = (h \cdot g)/f \quad \text{e} \quad t \cdot f' = h.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"'] \arrow[ddl, bend left, "(h\cdot g)/f"] \\ Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[dl, "t"'] \\ A & \end{tikzcd}$$

De modo a concluir que $t = h/f'$ consideremos $k : P \to A$ tal que $k \cdot f' \leq h$. Temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} k \cdot f' \leq h \quad &\Rightarrow \quad k \cdot f' \cdot g \leq h \cdot g \\ &\Rightarrow \quad k \cdot g' \cdot f \leq h \cdot g \\ &\Rightarrow \quad k \cdot g' \leq (h \cdot g)/f \\ &\Rightarrow \quad k \cdot g' \leq t \cdot g', \end{aligned}$$

e também $k \cdot f' \leq h$ implica $k \cdot f' \leq t \cdot f'$. Como (f', g') é conjuntamente epimórfico relativamente à ordem, então $k \leq t$, concluindo-se assim que A é Kan-injectivo à direita relativamente a f'.

Por outro lado, se $a : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$, então $a \cdot ((h \cdot g)/f) = (a \cdot h \cdot g)/f$ e, de modo análogo ao que fizemos anteriormente, existe um único $t' : P \to B$ tal que $t' \cdot g' = (a \cdot h \cdot g)/f$ e $t' \cdot f' = a \cdot h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"'] \arrow[dd, bend left, "(a\cdot h\cdot g)/f"] \\
Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[d, "t'"'] \arrow[dl, "h/f'"] \\
A \arrow[r, "a"'] & B
\end{tikzcd}$$

Então

$$\begin{aligned}
a \cdot t \cdot g' &= a \cdot ((h \cdot g)/f) \\
&= (a \cdot h \cdot g)/f \\
&= t' \cdot g'.
\end{aligned}$$

Pelo facto de $t \cdot f' = h$, também $a \cdot t \cdot f' = t' \cdot f'$; uma vez que (f', g') é conjuntamente epimórfico relativamente à ordem, concluímos daqui que $a \cdot t = t'$, ou seja, $a \cdot (h/f') = (a \cdot h)/f'$.

2. Seja
$$(X \xrightarrow{p} P) = (X \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{t_i} P)$$
a soma amalgamada múltipla da família de morfismos $(X \xrightarrow{f_i} X_i)_{i \in I}$ e suponhamos que todos os f_i's estão em $\mathcal{A}^{KInj}$, para $i \in I$. De modo a concluir que $p \in \mathcal{A}^{KInj}$, consideremos um morfismo $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}^{KInj}$. Então, para cada $i \in I$, existe $g/f_i : X_i \to A$ tal que $(g/f_i) \cdot f_i = g$. Logo, pela propriedade universal das somas amalgamadas múltiplas, existe um único $t : P \to A$ tal que $t \cdot t_i = g/f_i$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddr, "g"'] & X_i \arrow[d, "t_i"'] \arrow[dd, bend left, "g/f_i"] \\
& P \\
& A
\end{tikzcd}$$

Consequentemente, temos $t \cdot t_i \cdot f_i = g$, portanto $t \cdot p = g$. Por outro lado, para cada $k : P \to A$, se $k \cdot p \leq g$ então, para cada $i \in I$,

$$k \cdot t_i \cdot f_i \leq t \cdot t_i \cdot f_i = (g/f_i) \cdot f_i = g,$$

o que, por definição de g/f_i, implica

$$k \cdot t_i \leq g/f_i = t \cdot t_i.$$

Como a família $(t_i)_{i \in I}$ é conjuntamente epimórfica relativamente à ordem, conclui-se que $k \leq t$. Por conseguinte, $t = g/p$.

Além disso, se $a : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$, então, atendendo à forma como obtivemos g/p no parágrafo anterior, sabemos que $(a \cdot g)/p$ é o único morfismo que satisfaz a igualdade

$$((a \cdot g)/p) \cdot t_i = (a \cdot g)/f_i,$$

para cada $i \in I$. Assim, usando o facto dos morfismos f_i pertencerem a $\mathcal{A}^{KInj}$, temos:

$$\begin{aligned} ((a \cdot g)/p) \cdot t_i &= (a \cdot g)/f_i \\ &= a \cdot (g/f_i) \\ &= a \cdot t \cdot t_i \\ &= a \cdot (g/p) \cdot t_i. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$a \cdot (g/p) = (a \cdot g)/p$$

□

1.3 Subcategorias Kan-injectivas

O lema seguinte legitima a Definição 1.31.

Lema 1.30. *Os objectos e os morfismos de $\mathcal{X}$ que são Kan-injectivos à direita relativamente a todos os morfismos de uma classe $\mathbb{H} \subseteq Mor(\mathcal{X})$ constituem uma subcategoria de $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Seja A Kan-injectivo à direita relativamente a todos os elementos de $\mathbb{H}$. Então para cada $f : X \to Y$ e $h : X \to A$, existe h/f e o morfismo identidade, $id_A : A \to A$, satisfaz

$$id_A \cdot (h/f) = h/f = (id_A \cdot h)/f.$$

Por outro lado, dados dois morfismos $a : A \to B$ e $b : B \to C$, Kan-injectivos à direita relativamente a todos os elementos de $\mathbb{H}$ então, para cada $f : X \to Y$ de $\mathbb{H}$ e $g : X \to A$, tem-se

$$(b \cdot a)(g/f) = b \cdot (a \cdot (g/f)) = b \cdot ((a \cdot g)/f) = (b \cdot (a \cdot g))/f = ((b \cdot a) \cdot g)/f,$$

portanto $b \cdot a$ é Kan-injectivo à direita relativamente a f. □

Definição 1.31. Designamos a subcategoria referida no Lema 1.30 por subcategoria *Kan-injectiva à direita relativamente a* $\mathbb{H}$ e representamo-la por

$$KInj(\mathbb{H}).$$

De forma genérica, referir-nos-emos a subcategorias deste tipo como sendo *subcategorias Kan-injectivas.*

Observações 1.32.

1. Se $\mathbb{H}$ é constituído por epimorfismos então $KInj(\mathbb{H})$ é uma subcategoria plena. De facto, se $f : X \to Y$ é um epimorfismo em $\mathbb{H}$ e $a : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{X}$, com $A, B \in KInj(\mathbb{H})$, então, para cada $g : X \to A$ existem os morfismos g/f e $(a \cdot g)/f$ e
$$((a \cdot g)/f) \cdot f = a \cdot g = (a \cdot (g/f)) \cdot f,$$
o que, sendo f um epimorfismo, implica
$$(a \cdot g)/f = a \cdot (g/f).$$
Deste modo, concluímos que a é Kan-injectivo à direita relativamente a f e, consequentemente, $a \in KInj(\mathbb{H})$.

2. Considerando uma categoria arbitrária $\mathcal{X}$, enriquecida em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade então, para cada $\mathbb{H} \subseteq Mor(\mathcal{X})$, $KInj(\mathbb{H})$ é exactamente a subcategoria plena de $\mathcal{X}$ que tem como objectos os elementos de $Obj(\mathcal{X})$ ortogonais aos morfismos de $\mathbb{H}$.

3. Seja $\mathbb{H}$ a classe de todos os morfismos adjuntos direitos reflectivos de $\mathcal{X}$. Decorre imediatamente do ponto 2. da Proposição 1.20 que $KInj(\mathbb{H}) = \mathcal{X}$ (pondo $\mathcal{A} = \mathcal{X}$).

Exemplo 1.33. Consideremos a categoria **CPO**, enriquecida em **CPO** com a ordem ponto-a-ponto, e a classe $Im(\mathbf{CPO})$ das suas imersões. Vamos verificar que:

$$KInj(Im(\mathbf{CPO})) \text{ coincide com } \mathbf{CPOC},$$

onde **CPOC** é a subcategoria de **CPO** constituída pelos reticulados completos (i.e., com ínfimos e supremos quaisquer) e pelos morfismos de **CPO** que preservam ínfimos quaisquer.

1. Se A é um reticulado completo, pelo Exemplo 1.9, sabemos que $A \in KInj(Im(\mathbf{CPO}))$ e que, dada uma imersão $j : P \to Q$ e um morfismo qualquer $g : P \to A$, o morfismo g/j é definido por:
$$(g/j)(x) = \bigwedge\{g(a) : a \in j^{-1}(\uparrow x)\}.$$

Além disso, dado um morfismo $f : A \to B$ entre conjuntos parcialmente ordenados completos, se f preserva ínfimos quaisquer, então, para cada $x \in Q$:

$$(f \cdot g)/j(x) = \bigwedge\{fg(a) : a \in j^{-1}(\uparrow x)\} = f(\bigwedge\{g(a) : a \in j^{-1}(\uparrow x)\}) = f \cdot (g/j)(x).$$

Portanto, f é Kan-injectivo à direita relativamente a j e concluímos que

$$\mathbf{CPOC} \subseteq KInj(Im(\mathbf{CPO})).$$

De modo a mostrar que todo o conjunto parcialmente ordenado Kan-injectivo à direita relativamente a imersões é um reticulado completo, consideremos um conjunto parcialmente ordenado P, Kan-injectivo à direita relativamente a imersões. Seja $DM(P)$ o completamento de Dedekind-MacNeille de P:

$$DM(P) = \{A \subseteq P : A = (A^u)^l\},$$

onde

$$A^u = \bigcap_{a \in A}(\uparrow a) \text{ e } A^l = \bigcap_{a \in A}(\downarrow a).$$

Consideremos a imersão $j : P \to DM(P)$, definida por

$$j(x) = \downarrow x.$$

É bem sabido que j é sup-densa e inf-densa. Como j é uma imersão, existe em **CPO** o morfismo $id_P/j : DM(P) \to P$ e satisfaz a igualdade $(id_P/j) \cdot j = id_P$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "j"] \arrow[d, "id_P"'] & DM(P) \arrow[dl, "id_P/j"] \\
P &
\end{tikzcd}$$

Portanto, (id_P/j) é uma retracção de P. Vamos verificar que, além disso, (id_P/j) é também uma imersão. Para verificar que

$$(id_P/j)(A) \subseteq (id_P/j)(B) \Rightarrow A \subseteq B,$$

consideremos $A, B \in DM(P)$ tais que $A \nsubseteq B$. Como j é sup-denso temos:

$$A = \bigvee_{\downarrow x \subseteq A, x \in P} \downarrow x,$$

logo existe $x \in P$ tal que $\downarrow x \subseteq A$ e $\downarrow x \nsubseteq B$. Como j é também inf-densa

$$B = \bigwedge_{B \subseteq \downarrow y, y \in P} \downarrow y$$

e, então, existe $y \in P$ tal que $B \subseteq\downarrow y$ e $x \nleq y$. Portanto temos:

$$(id_P/j)j(x) = id_P(x) \nleq id_P(y) = (id_P/j)j(y),$$

ou seja,

$$(id_P/j)(\downarrow x) \nleq (id_P/j)(\downarrow y).$$

Uma vez que $(id_P/j)(\downarrow x) \leq (id_P/j)(A)$ e $(id_P/j)(B) \leq (id_P/j)(\downarrow y)$, terá de ser

$$(id_P/j)(A) \nleq (id_P/j)(B).$$

Então (id_P/j) é uma imersão. Como é também uma retracção concluímos que (id_P/j) é um isomorfismo. Como $DM(P)$ é um reticulado completo, então P é completo.

2. Consideremos um morfismo $f \in KInj(Im(\mathbf{CPO}))$, com $f : A \to B$. Então A e B são Kan-injectivos à direita relativamente a j, portanto, pela primeira parte, sabemos que são completos. Vamos verificar que f preserva ínfimos quaisquer.

   Seja $V \subseteq A$. De modo a verificar que $f(\bigwedge V) = \bigwedge f[V]$, consideremos a imersão de V em A, dada pela inclusão, $i : V \hookrightarrow A$, e o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[dl, "i/i"'] \arrow[d, "(f\cdot i)/i"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

   Seja $a = \wedge V$. De acordo com a fórmula (1.3), obtemos

$$(i/i)(a) = \bigwedge\{i(x) : x \in V, x \in i^{-1}(\uparrow a)\} = \bigwedge\{x : x \in V, a \leq x\}) = a.$$

   Então, pela hipótese sobre f, $f(a) = f \cdot (i/i)(a) = (f \cdot i)/i(a)$. E $(f \cdot i)/i$ define-se de acordo com a fórmula (1.3). Em particular, uma vez que $V \subseteq\uparrow (a)$, temos:

$$\begin{aligned} f(a) &= ((f \cdot i)/i)(a) \\ &= \bigwedge\{(f \cdot i)(x) : x \in i^{-1}(\uparrow (a))\} \\ &= \bigwedge\{f(x) : x \in V, x \in (\uparrow (a))\} \\ &= \bigwedge f[V]. \end{aligned}$$

   Portanto $f(\wedge V) = \bigwedge f[V]$. Podemos então concluir que $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$ coincide com a categoria **CPOC**, dos reticulados completos e das funções monótonas que preservam ínfimos quaisquer.

Observação 1.34. 1. O exemplo anterior contém o resultado de B. Banaschewski e G. Bruns que, em [5], mostraram que em **CPO** os objectos injectivos relativamente às imersões são, de facto, os reticulados completos.

2. Dualizando o feito no Exemplo 1.33 obtemos o seguinte resultado observado em [4]: A subcategoria de **CPO** constituída por todos os objectos e morfismos Kan-injectivos à esquerda relativamente a imersões é a categoria dos reticulados completos e das aplicações que preservam supremos arbitrários.

Exemplo 1.35. Na categoria **CPO** enriquecida em **CPO** com a ordem ponto-a-ponto, consideremos os conjuntos parcialmente ordenados $Z = \{0\}$ e $D = \{0, 1\}$, ordenado pela ordem natural, e seja $\mathbb{H} = \{h\}$, com $h : Z \to D$ a imersão natural.

$KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria que tem como objectos os conjuntos parcialmente ordenados A nos quais qualquer subconjunto da forma $\uparrow a$, com $a \in A$, tem supremo; e tem como morfismos as funções monótonas $f : A \to B$ tais que, para cada $a \in A$,

$$f(\vee(\uparrow a)) = \vee(\uparrow f(a)). \tag{1.9}$$

De facto, seja $A \in KInj(\mathbb{H})$ e $a \in A$. Definindo $g : Z \to A$ por $g(0) = a$, obtemos o morfismo $g/h : D \to A$ em **CPO**, com

$$(g/h)(0) = g(0) = a \leq (g/h)(1),$$

i.e., $(g/h)(1) \in (\uparrow a)$. Por outro lado, para cada $c \in (\uparrow a)$, definindo $t : D \to A$ por $t(0) = a$ e $t(1) = c$, obtemos um morfismo de **CPO** tal que $t \cdot h \leq g$, o que, por hipótese, implica que $t \leq (g/h)$, portanto $c = t(1) \leq (g/h)(1)$. Por definição de supremo, concluímos que $(g/h)(1) = \bigvee(\uparrow a)$.

Reciprocamente, sejam $A \in \mathcal{A}$, $g : Z \to A$ uma função monótona e $a \in A$, tal que $g(0) = a$. Então a função $g' : D \to A$, definida por $g'(0) = a$ e $g'(1) = \bigvee(\uparrow a)$, é monótona e satisfaz $g' \cdot h = g$. Além disso, se $t : D \to A$ é uma função monótona tal que $t \cdot h \leq g$, então $t(0) \leq a$, logo $\bigvee(\uparrow (t(0))) = \bigvee(\uparrow a) = g'(1)$. Mas $t(0) \leq t(1)$, ou seja, $t(1) \in (\uparrow (t(0))$. Então $t(1) \leq g'(1)$. Portanto $g/h = g'$ e $A \in KInj(\mathbb{H})$.

Para mostrar que os morfismos de $KInj(\mathbb{H})$ são precisamente os que satisfazem a condição (1.9), consideremos dois objectos A e B de $KInj(\mathbb{H})$ e um morfismo $f : A \to B$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[d, "(f\cdot g)/h"] \arrow[dl, "g/h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Seja $a \in A$ e seja $g : Z \to A$ definido por $g(0) = a$. Então a igualdade $\vee(\uparrow f(a)) = f(\vee(\uparrow a))$ é equivalente a $((f \cdot g)/h)(1) = (f \cdot (g/h))(1)$ e esta é claramente equivalente a $(f \cdot g)/h = f \cdot (g/h)$.

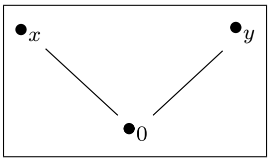
Exemplo 1.36. Se considerarmos em **CPO** o morfismo $h : Z \to D$ do exemplo anterior temos que a subcategoria dos objectos e morfismos Kan-injectivos à esquerda relativamente a h é toda a categoria **CPO**. Para cada morfismo f com domínio Z, $f\backslash h$ é uma função constante.

Enumeram-se de seguida outros exemplos de subcategorias Kan-injectivas de **CPO**, definidas, tal como nos exemplos anteriores, a partir de um conjunto singular de morfismos, $\mathbb{H} = \{h\}$.

Exemplos 1.37. Consideremos os conjuntos parcialmente ordenados $Z = \{0\}$ e $D = \{0, 1\}$, ordenado pela ordem natural. Sejam C o conjunto parcialmente ordenado com dois elementos incomparáveis,

$C =$ 

e S o conjunto parcialmente ordenado obtido de C por adição de um ínfimo de x e y,

$S =$ 

Para diferentes escolhas de $\mathbb{H} \subseteq Mor(\mathbf{CPO})$ obtemos as seguintes subcategorias Kan-injectivas de **CPO**:

1. Seja $\mathbb{H} = \{h\}$, com $h : D \to Z$ a aplicação constante. Então $KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria plena $\mathbf{CPO}_d$ de **CPO** cujos objectos são as anti-cadeias, i.e., os conjuntos parcialmente ordenados discretos.

2. Seja $\mathbb{H} = \{h\}$, com $h : C \to Z$ a aplicação constante. Então $KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria plena $\mathbf{CPO}_s$ de **CPO** cujos objectos são os conjuntos singulares.

3. Seja $\mathbb{H} = \{h\}$, com $h : C \to S$ a imersão obtida por inclusão. Então $KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria **SRet** de **CPO**, dos inf-semi-reticulados, isto é dos conjuntos parcialmente ordenados fechados para ínfimos finitos e não vazios e dos morfismos que os preservam. De facto, supondo que $A \in KInj(\mathbb{H})$, dados $a, b \in A$ e definindo a função $g : C \to A$ por

$$g(x) = a \quad \text{e} \quad g(y) = b,$$

sabemos que existe a função monótona $g/h : S \to A$. Do facto de $(g/h) \cdot h = g$ concluímos que $(g/h)(x) = a$ e $(g/h)(y) = b$, portanto $(g/h)(0) \leq a$ e $(g/h)(0) \leq a$. De modo a concluir que, de facto,

$$(g/h)(0) = a \wedge b,$$

suponhamos que existe $m \in A$ tal que $m \leq a$ e $m \leq b$ e consideremos a função $t : S \to A$, definida por $t(x) = g(x) = a,\ \ t(y) = g(y) = b$ e $t(0) = m$. É claro que t é monótona e que $t \cdot h = g$, portanto, por definição de g/h, $t \leq g/h$, logo $t(0) \leq (g/h)(0)$. Portanto $(g/h)(0) = a \wedge b = g(x) \wedge g(y) \in A$.

Por outro lado, se $f : A \to B$ é um morfismo de $KInj(\mathbb{H})$ então $(f \cdot g)/h = f \cdot (g/h)$ logo, dados $a, b \in A$ com $a = g(x)$ e $b = g(y)$, temos

$$((f \cdot g)/h)(0) = (f \cdot (g/h))(0),$$

ou seja,

$$f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b).$$

Portanto, $f \in \mathbf{SRet}$.

Reciprocamente, se $A \in \mathbf{SRet}$, basta, para cada morfismo $g : C \to A$ em **CPO**, definir $g/h : S \to A$ por $(g/h)(x) = g(x)$, $(g/h)(y) = g(y)$ e $(g/h)(0) = g(x) \wedge g(y)$. A conclusão de que $A \in KInj(\mathbb{H})$ e se $f \in \mathbf{SRet}$ então também $f \in KInj(\mathbb{H})$ é imediata.

4. Seja $\mathbb{H} = \{i\}$, com $i : \emptyset \to U = \{u\}$. Então $KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria de **CPO** constituída pelos conjuntos parcialmente ordenados P, com elemento 1_P.

5. Dos dois exemplos anteriores concluímos que para a categoria $\mathbf{SRet}_1$, dos inf-semi-reticulados com último elemento e das funções que preservam ínfimos finitos, temos

$$\mathbf{SRet}_1 = KInj(\mathbb{G}),$$

com $\mathbb{G} = \{h, i\}$ com $h : C \to S$ a imersão obtida por inclusão e $i : \emptyset \to U = \{u\}$.

Observação 1.38. Seja $\mathbb{H} \subseteq \mathbf{CPO}$ tal que $KInj(\mathbb{H}) \neq \mathbf{CPO}_d$ e $KInj(\mathbb{H}) \neq \mathbf{CPO}_s$. Então todos os morfismos de $\mathbb{H}$ são imersões. De facto, para o caso da Kan-injectividade à esquerda, isto é o Lema 2.6 de [4]. A prova da propriedade para a Kan-injectividade à direita é análoga.

Enunciam-se em seguida duas propriedades importantes das subcategorias Kan-injectivas à direita. Para tal, começamos por apresentar duas definições importantes para o que se segue.

Definições 1.39. Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$.

1. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *fechada para adjuntos direitos co-reflectivos* se, sempre que $r : A \to X$ e $r' : B \to Y$ são adjuntos direitos co-reflectivos (ver Definição 1.5), $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$ e $g : X \to Y$ é um morfismo tal que $g \cdot r = r' \cdot f$, então $g \in \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "r'"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

2. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *fechada para limites* quando, dado um diagrama $D : J \to \mathcal{A}$, se $(X, (l_i : X \to D_i)_{i \in J})$ é o limite de $ID : J \to \mathcal{X}$, onde $I : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ é o functor inclusão, então $(X, (l_i : X \to D_i)_{i \in J})$ é também o limite de D em $\mathcal{A}$. Ou seja, $X \in \mathcal{A}$, os morfismos l_i estão em $\mathcal{A}$, com $i \in J$, e se $(C, (c_i : C \to D_i)_{i \in J})$ é um cone em $\mathcal{A}$ então o morfismo único t tal que $l_i \cdot t = c_i$, para cada $i \in J$, pertence a $\mathcal{A}$.

Notemos que dizer que $\mathcal{A}$ é fechada para limites em $\mathcal{X}$ é equivalente a dizer que o functor inclusão $I : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ cria limites.

Observação 1.40. Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria fechada para adjuntos direitos co-reflectivos então cada adjunto direito co-reflectivo com domínio em $\mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{A}$: basta no quadrado anterior pôr $r = r'$, $f = id_A$ e $g = id_X$.

Teorema 1.41. *Para cada classe de morfismos $\mathbb{H}$ de $\mathcal{X}$, a subcategoria $KInj(\mathbb{H})$ de $\mathcal{X}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *É fechada para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem.*

2. *É fechada para adjuntos direitos co-reflectivos.*

Demonstração. 1. Seja $D : J \to KInj(\mathbb{H})$ um diagrama e $(X, (l_i : X \to D_i)_{i \in J})$ o limite de $ID : J \to \mathcal{X}$, onde $I : KInj(\mathbb{H}) \to \mathcal{X}$ é o functor inclusão. Suponhamos que a família $(l_i)_{i \in J}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem.

Comecemos por verificar que $X \in KInj(\mathbb{H})$. Para tal, consideremos um morfismo $h : A \to B$ em $\mathbb{H}$ e um morfismo $g : A \to X$. Então, para cada $i \in J$, existe $(l_i \cdot g)/h$ pois $D_i \in KInj(\mathbb{H})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "t"] \arrow[d, "(l_i\cdot g)/h"] \arrow[dr, "(l_j\cdot g)/h"] & \\
X \arrow[r, "l_i"'] \arrow[rr, bend right, "l_j"'] & D_i \arrow[r, "Dm"'] & D_j
\end{tikzcd}$$

Além disso, para cada $m : i \to j$, como $Dm \in KInj(\mathbb{H})$, tem-se:

$$Dm \cdot ((l_i \cdot g)/h) = (Dm \cdot l_i \cdot g)/h = (l_j \cdot g)/h.$$

Então, por definição de limite, existe um único $t : B \to X$ tal que

$$(l_i \cdot g)/h = l_i \cdot t, \text{ para cada } i \in J.$$

Portanto $((l_i \cdot g)/h) \cdot h = l_i \cdot t \cdot h$, ou seja,

$$l_i \cdot g = l_i \cdot t \cdot h.$$

Como $(l_i)_{i \in J}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem, obtemos $g = t \cdot h$. Por outro lado, se $k \cdot h \leq g$ então $l_i \cdot k \cdot h \leq l_i \cdot g$, donde se conclui que $l_i \cdot k \leq (l_i \cdot g)/h$, ou seja

$$l_i \cdot k \leq l_i \cdot t,$$

para cada $i \in J$. Mas isto, novamente porque $(l_i)_{i\in J}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem, implica $k \leq t$. Então $t = g/h$, portanto $X \in KInj(\mathbb{H})$.

Além disso, da igualdade $(l_i \cdot g)/h = l_i \cdot t$ concluímos que

$$(l_i \cdot g)/h = l_i \cdot (g/h),$$

para cada $i \in J$, logo também $l_i \in KInj(\mathbb{H})$. Então $(X, (l_i : X \to D_i)_{i\in J})$ é um cone do diagrama $D : J \to KInj(\mathbb{H})$.

De modo a concluir que é um limite em $KInj(\mathbb{H})$, suponhamos que $(C, (c_i : C \to D_i)_{i\in J})$ é um cone em $KInj(\mathbb{H})$. Então, uma vez que $(X, (l_i : X \to D_i)_{i\in J})$ é um limite em $\mathcal{X}$, existe um único morfismo $b : C \to X$ em $\mathcal{X}$ tal que $l_i \cdot b = c_i$, para cada $i \in J$. Vamos verificar que $b \in KInj(\mathbb{H})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "g/h"] \arrow[d, "(b\cdot g)/h"] \arrow[dr, "(d_i\cdot g)/h"] & \\
C \arrow[r, "b"'] \arrow[rr, bend right, "c_i"'] & X \arrow[r, "l_i"'] & D_i
\end{tikzcd}$$

De facto, para cada $i \in J$, como $c_i \in KInj(\mathbb{H})$, então $(c_i \cdot g)/h = c_i \cdot (g/h)$, ou seja $(l_i \cdot b \cdot g)/h = l_i \cdot b \cdot (g/h)$. Como $l_i \in KInj(\mathbb{H})$, obtemos $l_i \cdot ((b \cdot g)/h) = l_i \cdot b \cdot (g/h)$, o que implica $(b \cdot g)/h = b \cdot (g/h)$, uma vez que, por hipótese, a família $(l_i)_{i\in J}$ é conjuntamente monomórfica relativamente à ordem.

2. Sejam $r : A \to X$ e $r' : B \to Y$ adjuntos direitos co-reflectivos, $f : A \to B$ um morfismo de $KInj(\mathbb{H})$ e $g : X \to Y$ tal que $g \cdot r = r' \cdot f$. De modo a concluir que $g \in KInj(\mathbb{H})$, comecemos por verificar que $X \in KInj(\mathbb{H})$. Consideremos um morfismo qualquer $h \in \mathbb{H}$, com $h : Z \to W$, e seja $a : Z \to X$. Sejam l e l' os adjuntos esquerdos co-reflectivos de r e r', respectivamente. Então temos o morfismo $l \cdot a : Z \to A$, com $A \in KInj(\mathbb{H})$, logo existe $(l \cdot a)/h : W \to A$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrr, "h"] \arrow[dr, "l\cdot a"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & & W \arrow[dll, "(l\cdot a)/h"'] \arrow[ddll, bend left=60, "r\cdot((l\cdot a)/h)"] \\
& A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, shift right, "r"'] & B \arrow[d, shift right, "r'"'] & \\
& X \arrow[r, "g"] \arrow[u, shift right, "l"'] & Y \arrow[u, shift right, "l'"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que

$$a/h = r \cdot ((l \cdot a)/h). \tag{1.10}$$

De facto,

$$r \cdot ((l \cdot a)/h) \cdot h = r \cdot (l \cdot a) = (r \cdot l) \cdot a = a.$$

E, dado um morfismo $t : W \to X$, temos a seguinte sucessão de implicações:

$$\begin{aligned} t \cdot h \leq a &\Rightarrow l \cdot t \cdot h \leq l \cdot a \\ &\Rightarrow l \cdot t \leq (l \cdot a)/h \\ &\Rightarrow r \cdot l \cdot t \leq r \cdot ((l \cdot a)/h) \\ &\Rightarrow (r \cdot l) \cdot t \leq r \cdot ((l \cdot a)/h) \\ &\Rightarrow t \leq r \cdot ((l \cdot a)/h), \end{aligned}$$

atendendo a que $l \dashv_C r$. Concluímos assim que $t \leq r \cdot ((l \cdot a)/h)$ sempre que $t \cdot h \leq a$. Por conseguinte, $X \in KInj(\mathbb{H})$. Analogamente, usando o facto de $B \in KInj(\mathbb{H})$, concluímos que também $Y \in KInj(\mathbb{H})$.

Considerando agora o morfismo $g : X \to Y$, já sabemos, por (1.10), que

$$(g \cdot a)/h = r' \cdot ((l' \cdot g \cdot a)/h)$$

e, usando (1.10) e o facto de $f \in KInj(\mathbb{H})$,

$$g \cdot (a/h) = g \cdot r \cdot ((l \cdot a)/h) = r' \cdot f \cdot ((l \cdot a)/h) = r' \cdot ((f \cdot l \cdot a)/h).$$

De modo a que a igualdade $(g \cdot a)/h = g \cdot (a/h)$ se verifique basta que $r' \in KInj(\mathbb{H})$, pois, neste caso, ter-se-á

$$g \cdot (a/h) = r' \cdot ((f \cdot l \cdot a)/h) = (r' \cdot f \cdot l \cdot a)/h = (g \cdot r \cdot l \cdot a)/h = (g \cdot a)/h,$$

uma vez que $r \dashv_C l$. Para provar que $r' \in KInj(\mathbb{H})$, seja $b : Z \to B$ um morfismo. Porque $B, Y \in KInj(\mathbb{H})$, existem os morfismos b/h e $(r' \cdot b)/h$.

Uma vez que $r' \dashv_C l'$ e que $r' \cdot (b/h) \leq (r' \cdot b)/h$ (ver Observação (1.2)), obtemos:

$$\begin{aligned} l' \cdot r' \leq id_B &\Rightarrow l' \cdot r' \cdot b \leq b \\ &\Rightarrow (l' \cdot r' \cdot b)/h \leq b/h \\ &\Rightarrow r' \cdot ((l' \cdot r' \cdot b)/h) \leq r' \cdot (b/h) \end{aligned}$$

Como, por (1.10), $(r' \cdot b)/h = r' \cdot ((l' \cdot r' \cdot b)/h)$, obtemos $(r' \cdot b)/h \leq r' \cdot (b/h)$. Então $r' \in KInj(\mathbb{H})$ (e, analogamente, r), portanto também $g \in KInj(\mathbb{H})$.

□

Observação 1.42. Os dois resultados do Teorema anterior foram provados em [12]. Posteriormente, em [4], foi dada uma generalização do Teorema 1.41.1: $KInj(\mathbb{H})$ é fechada para todos os limites com peso.

Observações 1.43. 1. A subcategoria $KInj(\mathbb{H})$ é fechada para retracções arbitrárias de objectos: basta notar que na segunda parte da demonstração do teorema anterior se mostrou que $X \in KInj(\mathbb{H})$, usando apenas o facto de $A \in KInj(\mathbb{H})$ e de $r \cdot l = id_X$.

2. Além disso, do final da demonstração conclui-se a seguinte propriedade: se $A \in KInj(\mathbb{H})$ e $r : A \to X$ é um adjunto direito co-reflectivo então r é um morfismo de $KInj(\mathbb{H})$.

1.4 O invólucro Kan-injectivo

Proposição 1.44. *O par $((-)^{KInj}, KInj(-))$ define uma conexão (contravariante) de Galois entre o conglomerado de todas as classes de morfismos de $\mathcal{X}$ e o conglomerado das subcategorias de $\mathcal{X}$. Mais precisamente: se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subcategorias de $\mathcal{X}$ e $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$ são classes de morfismos de $\mathcal{X}$ então:*

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^{KInj} \subseteq \mathcal{A}^{KInj}$.

2. $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{H} \Rightarrow KInj(\mathbb{H}) \subseteq KInj(\mathbb{G})$.

3. $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \mathbb{H} \subseteq \mathcal{A}^{KInj}$.

Demonstração. As propriedades 1 e 2 são óbvias. A propriedade 3 também é imediata: basta notar que a condição $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathbb{H})$ é equivalente a afirmar que, para cada $h \in \mathbb{H}$, para cada $A \in \mathcal{A}$ e para cada morfismo $a \in \mathcal{A}$, A e a são Kan-injectivos à direita relativamente a h, ou ainda, a dizer que, para cada $h \in \mathbb{H}$, $h \in \mathcal{A}^{KInj}$. □

Observação 1.45. Nas mesmas condições da proposição anterior são também válidas as seguintes inclusões, que decorrem do facto de termos uma conexão de Galois:

1. $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathcal{A}^{KInj})$

2. $\mathcal{A}^{KInj} = (KInj(\mathcal{A}^{KInj}))^{KInj}$

3. $\mathbb{H} \subseteq (KInj(\mathbb{H}))^{KInj}$.

Corolário 1.46. *$KInj(\mathcal{A}^{KInj})$ é a menor subcategoria Kan-injectiva à direita de $\mathcal{X}$ que contém $\mathcal{A}$.*

Demonstração. É claro que $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathcal{A}^{KInj})$. Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria Kan-injectiva à direita de $\mathcal{X}$, digamos $\mathcal{B} = KInj(\mathbb{H})$, para alguma classe $\mathbb{H}$ de morfismos de $\mathcal{X}$, tal que

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Pela proposição anterior, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} &\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq KInj(\mathbb{H}) \\ &\Rightarrow \mathbb{H} \subseteq \mathcal{A}^{KInj} \\ &\Rightarrow KInj(\mathcal{A}^{KInj}) \subseteq KInj(\mathbb{H}) \\ &\Rightarrow KInj(\mathcal{A}^{KInj}) \subseteq \mathcal{B} \end{aligned}$$

□

Definição 1.47. Dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, designamos a subcategoria $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$ por *invólucro Kan-injectivo* de $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.48. Seja $\mathcal{X}$ uma categoria enriquecida em **CPO** com objecto terminal T. Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria de $\mathcal{X}$ constituída por todos os objectos isomorfos a T e morfismos entre eles. Do observado no Exemplo 1.7, decorre que

$$\mathcal{A}^{KInj} = Mor(\mathcal{X}).$$

Por outro lado,

$$KInj(Mor(\mathcal{X})) = \mathcal{A}.$$

Para mostrar esta última igualdade, seja $A \in KInj(Mor(\mathcal{X}))$ e seja $t_A : A \to T$ o único morfismo de A para T. Então $(id_A/t_A) \cdot t_A = id_A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "id_A"'] & T \arrow[dl, "id_A/t_A"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Como T é terminal, também se tem $t_A \cdot (id_A/t_A) = id_T$, logo t_A é um isomorfismo.

Portanto,

$$KInj(\mathcal{A}^{KInj}) = \mathcal{A},$$

logo $\mathcal{A}$ coincide com o seu invólucro Kan-injectivo.

Exemplo 1.49. Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria de **CPO** cujo único objecto é $D = \{0, 1\}$, com $0 < 1$, e cujo único morfismo é id_D. Atendendo aos Exemplos 1.9 e 1.33, o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ é a subcategoria **CPOC** dos reticulados completos e dos morfismos que preservam ínfimos quaisquer, isto é,

$$KInj(\mathcal{A}^{KInj}) = \mathbf{CPOC}.$$

Observação 1.50. Tal como no exemplo anterior, em geral $\mathcal{A}$ não coincide com o seu invólucro Kan-injectivo. No próximo capítulo vamos encontrar condições sob as quais tal acontece.

Nomeadamente, veremos que um determinado tipo de reflectividade de uma subcategoria $\mathcal{A}$ determina que ela seja Kan-injectiva. Vários exemplos de subcategorias Kan-injectivas serão apresentadas ao longo desta dissertação, em particular na categoria $\mathbf{Top}_0$ dos espaços topológicos T_0 e das aplicações contínuas, e na categoria dos reticulados locais e das funções que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer, **RetLoc**, dual da categoria dos locales.

Capítulo 2

Subcategorias KZ-reflectivas

Neste capítulo começamos por introduzir o conceito de subcategoria KZ-reflectiva de uma dada categoria $\mathcal{X}$ enriquecida em **CPO**, claramente relacionado com o de reflectividade: se $\mathcal{X}$ é uma categoria arbitrária enriquecida em **CPO** com a ordem trivial e $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{X}$ fechada para isomorfismos então $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva se e só se é reflectiva e plena. Em seguida vamos verificar que a KZ-reflectividade está fortemente ligada à Kan-injectividade à direita, nomeadamente, encontrando condições necessárias e suficientes em termos de Kan-injectividade para que uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ seja KZ-reflectiva.

Na segunda secção definimos F-imersões e, usando este conceito, mostramos que se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos então $\mathcal{A}$ coincide com o seu invólucro Kan-injectivo, $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$. Este facto assegura que em categorias enriquecidas em **CPO** onde os limites são conjuntamente monomórficos relativamente à ordem, as subcategorias KZ-reflectivas fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos são fechadas para limites. Deste modo, ao considerar categorias arbitrárias $\mathcal{X}$ enriquecidas em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade obtemos uma generalização do seguinte resultado, sobejamente conhecido: qualquer subcategoria reflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, plena e fechada para isomorfismos, coincide com o seu fecho ortogonal: $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp})_{\perp}$.

Na terceira secção, estudamos, dada uma subcategoria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$, a relação entre a Kan-injectividade em $\mathcal{B}$ e a Kan-injectividade em $\mathcal{X}$. Em particular, dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, relacionamos o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ com o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$.

Na última secção relacionamos a KZ-reflectividade com a KZ-monadicidade: nomeadamente provamos que as subcategorias KZ-monádicas - isto é, subcategorias de $\mathcal{X}$ que são categorias de álgebras de Eilenberg-Moore, para alguma mónada KZ em $\mathcal{X}$ - são, precisamente, as subcategorias KZ-reflectivas e fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos.

2.1 Subcategorias KZ-reflectivas

Definição 2.1. Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ diz-se *KZ-reflectiva* em $\mathcal{X}$ se a inclusão de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$ tem um adjunto esquerdo F tal que:

1. F é localmente monótono;

2. para cada $X \in Obj(\mathcal{X})$,
$$\eta_{FX} \leq F\eta_X, \tag{2.1}$$
onde η representa a unidade da adjunção.

Observação 2.2. Como vamos ver a seguir, a KZ-reflectividade está ligada à Kan-injectividade. Em particular, toda a subcategoria KZ-reflectiva $\mathcal{A}$ está contida em $KInj(\mathbb{H})$, com $\mathbb{H}$ constituído por todas as reflexões η_X de um objecto X em $\mathcal{A}$. Se, em vez de Kan-injectividade à direita, pretendermos estudar a Kan-injectividade à esquerda, então o conceito adequado de subcategoria KZ-reflectiva será com a condição (2.1) substituída por:

$$F\eta_X \leq \eta_{FX}.$$

Observação 2.3. Consideremos uma categoria arbitrária $\mathcal{X}$, enriquecida em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade.

1. Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$, fechada para isomorfismos. $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva se e só se é reflectiva e plena. É claro que se $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva, também é reflectiva. Além disso, para cada $A \in \mathcal{A}$, o morfismo universal η_A é um isomorfismo; de facto, sabemos que
$$\varepsilon_A \cdot \eta_A = id_A$$
(onde ε representa a co-unidade da adjunção), e, como η é uma transformação natural, que
$$\eta_A \cdot \varepsilon_A = F\varepsilon_A \cdot \eta_{FA}.$$
Como $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva, $\eta_{FA} = F\eta_A$, donde se obtém:
$$\eta_A \cdot \varepsilon_A = F(\varepsilon_A \cdot \eta_A) = Fid_A = id_A.$$
Como $\mathcal{A}$ é fechada para isomorfismos então $\eta_A \in \mathcal{A}$, para cada $A \in \mathcal{A}$. Para concluirmos que $\mathcal{A}$ é plena, basta notar que, dado um morfismo $f : A \to B$, com $A, B \in \mathcal{A}$, da igualdade
$$\eta_B \cdot f = Ff \cdot \eta_A,$$
se obtém
$$f = \varepsilon_B \cdot Ff \cdot \eta_A,$$

portanto $f \in \mathcal{A}$, visto ser uma composição de morfismos de $\mathcal{A}$.

Reciprocamente, se $\mathcal{A}$ é reflectiva e plena em $\mathcal{X}$, é claro que para a ordem trivial (igualdade) o reflector F é localmente monótono. Além disso, para cada $X \in Obj(\mathcal{X})$, temos a igualdade

$$\eta_{FX} \cdot \eta_X = F\eta_X \cdot \eta_X,$$

visto que η é uma transformação natural. Como ambos os morfismos, η_{FX} e $F\eta_X$, pertencem a $\mathcal{A}$ e η_X é uma reflexão de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{A}$, concluímos que $\eta_{FX} = F\eta_X$, portanto $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva.

2. Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$ fechada para isomorfismos, tal que $\mathcal{A}$ é reflectiva em $\mathcal{X}$ via o reflector $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$. Seja η a unidade da adjunção. Se, para cada $X \in \mathcal{X}$, η_X é um epimorfismo, então $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva, já que, neste caso, da igualdade $\eta_{FX} \cdot \eta_X = F\eta_X \cdot \eta_X$ se obtém $\eta_{FX} = F\eta_{FX}$.

Observação 2.4. Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{X}$ com adjunto esquerdo F, e com η e ε a unidade e a co-unidade da adjunção, respectivamente, então a condição (2.1) da Definição 2.1 é equivalente a exigir que, para cada $A \in \mathcal{A}$,

$$\varepsilon_{FA} \geq F\varepsilon_A. \tag{2.2}$$

Com efeito, supondo que se verifica a condição (2.1), então, para cada $A \in \mathcal{A}$,

$$F\varepsilon_A = F\varepsilon_A \cdot id_{F^2A} = F\varepsilon_A \cdot \varepsilon_{F^2A} \cdot \eta_{F^2A}.$$

$$\begin{tikzcd}
F^2A \arrow[r, shift left, "F^2\eta_A"] \arrow[r, shift right, "\eta_{F^2A}"'] \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"'] \arrow[dr, "id_{F^2A}"] & F^3A \arrow[d, "\varepsilon_{F^2A}"] & \\
FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[rr, bend right, "id_{FA}"'] & F^2A \arrow[r, "F\varepsilon_A"] & FA
\end{tikzcd}$$

Como, por hipótese, $\eta_{F^2A} \leq F^2\eta_A$, obtemos:

$$\begin{aligned}
F\varepsilon_A &\leq F\varepsilon_A \cdot \varepsilon_{F^2A} \cdot F^2\eta_A \\
&\leq F\varepsilon_A \cdot F\eta_A \cdot \varepsilon_{FA} \\
&\leq F(\varepsilon_A \cdot \eta_A) \cdot \varepsilon_{FA} \\
&\leq F(id_A) \cdot \varepsilon_{FA} \\
&\leq \varepsilon_{FA}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se para cada $A \in \mathcal{A}$, $\varepsilon_{FA} \geq F\varepsilon_A$, então, para cada $X \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
\eta_{FX} &= id_{F^2X} \cdot \eta_{FX} \\
&= F\varepsilon_{FX} \cdot F^2\eta_X \cdot \eta_{FX} \\
&\leq \varepsilon_{F^2X} \cdot F^2\eta_X \cdot \eta_{FX} \\
&\leq F\eta_X \cdot \varepsilon_{FX} \cdot \eta_{FX} \\
&\leq F\eta_X \cdot id_{FX} \\
&\leq F\eta_X.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_{FX}"] \arrow[dr, "id_{FX}"'] & F^2X \arrow[r, "F^2\eta_X"] \arrow[d, "\varepsilon_{FX}"'] \arrow[dr, "id_{F^2X}"] & F^3X \arrow[d, shift right, "\varepsilon_{F^2X}"'] \arrow[d, shift left, "F\varepsilon_{FX}"] \\
 & FX \arrow[r, "F\eta_X"'] & F^2X
\end{tikzcd}$$

O próximo resultado fornece uma caracterização das subcategorias KZ-reflectivas de $\mathcal{X}$.

Teorema 2.5. *Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é KZ-reflectiva se e só se, para cada objecto X de $\mathcal{X}$ existem um objecto $\overline{X}$ de $\mathcal{A}$ e um morfismo $\eta_X : X \to \overline{X}$ tais que:*

1. *$\eta_X \in \mathcal{A}^{KInj}$ e, para cada morfismo $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$, g/η_X pertence a $\mathcal{A}$;*

2. *para cada $A \in \mathcal{A}$, dados os morfismos $f, g : \overline{X} \to A$,*

$$\text{se } g \in \mathcal{X} \text{ e } f \in \mathcal{A}, \text{ então } g \cdot \eta_X \leq f \cdot \eta_X \Rightarrow g \leq f. \tag{2.3}$$

Neste caso, o reflector correspondente é dado em objectos por $FX = \overline{X}$ e em morfismos por

$$F(f : X \to Y) = (\eta_Y f)/\eta_X. \tag{2.4}$$

Demonstração. (A) Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$, com $(F, I, \eta, \varepsilon)$ a correspondente adjunção ($I : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ representa o functor inclusão). Para cada $X \in \mathcal{X}$, seja $\overline{X} = FX$, e consideremos o morfismo $\eta_X : X \to \overline{X}$.

(A1) Comecemos por verificar que nestas condições é satisfeita a seguinte restrição da condição (2.3): para cada $A \in \mathcal{A}$ e cada par de morfismos $f, g : \overline{X} \to A$,

$$\text{se } g, f \in \mathcal{A}, \text{ então } g \cdot \eta_X \leq f \cdot \eta_X \Rightarrow g \leq f. \tag{2.5}$$

De facto, se $(f, g : \overline{X} \to A) \in \mathcal{A}$, uma vez que $(\varepsilon_A)_{A \in \mathcal{A}}$ é uma transformação natural, sabemos que $f \cdot \varepsilon_{FX} = \varepsilon_A \cdot Ff$ e analogamente para g. Atendendo à série seguinte de implicações:

$$\begin{aligned} g \cdot \eta_X \leq f \cdot \eta_X \quad &\Rightarrow \quad Fg \cdot F\eta_X \leq Ff \cdot F\eta_X \\ &\Rightarrow \quad \varepsilon_A \cdot Fg \cdot F\eta_X \leq \varepsilon_A \cdot Ff \cdot F\eta_X \\ &\Rightarrow \quad g \cdot \varepsilon_{FX} \cdot F\eta_X \leq f \cdot \varepsilon_{FX} \cdot F\eta_X \\ &\Rightarrow \quad g \cdot id_{FX} \leq f \cdot id_{FX} \\ &\Rightarrow \quad g \leq f, \end{aligned}$$

concluímos o resultado enunciado.

(A2) De modo a concluir a veracidade da condição 1 do enunciado do teorema, consideremos um morfismo $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$. Como η_X é um morfismo universal de X no functor I, então existe um único morfismo $\overline{g} : FX \to A$ em $\mathcal{A}$ tal que $\overline{g} \cdot \eta_X = g$. Vamos mostrar que, de facto, se tem $\overline{g} = g/\eta_X$. Para isso, suponhamos que $t : FX \to A$ é um morfismo de $\mathcal{X}$ tal que $t \cdot \eta_X \leq g$. Pretendemos concluir que então $t \leq \overline{g}$. Como η_{FX} é um morfismo universal, existe um único $\overline{t} : F^2X \to A$ em $\mathcal{A}$, tal que $\overline{t} \cdot \eta_{FX} = t$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "g"'] & FX \arrow[r, "\eta_{FX}"] \arrow[dl, shift right, "\overline{g}"'] \arrow[dl, shift left, "t"] & F^2X \arrow[dll, "\overline{t}"] \\ A & & \end{tikzcd}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} t \cdot \eta_X \leq g \quad &\Rightarrow \quad \overline{t} \cdot \eta_{FX} \cdot \eta_X \leq \overline{g} \cdot \eta_X \\ &\Rightarrow \quad \overline{t} \cdot F\eta_X \cdot \eta_X \leq \overline{g} \cdot \eta_X. \end{aligned}$$

Pela condição (2.5) e atendendo ao facto de $\overline{t} \cdot F\eta_X \in \mathcal{A}$ e $\overline{g} \in \mathcal{A}$, a última desigualdade implica que $\overline{t} \cdot F\eta_X \leq \overline{g}$, ou seja, $t \leq \overline{g}$. Portanto, $g/\eta_X = \overline{g}$, o que mostra que A é Kan-injectivo à direita relativamente a η_X e que $g/\eta_X \in \mathcal{A}$.

Considerando agora um morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{A}$, com A e B Kan-injectivos à direita relativamente a η_X, temos:

$$f \cdot (g/\eta_X) \cdot \eta_X = f \cdot g = ((f \cdot g)/\eta_X) \cdot \eta_X,$$

com $f \cdot (g/\eta_X) \in \mathcal{A}$ e $(f \cdot g)/\eta_X \in \mathcal{A}$, o que, pela universalidade de η_X, implica a igualdade

$$f \cdot (g/\eta_X) = (f \cdot g)/\eta_X.$$

Assim, f é Kan-injectivo à direita relativamente a η_X e podemos concluir que $\eta_X \in \mathcal{A}^{KInj}$.

(A3) Provemos agora que se verifica a condição 2 do enunciado do teorema.

Sejam $f, g : FX \to A$, com $f \in \mathcal{A}$. Como também $(f \cdot \eta_X)/\eta_X \in \mathcal{A}$ e

$$f \cdot \eta_X = ((f \cdot \eta_X)/\eta_X) \cdot \eta_X,$$

pela universalidade de η_X concluímos que

$$f = (f \cdot \eta_X)/\eta_X.$$

Então, a desigualdade $g \cdot \eta_X \leq f \cdot \eta_X$ implica, por definição de $(f \cdot \eta_X)/\eta_X$, que $g \leq (f \cdot \eta_X)/\eta_X$, ou seja, $g \leq f$.

(B) Reciprocamente, consideremos uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, nas condições 1 e 2 do enunciado. Vamos verificar que, definindo para cada objecto $X \in \mathcal{X}$, $FX = \overline{X}$, e para cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{X}$,

$$Ff = (\eta_Y \cdot f)/\eta_X,$$

obtemos um functor $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, adjunto esquerdo da inclusão de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$, nas condições da Definição 2.1.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[ddl, "(\eta_Y \cdot f)/\eta_X"] \\
Y \arrow[d, "\eta_Y"'] & \\
\overline{Y} &
\end{tikzcd}$$

(B1) F é um functor bem definido:

Atendendo à condição 1, $Ff = (\eta_Y \cdot f)/\eta_X$ é um morfismo bem determinado de $\mathcal{A}$. Para cada $X \in \mathcal{X}$, $Fid_X = (\eta_X \cdot id_X)/\eta_X = \eta_X/\eta_X$. Mas

$$\eta_X/\eta_X = id_{FX},$$

já que $id_{FX} \cdot \eta_X = \eta_X$ e, se t é um morfismo tal que $t \cdot \eta_X \leq \eta_X$ então $t \cdot \eta_X \leq id_{FX} \cdot \eta_X$, o que, pela condição 2 do enunciado, implica que $t \leq id_{FX}$. Por outro lado, para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ de $\mathcal{X}$,

$$Fg \cdot Ff = ((\eta_Z \cdot g)/\eta_Y) \cdot ((\eta_Y \cdot f)/\eta_X).$$

Atendendo a que, pela condição 1, $(\eta_Z \cdot g)/\eta_Y \in \mathcal{A}$ e $\eta_X \in \mathcal{A}^{KInj}$, temos:

$$\begin{aligned} ((\eta_Z \cdot g)/\eta_Y) \cdot ((\eta_Y \cdot f)/\eta_X) &= (((\eta_Z \cdot g)/\eta_Y) \cdot (\eta_Y \cdot f))/\eta_X \\ &= (\eta_Z \cdot g \cdot f)/\eta_X \\ &= (\eta_Z \cdot (g \cdot f))/\eta_X \\ &= F(g \cdot f). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & FX \arrow[d, "(\eta_Y \cdot f)/\eta_X"'] \arrow[dd, bend left, "(\eta_Z \cdot g \cdot f)/\eta_X"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] \arrow[d, "g"'] & FY \arrow[d, "(\eta_Z \cdot g)/\eta_Y"'] \\ Z \arrow[r, "\eta_Z"'] & FZ \end{tikzcd}$$

(B2) F é localmente monótono:

Sejam $f, g : X \to Y$ morfismos de $\mathcal{X}$ tais que $f \leq g$. Então $\eta_Y \cdot f \leq \eta_Y \cdot g$, com $\eta_Y \cdot f \in \mathcal{A}$, $\eta_Y \cdot g \in \mathcal{A}$ e $\eta_X \in \mathcal{A}^{KInj}$. Pela propriedade enunciada na Proposição 1.20, concluímos que

$$(\eta_Y \cdot f)/\eta_X \leq (\eta_Y \cdot g)/\eta_X,$$

ou seja, $Ff \leq Fg$.

(B3) De modo a concluir que F é um adjunto esquerdo da inclusão de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$, basta verificar que, para cada $X \in \mathcal{X}$, η_X é um morfismo universal de X em $\mathcal{A}$. Efectivamente, pela condição 1, para cada $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$, existe $g/\eta_X \in \mathcal{A}$ tal que

$$(g/\eta_X) \cdot \eta_X = g.$$

Verifiquemos que g/η_X é o único em $\mathcal{A}$ nestas condições: se $t \in \mathcal{A}$ é tal que $t \cdot \eta_X = g$, então $t \cdot \eta_X = (g/\eta_X) \cdot \eta_X$, o que, pela condição 2, implica $t = g/\eta_X$.

(B4) Para cada $X \in \mathcal{X}$, $\eta_{FX} \leq F\eta_X$:

Como acabámos de verificar, F é um adjunto esquerdo com unidade η, portanto $(\eta_X)_{X \in \mathcal{X}}$ é uma transformação natural, logo, $\eta_{FX} \cdot \eta_X = F\eta_X \cdot \eta_X$. Pela condição 2, concluímos que $\eta_{FX} \leq F\eta_X$. □

Corolário 2.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria reflectiva de $\mathcal{X}$, com functor reflector $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ e reflexões η_X, $X \in \mathcal{X}$. Então $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva se verificar as duas condições seguintes:*

(a) $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathbb{H})$, *para* $\mathbb{H} = \{\eta_X : X \in \mathcal{X}\}$*;*

(b) *Todo o morfismo de* $\mathcal{A}$ *da forma* $g : FX \to A$ *satisfaz a igualdade*

$$(g \cdot \eta_X)/\eta_X = g.$$

Demonstração. Pretendemos mostrar que, para cada $X \in \mathcal{X}$, o morfismo $\eta_X : X \to FX$ satisfaz as condições 1 e 2 do Teorema 2.5.

A primeira parte da condição 1 é precisamente a condição (a). Além disso, dado o morfismo $g : X \to A$, seja $\overline{g} : FX \to A$ o único morfismo de $\mathcal{A}$ tal que $\overline{g} \cdot \eta_X = g$. Sabemos de (b) que $(\overline{g} \cdot \eta_X)/\eta_X = \overline{g}$. Então

$$g/\eta_X = (\overline{g} \cdot \eta_X)/\eta_X = \overline{g},$$

pelo que $g/\eta_X \in \mathcal{A}$.

Quanto à condição 2, sejam $f, g : FX \to A$, com $f \in \mathcal{A}$ e $g \cdot \eta_X \leq f \cdot \eta_X$. Como, por (b), $f = (f \cdot \eta_X)/\eta_X$, concluímos imediatamente que $g \leq f$. □

Apresentamos em seguida alguns exemplos de subcategorias KZ-reflectivas de **CPO**.

Exemplos 2.7. As subcategorias Kan-injectivas de **CPO**, $\mathbf{CPO}_d$ e $\mathbf{CPO}_s$, descritas no Exemplo 1.37, são, como vamos verificar, KZ-reflectivas.

1. Quanto a $\mathbf{CPO}_d$, para cada conjunto parcialmente ordenado P, consideremos o conjunto $C(P)$ das suas componentes conexas, com a ordem discreta. Definimos $\eta_P : P \to C(P)$ por, para cada $x \in P$:

   $$\eta_P(x) = C \text{ se e só se } x \in C.$$

   É claro que η_P é uma função bem definida, monótona e sobrejectiva. Vamos verificar que, além disso, satisfaz as condições do Teorema 2.5.

   De modo a concluir que $\eta_P \in \mathbf{CPO}_d^{KInj}$, consideremos uma função $g : P \to A$, monótona, com $A \in \mathbf{CPO}_d$. Como A é discreto, dados $x, y \in P$, se $x \leq y$ então $g(x) = g(y)$. Seja $\overline{g} : C(P) \to A$, a correspondência definida por:

   $$\overline{g}(C) = a \text{ se e só se } a = g(x), \text{ para algum } x \in C.$$

   Temos uma função bem definida já que, por um lado, não há componentes vazias e, por outro, supondo que existe alguma componente $C \in C(P)$ tal que $\overline{g}(C) = a$ e $\overline{g}(C) = b$, com $a, b \in A$, então $g(x) = a$ e $g(y) = b$, para alguns elementos x e y de C. Portanto existem $x_0, x_1, \ldots, x_{2k}$ em P, tais que $x = x_0$ e $y = x_{2k}$, formando um zigue-zague:

$$x = x_0 \leq x_1 \geq \cdots \leq x_{2k-1} \geq x_{2k} = y.$$

Como A é discreto, concluímos que $g(x_i) = g(x_{i+1})$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, 2k-1\}$, logo $g(x) = g(y)$, i.e., $a = b$.

A aplicação $\overline{g}$ é claramente um morfismo de $\mathbf{CPO}_d$ que satisfaz $\overline{g} \cdot \eta_P = g$. Para concluir que $\overline{g} = g/\eta_P$, seja $t : C(P) \to A$ um morfismo de $\mathbf{CPO}_d$, tal que $t \cdot \eta_P \leq g$, i.e., $t \cdot \eta_P = g$. Então, $t \cdot \eta_P = \overline{g} \cdot \eta_P$ e, uma vez que η_P é sobrejectiva, concluímos que $t = \overline{g}$. Logo $\overline{g} = g/\eta_P$ e A é Kan-injectivo à direita relativamente a η_P.

Consideremos agora uma função $f : A \to B$, com $f \in \mathbf{CPO}_d$. Como η_P é uma reflexão e $\mathbf{CPO}_d$ é plena, é imediato que para todo o morfismo $f : A \to B$ em $\mathbf{CPO}_d$ se verifica a igualdade

$$f \cdot (g/\eta_P) = ((f \cdot g)/\eta_P).$$

Então f é Kan-injectivo à direita relativamente a η_P. Finalmente, dados os morfismos $f, g : C(P) \to A$, com $f \in \mathbf{CPO}_d$, se

$$g \cdot \eta_P \leq f \cdot \eta_P$$

então $g \cdot \eta_P = f \cdot \eta_P$, donde concluímos que $g = f$, uma vez que η_P é sobrejectiva; em particular, $g \leq f$.

2. No caso da subcategoria $\mathbf{CPO}_s$, dos conjuntos parcialmente ordenados singulares, definimos

$$\eta_P : P \to \{P\}$$

e a conclusão é imediata.

Exemplo 2.8. A subcategoria **CPOC** (ver Exemplo 1.33), constituída pelos reticulados completos e pelos morfismos de **CPO** que preservam ínfimos quaisquer, é reflectiva em **CPO**, como indicado em 4.17(11) de [3]. Dado um conjunto parcialmente ordenado P, considera-se a classe $As(P)$ dos seus ascendentes, ordenada pela ordem dual da inclusão, "$\supseteq$", e a reflexão é a função monótona $\eta_P : P \to As(P)$, dada por

$$\eta_P(x) = \uparrow x,$$

para cada $x \in P$. Dado um morfismo $g : P \to A$ com $A \in \mathbf{CPOC}$, o morfismo único de $\mathbf{CPOC}$, $g' : As(P) \to A$, tal que $g' \cdot \eta_P = g$, é definido por

$$g'(S) = \bigwedge \{g(x) : x \in P, \uparrow x \subseteq S\}, \quad S \in As(P).$$

Note-se que $As(P)$ é um reticulado completo com o ínfimo dado pela união, com $1_{As(P)} = \emptyset$ e $0_{As(P)} = P$.

Usando o Corolário 2.6 vamos verificar que **CPOC** é KZ-reflectiva em **CPO**.

De modo a concluir que $\mathbf{CPOC} \subseteq KInj(\{\eta_P : P \in \mathbf{CPO}\})$, basta atender a que, por um lado, no Exemplo 1.33 verificámos que $\mathbf{CPOC} = KInj(Im(\mathbf{CPO}))$. Por outro lado, para cada $P \in \mathbf{CPO}$, η_P é uma imersão, já que, dados $x, y \in P$, se tem $\uparrow y \subseteq \uparrow x \Leftrightarrow x \leq y$.

Para mostrar que a segunda condição do Corolário 2.6 é também satisfeita, consideremos um morfismo de **CPOC**, $g : As(P) \to A$. Pretendemos mostrar que $(g \cdot \eta_P)/\eta_P = g$. Sabemos que $(g \cdot \eta_P)/\eta_P = (g \cdot \eta_P)'$, atendendo a (1.3). Portanto, dado $U \in As(P)$, visto que $U = \bigcup_{u \in U} \uparrow u$, como $g \in \mathbf{CPOC}$, $g(U) = g(\bigcup_{u \in U} \uparrow u) = \bigcup_{u \in U} g(\uparrow u)$. Então, uma vez que $\uparrow x \subseteq U \Leftrightarrow x \in U$, temos:

$$\begin{aligned} ((g \cdot \eta_P)/\eta_P)(U) &= \bigwedge\{(g \cdot \eta_P)(x) : x \in P, \uparrow x \subseteq U\} \\ &= \bigwedge\{g(\uparrow x) : x \in P, x \in U\} \\ &= \bigwedge_{x \in U} g(\uparrow x) \\ &= g(U) \end{aligned}$$

Portanto **CPOC** verifica as condições requeridas pelo que é KZ-reflectiva em **CPO**.

Exemplo 2.9. Consideremos na categoria **CPO**, $\mathbb{H} = \{h\}$ definido como no Exemplo 1.35: $h : Z \to D$ é a imersão natural, com $Z = \{0\}$ e $D = \{0, 1\}$, ordenado pela ordem natural. Aí concluímos que $KInj(\mathbb{H})$ é a subcategoria cujos objectos são os conjuntos parcialmente ordenados A nos quais existe $\vee(\uparrow a)$, para cada $a \in A$, e cujos morfismos são as funções monótonas $f : A \to B$ tais que, para cada $a \in A$, $f(\vee(\uparrow a)) = \vee(\uparrow f(a))$. Usando o Teorema 2.5 vamos verificar que a subcategoria $KInj(\mathbb{H})$ é KZ-reflectiva em **CPO**.

Comecemos por notar que, se C é uma componente conexa do conjunto parcialmente ordenado P, então existe $\vee C$ se e só se, para cada $x \in C$, existe $\vee(\uparrow x)$. Além disso, nesse caso, $\vee C = \vee(\uparrow x)$, com $x \in C$.

De facto, se $x, y \in C$ então existem $x_0, x_1, \ldots, x_{2k}$ em P, tais que $x = x_0$ e $y = x_{2k}$, formando um zigue-zague

$$x = x_0 \leq x_1 \geq \cdots \leq x_{2k-1} \geq x_{2k} = y,$$

donde se conclui que, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, 2k - 1\}$,

$$\vee(\uparrow x_i) = \vee(\uparrow x_{i+1}),$$

portanto,

$$\vee(\uparrow x) = \vee(\uparrow y).$$

Reciprocamente, dados $x, y \in P$, se

$$\vee(\uparrow x) = s = \vee(\uparrow y)$$

então temos $x \leq s$ e $y \leq s$, portanto x, y e s pertencem à mesma componente conexa, C, e $s = \vee C$.

Para cada $P \in \mathbf{CPO}$ seja $\overline{P} = P \cup C(P)$, onde $C(P)$ é o conjunto das componentes conexas de P. Consideremos $\overline{P}$ munido com a relação de ordem parcial gerada pela relação de ordem herdada de P, conjuntamente com a condição:

$$x \leq C \text{ se e só se } x \in C,$$

para cada $x \in P$ e cada $C \in C(P)$. Então $\overline{P} \in KInj(\mathbb{H})$ e o morfismo $\eta_P : P \to \overline{P}$, definido por $\eta_P(x) = x$, para cada $x \in P$, satisfaz as condições 1 e 2 do Teorema 2.5.

Com efeito, dado um morfismo $g : P \to A$, com $A \in KInj(\mathbb{H})$, consideremos o morfismo $\overline{g} : \overline{P} \to A$, definido por:

$$\overline{g}(x) = g(x), \text{ para cada } x \in P,$$

e

$$\overline{g}(C) = \vee C_{g[C]}, \text{ para cada } C \in C(P),$$

onde $C_{g[C]}$ é a componente conexa que contém o subconjunto $g[C]$.

Notemos que $\overline{g}$ está bem definida pois, por um lado, $\vee C_{g[C]} \in A$, já que $A \in KInj(\mathbb{H})$, e, por outro lado, se $x \leq C$ então $x \in C$, logo $g(x) \leq \vee C_{g[C]}$, isto é, $\overline{g}(x) \leq \overline{g}(C)$.

Vamos verificar que $\overline{g} = g/\eta_P$.

É claro que $\overline{g} \cdot \eta_P = g$. Por outro lado se $t : \overline{P} \to A$ é uma função monótona tal que $t \cdot \eta_P \leq g$, então, para cada $x \in P$, $t(x) \leq g(x) = \overline{g}(x)$, restando verificar que, para cada $C_x \in C(P)$,

$$t(C_x) \leq \overline{g}(C_x),$$

i.e., que

$$t(C_x) \leq \vee C_{g(x)}.$$

Mas $x \in C_x$, i.e., $x \leq C_x$, logo $t(x) \leq t(C_x)$. Como também $t(x) \leq g(x)$, concluímos que

$$t(C_x) \in C_{g(x)},$$

donde se conclui a desigualdade pretendida. Assim, A é Kan-injectivo à direita relativamente a η_P, com $g/\eta_P = \overline{g}$. Além disso, $g/\eta_P \in KInj(\mathbb{H})$, já que, para cada $x \in P$, temos:

$$(g/\eta_P)(\vee(\uparrow x)) = (g/\eta_P)(C_x) = \vee C_{g(x)} = \vee(\uparrow g(x)) = \vee(\uparrow (g/\eta_P)(x)).$$

Por outro lado, para cada $C \in C(P)$, $\uparrow C = \{C\}$ e, em $\mathcal{A}$, $(g/\eta_P)(C) \in C_{g[C]}$, pelo que

$$\vee(\uparrow ((g/\eta_P)(C))) = \vee C_{g[C]}.$$

Logo

$$(g/\eta_C)(\vee(\uparrow C)) = (g/\eta_C)(C) = \vee C_{g[C]} = \vee(\uparrow ((g/\eta_C)(C))).$$

De modo a concluir que $\eta_P \in (KInj(\mathbb{H}))^{KInj}$, consideremos um morfismo $f : A \to B$ em $KInj(\mathbb{H})$. Então, para cada $x \in P$,

$$((f \cdot g)/\eta_P)(x) = (f \cdot g)(x) = f(g(x)) = f \cdot (g/\eta_P)(x);$$

e, para cada $C_x \in C(P)$, com $x \in P$,

$$((f \cdot g)/\eta_P)(C_x) = \vee C_{fg(x)} = \vee(\uparrow (fg(x))) = f(\vee(\uparrow (g(x))) = f(\vee C_{g(x)}) = f((g/\eta_P)(C_x)).$$

Assim, concluímos que $(f \cdot g)/\eta_P = f \cdot (g/\eta_P)$.

Para verificar que a condição 2 do Teorema 2.5 é satisfeita, consideremos dois morfismos $f, g : \overline{P} \to A$, com $f \in KInj(\mathbb{H})$, tais que

$$g \cdot \eta_P \leq f \cdot \eta_P.$$

Como $\eta_P \in (KInj(\mathbb{H}))^{KInj}$ existem os morfismos $(g \cdot \eta_P)/\eta_P$ e $(f \cdot \eta_P)/\eta_P$ e, uma vez que $\overline{P} \in KInj(\mathbb{H})$, da desigualdade anterior concluímos, pela Proposição 1.20.1, que

$$(g \cdot \eta_P)/\eta_P \leq (f \cdot \eta_P)/\eta_P.$$

Além disso, como $f \in KInj(\mathbb{H})$, temos

$$(f \cdot \eta_P)/\eta_P = f \cdot (\eta_P/\eta_P).$$

Por outro lado, por definição de Kan-injectividade, tem-se sempre a desigualdade

$$g \cdot (\eta_P/\eta_P) \leq (g \cdot \eta_P)/\eta_P.$$

Mas, é fácil ver que, $\eta_P/\eta_P = id_{\overline{P}}$. Portanto, das duas desigualdades anteriores concluímos que $(f \cdot \eta_P)/\eta_P = f$ e $g \leq (g \cdot \eta_P)/\eta_P$. Então $g \leq f$.

Exemplo 2.10. Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria de **CPO** dos conjuntos parcialmente ordenados A com primeiro e último elementos, $0_A = \bigwedge A$ e $1_A = \bigvee A$, e das aplicações monótonas que os preservam.

Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é uma subcategoria reflectiva de **CPO**, mas não é KZ-reflectiva (nem para a Kan-injectividade à direita, nem para a Kan-injectividade à esquerda).

Para cada $X \in$ **CPO** seja

$$\overline{X} = X \dot{\cup} \{0_{\overline{X}}\} \dot{\cup} \{1_{\overline{X}}\},$$

com a relação de ordem parcial de X juntamente com a condição

$$0_{\overline{X}} \leq x \leq 1_{\overline{X}},$$

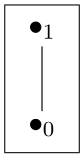
para todo o $x \in \overline{X}$.

Seja $\eta_X : X \to \overline{X}$ a imersão obtida por inclusão de X em $\overline{X}$. Dado o morfismo $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$, definimos $\overline{g} : \overline{X} \to A$, por

$$\overline{g}(x) = g(x) \ (x \in X), \quad \overline{g}(0_{\overline{X}}) = 0_A \quad \text{e} \quad \overline{g}(1_{\overline{X}}) = 1_A.$$

A aplicação $\overline{g}$ é claramente monótona e um morfismo de $\mathcal{A}$ que satisfaz $\overline{g} \cdot \eta_X = g$. Além disso, $\overline{g}$ é obviamente o único morfismo de $\mathcal{A}$ que satisfaz essa igualdade. Portanto η_X é uma reflexão de **CPO** na subcategoria $\mathcal{A}$.

Mas $\mathcal{A}$ não é KZ-reflectiva em **CPO**. Com efeito, seja

$X =$ 

e seja $g = \eta_X$. O objecto X pertence a $\mathcal{A}$ e $\overline{g} = id_{\overline{X}}$.

Se $\mathcal{A}$ fosse KZ-reflectiva, ter-se-ia $\overline{g} = \eta_X / \eta_X$ (ou $\overline{g} = \eta_X \backslash \eta_X$, no caso de Kan-injectividade à esquerda), por (b) do Corolário 2.6. Vamos mostrar que tal não acontece, concluindo, então, que $\mathcal{A}$ não é KZ-reflectiva.

Seja $h : \overline{X} \to \overline{X}$ o morfismo de **CPO** definido por

$$h(0) = h(0_{\overline{X}}) = 0 \quad \text{e} \quad h(1) = h(1_{\overline{X}}) = 1.$$

Então temos

$$h \cdot \eta_X \leq \overline{g} \cdot \eta_X.$$

Mas

$$\overline{g}(0_{\overline{X}}) = 0_{\overline{X}} \leq 0 = h(0_{\overline{X}})$$

e

$$\overline{g}(1_{\overline{X}}) = 1_{\overline{X}} \leq 1 = h(1_{\overline{X}}).$$

Portanto $\overline{g} \not\geq h$ e $\overline{g} \not\leq h$.

Exemplo 2.11. Consideremos a categoria $\mathbf{SRet}_1$ enriquecida em **CPO** com a ordem dual ponto-a-ponto, "$\geq$", e a sua subcategoria **RetLoc**, constituída pelos reticulados locais e pelas funções que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer.

Vamos verificar que **RetLoc** é KZ-reflectiva em $\mathbf{SRet}_1$.

É um facto bem conhecido que **RetLoc** é reflectiva em $\mathbf{SRet}_1$, com a reflexão de cada $S \in \mathbf{SRet}_1$ dada por

$$d_S : S \to DS = \{U \subseteq S : U = \downarrow U\}.$$

Além disso, para cada morfismo $g : S \to L$ de $\mathbf{SRet}_1$, com $L \in \mathbf{RetLoc}$, o morfismo

$$\overline{g} : DS \to L \text{ dado por } \overline{g}(U) = \vee(g[U]),$$

para cada $U \in DS$, é o único morfismo de **RetLoc** que satisfaz a igualdade

$$\overline{g} \cdot d_S = g.$$

De modo a concluir que esta reflexão é do tipo KZ vamos verificar que d_S satisfaz as condições do Teorema 2.5.

Começando pela condição 2., sejam $f, h : DS \to L$ com $L \in \mathbf{RetLoc}$ e $f \in \mathbf{RetLoc}$, tais que $h \cdot d_S \geq f \cdot d_S$. Temos:

$$h(U) = h(\bigcup_{u \in U} (\downarrow u)) \geq \bigvee_{u \in U} h(\downarrow u) = \bigvee_{u \in U} h \cdot d_S(u).$$

Pela hipótese e pelo facto de $f \in \mathbf{RetLoc}$, obtemos:

$$h(U) \geq \bigvee_{u \in U} f \cdot d_S(u) = f(\bigvee_{u \in U} (\downarrow u) = f(U).$$

Por outro lado, para cada morfismo $g : S \to L$ de $\mathbf{SRet}_1$, com $L \in \mathbf{RetLoc}$, se $t \cdot d_S \geq g$, então $t \cdot d_S \geq \overline{g} \cdot d_S$, com $\overline{g} \in \mathbf{RetLoc}$, o que, como verificámos antes, implica que $t \geq \overline{g}$. Deste modo, concluímos que $g/d_S = \overline{g}$ e que qualquer reticulado local L é Kan-injectivo à direita relativamente a d_S, para cada $S \in \mathbf{SRet}_1$. O mesmo acontece com os morfismos $f \in \mathbf{RetLoc}$: de facto, se $f : L \to M$, então temos

$$f(\bigvee g[U]) = \bigvee f \cdot g[U],$$

ou seja,

$$f(g/d_S)(U) = ((f \cdot g)/d_S)(U).$$

2.2 F-imersões

Definição 2.12. Seja $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ um functor localmente monótono entre categorias enriquecidas em **CPO**. Um morfismo f de $\mathcal{X}$ diz-se uma *F-imersão* se Ff tem um adjunto esquerdo reflectivo em $\mathcal{Y}$.

Exemplo 2.13. No Exemplo 2.8 verificámos que **CPOC** é uma subcategoria KZ-reflectiva de **CPO**, com functor reflector $F : \mathbf{CPO} \to \mathbf{CPOC}$, dado por $FP = As(P)$, para cada $P \in \mathbf{CPO}$, e por $Ff = (\eta_Q \cdot f)/\eta_P$, para cada $f : P \to Q$ em **CPO**. Além disso, no Exemplo 1.33 tínhamos visto que $\mathbf{CPOC} = KInj(Im(\mathbf{CPO}))$, onde $Im(\mathbf{CPO})$ denota a classe das imersões de **CPO**. Vamos verificar que todas as imersões de **CPO** são F-imersões.

Seja $f : P \to Q$ uma imersão. Sem perda de generalidade, suponhamos, que f é a inclusão natural de P em Q. Vamos mostrar que $(Ff)^* : FQ \to FP$, definida, para cada $B \in As(Q)$, por

$$(Ff)^*(B) = f^{-1}(B) = B \cap P,$$

é um morfismo de **CPOC** e é um adjunto esquerdo reflectivo de Ff.

$(Ff)^*$ é um morfismo de **CPOC**:

Dados $B_i \in FQ$, $i \in I$, tem-se, atendendo a que em FQ a relação de ordem é "$\supseteq$":

$$\begin{aligned}
(Ff)^*(\bigwedge_{i\in I} B_i) &= (Ff)^*(\bigcup_{i\in I} B_i)\\
&= (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap P\\
&= \bigcup_{i\in I}(B_i \cap P)\\
&= \bigcup_{i\in I}(Ff)^*(B_i)\\
&= \bigwedge_{i\in I}(Ff)^*(B_i)
\end{aligned}$$

$(Ff)^*$ é um adjunto esquerdo reflectivo de Ff, ou seja,

$$(Ff)^* \cdot Ff = id_{FQ} \ \text{ e } \ id_{FP} \supseteq Ff \cdot (Ff)^* :$$

De facto, dado $B \in FQ$,

$$\begin{aligned}
(Ff) \cdot (Ff)^*(B) &= (Ff)(B \cap P)\\
&= ((\eta_Q \cdot f)/\eta_P)(B \cap P)\\
&= \bigcup_{x \in (B\cap P)} \uparrow x\\
&\subseteq B.
\end{aligned}$$

E, dado $A \in FP$,

$$\begin{aligned}
(Ff)^* \cdot Ff(A) &= (Ff)^*(\bigcup_{x\in A} \uparrow f(x))\\
&= (\bigcup_{x\in A} \uparrow x) \cap P\\
&= A.
\end{aligned}$$

Então f é uma F-imersão.

A descrição das F-imersões no exemplo anterior são um caso particular do resultado que vamos provar a seguir, onde se caracterizam as F-imersões quando $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ é o functor reflector de $\mathcal{X}$ na sua subcategoria KZ-reflectiva, $\mathcal{A}$.

Teorema 2.14. *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$, sendo $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ o respectivo adjunto esquerdo. Então $\mathcal{A}^{KInj}$ é exactamente a classe das F-imersões.*

Demonstração. Seja $h : X \to Y$ uma F-imersão, i.e., suponhamos que existe um morfismo $(Fh)^* \in \mathcal{A}$, tal que $(Fh)^* \dashv_R Fh$. Vamos mostrar que, para cada $g : X \to A$, com $A \in \mathcal{A}$, existe g/h, nomeadamente, dado por:

$$g/h = \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y, \tag{2.6}$$

onde η e ε são, respectivamente, a unidade e a co-unidade da adjunção.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[dl, "g/h"'] & FY \arrow[d, "(Fh)^*"] \\
A & FA \arrow[l, "\varepsilon_A"] & FX \arrow[l, "Fg"]
\end{tikzcd}$$

De facto, temos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y \cdot h &= \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot Fh \cdot \eta_X \\
&= \varepsilon_A \cdot Fg \cdot \eta_X \\
&= \varepsilon_A \cdot \eta_A \cdot g \\
&= g.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $t : Y \to A$ é tal que $t \cdot h \leq g$, então também

$$Ft \cdot Fh \cdot (Fh)^* \leq Fg \cdot (Fh)^*,$$

o que implica $Ft \leq Fg \cdot (Fh)^*$, atendendo ao facto de, por hipótese, $id_{FY} \leq (Fh) \cdot (Fh)^*$. Então

$$\varepsilon_A \cdot Ft \cdot \eta_Y \leq \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y.$$

Como $(\eta_X)_{X \in \mathcal{X}}$ é uma transformação natural, então

$$\varepsilon_A \cdot \eta_A \cdot t \leq \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y;$$

uma vez que $\varepsilon_A \cdot \eta_A = id_A$, obtemos $t \leq \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y$. Portanto, A é Kan-injectivo à direita relativamente a h.

Supondo que $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{A}$, temos, usando a fórmula (2.6) e a naturalidade de ε,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)/h &= \varepsilon_B \cdot F(f \cdot g) \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y \\
&= \varepsilon_B \cdot Ff \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y \\
&= f \cdot \varepsilon_A \cdot Fg \cdot (Fh)^* \cdot \eta_Y \\
&= f \cdot (g/h)
\end{aligned}$$

Então f é Kan-injectivo à direita relativamente a h e concluímos que $h \in \mathcal{A}^{KInj}$.

Reciprocamente, dado um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{A}^{KInj}$, como $FX \in \mathcal{A}$, existe o morfismo $(\eta_X/f) : Y \to FX$. Vamos verificar que

$$\varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f)$$

é o adjunto esquerdo reflectivo de Ff, ou seja, que são satisfeitas as seguintes condições:

$$(\varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f)) \cdot Ff = id_{FX} \quad \text{e} \quad id_{FY} \leq Ff \cdot (\varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f)). \tag{2.7}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \arrow[dl, "\eta_X/f"] \\
FX \arrow[r, "(Ff)"'] & FY \arrow[dl, "F(\eta_X/f)"] \\
F^2X \arrow[u, "\varepsilon_{FX}"] &
\end{tikzcd}$$

É claro que:

$$\varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f) \cdot Ff = \varepsilon_{FX} \cdot F((\eta_X/f) \cdot f) = \varepsilon_{FX} \cdot F\eta_X = id_{FX}.$$

De modo a verificar que também a segunda desigualdade enunciada em (2.7) é satisfeita, comecemos por observar que, como $Ff \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^{KInj}$, se tem

$$Ff \cdot (\eta_X/f) = (Ff \cdot \eta_X)/f. \tag{2.8}$$

Por outro lado, atendendo à definição de $(Ff \cdot \eta_X)/f$, da igualdade $\eta_Y \cdot f = Ff \cdot \eta_X$ concluímos que $\eta_Y \leq (Ff \cdot \eta_X)/f$, ou seja, atendendo a (2.8),

$$\eta_Y \leq Ff \cdot (\eta_X/f).$$

Por conseguinte, uma vez que $\varepsilon_{FX} \cdot \eta_{FX} = id_{FX}$, obtemos:

$$\eta_Y \leq Ff \cdot \varepsilon_{FX} \cdot \eta_{FX} \cdot (\eta_X/f),$$

ou seja, uma vez que η é uma transformação natural,

$$\eta_Y \leq Ff \cdot \varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f) \cdot \eta_Y.$$

Pela condição 1 do Teorema 2.5, concluímos que $id_{FY} \leq Ff \cdot \varepsilon_{FX} \cdot F(\eta_X/f)$. $\square$

Exemplo 2.15. Consideremos a subcategoria **CPOC** de **CPO**. Já verificámos nos Exemplos 2.8 e 2.13 que **CPOC** é KZ-reflectiva em **CPO** e que todas as imersões de **CPO** são F-imersões, onde F é o functor definido, para cada $P \in$ **CPO**, pelo conjunto dos ascendentes de P. Por outro lado, no Exemplo 1.9 vimos que f é uma imersão se e só se D é Kan-injectivo à direita relativamente a f, com $D = \{0, 1\}$ com a ordem natural. Supondo que f é uma F-imersão então, pelo Teorema 2.14, $f \in \mathbf{CPOC}^{KInj}$ portanto D é Kan-injectivo à direita relativamente a f, logo f é uma imersão. Deste modo podemos concluir que a classe das F-imersões coincide com a classe das imersões de **CPO**.

Em seguida iremos ver que quando uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ é KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, então coincide com o seu invólucro Kan-injectivo, $KInj(\mathcal{A}^{KInj})$.

Observação 2.16. Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$, com $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ o functor reflector e com reflexões η_X, $X \in \mathcal{X}$. Se $A \in \mathcal{A}$, então η_A é um adjunto esquerdo co-reflectivo, nomeadamente,

$$\eta_A \dashv_C \varepsilon_A.$$

De facto, sabemos que $\varepsilon_A \cdot \eta_A = id_A$. Por outro lado, pelo Corolário 2.6, sabemos que $\eta_A \in \mathcal{A}^{KInj}$ e que

$$(\eta_A/\eta_A) = (id_{FA} \cdot \eta_A)/\eta_A = id_{FA}.$$

Deste modo, obtemos:

$$(\eta_A \cdot \varepsilon_A) \cdot \eta_A = \eta_A \cdot (\varepsilon_A \cdot \eta_A) = \eta_A.$$

Em particular, $(\eta_A \cdot \varepsilon_A) \cdot \eta_A \leq \eta_A$, donde, $(\eta_A \cdot \varepsilon_A) \leq \eta_A/\eta_A$, i.e., $\eta_A \cdot \varepsilon_A \leq id_{FA}$.

Teorema 2.17. *Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos então*

$$\mathcal{A} = KInj(\mathcal{A}^{KInj}).$$

Consequentemente, $\mathcal{A}$ é fechada para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem.

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{A} \subseteq KInj(\mathcal{A}^{KInj})$, como visto na Observação 1.45.

De modo a verificar que nas condições enunciadas também $KInj(\mathcal{A}^{KInj}) \subseteq \mathcal{A}$, comecemos por considerar um objecto $X \in KInj(\mathcal{A}^{KInj})$. Sabemos que $\eta_X \in \mathcal{A}^{KInj}$, logo existe o morfismo $id_X/\eta_X : FX \to X$. Vamos concluir que $X \in \mathcal{A}$, mostrando que id_X/η_X é um adjunto direito co-reflectivo, nomeadamente,

$$\eta_X \dashv_C id_X/\eta_X.$$

É claro que $(id_X/\eta_X)\cdot\eta_X = id_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "id_X"'] & FX \arrow[d, "id_{FX}"] \arrow[dl, "id_X/\eta_X"] \\
X \arrow[r, "\eta_X"'] & FX
\end{tikzcd}$$

Então:

$$\eta_X\cdot(id_X/\eta_X)\cdot\eta_X = \eta_X\cdot id_X = id_{FX}\cdot\eta_X$$

Como id_{FX} é um morfismo de $\mathcal{A}$, concluímos, pela condição 2. do Teorema 2.5, que

$$\eta_X\cdot(id_X/\eta_X)\leq id_{FX}.$$

Assim, $\eta_X \dashv_C id_X/\eta_X$ e, como $\mathcal{A}$ é fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, $X\in\mathcal{A}$.

Consideremos um morfismo $f : X\to Y$, com $f\in KInj(\mathcal{A}^{KInj})$. Como acabámos de verificar, então X e Y são objectos de $\mathcal{A}$ e, pela Observação 1.40, sabemos que id_X/η_X e id_Y/η_Y são morfismos de $\mathcal{A}$. Como $Ff\in\mathcal{A}$ e id_X/η_X e id_Y/η_Y são adjuntos direitos co-reflectivos, de modo a concluir que $f\in\mathcal{A}$, basta verificar que

$$(id_Y/\eta_Y)\cdot Ff = f\cdot(id_X/\eta_X),$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "id_X/\eta_X"] & FY \arrow[d, "id_Y/\eta_Y"'] & Y \arrow[l, "\eta_Y"'] \arrow[dl, "id_Y"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

i.e., que

$$f = (id_Y/\eta_Y)\cdot Ff\cdot\eta_X.$$

De facto, pelo Teorema 2.5,

$$(id_Y/\eta_Y)\cdot Ff = (id_Y/\eta_Y)\cdot((\eta_Y\cdot f)/\eta_X). \tag{2.9}$$

Como $(id_Y/\eta_Y)\in\mathcal{A}$ e $\eta_X\in\mathcal{A}^{KInj}$, então

$$(id_Y/\eta_Y)\cdot((\eta_Y\cdot f)/\eta_X) = ((id_Y/\eta_Y)\cdot(\eta_Y\cdot f))/\eta_X. \tag{2.10}$$

Ou seja, por (2.9) e (2.10),

$$(id_Y/\eta_Y)\cdot Ff = f/\eta_X = (f\cdot id_X)/\eta_X.$$

Como $f \in KInj(\mathcal{A}^{KInj})$,

$$(f \cdot id_X)/\eta_X = f \cdot (id_X/\eta_X),$$

pelo que $(id_Y/\eta_Y) \cdot Ff = f \cdot (id_X/\eta_X)$, como pretendido. Então $f \in \mathcal{A}$.

Relativamente à segunda afirmação enunciada, basta notar que acabámos de verificar que $\mathcal{A}$ é uma subcategoria Kan-injectiva, portanto, pelo Teorema 1.41, concluímos que $\mathcal{A}$ é fechada para limites conjuntamente monomórficos relativamente à ordem. □

Corolário 2.18. *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria KZ-reflectiva fechada para adjuntos direitos co-reflectivos. Então*

$$\mathcal{A} = KInj(\{\eta_X : X \in \mathcal{X}\}).$$

Além disso, se, para cada $X \in \mathcal{X}$, a reflexão η_X é um epimorfismo, então $\mathcal{A}$ é plena.

Demonstração. Sabemos que nas condições dadas pelo Corolário 2.6,

$$\mathcal{A} \subseteq KInj(\{\eta_X : X \in \mathcal{X}\}).$$

Por outro lado, verificámos na demonstração do Teorema 2.17 que se $X \in KInj(\{\eta_X : X \in \mathcal{X}\})$ então $X \in \mathcal{A}$ e, analogamente, que se $f \in KInj(\{\eta_X : X \in \mathcal{X}\})$ então $f \in \mathcal{A}$.

Relativamente à segunda parte do enunciado, basta atender à Observação 1.32. □

Observações 2.19.

1. O teorema anterior assegura que em categorias enriquecidas em **CPO**, onde os limites são conjuntamente monomórficos relativamente à ordem (ver Exemplos 1.25, 1.26 e 1.27), as subcategorias KZ-reflectivas e fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos são fechadas para limites.

2. No caso em que $\mathcal{X}$ é uma categoria arbitrária enriquecida em **CPO** com a ordem trivial dada pela igualdade, o teorema anterior estabelece o facto bem conhecido de que qualquer subcategoria reflectiva $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, plena e fechada para isomorfismos, coincide com o seu fecho ortogonal:
$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp})_{\perp}.$$

2.3 Kan-injectividade em subcategorias

Nesta secção vamos debruçar-nos sobre a seguinte questão:

Dada uma subcategoria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$, estamos interessados em saber como se relaciona a Kan-injectividade em $\mathcal{B}$ com a Kan-injectividade em $\mathcal{X}$. Em particular, dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, pretendemos relacionar o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ com o invólucro Kan-injectivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{X}$.

Notação 2.20. Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{A}$ uma subcategoria de $\mathcal{B}$. Seja ainda $\mathbb{H} \subseteq Mor(\mathcal{B})$. A seguir representamos por

$$\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$$

a classe dos morfismos de $\mathcal{B}$, relativamente aos quais os objectos e os morfismos de $\mathcal{A}$ são Kan-injectivos à direita em $\mathcal{B}$ e por

$$KInj_{\mathcal{B}}(\mathbb{H})$$

a subcategoria de $\mathcal{X}$ formada pelos objectos e morfismos Kan-injectivos à direita em $\mathcal{B}$, relativamente aos morfismos de $\mathbb{H}$.

Proposição 2.21. *Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$, com $R : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ o functor reflector. Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{B}$ então:*

1. $\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}} = \{f \in Mor(\mathcal{X}) : Rf \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}\}$.

2. $KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}) \subseteq KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$.

Demonstração. Sejam η e ε a unidade e a co-unidade da adjunção $\mathcal{X} \underset{I}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$, onde I é o functor inclusão.

1. (1.A) Seja $(f : X \to Y) \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}$. De modo a concluir que $Rf \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$, consideremos $(h : RX \to A) \in \mathcal{B}$, com $A \in \mathcal{A}$. Então existem os morfismos $(h \cdot \eta_X)/f$ em $\mathcal{X}$ e $\overline{h} = \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f)$ em $\mathcal{B}$ e obtemos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \overline{h} \cdot Rf &= \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \cdot Rf \\ &= \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \cdot f \\ &= \varepsilon_A \cdot Rh \cdot R\eta_X \\ &= h \cdot \varepsilon_{RX} \cdot R\eta_X \\ &= h. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \arrow[ddd, bend left=60, "(h\cdot\eta_X)/f"] \\ RX \arrow[r, "Rf"] \arrow[ddr, "h"'] & RY \arrow[d, "R((h\cdot\eta_X)/f)"] \\ & RA \arrow[d, "\varepsilon_A"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Por outro lado, seja $t : RY \to A$ um morfismo de $\mathcal{B}$ tal que $t \cdot Rf \leq h$. Uma vez que $\mathcal{B}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{X}$, $\eta_{RY} \leq R\eta_Y$, portanto:

$$\begin{aligned}
t \cdot Rf \leq h \quad & \Rightarrow \quad t \cdot Rf \cdot \eta_X \leq h \cdot \eta_X \\
& \Rightarrow \quad t \cdot \eta_Y \cdot f \leq h \cdot \eta_X \\
& \Rightarrow \quad t \cdot \eta_Y \leq (h \cdot \eta_X)/f \\
& \Rightarrow \quad R(t \cdot \eta_Y) \leq R((h \cdot \eta_X)/f) \\
& \Rightarrow \quad \varepsilon_A \cdot Rt \cdot R\eta_Y \leq \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \\
& \Rightarrow \quad \varepsilon_A \cdot Rt \cdot \eta_{RY} \leq \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \\
& \Rightarrow \quad \varepsilon_A \cdot \eta_A \cdot t \leq \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \\
& \Rightarrow \quad t \leq \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f).
\end{aligned}$$

Então $\overline{h} = h/Rf$, portanto A é Kan-injectivo à direita relativamente a Rf, em $\mathcal{B}$, tendo-se

$$h/Rf = \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f). \tag{2.11}$$

Por outro lado, se $(g : A \to C) \in \mathcal{A}$, como por hipótese g é Kan-injectivo à direita relativamente a f em $\mathcal{X}$ e usando a fórmula (2.11) no início e no fim, obtemos:

$$\begin{aligned}
(g \cdot h)/Rf &= \varepsilon_C \cdot R((g \cdot h \cdot \eta_X)/f) \\
&= \varepsilon_C \cdot R(g \cdot (h \cdot \eta_X)/f) \\
&= \varepsilon_C \cdot Rg \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \\
&= g \cdot \varepsilon_A \cdot R((h \cdot \eta_X)/f) \\
&= g \cdot (h/Rf).
\end{aligned}$$

Então g é Kan-injectivo à direita relativamente a Rf em $\mathcal{B}$, portanto $Rf \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$.

(1.B) Para mostrar a inclusão contrária, seja $(f : X \to Y) \in \mathcal{X}$, tal que $Rf \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$ e seja $(h : X \to A) \in \mathcal{X}$, com $A \in \mathcal{A}$. Como $\varepsilon_A \cdot Rh \in \mathcal{B}$ e tem codomínio em $\mathcal{A}$, então existe $(\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf$ em $\mathcal{B}$. Defina-se

$$\overline{h} = ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) \cdot \eta_Y.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"] \arrow[ddd, bend right, "h"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
RX \arrow[r, "Rf"] \arrow[d, "Rh"] & RY \arrow[ddl, "(\varepsilon_A \cdot Rh)/f"] \\
RA \arrow[d, "\varepsilon_A"] & \\
A &
\end{tikzcd}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\overline{h} \cdot f &= ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) \cdot \eta_Y \cdot f \\
&= ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) \cdot Rf \cdot \eta_X \\
&= \varepsilon_A \cdot Rh \cdot \eta_X \\
&= \varepsilon_A \cdot \eta_A \cdot h \\
&= h.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $t : Y \to A$ tem-se:

$$\begin{aligned}
t \cdot f \leq h &\Rightarrow \varepsilon_A \cdot Rt \cdot Rf \leq \varepsilon_A \cdot Rh \\
&\Rightarrow \varepsilon_A \cdot Rt \leq (\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf \\
&\Rightarrow \varepsilon_A \cdot Rt \cdot \eta_Y \leq ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) \cdot \eta_Y \\
&\Rightarrow \varepsilon_A \cdot \eta_A \cdot t \leq ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) \cdot \eta_Y \\
&\Rightarrow t \leq \overline{h}.
\end{aligned}$$

Então $\overline{h} = h/f$, portanto A é Kan-injectivo à direita relativamente a f em $\mathcal{X}$. Além disso, sendo $(g : A \to C) \in \mathcal{A}$, então g é Kan-injectivo à direita relativamente a Rf em $\mathcal{B}$, logo

$$g \cdot ((\varepsilon_A \cdot Rh)/Rf) = ((g \cdot \varepsilon_A \cdot Rh)/Rf),$$

donde se obtém:

$$\begin{aligned} g\cdot(h/f) &= g\cdot((\varepsilon_A\cdot Rh)/Rf)\cdot\eta_Y \\ &= ((g\cdot\varepsilon_A\cdot Rh)/Rf)\cdot\eta_Y \\ &= ((\varepsilon_C\cdot Rg\cdot Rh)/Rf)\cdot\eta_Y \\ &= ((\varepsilon_C\cdot R(g\cdot h))/Rf)\cdot\eta_Y \\ &= (g\cdot h)/f. \end{aligned}$$

Então $f\in\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}$.

2. Seja $Z\in KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}})$, i.e., $Z\in\mathcal{B}$, e, para cada $h\in\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$, Z é Kan-injectivo à direita relativamente a h, em $\mathcal{B}$. De modo a mostrar que $Z\in KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$, consideremos $(f:X\to Y)\in\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}$. Então, pela parte 1, $Rf\in\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$, logo, por hipótese, Z é Kan-injectivo à direita relativamente a Rf em $\mathcal{B}$. Observe-se que na parte (B) da demonstração de 1, essencialmente mostrámos que todo o objecto (e todo o morfismo) que é Kan-injectivo à direita em $\mathcal{B}$ relativamente a Rf, também o é, em $\mathcal{X}$, relativamente a f. Logo $Z\in KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$.

   Analogamente, se conclui que os morfismos da subcategoria $KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}})$ estão contidos em $KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$.

□

Observação 2.22. Seja $\mathcal{X}$ uma categoria qualquer enriquecida em **CPO** com a ordem dada pela igualdade. Neste caso, o conceito de Kan-injectividade à direita coincide com o de ortogonalidade, e o de subcategoria KZ-reflectiva com o de subcategoria reflectiva e plena (como visto em 1.3 e 2.3). Para esta situação particular, foi provado em [39] a igualdade de 2.21.1, i.e.,

$$\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}}=\{f\in Mor(\mathcal{X}):Rf\in\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}}\},\tag{2.12}$$

bem como, que a inclusão enunciada em 2.21.2 é, neste caso, uma igualdade, i.e.,

$$(\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}})_{\perp_{\mathcal{B}}}=(\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}})_{\perp_{\mathcal{X}}}.\tag{2.13}$$

Na verdade, quando consideramos ortogonalidade e subcategorias plenas, temos trivialmente a igualdade:

$$\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}}=\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}}\cap Mor(\mathcal{B}).\tag{2.14}$$

e o resultado (2.13) decorre desta igualdade e de (2.12).

Mas no caso não trivial de Kan-injectividade à direita a identidade (2.14) já não se aplica, como mostrado no exemplo seguinte. No entanto, não tenho nenhum exemplo que prove que a inclusão da Proposição 2.21.2 possa ser estrita. Assim, fica como uma questão em aberto o saber se esta inclusão é ou não uma igualdade.

A Observação 2.24 e a Proposição 2.25 dão condições suficientes sobre as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ para que a condição se verifique.

Exemplo 2.23. Nas condições da proposição anterior, em geral,

$$\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}} \not\subseteq \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}.$$

Concretamente, na categoria $\mathcal{X} = \mathbf{CPO}$, temos a seguinte situação:

Consideremos os conjuntos parcialmente ordenados $Z = \{0\}$ e $D = \{0, 1\}$, com $0 < 1$, e a inclusão $\{0\} \overset{h}{\hookrightarrow} \{0, 1\}$, tal como nos Exemplos 1.35 e 2.9.

Sejam $\mathbb{H} = \{h\}$ e $\mathcal{B} = KInj(\mathbb{H})$. Por 2.9 sabemos que $\mathcal{B}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathbf{CPO}$, cujos objectos são os conjuntos parcialmente ordenados A nos quais existe $\vee(\uparrow a)$, para cada $a \in A$, e cujos morfismos são as funções monótonas $f : A \to B$ tais que, para cada $a \in A$, $f(\vee(\uparrow a)) = \vee(\uparrow f(a))$.

Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria de $\mathcal{B}$ cujo único objecto é D e cujo único morfismo é id_D. Vamos mostrar que existe um morfismo f que está em $\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$ mas não está em $\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}$.

Consideremos o conjunto parcialmente ordenado $C = \{x, y\}$, com x e y incomparáveis. É fácil verificar que $D, C \in \mathcal{B}$ e que o único morfismo de C em D que está em $\mathcal{B}$ é $f : C \to D$, definido por $f(x) = f(y) = 1$. Além disso, a condição $f = \overline{f} \cdot f$ apenas é satisfeita quando $\overline{f} = id_D$ ou $\overline{f} = a$, com a o morfismo definido por $a(0) = a(1) = 1$; como $id_D \leq a$, concluímos que $f/f = a$, logo $f \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$.

No entanto, $f \notin \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}$:

Para $(g : C \to D) \in \mathbf{CPO}$ definida por $g(x) = 0$ e $g(y) = 1$, não existe qualquer morfismo $\overline{g}$ tal que $\overline{g} \cdot f = g$, pois

$$\overline{g} \cdot f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{g}(1) = 0 \\ \overline{g}(1) = 1 \end{cases} .$$

Observação 2.24. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subcategorias de $\mathcal{X}$, com $\mathcal{A}$ subcategoria de $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{A}$ é fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, então temos:

1. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são KZ-reflectivas em $\mathcal{X}$ então

$$KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}) = KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}).$$

De facto, pela Proposição 2.21 sabemos que $KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}) \subseteq KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$. Por outro lado, o ponto 1 da Observação 1.45 garante que $\mathcal{A} \subseteq KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}})$. Mas como $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva e fechada para adjuntos co-reflectivos, pela proposição 2.17, $\mathcal{A} = KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}})$, concluindo-se assim a inclusão contrária.

2. Se $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{X}$ e KZ-reflectiva em $\mathcal{B}$ então

$$\mathcal{A} = KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}) = KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}).$$

Basta atender à Proposição 2.17: concluímos que

$$\mathcal{A} = KInj_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}}) \text{ e } \mathcal{A} = KInj_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}).$$

Proposição 2.25. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subcategorias de $\mathcal{X}$, com $\mathcal{A}$ subcategoria de $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{A}$ é fechada para adjuntos direitos co-reflectivos e é KZ-reflectiva em $\mathcal{X}$, com functor reflector $R : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, e $\mathcal{B}$ é plena em $\mathcal{X}$, então temos:*

1. *$\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{B}$ através da restrição R' de R a $\mathcal{B}$.*

2. *$\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}} = \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}} \cap Mor(\mathcal{B})$, i.e.,*

$$\left\{R'\text{-}imers\tilde{o}es\right\} = \{R\text{-}imers\tilde{o}es\} \cap Mor(\mathcal{B}).$$

Demonstração. 1. Sendo $R : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ o functor reflector da inclusão $I : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$, com a adjunção $(R, I, \eta, \varepsilon)$, como $\mathcal{B}$ é plena, então, para cada $B \in Obj(\mathcal{B})$, $\eta_B : B \to RB$ é um morfismo de $\mathcal{B}$, logo $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{B}$, através da restrição a $\mathcal{B}$ de R.

2. Seja $(f : X \to Y) \in \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}}$. Então $f \in Mor(\mathcal{B})$, portanto $X, Y \in Obj(\mathcal{B})$, e os objectos e morfismos de $\mathcal{A}$ são Kan-injectivos à direita relativamente a f em $\mathcal{B}$, o que, atendendo a que $\mathcal{B}$ é plena, implica que o sejam também em $\mathcal{X}$. A recíproca é também imediata. A última igualdade é, então, consequência do Teorema 2.14, que garante que:

$$\mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{B}}} = \left\{R'\text{-imersões}\right\} \text{ e } \mathcal{A}^{KInj_{\mathcal{X}}} = \{R\text{-imersões}\}.$$

□

Observação 2.26. O enunciado no ponto 1 da proposição anterior é ainda válido no caso em que $\mathcal{B}$, não sendo plena em $\mathcal{X}$, satisfaz a condição seguinte: para cada $B \in \mathcal{B}$, $\eta_B : B \to RB$ é um morfismo de $\mathcal{B}$. Neste caso, $\mathcal{A}$ é também KZ-reflectiva em $\mathcal{B}$, através da restrição a $\mathcal{B}$ de R.

2.4 Subcategorias KZ-monádicas

Definição 2.27. [20, 29] Uma *mónada de Kock-Zöberlein* (que, abreviadamente, designamos por *mónada KZ*), numa categoria $\mathcal{X}$, enriquecida em **CPO**, é uma mónada $T = (T, \eta, \mu)$, tal que $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é localmente monótono e

$$\eta_{TX} \leq T\eta_X, \text{ para cada } X \in \mathcal{X}.$$

Observação 2.28. 1. As mónadas KZ são um caso especial da noção de doutrina de Kock-Zöberlein, introduzida por Anders Kock, em [29], e Zöberlein, em [47].

2. M. Escardó, em [20], mostrou que as T-álgebras (A, m_A) de uma mónada KZ em $\mathcal{X}$ são caracterizadas pela condição

$$\eta_A \dashv_C m_A. \tag{2.15}$$

Como o adjunto esquerdo de um morfismo, quando existe, é único, podemos identificar cada T-álgebra (A, m_A) com o seu objecto suporte A. Além disso, Escardó mostrou que os objectos-suporte das T-álgebras de uma mónada KZ são exactamente os objectos A de $\mathcal{X}$ injectivos relativamente a todas as T-imersões. E provou mais: as T-álgebras de uma mónada KZ coincidem, também, com os objectos Kan-injectivos à direita relativamente a todas as T-imersões. Nomeadamente, dada uma T-imersão $j : X \to Y$ e um morfismo $f : X \to A$ de $\mathcal{X}$, se (A, m_A) é uma T-álgebra, então f/j é dado pela fórmula ([20] ou 3.6 de [18]):

$$f/j = m_A \cdot Tf \cdot (Tj)^* \cdot \eta_Y. \tag{2.16}$$

Definição 2.29. Vamos designar por *subcategoria KZ-monádica* de $\mathcal{X}$ toda a subcategoria de $\mathcal{X}$ que é uma categoria de álgebras de Eilenberg-Moore, para alguma mónada KZ em $\mathcal{X}$.

No teorema seguinte vamos ver que as subcategorias KZ-monádicas numa categoria enriquecida em **CPO** são, precisamente, as subcategorias KZ-reflectivas fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos, dessa categoria.

Teorema 2.30. *As subcategorias KZ-reflectivas de $\mathcal{X}$ fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos, coincidem, a menos de isomorfismo de categorias, com as subcategorias KZ-monádicas em $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Seja $T = (T, \eta, \mu)$, com $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, uma mónada KZ.

Como cada objecto X de $\mathcal{X}$ é suporte de, quando muito, uma T-álgebra, então $\mathcal{X}^T$ pode ser encarada como uma subcategoria de $\mathcal{X}$. Além disso é reflectiva em $\mathcal{X}$, com a reflexão

$$F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^T$$

dada por $FX = (TX, \mu_X)$ e $Ff = Tf$, para cada objecto $X \in \mathcal{X}$ e cada morfismo $f \in \mathcal{X}$. Para cada $X \in \mathcal{X}$, a reflexão em $\mathcal{X}^T$ é dada por η_X e, uma vez que T é uma mónada KZ, F é localmente monótono e $\eta_{FX} \leq F\eta_X$, para cada $X \in \mathcal{X}$.

De modo a verificar que a subcategoria $\mathcal{X}^T$ é fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, consideremos um morfismo

$$f : (X, m_X) \to (Y, m_Y)$$

em $\mathcal{X}^T$ e dois adjuntos direitos co-reflectivos, $r : X \to A$ e $r' : Y \to B$, com $A, B \in \mathcal{X}$. Sejam l e l' tais que $l \dashv_C r$ e $l' \dashv_C r'$.

Seja $g : A \to B$ um morfismo de $\mathcal{X}$ que torna o diagrama seguinte comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & Y \arrow[d, "r'"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Pretendemos concluir que g é um morfismo de $\mathcal{X}^T$. Para tal, comecemos por verificar que A e B são suportes de T-álgebras. De facto, definindo $m_A : TA \to A$ por

$$m_A = r \cdot m_X \cdot Tl,$$

temos:

$$\begin{aligned} m_A \cdot \eta_A &= r \cdot m_X \cdot Tl \cdot \eta_A \\ &= r \cdot m_X \cdot \eta_X \cdot l \\ &= r \cdot l \\ &= id_A. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"'] \arrow[d, "r"] & TX \arrow[l, bend right, "m_X"'] \arrow[d, "Tr"'] \\ A \arrow[u, bend left, "l"] \arrow[r, "\eta_A"'] & TA \arrow[u, bend right, "Tl"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \eta_A \cdot m_A &= \eta_A \cdot r \cdot m_X \cdot Tl \\ &= Tr \cdot \eta_X \cdot m_X \cdot Tl. \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, $\eta_X \cdot m_X \leq id_{TX}$ e $r \cdot l = id_A$, obtemos $\eta_A \cdot m_A \leq Tr \cdot Tl$, ou ainda,

$$\eta_A \cdot m_A \leq id_{TA}.$$

Logo, atendendo à Observação 2.28.2, concluímos que (A, m_A) é uma T-álgebra.

De modo análogo concluímos que $(B, m_B) \in \mathcal{X}^T$, com $m_B = r' \cdot m_Y \cdot Tl'$. Resta verificar que $g \in \mathcal{X}^T$, comprovando que é válida a igualdade $m_B \cdot Tg = g \cdot m_A$. Temos:

$$\begin{aligned} m_B \cdot Tg &= r' \cdot m_Y \cdot Tl' \cdot Tg \\ &= r' \cdot m_Y \cdot Tl' \cdot Tg \cdot T(r \cdot l) \\ &= r' \cdot m_Y \cdot Tl' \cdot T(g \cdot r) \cdot Tl \\ &= r' \cdot m_Y \cdot Tl' \cdot T(r' \cdot f) \cdot Tl \\ &= r' \cdot m_Y \cdot T(l' \cdot r') \cdot Tf \cdot Tl \end{aligned}$$

Como $l' \cdot r' \leq id_Y$, também $T(l' \cdot r') \leq id_{TY}$, donde se obtém:

$$\begin{aligned} m_B \cdot Tg &\leq r' \cdot m_Y \cdot Tf \cdot Tl \\ &\leq r' \cdot f \cdot m_X \cdot Tl \\ &\leq g \cdot r \cdot m_X \cdot Tl \\ &\leq g \cdot m_A. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[rrr, "Tf"] \arrow[dr, "m_X"] \arrow[ddd, "Tr"] & & & TY \arrow[dl, "m_Y"'] \arrow[ddd, "Tr'"'] \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "r"'] & Y \arrow[d, "r'"'] & \\
& A \arrow[r, "g"'] \arrow[u, bend right, "l"'] & B \arrow[u, bend right, "l'"'] & \\
TA \arrow[rrr, "Tg"'] \arrow[ur, "m_A"'] \arrow[uuu, bend left, "Tl"] & & & TB \arrow[ul, "m_B"] \arrow[uuu, bend right, "Tl'"']
\end{tikzcd}$$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned} g \cdot m_A &= g \cdot r \cdot m_X \cdot Tl \\ &= m_B \cdot \eta_B \cdot (g \cdot r \cdot m_X) \cdot Tl \\ &= m_B \cdot T(g \cdot r \cdot m_X) \cdot \eta_{TX} \cdot Tl. \end{aligned}$$

Atendendo a que $\eta_{TX} \leq T\eta_X$, então:

$$g \cdot m_A \leq m_B \cdot Tg \cdot Tr \cdot Tm_X \cdot T\eta_X \cdot Tl.$$

Como $m_X \cdot \eta_X = id_X$ e $r \cdot l = id_A$, obtemos $g \cdot m_A \leq m_B \cdot Tg$. Consequentemente, $g \in \mathcal{X}^T$.

Vamos agora verificar que se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$, via a adjunção $(F, I, \eta, \varepsilon)$, onde $I : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ é o functor inclusão, e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, então $\mathcal{A}$ coincide com a categoria das T-álgebras determinada por uma mónada KZ, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Definindo $T = IF : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, obtemos a mónada $T = (T, \eta, \varepsilon_F)$; é claro que T é um functor localmente monótono que satisfaz a desigualdade $\eta_{TX} \leq T\eta_X$, para cada $X \in \mathcal{X}$. Portanto T é uma mónada KZ.

Resta mostrar que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}^T$ são categorias isomorfas. É claro que o functor de comparação $K : \mathcal{A} \to \mathcal{X}^T$ é injectivo para objectos e para morfismos. Vamos verificar que, além disso, K é sobrejectivo para objectos e é pleno.

Seja $(X, m_X) \in \mathcal{X}^T$. Como T é uma mónada KZ, então $\eta_X \dashv_C m_X$. Atendendo à hipótese de $\mathcal{A}$ ser fechada para adjuntos direitos co-reflectivos e ao facto de $m_X : TX \to X$ ter domínio $TX \in \mathcal{A}$, concluímos, pela Observação 1.40, que $m_X \in \mathcal{A}$, portanto $X \in \mathcal{A}$. Então, como $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{X}$, pela Observação 2.16, sabemos que $\eta_X \dashv_C \varepsilon_X$, logo $m_X = \varepsilon_X$ e, portanto, temos $(X, m_X) = KX$.

De modo a concluir que K é pleno, consideremos um morfismo $f \in \mathcal{X}^T$, com $f : X \to Y$. Então X e Y são suportes de T-álgebras, portanto ε_X e ε_Y são adjuntos direitos co-reflectivos. Além disso, por definição de morfismos de T-álgebras, temos:

$$f \cdot \varepsilon_X = \varepsilon_Y \cdot Tf.$$

Uma vez que $Tf \in \mathcal{A}$, concluímos, atendendo à hipótese de $\mathcal{A}$ ser fechada para adjuntos direitos co-reflectivos, que $f \in \mathcal{A}$ e tem-se $K(f) = f$. $\square$

Observação 2.31. Em [4] é estudado o problema de saber quando é que uma categoria Kan-injectiva é KZ-monádica. Nomeadamente, prova-se que em certas categorias enriquecidas em **CPO** uma subcategoria da forma $KInj(\mathbb{H})$, com $\mathbb{H}$ um conjunto de morfismos, é sempre KZ-monádica.

A proposição seguinte permite obter uma caracterização das T-imersões que completa os resultados de Escardó sobre este assunto, como referido na Observação 2.33, a seguir.

Proposição 2.32. *Seja $\mathcal{A}$ uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$ através do functor reflector $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos. Seja $T = IF : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ a mónada KZ correspondente. Então as F-imersões coincidem com as T-imersões.*

Demonstração. De facto, se f é uma F-imersão então existe $(Ff)^* \in \mathcal{A}$, tal que $(Ff)^* \dashv_R Ff$, logo $(Ff)^* \in \mathcal{X}$, portanto é uma T-imersão.

Seja agora $f : X \to Y$ uma T-imersão em $\mathcal{X}$, ou seja, Tf tem adjunto esquerdo reflectivo $(Tf)^*$ em $\mathcal{X}$, ou ainda, atendendo a que $T = IF$, Ff tem um adjunto esquerdo reflectivo $(Ff)^*$ em $\mathcal{X}$. Para concluir que f é uma F-imersão basta mostrar que $(Ff)^*$ é um morfismo de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é KZ-reflectiva em $\mathcal{X}$, atendendo à condição 1 da caracterização dada no

Teorema 2.5, basta mostrar que $(Ff)^* = ((Ff)^* \cdot \eta_Y)/\eta_Y$, ou seja, que, para todo o morfismo $s : FY \to FX$, a desigualdade $s \cdot \eta_Y \leq (Ff)^* \cdot \eta_Y$ implica $s \leq (Ff)^*$. De facto, atendendo a que $(Ff)^* \cdot Ff = id_{FX}$, temos a seguinte série de implicações:

$$\begin{aligned} s \cdot \eta_Y \leq (Ff)^* \cdot \eta_Y &\Rightarrow s \cdot \eta_Y \cdot f \leq (Ff)^* \cdot \eta_Y \cdot f \\ &\Rightarrow s \cdot Ff \cdot \eta_X \leq (Ff)^* \cdot Ff \cdot \eta_X \\ &\Rightarrow (s \cdot Ff) \cdot \eta_X \leq id_{FX} \cdot \eta_X \end{aligned}$$

Da última desigualdade concluímos, usando a condição 2. do Teorema 2.5, que $s \cdot Ff \leq id_{FX}$, logo $s \cdot Ff \cdot (Ff)^* \leq (Ff)^*$. Então, uma vez que $id_{FY} \leq Ff \cdot (Ff)^*$, obtemos $s \leq (Ff)^*$.

□

Observação 2.33. M. Escardó provou em [21] que dada uma mónada KZ em $\mathcal{X}$ tendo como endofunctor $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, as T-álgebras são precisamente os objectos de $\mathcal{X}$ que são Kan-injectivos à direita relativamente às T-imersões. Combinando a Proposição 2.32 com os Teoremas 2.14, 2.17 e 2.30, temos que também os T-morfismos são precisamente os morfismos de $\mathcal{X}$ que são Kan-injectivos à direita relativamente às T-imersões, ou seja, $\mathcal{X}^T = KInj(\mathbb{H})$, com $\mathbb{H}$ a classe das T-imersões. Além disso, concluímos ainda que as T-imersões são precisamente a maior classe de morfismos relativamente à qual os objectos e os morfismos de $\mathcal{X}^T$ são Kan-injectivos à direita.

Exemplos 2.34. As subcategorias $\mathbf{CPO}_d$ e $\mathbf{CPO}_s$ de **CPO** do Exemplo 2.7 são ambas KZ-monádicas: já sabemos que são KZ-reflectivas e verifica-se trivialmente que são fechadas para adjuntos direitos co-reflectivos. O mesmo se conclui para a subcategoria **CPOC**.

Exemplos 2.35. No próximo capítulo vamos estudar em detalhe a Kan-injectividade na categoria $\mathbf{Top}_0$, dos espaços topológicos T_0 e das aplicações contínuas. Em particular, vamos ver que as seguintes subcategorias de $\mathbf{Top}_0$ são KZ-monádicas:

1. **Cont**, categoria dos reticulados contínuos e das funções que preservam supremos dirigidos e ínfimos quaisquer. Considerando cada reticulado munido da topologia de Scott, temos uma subcategoria de $\mathbf{Top}_0$.

2. **ScottD**, categoria dos domínios de Scott contínuos e das funções que preservam supremos dirigidos e ínfimos não vazios. Considerando novamente a topologia de Scott, **ScottD** é uma subcategoria de $\mathbf{Top}_0$.

3. **EComp**, categoria dos espaços topológicos estavelmente compactos e das *funções estavelmente contínuas*; quer dizer:

os objectos de **EComp** são os espaços sóbrios, localmente compactos e cuja família de subconjuntos compactos e saturados é fechada para intersecções finitas (um subconjunto A de um espaço X é *saturado* se, para a ordem de especialização, $A = \uparrow A$).

os morfismos de **EComp** são as funções contínuas $f : X \to Y$, tais que, para cada par de abertos U e V de Y e para cada compacto K de Y, se $U \subseteq K \subseteq V$ então existe um compacto K' de X tal que

$$f^{-1}(U) \subseteq K' \subseteq f^{-1}(V).$$

Observação 2.36. Em $\mathbf{Top}_0$, seja $\mathcal{A}$ a subcategoria plena da subcategoria plena de **Cont**, constituída pelos reticulados algébricos munidos da topologia de Scott. Esta categoria é uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathbf{Top}_0$. Na verdade, este exemplo é um caso particular da seguinte situação geral:

Seja $T = (T, \eta, \mu)$ uma mónada KZ em $\mathcal{X}$. Seja $\mathcal{A}$ a subcategoria plena de $\mathcal{X}^T$ constituída por todas as T-álgebras livres, isto é, todas as T-álgebras da forma (TX, μ_X). Então $\mathcal{A}$ é uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathcal{X}$.

O exemplo acima, em $\mathbf{Top}_0$, decorre do facto de as T-álgebras livres da mónada KZ induzida pela inclusão de **Cont** em $\mathbf{Top}_0$ serem precisamente os reticulados algébricos (ver, por exemplo, [15] ou [25], ou ainda [27]).

Capítulo 3

Kan-injectividade em $\mathbf{Top}_0$

Neste capítulo apresentamos uma cadeia indexada pela classe *Card*, de todos os cardinais, de subcategorias KZ-reflectivas de $\mathbf{Top}_0$, definidas por Kan-injectividade a partir de determinadas classes de imersões de $\mathbf{Top}_0$. Verificamos também que a união das subcategorias da cadeia encontrada é a subcategoria **Sob** dos espaços sóbrios, também KZ-reflectiva em $\mathbf{Top}_0$. Além disso, apresentamos uma caracterização das imersões densas e das imersões planas em termos de Kan-injectividade.

No que se segue consideramos sempre a categoria $\mathbf{Top}_0$, dos espaços topológicos T_0 e das funções contínuas, enriquecida em **CPO** com a *ordem de especialização ponto-a-ponto* (ver (1.6)).

3.1 As mónadas-KZ dos filtros de abertos n-primos

As mónadas dos filtros de conjuntos e, em particular, as mónadas de filtros de abertos de um espaço topológico foram estudadas por vários autores. Nomeadamente, entre outros, por Day em [17], Wyler em [45] e Simmons em [38] que estudaram as mónadas dos filtros de abertos, dos filtros próprios e dos filtros primos. Posteriormente, Escardó e Flagg em [18], consideraram também estes filtros de abertos, tendo mostrado que as mónadas correspondentes são do tipo KZ. Além disso, verificaram que também os filtros completamente primos definem uma mónada KZ em $\mathbf{Top}_0$.

Denotamos o conjunto dos abertos de um espaço topológico X por $\mathcal{O}X$.

Em seguida generalizamos o conceito de filtro de abertos primo, definindo, para cada $n \in$ *Card*, filtros de abertos n-primos que também, como posteriormente verificaremos, definem em $\mathbf{Top}_0$ uma mónada KZ.

Observações 3.1. Começamos por recordar:

1. Um *filtro de abertos* de um espaço topológico X é um conjunto de abertos de X que é fechado para intersecções finitas, ascendente e contém X.

2. Um filtro ϕ de abertos diz-se:

   (a) *próprio* se for diferente de $\mathcal{O}X$, i.e., ϕ não contém o conjunto vazio.

   (b) *primo* se, para quaisquer abertos U e V de X, a condição $U \cup V \in \phi$ implica que $U \in \phi$ ou $V \in \phi$.

Definição 3.2. Seja X um objecto de $\mathbf{Top}_0$ e $\phi \subseteq \mathcal{O}X$ um filtro de abertos de X. Para cada $n \in Card$, com $n \geq 1$, dizemos que ϕ é um *filtro n-primo* se para qualquer família $\{X_i\}_{i\in k}$ de abertos de X, com $k \leq n$, se tem:

$$\bigcup_{i\in k} X_i \in \phi \Rightarrow \exists i \in k : X_i \in \phi. \tag{3.1}$$

Claro que os filtros 1-primos são precisamente os próprios: para $k = 0$ a condição (3.1) significa que o filtro não contém o conjunto vazio.

Notação 3.3. Dado um espaço topológico $X \in \mathbf{Top}_0$, para cada $n \in Card$, com $n \geq 1$, representamos por

$$F_n X$$

o conjunto de todos os filtros n-primos de X. Representamos por F_0X o conjunto dos filtros de abertos de X.

Observação 3.4. Recordemos a definição da mónada F_0, dos filtros dos abertos:

A topologia em F_0X é gerada pelos subconjuntos da forma

$$\Box U = \{\phi \in F_0X : U \in \phi\}\,, \;\; U \in \mathcal{O}X.$$

A mónada $F_0 = (F_0, \eta, \mu)$, com $F_0 : \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Top}_0$, é tal que, para cada $f : X \to Y$, $F_0 f : F_0X \to F_0Y$ é o morfismo de $\mathbf{Top}_0$ dado por

$$F_0f(\phi) = \{V \in \mathcal{O}Y : f^{-1}(V) \in \phi\},$$

para cada $\phi \in F_0X$.

$\eta_X : X \to F_0X$ é definido por,

$$\eta_X(x) = \{U \in \mathcal{O}X : x \in U\},$$

para cada $x \in X$.

$\mu_X : F_0^2X \to F_0X$ é definido por

$$\mu_X(\Phi) = \{U \in \mathcal{O}X : \Box U \in \Phi\},$$

para cada $\Phi \in F_0^2X$.

Proposição 3.5. *Seja $n \in Card$. O conjunto F_nX dos filtros n-primos define uma mónada KZ em $\mathbf{Top}_0$.*

Demonstração. Para $n = 0$ a afirmação foi provada por Escardó e Flagg. Para $n \geq 1$, a demonstração é feita exactamente do mesmo modo, tendo-se apenas que assegurar que são satisfeitas as condições:

(a) dado um morfismo $f : X \to Y$, o filtro $F_nf(\phi)$ é n-primo, para qualquer filtro n-primo, ϕ, de X;

(b) para cada espaço X e cada $x \in X$, o filtro $\eta_X(x)$ é n-primo;

(c) para cada espaço X e cada $\Phi \in F_n^2X$, o filtro $\mu_X(\Phi)$ é n-primo.

Quanto a (a), seja $f : X \to Y$ um morfismo de $\mathbf{Top}_0$ e ϕ um filtro n-primo de X. Consideremos o filtro $F_nf(\phi)$. Para qualquer família $(B_i)_{i\in k}$, com $k \leq n$, de abertos de Y, atendendo a que ϕ é n-primo, temos:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in k} B_i \in F_nf(\phi) &\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i\in k} B_i) \in \phi \\ &\Rightarrow \bigcup_{i\in k} f^{-1}(B_i) \in \phi \\ &\Rightarrow \exists j \in k, f^{-1}(B_j) \in \phi \\ &\Rightarrow \exists j \in k, B_j \in F_nf(\phi), \end{aligned}$$

logo $F_nf(\phi)$ é n-primo.

Para mostrar (b), seja $x \in X$, com X em $\mathbf{Top}_0$. Seja $(A_i)_{i\in k}$, com $k \leq n$, uma família de abertos de X com $\bigcup_{i\in k} A_i \in \eta_X(x)$. Então $x \in \bigcup_{i\in k} A_i$, logo existe $j \in k$, tal que $x \in A_j$, portanto $A_j \in \eta_X(x)$.

Quanto a (c), seja $(A_i)_{i\in k}$, com $k \leq n$, uma família de abertos de X tal que

$$\bigcup_{i\in k} A_i \in \mu_X(\Phi).$$

Então $\Box(\bigcup_{i\in k} A_i) \in \Phi$. Mas $\Box(\bigcup_{i\in k} A_i) = \bigcup_{i\in k}(\Box A_i)$, logo $\bigcup_{i\in k}(\Box A_i) \in \Phi$. Como Φ é n-primo, então existe $j \in k$, tal que $\Box A_j \in \Phi$. Portanto $A_j \in \mu_X(\Phi)$.

Vamos agora mostrar que a mónada $F_n : \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Top}_0$ é uma mónada KZ. Para tal, comecemos por verificar que o functor F_n é localmente monótono.

Sejam $f, g : X \to Y$ morfismos de $\mathbf{Top}_0$ tais que $f \leq g$, ou seja, para cada $U \in \mathcal{O}Y$, $f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U)$.

Para concluir que $F_nf \leq F_ng$ basta mostrar que para cada $U \in \mathcal{O}Y$, $F_nf^{-1}(\Box U) \subseteq (F_ng)^{-1}(\Box U)$. Para $\phi \in F_nX$, suponhamos que $\phi \in (F_nf)^{-1}(\Box U)$. Tem-se:

$$\phi \in (F_nf)^{-1}(\Box U) \Leftrightarrow (F_nf)(\phi) \in \Box U \Leftrightarrow U \in (F_nf)(\phi) \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \phi. \tag{3.2}$$

Como por hipótese $f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U)$ e ϕ é um filtro, concluímos que $g^{-1}(U) \in \phi$. Procedendo como em (3.2), concluímos que $\phi \in (F_n g)^{-1}(\Box U)$.

Para concluir que se trata de uma mónada KZ falta mostrar que, para cada $X \in \mathbf{Top}_0$, $\eta_{F_n X} \leq F_n \eta_X$, ou seja, que

$$(\eta_{F_n X})^{-1}(U) \subseteq (F_n \eta_X)^{-1}(U),$$

para todo o aberto U de $F_n^2 X$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar $U = \Box B$, com B um aberto de $F_n X$.

Assim, consideremos $\phi \in F_n X$ tal que $\phi \in (\eta_{F_n X})^{-1}(\Box B)$, i.e, $(\eta_{F_n X})(\phi) \in \Box B$, ou ainda, $\phi \in B$. Então, atendendo à definição dos abertos de $F_n X$, existe $A \in \mathcal{O}X$ tal que $\phi \in \Box A \subseteq B$. Então $A \in \phi$ e tem-se $A = \eta_X^{-1}(\Box A) \in \phi$, pelo que $\Box A \in (F\eta_X)(\phi)$. Como $\Box A \subseteq B$, concluímos que $B \in (F\eta_X)(\phi)$, logo $(F\eta_X)(\phi) \in \Box B$, ou seja, $\phi \in (F\eta_X)^{-1}(\Box B)$. $\Box$

Observações 3.6. 1. Tal como foi referido no Exemplo 2.35, **Cont**, **ScottD** e **EComp** são subcategorias KZ-monádicas de $\mathbf{Top}_0$. Nomeadamente, coincidem, com as subcategorias das álgebras determinadas respectivamente, pela mónada F_0 dos filtros de abertos (provado por Day [17] e Wyler [45]), pela mónada F_1 dos filtros próprios (provado por Wyler [45]) e pela mónada F_2 dos filtros primos (provado por Simmons em [38] e Wyler em [46]).

2. Em [26], Dirk Hofmann estudou uma generalização das mónadas dos filtros de abertos usando filtros não atingíveis por n, $n \in \mathit{Card}$, ou seja, filtros ϕ tais que para toda a família $(A_i)_{i<n}$ de abertos, a condição $\bigcup_{i<n} A_i \in \phi$ implica a existência de $j < n$ tal que $A_j \in \phi$ (ver também [11]). Assim a presente definição da mónada F_n não coincide com a utilizada em [26]. Por exemplo, a nossa mónada F_2 é a (restrição a $\mathbf{Top}_0$ da) mónada F_ω de [26].

3.2 Imersões n-planas

Nesta secção consideramos e caracterizamos diferentes tipos de imersões, definindo, para cada $n \in \mathit{Card}$, a noção de imersão n-plana.

Observação 3.7. Recordemos que dado um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathbf{Top}_0$ então a função $f^{-1} : \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ é um morfismo de reticulados locais, portanto possui adjunto direito em $\mathbf{SRet}_1$, $(f^{-1})_* : \mathcal{O}X \to \mathcal{O}Y$, dado por:

$$(f^{-1})_*(U) = \cup\{V \in \mathcal{O}Y : f^{-1}(V) \subseteq U\}, U \in \mathcal{O}X.$$

Como habitualmente nesta categoria, chamamos *imersão* a toda a função contínua $f : X \to Y$, injectiva e tal que

$$\mathcal{O}(X) = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Notemos que a condição anterior significa que a função imagem-inversa, $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, é sobrejectiva e, uma vez que X e Y satisfazem o axioma da separação T_0, assegura que f é injectiva. Assim, em $\mathbf{Top}_0$, $f : X \to Y$ é uma imersão se e só se f^{-1} é sobrejectiva, ou ainda, f é uma imersão se e só se a adjunção $f^{-1} \dashv (f^{-1})_*$ é reflectiva ([27], (II.2.1),[12]), i.e., $f^{-1} \cdot (f^{-1})_* = id_{\mathcal{O}(X)}$ e $id_{\mathcal{O}(Y)} \leq (f^{-1})_* \cdot f^{-1}$.

Os lemas seguintes decorrem facilmente de [18] (ver [12]). O primeiro dá-nos uma caracterização das imersões de $\mathbf{Top}_0$ em termos de Kan-injectividade.

Seja

$$A_0 = \{\perp, \top\}$$

o espaço de Sierpiński, quer dizer, o único aberto não trivial de A_0 é $\{\top\}$.

Lema 3.8. *Um morfismo $g : X \to Y$ de $\mathbf{Top}_0$ é uma imersão se e só se A_0 é Kan-injectivo à direita relativamente a g. Nomeadamente, se g é imersão, então para qualquer função $\chi_U : X \to A_0$, com U aberto de X, temos*

$$\chi_U/g = \chi_{(g^{-1})_*(U)}.$$

Demonstração. Seja g uma imersão. Comecemos por notar que qualquer morfismo de $\mathbf{Top}_0$ com codomínio A_0 é do tipo χ_U, para algum aberto U de X. Para concluir que para cada $U \in \mathcal{O}X$, $\chi_{(g^{-1})_*(U)} \cdot g = \chi_U$, tomamos em atenção que, atendendo ao facto de g ser uma imersão, temos $g^{-1} \cdot (g^{-1})_* = id$, portanto, para cada $x \in X$, $g(x) \in (g^{-1})_*(U)$ se e só se $x \in U$.

Seja $t : U \to A_0$ um morfismo de $\mathbf{Top}_0$, tal que $t \cdot g \leq \chi_U$. Para mostrar que $t \leq \chi_{(g^{-1})_*(U)}$, basta verificar que a condição $t^{-1}(A) \subseteq (\chi_{(g^{-1})_*(U)})^{-1}(A)$ é satisfeita pelo único aberto não trivial de A_0, $A = \{\top\}$. Atendendo a que $id \leq (g^{-1})_* \cdot g^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} t \cdot g \leq \chi_U \quad &\Rightarrow \quad g^{-1}(t^{-1}(\{\top\})) \subseteq (\chi_U)^{-1}(\{\top\}) = U \\ &\Rightarrow \quad t^{-1}(\{\top\}) \subseteq (g^{-1})_*(U) \\ &\Rightarrow \quad t^{-1}(\{\top\}) \subseteq (\chi_{(g^{-1})_*(U)})^{-1}(\{\top\}). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que A_0 é Kan-injectivo à direita relativamente a g, quer dizer, para cada aberto U de X existe o morfismo χ_U/g, portanto existe um aberto V de Y tal que $\chi_U/g = \chi_V$. Então $\chi_V \cdot g = \chi_U$, ou seja, para cada $x \in X$, $x \in g^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in U$, portanto g^{-1} é sobrejectiva, logo g é uma imersão. $\square$

Observação 3.9. Recordemos que um espaço topológico A se diz T_1 se para quaisquer pontos a e b distintos, existe $U \in \mathcal{O}A$ tal que a é um elemento de U mas b não é. É evidente que todo o espaço T_1 é T_0. A seguir mostramos que se $\mathbb{H}$ é uma classe de morfismos de $\mathbf{Top}_0$ que contém algum morfismo $h : X \to Y$ que não é uma aplicação injectiva, então os objectos de $KInj(\mathbb{H})$ são todos espaços T_1.

Antes de mais, notemos que, como é fácil de ver, dado $A \in \mathbf{Top}_0$, A é T_1 se e só se, para todo o $a, b \in A$, $a \leq b \Rightarrow a = b$. Seja agora $h : X \to Y$ em $\mathbf{Top}_0$ e $x, y \in X$ tais que $h(x) = h(y)$, com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que existe $G \in \mathcal{O}X$ tal que $y \in G$ e $x \notin G$. Seja $A \in KInj(\mathbb{H})$. Se em A existirem a e b tais que $a \leq b$ e $a \neq b$, podemos definir $g : X \to A$ por

$$g(z) = \begin{cases} b, & \text{se } z \in G; \\ a, & \text{se } z \notin G, \end{cases}$$

obtendo uma aplicação contínua visto que, para $U \in \mathcal{O}A$, $g^{-1}(U) = G$ se $b \in U$ e $a \notin U$, e $g^{-1}(U) = X$, nos outros casos em que $U \neq \emptyset$. Em particular vamos ter $g(x) = a$ e $g(y) = b$. Mas, então, como $h(x) = h(y)$, não existe nenhum morfismo $\overline{g} : Y \to A$ tal que $\overline{g} \cdot h = g$. Logo tem de ser $a = b$.

Para apresentar o próximo lema, útil para o que se segue, necessitamos de algumas noções que recordamos na observação seguinte.

Observação 3.10. ([27] e [25]) Seja R um conjunto parcialmente ordenado. A *topologia de Alexandrov* de R é constituída pelos subconjuntos ascendentes de R. A *topologia de Scott* é definida em R do seguinte modo: dado $U \subseteq R$, $U \in \mathcal{O}R$ se $U = \uparrow U$ e U é inacessível por supremos dirigidos, i.e., todo o subconjunto dirigido S de R que tem supremo em U tem algum elemento em comum com U. (S é *dirigido* se todo o seu subconjunto finito tem um majorante em S.)

Um reticulado completo R é um *reticulado contínuo* se e só se, para cada $x \in R$,

$$x = \bigvee \{ \bigwedge U : x \in U \in \mathcal{O}R \},$$

onde $\mathcal{O}R$ é a topologia de Scott de R.

A topologia de Scott é sempre T_0. Além disso, a ordem num conjunto parcialmente ordenado R coincide com a ordem de especialização induzida pela topologia de Scott de R. Assim, um reticulado contínuo pode ser encarado como um espaço T_0 por meio da sua topologia de Scott.

Lema 3.11. *Seja $g : X \to Y$ uma imersão em $\mathbf{Top}_0$. Seja Z um reticulado contínuo com a topologia de Scott coincidente com a topologia de Alexandrov, portanto, gerada pelos conjuntos* *da forma* $\uparrow z$*, com* $z \in Z$*. Se* $h : X \to Z$ *é uma função contínua então* $h/g : Y \to Z$ *pode ser definido por*

$$(h/g)(y) = \vee\{z \in Z : y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z))\}. \tag{3.3}$$

Demonstração. Para concluir que $h/g \cdot g(x) = h(x)$, para cada $x \in X$, note-se que

$$h^{-1}(\uparrow h(x)) = g^{-1}(g^{-1})_* h^{-1}(\uparrow h(x)),$$

pois $g^{-1} \dashv_R (g^{-1})_*$, já que g é uma imersão. Então, como $x \in h^{-1}(\uparrow h(x))$,

$$g(x) \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow h(x))).$$

Além disso, $h(x)$ é o supremo de todos os z para os quais $g(x) \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z))$, pois

$$\begin{aligned} g(x) \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z)) &\Rightarrow x \in g^{-1}(g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z)) \\ &\Rightarrow x \in h^{-1}(\uparrow z) \\ &\Rightarrow z \leq h(x). \end{aligned}$$

Seja agora $k : Y \to Z$ um morfismo tal que $k \cdot g \leq h$. Para concluir que $k \leq h/g$, basta verificar que para qualquer $y \in Y$, $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow k(y)))$, ou seja, existe algum aberto V de Y tal que $y \in V$ e $g^{-1}(V) \subseteq h^{-1}(\uparrow k(y))$.

O aberto $V = k^{-1}(\uparrow k(y))$ satisfaz esta condição, pois $x \in g^{-1}(V)$ é equivalente a $x \in (k \cdot g)^{-1}(\uparrow k(y))$. Então, atendendo a que $k \cdot g \leq h$, temos $x \in h^{-1}(\uparrow k(y))$.

Para mostrar que h/g é contínua basta verificar que, para qualquer $z \in Z$, se tem:

$$(h/g)^{-1}(\uparrow z) = (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z)).$$

Como $(h/g) \cdot g = h$ e $id \leq (g^{-1})_* \cdot g^{-1}$, então $(h/g)^{-1} \leq (g^{-1})_* \cdot h^{-1}$. Para cada $y \in Y$, atendendo à fórmula (3.3), temos a seguinte sequência de implicações:

$$\begin{aligned} y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z)) &\Rightarrow z \in \{w \in Z : y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow w))\} \\ &\Rightarrow z \leq (h/g)(y) \\ &\Rightarrow y \in (h/g)^{-1}(\uparrow z). \end{aligned}$$

Para provar a inclusão contrária, seja $y \in Y$ e $A = \{w \in Z : y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow w))\}$. Vamos mostrar que $\vee A \in A$. Antes de mais observemos que A é um subconjunto dirigido, visto que, se $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow w))$ e $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow v))$ então $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow (w \vee v)))$. Seja $t = \vee A$. Como, por hipótese, $\uparrow t$ é um aberto de Scott, então existe $w \in A$ tal que $w \in \uparrow t$, ou seja, $t \leq w$. Assim, $t = w$ e, portanto, $t \in A$. Agora, dado $z \in Z$,

$$\begin{aligned} y \in (h/g)^{-1}(\uparrow z) &\Leftrightarrow (h/g)(y) \geq z \\ &\Leftrightarrow t \geq z \\ &\Leftrightarrow \uparrow t \subseteq \uparrow z. \end{aligned}$$

Portanto, se $y \in (h/g)^{-1}(\uparrow z)$, tem-se $(g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow t)) \subseteq (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z))$ e, atendendo a que $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow t))$, concluímos que $y \in (g^{-1})_*(h^{-1}(\uparrow z))$. Portanto, $g_*^{-1}(h^{-1}(\uparrow z)) = (h/g)^{-1}(\uparrow z)$.

□

Definição 3.12. Seja $g : X \to Y$ um morfismo de $\mathbf{Top}_0$. Para cada $n \in Card$, com $n \geq 1$, dizemos que g é uma *imersão n-plana* se é uma imersão tal que $(g^{-1})_*$ preserva n-uniões de abertos, i.e.,

$$(g^{-1})_*(\bigcup_{i\in k} X_i) = \bigcup_{i\in k}(g^{-1})_*(X_i),$$

para qualquer família $\{X_i\}_{i\in k}$ de abertos de X, com $k \leq n$.

Notação 3.13. Para cada $\alpha \in Card$, com $n \geq 1$, denotamos por

$$\mathbb{E}_n$$

a classe das imersões n-planas.

A classe das imersões é representada por $\mathbb{E}_0$.

Exemplos 3.14. 1. A imersão $g : X \to Y$ é 1-plana se é *densa*, i.e. se $(g^{-1})_*(\emptyset) = \emptyset$ e é 2-plana se é plana, i.e., se $(g^{-1})_*$ preserva uniões finitas.

2. Para cada $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, as imersões n-planas, coincidem com as imersões 2-planas.

3. As imersões ω-planas são as imersões g tais que $(g^{-1})_*$ preserva uniões numeráveis.

Seja $\overline{f} : Z = \{0\} \to A_0$ o morfismo de $\mathbf{Top}_0$ definido por $\overline{f}(0) = \perp$, onde A_0 é o espaço de Sierpiński, como definido antes do Lema 3.8.

Proposição 3.15. *Um morfismo g de $\mathbf{Top}_0$ é uma imersão densa se e só se o morfismo $\overline{f}$ é Kan-injectivo à direita relativamente a g.*

Demonstração. Seja $g : X \to Y$ um morfismo de $\mathbf{Top}_0$. Pela Proposição 3.8 sabemos que g é uma imersão se e só se A_0 é Kan-injectivo à direita relativamente a g. É claro que Z também o é. Vamos mostrar que $(g^{-1})_*(\emptyset) = \emptyset$ se e só se $\overline{f}$ é Kan-injectivo à direita relativamente a g, i.e., se e só se é satisfeita a igualdade

$$\overline{f} \cdot (h/g) = (\overline{f} \cdot h)/g.$$

Por um lado, existem apenas um morfismo $h : X \to Z$ e um morfismo $h' : Y \to Z$ nomeadamente as aplicações constantes, portanto $h' = h/g$ e $\overline{f} \cdot (h/g)(y) = \overline{f}(0) = \perp$, para todo o

$y \in Y$. Por outro lado, como $(\overline{f} \cdot h)/g$ tem como codomínio A_0, sabemos, pelo Lema 3.8, que $(\overline{f} \cdot h)/g(y) = \chi_V$, com

$$\begin{aligned} V &= (g^{-1})_* \cdot (\overline{f} \cdot h)^{-1}(\{\top\}) \\ &= (g^{-1})_* \cdot h^{-1}(\overline{f}^{-1}(\{\top\})) \\ &= (g^{-1})_* \cdot h^{-1}(\emptyset) \\ &= (g^{-1})_*(\emptyset). \end{aligned}$$

Então $(\overline{f} \cdot h)/g(y) = \perp$, para todo o $y \in Y$, se e só se $V = \emptyset$, ou seja, se e só se $(g^{-1})_*(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

Notação 3.16. Consideremos o espaço topológico T_0 $A_2 = \{\top, \perp a, b\}$, com a base para a topologia formada por $\{\top\}$, $\{a, \top\}$ e $\{b, \top\}$.

Seja A_0 o espaço de Sierpiński e $\overline{f} : Z = \{0\} \to A_0$ o morfismo de $\mathbf{Top}_0$ definido por $\overline{f}(0) = \perp$. Seja $\mathcal{A}_2$ a subcategoria de $\mathbf{Top}_0$ cujos únicos morfismos não triviais são f_2 e $\overline{f}$, com $f_2 : A_2 \to A_0$ a função contínua definida por:

$$f_2(x) = \begin{cases} \top, & \text{se } x \neq \perp \\ \perp, & \text{se } x = \perp. \end{cases}, \; x \in A_2.$$

Teorema 3.17. *Um morfismo g de $\mathbf{Top}_0$ é uma imersão plana se e só se f_2 e $\overline{f}$ são Kan-injectivos à direita relativamente a g, quer dizer, $\mathbb{E}_2 = (\mathcal{A}_2)^{KInj}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.8 sabemos que $g : X \to Y$ é uma imersão se e só se A_0 é Kan-injectivo à direita relativamente a g. Pela Proposição 3.15, g é densa, i.e. é 1-plana se e só se $\overline{f}$ é Kan-injectivo à direita relativamente a g. Como A_2 é um reticulado contínuo com a topologia de Scott coincidente com a topologia de Alexandrov, então, pelo Lema3.11, é Kan-injectivo à direita relativamente a qualquer imersão.

Vamos verificar que f_2 é Kan-injectivo à direita relativamente a g se e só se $(g^{-1})_*$ preserva uniões de pares de abertos.

Primeiro note-se que dada uma imersão $g : X \to Y$, existe uma bijecção entre o conjunto das aplicações contínuas de X em A_2 e o conjunto dos pares (X_a, X_b) de abertos de X, dada por: a cada $h : X \to A_2$ em $\mathbf{Top}_0$ corresponde o par de abertos $X_a = h^{-1}(\{a, \top\})$ e $X_b = h^{-1}(\{b, \top\})$. No sentido inverso, a cada par de abertos (X_a, X_b) corresponde a função contínua h, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} \top, & \text{se} \quad x \in X_a \cap X_b \\ a, & \text{se} \quad x \in X_a \backslash (X_a \cap X_b) \\ b, & \text{se} \quad x \in X_b \backslash (X_a \cap X_b) \\ \perp, & \text{se} \quad x \notin X_a \cup X_b. \end{cases}$$

Para concluir basta provar que, para cada par de abertos (X_a, X_b) de X, se tem:

$$f_2 \cdot (h/g) = (f_2 \cdot h)/g \quad \text{se e só se} \quad (g^{-1})_*(X_a \cup X_b) = (g^{-1})_*(X_a) \cup (g^{-1})_*(X_b).$$

A igualdade $f_2 \cdot (h/g) = (f_2 \cdot h)/g$ é equivalente a $(f_2 \cdot (h/g))^{-1}(\{\top\}) = ((f_2 \cdot h)/g)^{-1}(\{\top\})$, já que são ambas funções de codomínio A_0. Por um lado, como A_2 e A_0 são reticulados contínuos com a topologia de Scott coincidente com a topologia de Alexandrov, pelo Lema 3.11, obtemos:

$$\begin{aligned} ((f_2 \cdot h)/g)^{-1}(\{\top\}) &= = (g^{-1})_*((f_2 \cdot h)^{-1}(\{\top\})) \\ &= (g^{-1})_*(h^{-1}(\{a, \top\}) \cup h^{-1}(\{b, \top\})) \\ &= (g^{-1})_*(X_a \cup X_b). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f_2 \cdot (h/g))^{-1}(\{\top\}) &= (h/g)^{-1}(\{a, \top\}) \cup (h/g)^{-1}(\{b, \top\}) \\ &= (g^{-1})_*(h^{-1}(\{a, \top\})) \cup (g^{-1})_*(h^{-1}(\{b, \top\})) \\ &= (g^{-1})_*(X_a) \cup (g^{-1})_*(X_a). \end{aligned}$$

□

Observação 3.18. Recordemos que um cardinal infinito α é um *cardinal regular* se não é possível escrever α como união de uma família k-indexada de conjuntos de cardinal l, com $k, l < \alpha$. Se considerarmos a mesma definição para cardinais finitos, então 2 é também regular (e o mesmo acontece com 0 e 1).

Observação 3.19. As classes de morfismos $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$, a primeira constituída pelas imersões densas, a segunda pelas imersões g tais que $(g^{-1})_*$ preserva uniões finitas, são claramente distintas. Por exemplo, seja $g : X \to Y$ a inclusão de $X = \{a, b\}$ em $Y = \{a, b, c\}$ cujas topologias têm em ambos os casos como únicos abertos não triviais os conjuntos $\{a\}$ e $\{b\}$. Então g é uma imersão densa mas

$$(g^{-1})_*(\{a, b\}) \neq (g^{-1})_*(\{a\}) \bigcup (g^{-1})_*(\{b\}).$$

No lema seguinte mostramos que se tem sempre $\mathbb{E}_m \neq \mathbb{E}_n$, para $n < m$, com m regular.

Lema 3.20. *Se $1 \leq n < m$, com m um cardinal regular, então $\mathbb{E}_m \subsetneqq \mathbb{E}_n$, quer dizer, existem imersões n-planas que não são m-planas.*

Demonstração. O caso $1 < 2$ já foi abordado na Observação 3.19. A seguir consideramos o caso $2 \leq n < m$, com m regular.

Para cada $l \in \mathit{Card}$, consideremos o espaço topológico T_0 $(l, \mathcal{O}l)$, com

$$\mathcal{O}l = \{k \in \mathit{Card} : k \leq l\} = l \cup \{l\}.$$

Sejam $n < m < t$, com m um cardinal regular, e consideremos a imersão $g : m \hookrightarrow t$ em $\mathbf{Top}_0$, dada pela inclusão. Então, para cada $v \in \mathcal{O}t$ e cada $k \in \mathcal{O}m$,

$$g^{-1}(v) = \begin{cases} m & \text{se } m \leq v \leq t \\ v & \text{se } v < m \end{cases}$$

e

$$(g^{-1})_*(k) = \begin{cases} k & \text{se } k < m \\ t & \text{se } k = m. \end{cases}$$

Vamos verificar que g não é m-plana, mas é n-plana. Como m é um cardinal regular então é um cardinal limite (já que é infinito), portanto $m = \bigcup\limits_{k<m} k$, logo

$$(g^{-1})_*(\bigcup_{k<m} k) = (g^{-1})_*(m) = t.$$

Por outro lado,

$$\bigcup_{k<m} (g^{-1})_*(k) = \bigcup_{k<m} k = m,$$

donde se conclui que g não é m-plana.

Para concluir que g é n-plana, consideremos uma família $(x_i)_{i<n}$ de n abertos de m, i.e., para cada $i < n$, $x_i \leq m$. Uma vez que m é um cardinal regular e $n < m$, temos:

$$\bigcup_{i<n} x_i = m \text{ se e só se existe } j < n \text{ tal que } x_j = m.$$

Neste caso

$$(g^{-1})_*(\bigcup_{i<n} x_i) = (g^{-1})_*(m) = t$$

e

$$(g^{-1})_*(x_j) = (g^{-1})_*(m) = t.$$

Logo $\bigcup_{i<n}(g^{-1})_*(x_i) = t$, portanto

$$(g^{-1})_*(\bigcup_{i<n} x_i) = \bigcup_{i<n} (g^{-1})_*(x_i).$$

Caso contrário, temos $x_i < m$, para cada $i < n$. Como m é regular, então $\bigcup_{i<n} x_i < m$ e obtemos:

$$(g^{-1})_*(\bigcup_{i<n} x_i) = \bigcup_{i<n} x_i = \bigcup_{i<n} (g^{-1})_*(x_i).$$

□

Proposição 3.21. *Para cada $n \in Card$,*

$$KInj(\mathbb{E}_n)$$

é a subcategoria KZ-reflectiva de $\mathbf{Top}_0$ das álgebras definidas pela mónada F_n dos filtros n-primos e $\mathbb{E}_n$ é a classe das F_n-imersões.

Demonstração. Atendendo aos Teoremas 2.30 e 2.17 sabemos que a categoria ${\mathbf{Top}_0}^{F_n}$, das álgebras definida pela mónada KZ F_n em $\mathbf{Top}_0$, é KZ-reflectiva e fechada para adjuntos direitos co-reflectivos e que ${\mathbf{Top}_0}^{F_n} = KInj(({\mathbf{Top}_0}^{F_n})^{KInj})$. Além disso, pela Proposição 2.14 sabemos que $({\mathbf{Top}_0}^{F_n})^{KInj}$ é exactamente a classe de todas as F_n-imersões. Mostrando que estas são exactamente as imersões n-planas concluímos que ${\mathbf{Top}_0}^{F_n} = KInj(\mathbb{E}_n)$.

Seja $f : X \to Y$ uma imersão n-plana. Em [18], Escardó e Flagg mostraram que, sendo $f : X \to Y$ uma imersão e definindo $(F_0 f)^* : F_0 Y \to F_0 X$ por

$$(F_0 f)^*(\gamma) = \{U \in \mathcal{O}X : (f^{-1})_*(U) \in \gamma\},$$

onde F_0 é a mónada dos filtros de abertos (ver Observação 3.4), se obtém $(F_0 f)^* \dashv_R F_0 f$ em $\mathbf{Top}_0$. De forma análoga, definindo $(F_n f)^* : F_n Y \to F_n X$ por

$$(F_n f)^*(\gamma) = \{U \in \mathcal{O}X : (f^{-1})_*(U) \in \gamma\},$$

concluímos imediatamente que $(F_n f)^*(\gamma)$ é um filtro. Além disso, caso $(F_n f)^*$ esteja bem definida, decorre também de [18], tendo em conta que F_n é uma submónada de F_0, que $(F_n f)^*$ é contínua (pois $((F_n f)^*)^{-1}(\Box U) = \Box (f^{-1})_*(U))$ e $(F_n f)^* \dashv_R F_n f$.

Resta então mostrar que $(F_n f)^*$ está realmente bem definida, i.e., que $(F_n f)^*(\gamma)$ é n-primo, para todo o filtro $\gamma \in F_n Y$.

Para tal consideremos uma família $(A_i)_{i \in k}$, com $k \leq n$, de abertos de X. Uma vez que f é n-plana e γ é n-primo, temos:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in k} A_i \in (F_n f)^*(\gamma) \quad & \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad (f^{-1})_*(\bigcup_{i\in k} A_i) \in \gamma \\
& \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in k} (f^{-1})_*(A_i) \in \gamma \\
& \Rightarrow \quad \exists j \in k, (f^{-1})_*(A_j) \in \gamma \\
& \Rightarrow \quad \exists j \in k, A_j \in (F_n f)^*(\gamma).
\end{aligned}$$

Agora suponhamos que $f : X \to Y$ é uma F_n-imersão, com $(F_n f)^* \dashv_R F_n f$. Analogamente ao que é feito na prova 6.5 de [18] e de 3.53 de [15], definindo $(f^{-1})_* : \mathcal{O}X \to \mathcal{O}Y$ por

$$(f^{-1})_* = \eta_Y^{-1} \cdot ((F_n f)^*)^{-1} \cdot \Box,$$

é fácil verificar que $f^{-1} \dashv_R (f^{-1})_*$, portanto f é uma imersão.

Falta mostrar que $(f^{-1})_*$ preserva reuniões de famílias de abertos indexadas por k, com $k \leq n$.

Para reuniões vazias, tem-se

$$(f^{-1})_*(\emptyset) = \eta_Y^{-1}((F_nf)^*)^{-1}(\Box\emptyset) = \eta_Y^{-1}((F_nf)^*)^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

onde a segunda igualdade decorre do facto de os filtros de F_nX serem próprios.

Falta mostrar que

$$(f^{-1})_*(\bigcup_{i\in k} A_i) = \bigcup_{i\in k}(f^{-1})_*(A_i)$$

para qualquer família $(A_i)_{i\in k}$ de abertos de X. Isto é uma consequência de $\eta_Y^{-1}\cdot((F_nf)^*)^{-1}$ ser um morfismo de reticulados locais e do facto de se ter a igualdade $\Box(\bigcup_{i\in k} A_i) = \bigcup_{i\in k}(\Box A_i)$; com efeito, uma vez que F_nX é formado pelos filtros n-primos de X,

$$\phi \in \Box(\bigcup_{i\in k} A_i) \Leftrightarrow \bigcup_{i\in k} A_i \in \phi \Leftrightarrow \exists j \in k : A_j \in \phi \Leftrightarrow \exists j \in k : \phi \in \Box A_j \Leftrightarrow \phi \in \bigcup_{i\in k} \Box A_i.$$

$\Box$

3.3 Uma cadeia de subcategorias KZ-reflectivas de Sob

A categoria $\mathbf{Top}_0$ contém uma cadeia infinita de subcategorias plenas reflectivas, como foi provado em [40]. Aqui, usando os resultados da última secção, vamos concluir que a categoria $\mathbf{Top}_0$ também contém uma cadeia infinita de subcategorias KZ-reflectivas.

Seja **Sob** a subcategoria plena de $\mathbf{Top}_0$ cujos objectos são os espaços topológicos sóbrios, i.e., os objectos X de $\mathbf{Top}_0$ tais que todo o fechado irredutível não vazio de X é o fecho de um único ponto. Ou, de modo equivalente (ver [27] ou [37]), são os espaços X onde todo o filtro completamente primo é o filtro das vizinhanças de um único elemento $x \in X$.

Recorde-se que um filtro ϕ é *completamente primo* se, dada qualquer família $(U_i)_{i\in I}$ de abertos de ϕ, a condição $\bigcup_{i\in I} U_i \in \phi$ implica a existência de pelo menos um índice $j \in I$ tal que $U_j \in \phi$.

Definição 3.22. Designamos por *imersões completamente planas* as imersões g tais que $(g^{-1})_*$ preserva uniões quaisquer de abertos. Denotamos a classe destas imersões por $\mathbb{E}_{\mathtt{C}}$.

Observação 3.23. Em [18] Escardó e Flagg mostraram que os filtros completamente primos definem uma mónada KZ em $\mathbf{Top}_0$. De facto, é fácil verificar que as condições (a) e (b) enunciadas no ponto 2 da Observação 3.4 são também satisfeitas se, para $X \in \mathbf{Top}_0$, considerarmos a família

$$F_{\mathtt{C}}X$$

dos seus filtros completamente primos.

Observaram ainda que as $F_{\complement}$-imersões são as imersões completamente planas, os espaços sóbrios são os suportes das $F_{\complement}$-álgebras e a unidade da mónada $F_{\complement}$ é, para cada $X \in \mathbf{Top}_0$, a conhecida reflexão de X na subcategoria plena $\mathbf{Sob}$, que é trivialmente do tipo KZ. Como consequência, atendendo ao Teorema 2.17 e à Proposição 2.32, temos então que

$$KInj(\mathbb{E}_{\complement}) = \mathbf{Sob}.$$

Teorema 3.24. *Para cada $n \in Card$, $KInj(\mathbb{E}_n)$ é uma subcategoria KZ-reflectiva de $\mathbf{Top}_0$. Estas subcategorias formam uma cadeia crescente cuja união é a subcategoria $\mathbf{Sob}$.*

Demonstração. É claro que, para cada $n \in Card$, toda a imersão completamente plana é n-plana, i.e., $\mathbb{E}_{\complement} \subseteq \mathbb{E}_n$. Atendendo à Proposição 1.44 e à Observação 3.23 obtemos, para cada $n \in Card$, $KInj(\mathbb{E}_n) \subseteq KInj(\mathbb{E}_{\complement}) = \mathbf{Sob}$. Para concluir que também $\mathbf{Sob}$ está contida na união das subcategorias que constituem a cadeia, observemos que para cada $X \in \mathbf{Sob}$ e para cada $n \in Card$, $F_{\complement}X \subseteq F_n X$. Vamos verificar que para $n \geq card(\mathcal{O}X)$ também se tem $F_n X \subseteq F_{\complement}X$. Para tal, consideremos uma família qualquer $(X_k)_{k\in I}$ de abertos de X. Uma vez que $card(\mathcal{O}X) \leq n$, eliminando eventuais repetições encontramos uma subfamília da família inicial com, no máximo, n elementos, digamos, $(Z_j)_{j<n}$, onde, para cada $j < n$, $Z_j = X_k$, para algum $k \in I$. Então $\bigcup_{k\in I} X_k = \bigcup_{j<n} Z_j$, logo se φ é um filtro n-primo de X temos:

$$\bigcup_{k\in I} X_k \in \varphi \Rightarrow \bigcup_{j<n} Z_j \in \varphi \Rightarrow \exists j < n, Z_j \in \varphi \Rightarrow \exists k \in I, X_k \in \varphi.$$

Assim φ é completamente primo, donde concluímos que $F_n X = F_{\complement}X$.

Como $X \in \mathbf{Sob}$, a reflexão de X em $\mathbf{Sob}$ é um isomorfismo, tendo-se $X \cong F_{\complement}X = F_n X$. Logo $X \in KInj(\mathbb{E}_n)$, atendendo à Proposição 3.21. Mais do que isso, a reflexão de X em $\mathbf{Sob}$ coincide com a reflexão de X em $KInj(\mathbb{E}_n)$.

De modo a concluir que a inclusão também se verifica para morfismos, consideremos uma função contínua entre espaços sóbrios, $h : A \to B$. Seja $n = \max\{card(\mathcal{O}A), card(\mathcal{O}B)\}$. Como acabámos de ver $A, B \in KInj(\mathbb{E}_n)$, tendo-se que as reflexões de A e de B em $\mathbf{Sob}$ são isomorfismos e coincidem com as reflexões de A e B em $KInj(\mathbb{E}_n)$. Então $f = \eta_Y^{-1} \cdot F_n f \cdot \eta_X^{-1}$ e, como $KInj(\mathbb{E}_n)$ é fechada para isomorfismos, contém o morfismo f. $\square$

Observação 3.25. Uma vez que $\mathbf{Sob}$ é plena em $\mathbf{Top}_0$, atendendo à Proposição 2.25, sabemos que as subcategorias encontradas são também KZ-reflectivas em $\mathbf{Sob}$.

De facto, para cada $n \in Card$, as subcategorias $KInj(\mathbb{E}_n)$ são KZ-reflectivas em $\mathbf{Sob}$, através da restrição $F_n|_{\mathbf{Sob}}$, de F_n à subcategoria plena dos espaços sóbrios. Além disso, as imersões n-planas em $\mathbf{Sob}$ são as imersões n-planas entre espaços sóbrios.

Observação 3.26. Atendendo a que $\mathbf{Sob}$ é uma subcategoria KZ-monádica de $\mathbf{Top}_0$ sabemos que $KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Top}_0}}) = \mathbf{Sob}$. Vamos verificar que o invólucro Kan-injectivo de $\mathbf{Sob}$

em **Sob** também é **Sob**. Como **Sob** é plena em $\mathbf{Top}_0$, sabemos que

$$\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}} = \mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Top}_0}} \bigcap Mor(\mathbf{Sob}).$$

Então $\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}} \subseteq \mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Top}_0}}$, logo

$$\mathbf{Sob} = KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Top}_0}}) \subseteq KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}}).$$

Atendendo a que $KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}})$ é a subcategoria dos objectos e morfismos de $\mathbf{Top}_0$ Kan-injectivos à direita em $\mathbf{Top}_0$ relativamente aos morfismos da classe $\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}}$, temos $KInj_{\mathbf{Sob}}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}}) = KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}}) \bigcap \mathbf{Sob}$. Então

$$KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Top}_0}}) \bigcap \mathbf{Sob} \subseteq KInj_{\mathbf{Top}_0}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}}) \bigcap \mathbf{Sob}.$$

Portanto concluímos que $\mathbf{Sob} \subseteq KInj_{\mathbf{Sob}}(\mathbf{Sob}^{KInj_{\mathbf{Sob}}})$. A inclusão recíproca verifica-se trivialmente.

Observação 3.27. No final do Capítulo 4, mais precisamente no Corolário 4.26, iremos estender a caracterização das imersões n-planas feitas na Proposição 3.15 e no Teorema 3.17 apenas para $n = 1, 2$, a todo o cardinal n. Veremos que, para cada n, a classe das imersões n-planas é da forma $\mathcal{A}_n^{KInj}$, para uma subcategoria finita $\mathcal{A}_n$ de $\mathbf{Top}_0$.

Capítulo 4

Kan-projectividade em RetLoc

Usando os conceitos de Kan-projectividade à direita e de KZ-co-reflectividade, duais dos conceitos de Kan-injectividade à direita e KZ-reflectividade definidos nos capítulos 1 e 2, vamos construir uma cadeia indexada por $Card$ de subcategorias KZ-co-reflectivas da categoria **RetLoc** dos reticulados locais e dos morfismos de reticulados locais caracterizadas em termos de uma generalização da relação binária "$\ll$", usualmente utilizada no contexto dos reticulados contínuos. Além disso, caracterizamos vários tipos de sobrejecções de **RetLoc** em termos de Kan-projectividade à direita.

Neste capítulo, consideramos todas as subcategorias de **CPO** enriquecidas em **CPO** com a ordem ponto-a-ponto.

4.1 Kan-projectividade e KZ-co-reflectividade

Nesta secção enunciamos os conceitos e resultados duais dos estudados nos dois capítulos iniciais necessários para as secções seguintes.

Seja $\mathcal{X}$ uma categoria enriquecida em **CPO**. A categoria dual, $\mathcal{X}^{op}$, é também enriquecida em **CPO**, com a ordem dada por: dados f^{op} e g^{op} em $\mathcal{X}^{op}$,

$$f^{op} \leq g^{op} \Leftrightarrow f \leq g,$$

onde f^{op} e g^{op} representam os morfismos duais de f e de g, respectivamente.

Deste modo obtemos as seguintes definições.

Definições 4.1. Seja $\mathcal{X}$ uma categoria enriquecida em **CPO** e $h : X \to Y$ um morfismo de $\mathcal{X}$.

1. Dizemos que um objecto A é *Kan-projectivo à direita* relativamente a h se para cada

morfismo $g : A \to Y$, existe $g' : A \to X$ com $h \cdot g' = g$, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \\ & A \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "g'"] \end{tikzcd}$$

é comutativo, e tal que, para cada morfismo $t : A \to X$, é satisfeita a condição:

$$h \cdot t \leq g \Rightarrow t \leq g'. \tag{4.1}$$

Representamos g' por $\frac{g}{h}$.

2. Dizemos que um morfismo $f : A \to B$ é *Kan-projectivo à direita* relativamente a h se A e B são Kan-projectivos à direita relativamente a h e, para cada $g : B \to Y$, se tem

$$\frac{g}{h} \cdot f = \frac{g \cdot f}{h}. \tag{4.2}$$

Ou seja, é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \\ A \arrow[u, "\frac{g \cdot f}{h}"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "\frac{g}{h}"] \end{tikzcd}$$

Notação 4.2. 1. Se $\mathcal{A}$ é uma subcategoria de $\mathcal{X}$ representamos por

$$\mathcal{A}^{KProj}$$

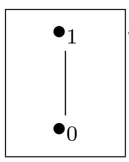
a classe dos morfismos de $\mathcal{X}$ relativamente aos quais todos os objectos e morfismos de $\mathcal{A}$ são Kan-projectivos à direita .

2. Para cada classe $\mathbb{M}$ de morfismos de $\mathcal{X}$ representamos por

$$KProj(\mathbb{M})$$

a subcategoria de $\mathcal{X}$ formada pelos objectos e morfismos que são Kan-projectivos à direita relativamente a cada morfismo de $\mathbb{M}$; designamos este tipo de subcategorias por subcategorias *Kan-projectivas.*

Exemplo 4.3. É fácil concluir que o reticulado local

$D =$ 

.

é Kan-projectivo à direita relativamente a qualquer morfismo $h : X \to Y$ de **RetLoc**: para cada $g : D \to Y$, $\frac{g}{h}$ é o único morfismo de **RetLoc** definido de D para X. Portanto

$$Mor(\mathbf{RetLoc}) = \mathcal{D}^{KProj},$$

onde $\mathcal{D}$ é a subcategoria cujo único morfismo é id_D. (Na verdade, isto é um caso particular da propriedade dual de 1.7.)

Exemplo 4.4. Consideremos a subcategoria $\mathcal{P}$ de **CPO** cujo único morfismo é o morfismo identidade de $P = \{p\}$. Então tem-se:

1. $\mathcal{P}^{KProj}$ é a classe de todos as sobrejecções $g : X \to Y$ de **CPO** que satisfazem a seguinte propriedade:

   (*) Para cada $y \in Y$, o conjunto $g^{-1}(\downarrow y)$ tem um máximo, i.e., $g^{-1}(\downarrow y)$ tem um supremo em X e esse supremo pertence a $g^{-1}(\downarrow y)$.

   De modo a provar o enunciado, comecemos por considerar um sobrejecção $g : X \to Y$ de **CPO** que satisfaça a condição (*). Seja $f : P \to Y$ com $f(p) = y$. Definimos

   $$\frac{f}{g}(p) = \max g^{-1}(\downarrow y)$$

   que, por hipótese, existe. Seja esse máximo x_0. Então, como $x_0 \in g^{-1}(\downarrow y)$, tem-se $g(x_0) \leq y$. Por hipótese, existe algum $z \in X$ tal que $g(z) = y$. Mas então $z \leq x_0$, donde

   $$y = g(z) \leq g(x_0).$$

   Portanto $g \cdot \frac{f}{g}(p) = g(x_0) = y$.

   Além disso, se $h : P \to X$ é tal que $g \cdot h \leq f$ tem-se

   $$g \cdot h(p) \leq f(p) = y,$$

   logo $h(p) \in g^{-1}(\downarrow y)$ e, portanto,

   $$h(p) \leq x_0 = \frac{f}{g}(p).$$

   Reciprocamente, suponhamos que $g : X \to Y$ é um morfismo de **CPO** tal que P é Kan-projectivo à direita relativamente a g. Claro que g é sobrejectiva pois para $y \in Y \backslash g[X]$ e $f : P \to Y$ dada por $f(p) = y$, não é possível encontrar $f' : P \to X$ tal que $g \cdot f' = f$.

   Para mostrar que a condição (*) é satisfeita seja $y \in Y$ e $f : P \to Y$ tal que $f(p) = y$. Por hipótese existe $\frac{f}{g}$. Seja $x_0 = \frac{f}{g}(p)$. Vamos mostrar que $x_0 = \max g^{-1}(\downarrow y)$. Antes de mais, é óbvio que $x_0 \in g^{-1}(\downarrow y)$ já que se tem

   $$g(x_0) = g \cdot \frac{f}{g}(p) = f(p) = y.$$

Seja agora $z \in g^{-1}(\downarrow y)$. Queremos mostrar que $z \leq x_0$. Consideremos $h : P \to X$ tal que $h(p) = z$. Então $g \cdot h(p) = g(z) \leq y$. Ou seja ainda, $g \cdot h \leq g \cdot \frac{f}{g}$. Por definição de $\frac{f}{g}$, tem-se $h \leq \frac{f}{g}$, ou seja, $z = h(p) \leq \frac{f}{g}(p) = x_0$.

2. $KProj(\mathcal{P}^{KProj}) = \mathbf{CPO}$.

   Para o provar basta verificar que $\mathbf{CPO} \subseteq KProj(\mathbb{H})$ onde $\mathbb{H} = \mathcal{P}^{KProj}$. Para tal, seja $g : X \to Y$ um morfismo de $\mathbb{H}$, isto é, g é uma sobrejecção satisfazendo (*), e $f : Z \to Y$ um morfismo em **CPO**. Definimos

$$\frac{f}{g}(z) = \max g^{-1}(\downarrow f(z)).$$

   Trata-se de uma função monótona, já que temos

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 &\Rightarrow f(z_1) \leq f(z_2) \\ &\Rightarrow g^{-1}(\downarrow f(z_1)) \subseteq g^{-1}(\downarrow f(z_2)) \\ &\Rightarrow \max g^{-1}(\downarrow f(z_1)) \leq \max g^{-1}(\downarrow f(z_2)) \\ &\Rightarrow \frac{f}{g}(z_1) \leq \frac{f}{g}(z_2). \end{aligned}$$

   É fácil ver que os morfismos de **CPO** são Kan-projectivos à direita relativamente aos morfismos de $\mathbb{H}$: dados $h : W \to Z$ e $w \in W$,

$$(\frac{f}{g} \cdot h)(w) = \max(g^{-1}(\downarrow f(h(w)))) = \max(g^{-1}(\downarrow (f \cdot h)(w))) = \frac{f \cdot h}{g}(w).$$

De seguida enunciamos os duais das noções de KZ-reflectividade e de mónada KZ. Na primeira fazemos uso do Corolário 2.6.

Definições 4.5. 1. Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ diz-se *KZ-co-reflectiva* em $\mathcal{X}$ se for co-reflectiva com o respectivo functor co-reflector $G : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ localmente monótono e tal que a co-unidade ε satisfaz as seguintes condições:

   (a) $\mathcal{A} \subseteq KProj(\{\varepsilon_X : X \in \mathcal{X}\})$

   (b) $\frac{\varepsilon_X \cdot g}{g} = g$, para cada morfismo $g : A \to GX$ de $\mathcal{A}$.

2. Dizemos que a comónada (H, ε, δ) em $\mathcal{X}$ é uma *comónada KZ* se e só se H é um functor localmente monótono tal que, para cada $X \in \mathcal{X}$,

$$\varepsilon_{HX} \leq H\varepsilon_X,$$

   ou, de modo equivalente, $H\varepsilon_X \dashv_R \delta_X$. Denotamos a categoria das H-co-álgebras por ${}^H\mathcal{X}$.

Para o conceito dual de H-imersão usamos o termo "H-quociente":

Definição 4.6. Se $H : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ é um functor localmente monótono entre categorias enriquecidas em **CPO**, um morfismo f de $\mathcal{X}$ diz-se um *H-quociente* se Hf possui adjunto direito reflectivo em $\mathcal{A}$, quer dizer, existe um morfismo $(Hf)_* \in \mathcal{A}$ tal que

$$Hf \dashv_R (Hf)_*.$$

No teorema seguinte enunciamos alguns resultados que iremos utilizar, obtidos por dualização de proposições e teoremas obtidos nos capítulos 1 e 2.

Teorema 4.7. *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria enriquecida em* **CPO**.

1. *Toda a subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ KZ-co-reflectiva e fechada para adjuntos esquerdos co-reflectivos coincide, a menos de isomorfismo de categorias, com a categoria de co-álgebras determinada por uma comónada KZ em $\mathcal{X}$. Além disso,*

   $$KProj(\mathcal{A}^{KProj}) = \mathcal{A}.$$

2. *Dada uma comónada KZ em $\mathcal{X}$ tendo como endofunctor $H : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ a subcategoria das H-co-álgebras coincide, a menos de isomorfismo de categorias, com a subcategoria $KProj(\mathbb{Q})$, onde $\mathbb{Q}$ representa a classe dos H-quocientes. i.e.,*

   $${}^{H}\mathcal{X} \simeq KProj(\mathbb{Q}).$$

   Além disso, os H-quocientes são precisamente a maior classe de morfismos relativamente à qual as H-co-álgebras e os morfismos de H-co-álgebras são Kan-projectivos à direita.

4.2 Kan-projectividade em RetLoc

Nesta e na próxima secção vamos trabalhar na categoria dos reticulados locais, **RetLoc**, enriquecida em **CPO** com a ordem ponto-a-ponto.

Observação 4.8. Qualquer morfismo $h : X \to Y$ de **RetLoc** preserva supremos arbitrários, portanto possui adjunto direito h_* em $\mathbf{SRet}_1$ dado por:

$$h_*(y) = \bigvee\{x \in X : h(x) \leq y\}. \tag{4.3}$$

É fácil concluir que h é sobrejectivo se e só se esta adjunção é reflectiva. Com efeito, sendo h sobrejectivo, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y = h(x)$, logo $y = h(x) \leq (h \cdot (h_* \cdot h))(x) = (h \cdot h_*)(y) \leq y$, portanto $(h \cdot h_*)(y) = y$.

Exemplo 4.9. Em **RetLoc** toda a cadeia finita é Kan-projectiva à direita relativamente a sobrejecções.

Com efeito, seja A a cadeia finita $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$ e seja $h : X \to Y$ uma sobrejecção de **RetLoc**. Seja $g : A \to Y$ um morfismo de **RetLoc**. Vamos mostrar que $\frac{g}{h} : A \to X$ existe, sendo definido por:

$$\frac{g}{h}(a) = \vee h^{-1}(\downarrow g(a)) \quad \text{i.e.,} \quad \frac{g}{h}(a) = (h_* \cdot g)(a), \quad \text{se} \quad a \neq 0, \tag{4.4}$$

e

$$\frac{g}{h}(0) = 0_X.$$

É fácil ver que, desta forma, $\frac{g}{h}$ é uma função monótona, dado que:

$$\begin{aligned} a \leq a' \quad &\Rightarrow \quad \downarrow g(a) \subseteq \downarrow g(a') \\ &\Rightarrow \quad \vee h^{-1}(\downarrow g(a)) \leq \vee h^{-1}(\downarrow g(a')). \end{aligned}$$

Como A é uma cadeia finita, concluímos que $\frac{g}{h}$ preserva todos os ínfimos e supremos não vazios; por definição preserva também os vazios. Logo trata-se de um morfismo de **RetLoc**.

Além disso, $h(\frac{g}{h}(0)) = h(0_X) = 0_Y = g(0)$ e, para $a \neq 0$,

$$h(\frac{g}{h}(a)) = h \cdot h_* \cdot g(a) = g(a),$$

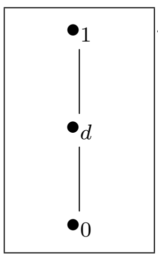
atendendo ao facto de $h \cdot h_* = id_Y$, uma vez que, por hipótese, h é uma sobrejecção.

Seja agora $t : A \to X$ um morfismo de **RetLoc** tal que $h \cdot t \leq g$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $h(t(a_i)) \leq g(a_i)$, ou seja, $t(a_i) \in h^{-1}(\downarrow g(a_i))$, e, portanto,

$$t(a_i) \leq \vee h^{-1}(\downarrow g(a_i)) = \frac{g}{h}(a_i).$$

Logo, $t \leq \frac{g}{h}$.

A proposição seguinte dá uma caracterização das sobrejecções de **RetLoc**, à custa do reticulado

$D_1 =$  .

Proposição 4.10. *Os morfismos sobrejectivos de* **RetLoc** *são exactamente os morfismos h relativamente aos quais D_1 é Kan-projectivo à direita.*

Demonstração. Seja $h : X \to Y$ uma sobrejecção de **RetLoc**. Como D_1 é uma cadeia finita então, atendendo ao Exemplo 4.9, D_1 é Kan-projectivo à direita relativamente a h.

Reciprocamente, se D_1 é Kan-projectivo à direita relativamente ao morfismo $h : X \to Y$ de **RetLoc**, considerando para cada $y \in Y$ o morfismo $g_y : D_1 \to Y$ em **RetLoc** tal que $g_y(d) = y$, existe o morfismo $\frac{g_y}{h}$ e tem-se $h \cdot \frac{g_y}{h}(d) = g_y(d) = y$, ou seja, existe $x_0 := \frac{g_y}{h}(d)$ tal que $h(x_0) = y$. □

De forma análoga à proposição que acabámos de provar, em seguida caracterizaremos vários tipos de sobrejecções de **RetLoc**. Para tal necessitamos das seguintes noções.

Definições 4.11. Consideremos um morfismo $h : X \to Y$ de **RetLoc**. Dizemos que h é um *quociente* se h é uma sobrejecção, ou seja, se $h \dashv_R h_*$, com $h_* \in \mathbf{SRet}_1$. Dizemos que um quociente é um *quociente denso* se $h_*(0_Y) = 0_X$. A condição $h_*(0_Y) = 0_X$ significa que

$$\vee\{z \in X : h(z) = 0_Y\} = 0_X,$$

ou seja, que o único elemento de X que tem imagem 0_Y através de h é o elemento 0_X. Um *quociente plano* é um quociente h tal que h_* preserva supremos de famílias finitas (incluindo as vazias).

Sejam D e D_1 os reticulados definidos no Exemplo 4.3 e antes da Proposição 4.10. Denotamos por

$$f : D_1 \to D$$

o morfismo definido por $f(1) = 1$ e $f(d) = f(0) = 0$.

Proposição 4.12. *Os quocientes densos de* **RetLoc** *são exactamente os morfismos h relativamente aos quais o morfismo f é Kan-projectivo à direita.*

Demonstração. Seja $h : X \to Y$ um quociente denso. Pelo Exemplo 4.9 sabemos que D e D_1 são Kan-projectivos à direita relativamente a h.

De modo a concluir que f é Kan-projectivo à direita relativamente a h, vamos verificar que, para cada morfismo $g : D \to Y$ de **RetLoc** e para cada $a \in D_1$, é válida a igualdade

$$\frac{g \cdot f}{h}(a) = (\frac{g}{h} \cdot f)(a). \tag{4.5}$$

Esta igualdade é trivialmente satisfeita para $a \neq d$. Para $a = d$, usando a fórmula (4.4) obtida no Exemplo 4.9 e o facto de h ser denso, temos

$$\frac{g \cdot f}{h}(d) = h_* \cdot (g \cdot f)(d) = h_* g(0) = h_*(0_Y) = 0_X = \frac{g}{h}(0_Y) = (\frac{g}{h})f(d).$$

Reciprocamente, suponhamos que f é Kan-projectivo à direita relativamente a h. Então D_1 é Kan-projectivo à direita relativamente a h, portanto a adjunção $h \dashv h_*$ é reflectiva, i.e., h é uma sobrejecção. Para concluir que $h_*(0_Y) = 0_X$ basta atender à hipótese de f ser

Kan-projectivo à direita relativamente a h e de, portanto, ser válida, para cada $a \in D_1$, a igualdade (4.5): de facto, como D e D_1 são cadeias finitas, atendendo à fórmula (4.4) para $a = d$, obtemos

$$h_*(0_Y) = h_* \cdot (g \cdot f)(d) = \frac{g \cdot f}{h}(d) = (\frac{g}{h})f(d) = \frac{g}{h}(0_Y) = 0_X.$$

□

Observação 4.13. 1. Dualizando o ponto 2 da Proposição 1.20 e o Corolário 1.22, obtemos o seguinte: $\mathbf{RetLoc}^{KProj}$ é a classe de todas as sobrejecções $h : X \to Y$ tais que $h_* \in \mathbf{RetLoc}$, tendo-se, neste caso, para cada morfismo $g : Z \to Y$, a igualdade

$$\frac{g}{h} = h_* \cdot g. \tag{4.6}$$

2. Além disso, dada uma sobrejecção $h : X \to Y$ e um morfismo $g : Z \to Y$ em **RetLoc**, se a composição $h_* \cdot g$ pertencer a **RetLoc** então $\frac{g}{h}$ existe e define-se pela fórmula (4.6). Com efeito, por um lado temos $h \cdot \frac{g}{h} = h \cdot h_* \cdot g = g$, atendendo a que, por hipótese, $h \cdot h_* = id_X$. Por outro lado, para cada $t \in \mathbf{RetLoc}$, uma vez que $id_Y \leq h_* \cdot h$, temos

$$\begin{aligned} h \cdot t \leq g \quad &\Rightarrow \quad h_* \cdot h \cdot t \leq h_* \cdot g \\ &\Rightarrow \quad t \leq h_* \cdot g \\ &\Rightarrow \quad t \leq \frac{g}{h}. \end{aligned}$$

Definição 4.14. Para cada $n \in Card$, com $n \geq 1$, dizemos que um quociente h é um *quociente n-plano* se h_* preserva supremos de famílias de cardinalidade menor ou igual a n. Os quocientes designam-se por *quocientes 0-planos*. Representamos a classe de todos os quocientes n-planos por

$$\mathbb{Q}_n.$$

Observações 4.15. 1. É claro que, dados $m, n \in Card$, se $m \leq n$ então $\mathbb{Q}_n \subseteq \mathbb{Q}_m$.

2. Os quocientes 1-planos são os densos e os quocientes 2-planos são os quocientes h tais que h_* preserva supremos de conjuntos finitos (incluindo o vazio). Deste modo, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$, as classes $\mathbb{Q}_n$ coincidem com a classe $\mathbb{Q}_2$.

3. Sejam $\mathcal{D}_0$ a subcategoria cujo único objecto é D_1 (ver antes da Proposição 4.12) e cujo único morfismo é id_{D_1} e $\mathcal{D}_1$ a subcategoria cujo único morfismo não trivial é $f : D_1 \to D$ (ver antes da Proposição 4.12 e Exemplo 4.3). Nas proposições 4.10 e 4.12 mostrámos que

$$\mathbb{Q}_0 = \mathcal{D}_0^{KProj} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}_1 = \mathcal{D}_1^{KProj}.$$

Notação 4.16. Recordemos a construção do reticulado local livre gerado por um conjunto não vazio X:

Definimos o inf-semi-reticulado $SX \in \mathbf{SRet}_1$, constituído por todos os subconjuntos finitos de X, com a relação de ordem parcial dada por $A \leq B$ se e só se $B \subseteq A$, com $A, B \in SX$. Assim, $A \wedge B = A \cup B$ e $1_{SX} = \emptyset$.

Interessa realçar que quando X é finito então SX é finito e quando $card(X)$ é infinito $card(SX) = card(X)$.

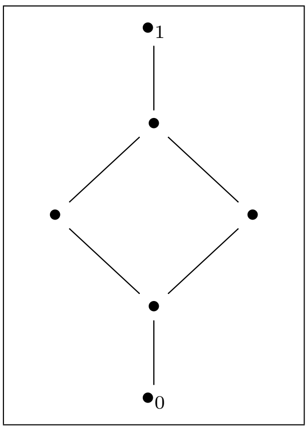
O reticulado local livre gerado por X é o reticulado local DSX, formado pelos subconjuntos descendentes de SX, com a relação de ordem parcial dada pela inclusão, quer dizer, é a imagem de SX pelo functor reflector $D : \mathbf{SRet}_1 \to \mathbf{RetLoc}$, já referido no Exemplo 2.11.

Notemos que, para cada $x \in X$, $\downarrow \{x\}$ denota o conjunto $\{A \in SX : x \in A\}$ que pertence a DSX. Então em DSX temos $\bigvee_{x \in X} \downarrow \{x\} = \bigcup_{x \in X} \downarrow \{x\} = \{A \in SX : A \neq \emptyset\}$, portanto $\bigvee_{x \in X} \downarrow \{x\} = SX \backslash \{1_{SX}\}$ é coberto por $1_{DSX} = SX$.

Seja n um cardinal considerado apenas como um conjunto. A seguir, o reticulado local livre gerado por n, DSn, será denotado por D_n.

Assim, $D_0 = \{0, 1\}$, com $0 < 1$. Para $n = 1$ obtemos a cadeia $D_1 = \{0, d, 1\}$, com $0 < d < 1$, já usada nas Proposições 4.10 e 4.12. No caso $n = 2$ obtemos o reticulado local

$D_2 =$



A seguir $f : D_1 \to D_0$ é o morfismo definido por $f(1) = 1$ e $f(d) = f(0) = 0$, já referido no Exemplo 4.3 e antes da Proposição 4.12, e $f_n : D_1 \to D_n$ o morfismo definido por $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ e

$$f_n(d) = \bigvee_{k \in n} \downarrow \{k\}.$$

Observação 4.17. Seja $\mathcal{O} : \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{RetLoc}^{op}$ o functor que a cada espaço topológico faz corresponder o reticulado local dos seus abertos. Sabemos que ele estabelece uma equivalência de categorias entre **Sob** e a categoria **RetEsp** dos reticulados espaciais. É claro que o reticulado local D_2, como definido na Notação 4.16, é, a menos de isomorfismo, a imagem de A_2 por $\mathcal{O}$, onde A_2 é o espaço topológico definido na Notação 3.16.

Teorema 4.18. *Para cada $n > 1$, com $n \in Card$, os quocientes n-planos são exactamente os morfismos $h \in$ **RetLoc** tais que $f : D_1 \to D_0$ e $f_n : D_1 \to D_n$ são Kan-projectivos à direita relativamente a h, quer dizer, $\mathbb{Q}_n = \mathcal{D}_n^{KProj}$, onde $\mathcal{D}_n$ é a subcategoria de* **RetLoc** *cujos únicos morfismos não triviais são f e f_n*

Observação. Consideremos um semi-reticulado $R \in \mathbf{SRet}_1$ e o reticulado local dos descendentes de R, $(DR, \subseteq)$. Sabemos que, dado $W \subseteq R$, $W \in DR$ se e só se $W = \downarrow W$ e que

$$\downarrow W = \cup\{\downarrow w : w \in W\} = \vee\{\downarrow w : w \in W\},$$

onde $\downarrow w \subseteq R$ é definido por $\downarrow w = \{r \in R : r \leq w\}$. Consideremos o conjunto

$$\overline{R} = \{\downarrow r : r \in R\}. \tag{4.7}$$

Dado $W \in DR$, como $W = \downarrow W$, então $w \in W$ se e só se $\downarrow w \subseteq W$, pelo que concluímos que $W = \downarrow W = \bigcup\{\downarrow w : w \in W\} = \bigcup\{\downarrow w : \downarrow w \subseteq W\}$, ou seja, no reticulado local DR, cada $W \in DR$ satisfaz a igualdade

$$W = \bigvee\{A \in \overline{R} : A \leq W\}. \tag{4.8}$$

Demonstração. Seja $h : Z \to Y$ um quociente n-plano. Então h é um quociente denso, portanto f é Kan-projectivo à direita relativamente a h. Para concluir que D_n é Kan-projectivo à direita relativamente a h, vamos mostrar que se $g : D_n \to Y$ pertence a **RetLoc** então $h_* \cdot g$ também; daqui concluiremos, atendendo à segunda parte da Observação 4.13, que

$$\frac{g}{h} = h_* \cdot g. \tag{4.9}$$

Sabemos que $h_* \cdot g \in \mathbf{SRet}_1$ e que, por h ser densa, preserva o primeiro elemento. Pela hipótese sabemos também que $h_* \cdot g$ preserva supremos de subconjuntos de D_n de cardinalidade inferior ou igual a n. Pretendemos agora assegurar que o mesmo acontece para supremos não vazios quaisquer, ou seja, dado um conjunto $\{W_t : t \in T\} \subseteq D_n$, tem-se sempre

$$h_* \cdot g(\bigvee_{t \in T} W_t) = \bigvee_{t \in T} h_* \cdot g(W_t).$$

Consideremos o subconjunto de D_n dado por

$$\overline{Sn} = \{\downarrow s : s \in Sn\},$$

definido a partir de Sn de acordo com a fórmula (4.7). Pela fórmula (4.8) sabemos que $W_t = \bigvee\{A \in \overline{Sn} : A \leq W_t\}$, para cada $t \in T$. Então temos:

$$\begin{aligned} h_* \cdot g(\bigvee_{t \in T} W_t) &= h_* \cdot g(\bigvee_{t \in T} (\bigvee\{A \in \overline{Sn} : A \leq W_t\})) \\ &= h_* \cdot g(\bigvee\{A \in \overline{Sn} : A \leq W_t, \text{ para algum } t \in T\}). \end{aligned}$$

Notemos que a cardinalidade de $\overline{Sn}$ é finita se n o for e igual a n se n for infinito. Então, por hipótese, h_* preserva supremos de $g[M]$, para todo o $M \subseteq \overline{Sn}$. Além disso, $g \in \mathbf{RetLoc}$, portanto temos:

$$\begin{aligned}
(h_* \cdot g)(\bigvee_{t \in T} W_t) &= h_*(\bigvee\{g(A) : A \in \overline{Sn} \text{ e } A \leq W_t, \text{ para algum } t \in T\}) \\
&= \bigvee\{h_* \cdot g(A) : A \in \overline{Sn} \text{ e } A \leq W_t, \text{ para algum } t \in T\} \\
&= \bigvee(\bigcup_{t \in T}\{h_* \cdot g(A) : A \in \overline{Sn} \text{ e } A \leq W_t\}) \\
&= \bigvee_{t \in T}(\bigvee\{h_* \cdot g(A) : A \in \overline{Sn} \text{ e } A \leq W_t\}) \\
&= \bigvee_{t \in T}(h_* \cdot g)(\bigvee\{A \in \overline{Sn} : A \leq W_t\}) \\
&= \bigvee_{t \in T}(h_* \cdot g)(W_t).
\end{aligned}$$

De modo a verificar que f_n é Kan-projectivo à direita relativamente a h, basta agora ter em conta a igualdade (4.9) e usar a fórmula (4.4) do Exemplo 4.9 aplicada a $g \cdot f_n$; em particular,

$$\frac{g \cdot f_n}{h}(d) = h_* \cdot g \cdot f_n(d) = (\frac{g}{h}) \cdot f_n(d).$$

Reciprocamente, suponhamos que f e f_n são Kan-projectivos à direita relativamente ao morfismo de **RetLoc** $h : Z \to Y$. Então h é um quociente denso, restando mostrar que h_* preserva supremos de subconjuntos não vazios de Y, com cardinalidade menor ou igual a n. Para tal, seja $\{y_k\}_{k \in n}$ um conjunto de elementos de Y e consideremos a função $p : n \to Y$ que a cada $k \in n$ faz corresponder y_k. Seja $\eta_n : n \to UD_n$ o morfismo universal correspondente a D_n na reflexão de $\mathbf{SRet}_1$ em **RetLoc**, onde $U : \mathbf{RetLoc} \to \mathbf{Conj}$ é o functor de esquecimento ([27] e [33]-pg 53). Então sabemos que existe um único morfismo $g : D_n \to Y$ em **RetLoc** tal que $p = Ug \cdot \eta_n$. Notemos que daqui resulta que

$$g \cdot \eta_n(k) = g(\downarrow \{k\}) = p(k) = y_k.$$

Como f_n é Kan-projectivo à direita relativamente a h, então existem em **RetLoc** os morfismos $\frac{g}{h}$ e $\frac{g \cdot f_n}{h}$ satisfazendo a igualdade $\frac{g \cdot f_n}{h} = \frac{g}{h} \cdot f_n$. Em particular, para o elemento d de D_1, temos

$$\frac{g \cdot f_n}{h}(d) = \frac{g}{h} \cdot f_n(d). \tag{4.10}$$

Por um lado temos, atendendo à fórmula (4.4) do Exemplo 4.9:

$$\frac{g \cdot f_n}{h}(d) = h_* \cdot g(f_n(d)) = h_* \cdot g(\bigvee_{k \in n} \downarrow \{k\}) = h_*(\bigvee_{k \in n} g(\downarrow \{k\})) = h_*(\bigvee_{k \in n} y_k). \tag{4.11}$$

Por outro lado, uma vez que $\frac{g}{h} \in \mathbf{RetLoc}$, temos

$$\frac{g}{h}(f_n(d)) = \frac{g}{h}(\bigvee_{k \in n} \downarrow \{k\}) = \bigvee_{k \in n} \frac{g}{h}(\downarrow \{k\}). \tag{4.12}$$

Além disso, por definição de $\frac{g}{h}$, temos $h \cdot \frac{g}{h} = g$, logo $h_* \cdot h \cdot \frac{g}{h} = h_* \cdot g$. Como $id_X \leq h_* \cdot h$, concluímos que $\frac{g}{h} \leq h_* \cdot g$, portanto $\frac{g}{h}(\downarrow \{k\}) \leq h_* \cdot g(\downarrow \{k\}) = h_*(y_k)$. Donde se conclui que

$$\bigvee_{k \in n} \frac{g}{h}(\downarrow \{k\}) \leq \bigvee_{k \in n} h_*(y_k).$$

Então, atendendo a (4.10), (4.11) e (4.12), temos $h_*(\bigvee_{k\in n} y_k) \leq \bigvee_{k\in n} h_*(y_k)$.

A desigualdade recíproca é, por definição de supremo, sempre válida. □

Observação 4.19. Na demonstração do último teorema vimos que, em particular, os reticulados D_n são Kan-projectivos à direita relativamente a quocientes n-planos. Mais do que isso, é fácil verificar que os reticulados D_n são Kan-projectivos à direita relativamente a todos os quocientes. Com efeito, seja $D : \mathbf{SRet}_1 \to \mathbf{RetLoc}$ a KZ-reflexão de $\mathbf{SRet}_1$ na sua subcategoria **RetLoc**, descrita no Exemplo 2.11. Dado um quociente $h : X \to Y$ e um morfismo $g : D_n \to Y$, o morfismo $\frac{g}{h}$ é definido por $\frac{g}{h} = \widehat{g}$, onde $\widehat{g} : D_n = DS_n \to X$ é o único morfismo de **RetLoc** que satisfaz $h_* \cdot g \cdot \eta_{S_n} = \widehat{g} \cdot \eta_{S_n}$, com η_{S_n} o morfismo universal de S_n em **RetLoc**.

4.3 As subcategorias $\mathbf{RetLoc} - \lhd_n$ de RetLoc

Nesta secção vamos ver que os quocientes n-planos são os H_n-quocientes de uma comónada KZ H_n : $\mathbf{RetLoc} \to \mathbf{RetLoc}$. Para isso, vamos usar alguns resultados de [6] descritos na primeira parte da próxima observação.

Antes de mais consideremos a conhecida reflexão de **RetLoc** em $\mathbf{SRet}_1$ (2.3.2 de [33]) definida pelo functor de todos os descendentes, $DS = \{U \subseteq S : U =\downarrow U\}$, $S \in \mathbf{SRet}_1$, com a reflexão de cada $S \in \mathbf{SRet}_1$, $d_S : S \to DS = \{U \subseteq S : U =\downarrow U\}$ dada por $d_S(s) =\downarrow s$, para cada $s \in S$.

Recordamos que DS é um reticulado local com a ordem parcial dada pela inclusão, os ínfimos dados pelas intersecções e os supremos pelas reuniões. Além disso, DS coincide com o seu menor subreticulado local que contém $d_S[S]$.

Observação 4.20. 1. Em [6] Banaschewski considerou subcategorias $\mathcal{K}$ da categoria $\mathbf{SRet}_1$ obtidas por meio da seguinte construção:

Seja

$$(\mathcal{S}A)_{A \in Obj(\mathbf{SRet}_1)}$$

uma família onde, para cada objecto A, $\mathcal{S}A$ é um subconjunto das partes de A, obedecendo às seguintes condições:

(a) $\{a \wedge t : t \in S\} \in \mathcal{S}A$, para cada $a \in A$ e cada $S \in \mathcal{S}A$.

(b) para cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{SRet}_1$ e cada $S \in \mathcal{S}A$, $f[S] \in \mathcal{S}B$.

A categoria $\mathcal{K}$ associada é então constituída pelos objectos A de $\mathbf{SRet}_1$ tais que, para cada $S \in \mathcal{S}A$, $\bigvee S$ existe e $a \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{a \wedge t : t \in S\}$, e pelos morfismos $f : A \to B$ de $\mathbf{SRet}_1$ tais que $f(\bigvee S) = \bigvee f[S]$, $S \in \mathcal{S}A$.

Para uma subcategoria $\mathcal{K}$ obtida desse modo, Banaschewski provou que **RetLoc** é reflectiva em $\mathcal{K}$ sendo a reflexão de cada objecto A de $\mathcal{K}$, $\eta_A : A \to RA$, dada por

$$RA = \{U \in DA : (S \subseteq U \text{ e } S \in \mathcal{S}A) \Rightarrow \bigvee S \in U\}$$

e

$$\eta_A(a) = \downarrow a, \text{ para cada } a \in A.$$

Para cada $f : A \to L$ em $\mathcal{K}$, com $L \in$ **RetLoc**, o único morfismo $\overline{f} : RA \to L$ tal que $\overline{f} \cdot \eta_A = f$ é dado por $\overline{f}(U) = \bigvee f[U]$ e, em cada $L \in$ **RetLoc**, a co-unidade $\varepsilon_L : RL \to L$ define-se por $\varepsilon_L(U) = \bigvee U$, $U \in RL$.

A reflectividade de **RetLoc** em $\mathcal{K}$ determina uma relação binária em cada reticulado local L definida por

$$x \lhd a \textit{ se e só se } (a \leq \varepsilon_L(U) \Rightarrow \eta_L(x) \subseteq U, \text{ para todo o } U \in RL).$$

Banaschewski concluiu também que a comónada induzida em **RetLoc** pela reflexão de **RetLoc** em $\mathcal{K}$ é do tipo KZ, mostrando que as co-álgebras da comónada coincidem com os reticulados locais L que satisfazem as condições:

(i) Para cada $a \in L$, $a = \bigvee_{x \lhd a} x$.

(ii) Dados, $x, a, b \in L$, se $x \lhd a$ e $x \lhd b$ então $x \lhd a \wedge b$ e $1_L \lhd 1_L$.

2. Para cada $n \in \mathit{Card}$, consideremos a família

$$(\mathcal{S}_n A)_{A \in \mathbf{SRet}_1}$$

onde

$$\mathcal{S}_n A = \{P \subseteq A : card(P) \leq n\}, \text{ para } n \geq 1$$

e

$$\mathcal{S}_0 A = \emptyset.$$

É fácil ver que $\mathcal{S}_n$ satisfaz as condições descritas em 1 para $\mathcal{S}$. Com efeito, para $P \subseteq A$ com $card(P) \leq n$ e $f : A \to B$ é claro que ambos os conjuntos $\{a \wedge t : t \in P\}$ e $f[P]$ têm cardinalidade não superior a n.

A última observação permite considerar a notação seguinte.

Notação 4.21. 1. Para cada $n \in Card$, seja $\mathcal{K}_n$ a subcategoria de $\mathbf{SRet}_1$ obtida por meio da família $(\mathcal{S}_n A)_{A \in \mathbf{SRet}_1}$, como descrito na Observação 4.20. Sendo $I_n : \mathbf{RetLoc} \to \mathcal{K}_n$ o functor inclusão de **RetLoc** em $\mathcal{K}_n$, denotamos por

$$H_n : \mathbf{RetLoc} \to \mathbf{RetLoc}$$

o functor composição do functor reflector de $\mathcal{K}_n$ em **RetLoc** com I_n.

Da observação anterior conclui-se facilmente que para cada $L \in \mathbf{RetLoc}$,

$$H_n L = \{U \in DL : (S \subseteq U \text{ e } S \in \mathcal{S}_n L) \Rightarrow \bigvee S \in U\}.$$

Além disso, para cada morfismo $f : L \to M$ de **RetLoc**, usando as notações da Observação 4.20, temos $H_n f = R_n f = \overline{\eta_M \cdot f}$. Como, para $U \in H_n M$, $\overline{\eta_M \cdot f}(U) = \bigvee(\eta_M \cdot f)[U]$, obtemos então que

$$H_n f(U) = \bigvee\{\downarrow f(u) : u \in U\}.$$

2. De modo a obter uma caracterização de cada uma das subcategorias $KProj(\mathbb{Q}_n)$ consideremos, para cada $n \in Card$ e para cada $L \in \mathbf{RetLoc}$, a relação binária definida em L por:

$$x \lhd_n a \Leftrightarrow (\forall U \in H_n L, a \leq \vee U \Rightarrow x \in U),$$

provavelmente usada pela primeira vez por Raney em [35], no caso em que $n = 0$.

Vamos designar por **RetLoc**-$\lhd_n$ a subcategoria de **RetLoc** cujos objectos são os reticulados locais L que satisfazem as condições:

(i) Para cada $a \in L$, $a = \bigvee_{x \lhd_n a} x$

(ii) Dados $x, a, b \in L$, se $x \lhd_n a$ e $x \lhd_n b$ então $x \lhd_n a \wedge b$, e $1_L \lhd_n 1_L$,

e cujos morfismos são os morfismos de reticulados locais que preservam a relação "$\lhd_n$".

Observação 4.22. Em [6] Banaschewski fala de quocientes $\mathcal{K}$-planos, onde $\mathcal{K}$ pode ser uma categoria do tipo descrito na Observação 4.20. Um quociente $\mathcal{K}$-plano é simplesmente um quociente h tal que $h_* \in \mathcal{K}$. Assim, os quocientes n-planos são precisamente os quocientes $\mathcal{K}_n$-planos.

De notar que em [6], Banaschewski estava interessado em caracterizar os reticulados projectivos relativamente a quocientes $\mathcal{K}$-planos, daí o seu interesse na caracterização dos objectos da categoria das co-álgebras da comónada induzida em **RetLoc** pela reflexão de **RetLoc** em $\mathcal{K}$.

No teorema a seguir caracterizamos também os morfismos da categoria das co-álgebras para $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$. Esta caracterização facilmente se estende a categorias $\mathcal{K}$ do tipo descrito na Observação 4.20.

Teorema 4.23. *Para cada $n \in Card$, H_n : **RetLoc** $\to$ **RetLoc** é o functor de uma comónada KZ cuja categoria das co-álgebras é **RetLoc** $- \lhd_n$. Além disso os H_n-quocientes são os quocientes n-planos e, portanto,*

$$\mathbf{RetLoc} - \lhd_n = KProj(\mathbb{Q}_n).$$

Demonstração. Atendendo à Observação 4.20 já sabemos que $\mathbf{H}_n = (H_n, \varepsilon, \delta)$ é uma comónada em **RetLoc**, com $\varepsilon_L : H_nL \to L$ e $\delta_L : H_nL \to H_n^2L$ definidos por, para cada $U \in H_nL$:

$$\varepsilon_L(U) = \bigvee U$$

e

$$\begin{aligned}\delta_L(U) &= H_n\eta_L(U)\\ &= \bigvee\{\downarrow \eta_L(u) : u \in U\}\\ &= \bigvee\{\downarrow (\downarrow u) : u \in U\}\end{aligned}$$

Vamos verificar que os H_n-quocientes são os quocientes n-planos.

Seja $f : A \to B$ um quociente n-plano, i.e., como aplicação f é sobrejectiva e o adjunto direito de f em $\mathbf{SRet}_1$, f_*, pertence a $\mathcal{K}_n$. Como visto na Observação 4.8 a sobrejectividade de f significa que f e f_* formam uma adjunção reflectiva e, portanto, temos $f \dashv_R f_*$ em $\mathcal{K}_n$. Seja R_n o functor reflector de $\mathcal{K}_n$ em **RetLoc**. R_n é localmente monótono e é claro que todo o functor localmente monótono preserva adjunções reflectivas. Logo $R_nf \dashv_R R_nf_*$, ou seja, $H_nf \dashv_R R_nf_*$.

Reciprocamente, a existência de uma adjunção reflectiva $H_nf \dashv_R (H_nf)_*$, para $f : A \to B$ em **RetLoc**, implica que

$$f \dashv_R (\varepsilon_A \cdot (H_nf)_* \cdot \eta_B).$$

Com efeito, por um lado,

$$\begin{aligned}f \cdot \varepsilon_A \cdot (H_nf)_* \cdot \eta_B &= f \cdot \varepsilon_A \cdot (R_nf)_* \cdot \eta_B\\ &= \varepsilon_B \cdot (R_nf) \cdot (R_nf)_* \cdot \eta_B\\ &= \varepsilon_B \cdot \eta_B\\ &= id_B.\end{aligned}$$

Pelo outro lado,

$$\varepsilon_A \cdot (H_nf)_* \cdot \eta_B \cdot f = \varepsilon_A \cdot (H_nf)_* \cdot H_nf \cdot \eta_A \geq \varepsilon_A \cdot \eta_A = id_A.$$

Portanto, $f \dashv_R f_*$, com $f_* = \varepsilon_A \cdot (R_n f)_* \cdot \eta_B$. Como f_* é uma composição de morfismos de $\mathcal{K}_n$, f_* então preserva supremos de famílias indexadas por conjuntos de cardinalidade menor ou igual a n. Logo f é um quociente n-plano.

Para completar a demonstração do teorema falta mostrar que a categoria das co-álgebras da comónada H_n é **RetLoc**$-\lhd_n$. A caracterização dos objectos de **RetLoc**$-\lhd_n$ sai imediatamente de [6]: basta ver que a relação $\lhd$ descrita na Observação 4.20 se traduz para $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$ na relação $\lhd_n$.

Resta então mostrar que os morfismos de **RetLoc**-$\lhd_n$ são exactamente os morfismos de co-álgebras.

Para isso, observemos primeiro que decorre de [19] (ver Observação 2.28) que as co-álgebras da comónada H_n são os reticulados locais L Kan-projectivos à direita relativamente a H_n-quocientes e a estrutura de co-álgebra é dada por $l = \frac{id_L}{\varepsilon_L}$, tendo-se $\varepsilon_L \cdot l = id_L$ e $l \cdot \varepsilon_L \leq id_{H_n L}$. Por outro lado, na demonstração da primeira proposição de [6], onde se estuda um caso geral que inclui as categorias $\mathcal{K}$ consideradas na Observação 4.20 e, portanto, também as categorias $\mathcal{K}_n$, prova-se que cada co-álgebra (L, l) satisfaz as seguintes condições:

$$l(a) = \bigvee_{x \lhd_n a} \downarrow x, \quad a \in L \tag{4.13}$$

e

$$a \lhd_n b \Leftrightarrow \downarrow a \subseteq l(b), \quad a, b \in L. \tag{4.14}$$

Sejam agora (L, l) e (M, m) duas co-álgebras e $(f : L \to M)$ um morfismo de co-álgebras, i.e., verifica-se a igualdade $H_n f \cdot l = m \cdot f$.

De modo a concluir que f preserva a relação "$\lhd_n$", sejam $a, b \in L$ tais que $a \lhd_n b$. Temos, então, onde na terceira linha se usa o facto de $(H_n f)(\downarrow a) = \cup\{\downarrow f(z) : z \leq a\} = \downarrow f(a)$:

$$\begin{array}{lll} a \lhd_n b & \Rightarrow \downarrow a \subseteq l(b) & \text{por (4.14)} \\ & \Rightarrow (H_n f)(\downarrow a) \subseteq (H_n f)(l(b)) & \text{porque } H_n f \text{ é um morfismo de reticulados locais} \\ & \Rightarrow \downarrow f(a) \subseteq m \cdot f(b) & \\ & \Rightarrow f(a) \lhd_n f(b) & \text{por (4.14).} \end{array}$$

Reciprocamente, suponhamos que $f : L \to M$ é um morfismo de **RetLoc**-$\lhd_n$. Então $L, M \in$ **RetLoc**- $\lhd_n$, portanto existem morfismos l, m tais que (L, l) e (M, m) são co-álgebras; queremos mostrar que $H_n f \cdot l = m \cdot f$. Sabemos que $\varepsilon_M \cdot H_n f = f \cdot \varepsilon_L$ e temos:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_M \cdot H_n f = f \cdot \varepsilon_L & \Rightarrow \varepsilon_M \cdot H_n f \cdot l = f \cdot \varepsilon_L \cdot l & \\ & \Rightarrow \varepsilon_M \cdot H_n f \cdot l = f & \text{porque } \varepsilon_L \cdot l = id \\ & \Rightarrow m \cdot \varepsilon_M \cdot H_n f \cdot l = m \cdot f & \\ & \Rightarrow m \cdot f \leq H_n f \cdot l & \text{porque } m \cdot \varepsilon_M \leq id. \end{array}$$

De modo a concluir que também $H_n f \cdot l \leq m \cdot f$, seja $a \in L$. Então

$$\begin{aligned}(H_n f)(l(a)) &= (H_n f)(\bigvee_{x \lhd_n a} \downarrow x) && \text{por (4.13)}\\ &= \bigvee_{x \lhd_n a} (H_n f)(\downarrow x) && \text{porque } H_n f \text{ é um morfismo de reticulados locais}\\ &= \bigvee_{x \lhd_n a} \downarrow f(x) && .\end{aligned}$$

Por outro lado, $m(f((a)) = \bigvee_{y \lhd_n f(a)} \downarrow y$ e, por hipótese, $x \lhd_n a \Rightarrow f(x) \lhd_n f(a)$, portanto temos:

$$x \lhd_n a \Rightarrow f(x) \lhd_n f(a) \Rightarrow \downarrow f(x) \subseteq \bigvee_{y \lhd_n f(a)} \downarrow y.$$

Consequentemente,

$$\bigvee_{x \lhd_n a} \downarrow f(x) \leq \bigvee_{y \lhd_n f(a)} \downarrow y,$$

donde se conclui que, $(H_n f)(l(a)) \leq m \cdot f(a)$. □

Observação 4.24. Para alguns valores de n os reticulados de **RetLoc** $- \lhd_n$ são bem conhecidos. Nomeadamente, como referido em [6]:

1. Para $n = 0$ a relação $\lhd_0$ é a relação $\lll$ e os objectos de **RetLoc** $- \lhd_0$ são os reticulados locais estavelmente super-contínuos.

2. Para $n = 2$ a relação $\lhd_2$ é a relação $\ll$ e os objectos de **RetLoc** $- \lhd_2$ são os reticulados locais estavelmente contínuos.

3. É imediato que os reticulados locais estavelmente contínuos são contínuos. Atendendo a que todo o reticulado local contínuo é espacial (ver a primeira proposição de [8], ou V-5.5. de [25] ou ainda [27]), concluímos que para $n < \aleph_0$, **RetLoc** $- \lhd_n$ é uma subcategoria da categoria **RetEsp**, dos reticulados espaciais.

Observação 4.25. Seja $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in Card} \mathcal{D}_n$, i.e., $Obj(\mathcal{D}) = \bigcup_{n \in Card} Obj(\mathcal{D}_n)$ e $Mor(\mathcal{D}) = \bigcup_{n \in Card} Mor(\mathcal{D}_n)$. É fácil verificar que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de **RetLoc**. Vamos verificar que **RetLoc** é o invólucro Kan-projectivo de $\mathcal{D}$ em **RetLoc**. Para tal, consideremos a classe $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ dos *quocientes completamente planos*, i.e., dos quocientes $h : X \to Y$ tais que $h_* \in$ **RetLoc**. Aplicando o dual do ponto 3 da Observação 1.32, sabemos que $KProj(\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}) =$ **RetLoc**. Além disso, $\bigcap_{n \in Card} \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$. Temos então

$$\mathcal{D}^{KProj} = (\bigcup_{n \in Card} \mathcal{D}_n)^{KProj} = \bigcap_{n \in Card} \mathcal{D}_n^{KProj} = \bigcap_{n \in Card} \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}.$$

Portanto $KProj_{\mathbf{RetLoc}}(\mathcal{D}^{KProj_{\mathbf{RetLoc}}}) = \mathbf{RetLoc}$. No entanto, o invólucro Kan-projectivo de $\mathcal{D}$ em **RetEsp** é **RetEsp**: de modo análogo ao que fizemos na Observação 3.27 mostra-se que $\mathbf{RetEsp} \subseteq KProj_{\mathbf{RetEsp}}(\mathcal{D}^{KProj_{\mathbf{RetEsp}}})$.

Consideremos o functor $\Sigma : \mathbf{RetLoc}^{op} \to \mathbf{Top}_0$, da conhecida adjunção $\mathcal{O} \dashv \Sigma$. Seja

$$\Sigma f_n : \Sigma D_n \to \Sigma D_1$$

o morfismo de $\mathbf{Top}_0$, imagem de f_n por meio de Σ. Em particular, Σf_n pertence à categoria **Sob**. Claro que ΣD_1 não é mais do que o espaço de Sierpiński. Como consequência do Teorema 4.18, obtemos agora a seguinte caracterização das imersões n-planas de $\mathbf{Top}_0$.

Corolário 4.26. *Em $\mathbf{Top}_0$, para cada cardinal $n \geq 1$, um morfismo $h : X \to Y$ é uma imersão n-plana se e só se os morfismos $\Sigma f : \Sigma D_0 \to \Sigma D_1$ e $\Sigma f_n : \Sigma D_n \to \Sigma D_1$ são Kan-injectivos à direita relativamente a h.*

Demonstração. Consideremos os morfismos f_n definidos na Notação 4.16 Vamos mostrar que Σf_n é Kan-injectivo à direita relativamente a uma imersão $h : X \to Y$ em $\mathbf{Top}_0$ se e só se f_n é Kan-projectivo à direita relativamente a $h^{-1} : \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ em **RetLoc**. Assim, este enunciado decorrerá imediatamente do enunciado no Teorema 4.18.

Seja $R : \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Sob}$ o functor reflector de $\mathbf{Top}_0$ em **Sob**. Podemos considerar $R = \Sigma\mathcal{O}$. Além disso, sabemos que a adjunção $\mathcal{O} \dashv \Sigma : \mathbf{RetLoc}^{op} \to \mathbf{Top}_0$ determina uma equivalência de categorias entre a subcategoria plena de $\mathbf{Top}_0$ constituída pelos espaços sóbrios, **Sob**, e a categoria plena de **RetLoc** constituída pelos reticulados espaciais, **RetEsp**. Então, para cada espaço sóbrio X, tem-se $X \simeq \Sigma\mathcal{O}X$, via λ_X, onde λ é a unidade da adjunção.

Estamos agora em condições de concluir o pretendido. Na verdade, atendendo ao ponto 1 da proposição 2.21, e ao facto de $\Sigma f_n \in \mathbf{Sob}$, temos que Σf_n é Kan-injectivo à direita em $\mathbf{Top}_0$ relativamente a $h : X \to Y$ se e só se Σf_n for Kan-injectivo à direita em **Sob** relativamente a $Rh = \Sigma\mathcal{O}h$, e, atendendo à equivalência de categorias determinada pela adjunção $\mathcal{O} \dashv \Sigma$, se e só se $\mathcal{O}\Sigma f_n$ for Kan-projectivo à direita relativamente a $\mathcal{O}\Sigma\mathcal{O}h$ em **RetEsp**. Mas f_n e $\mathcal{O}h$ são morfismos entre reticulados locais espaciais (note-se que D_1 e D_n são espaciais já que são reticulados locais de descendentes de objectos de $\mathbf{SRet}_1$).

Portanto, $f_n \simeq \mathcal{O}\Sigma f_n$ e $\mathcal{O}h \simeq \mathcal{O}\Sigma\mathcal{O}h$, através da co-unidade. Consequentemente, a afirmação acima é equivalente a dizer que f_n é Kan-projectivo à direita em **RetEsp** relativamente a $\mathcal{O}h$. Como **RetEsp** é uma subcategoria plena de **RetLoc**, isto é equivalente a afirmar que f_n é Kan-projectivo à direita em **RetLoc** relativamente a $h^{-1} = \mathcal{O}h$. O mesmo argumento é aplicável a f. □

Observação 4.27. O resultado anterior generaliza a caracterização das imersões n-planas em $\mathbf{Top}_0$ feitas na Proposição 3.15 e no Teorema 3.17 apenas para $n = 1, 2$, a todo o cardinal n.

Bibliografia

[1] J. Adámek, M. Hébert, L. Sousa, A Logic of Orthogonality, *Arch. Math. (Brno)*, Tomus 42 (2006), 309-334.

[2] J. Adámek, M. Hébert, L. Sousa, The Orthogonal Subcategory Problem and the Small Object Argument, *Appl. Categ Structures* 17, nº 3 (2009), 211-246.

[3] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, New York, 1990, Repr. Theory Sppl. Categ. Nº 17 (2006), 1-507.

[4] J. Adámek, L. Sousa, J. Velebil, Kan injectivity in order-enriched categories, accepted for publication in *Math. Structures Comput. Sci.*.

[5] B. Banaschewski, G. Bruns, Categorical Characterization of the McNeille Completion, *Arch. Math. (Basel)*, 18(4), (1967), 369-377.

[6] B. Banaschewski, Projective frames: a general view, *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 46 nº 4 (2005), 301-312.

[7] B. Banaschewski, S. B. Nielfeld, Projective and supercoherent frames, *J. Pure Appl. Algebra* 70 (1991), 45-51.

[8] B. Banaschewski, The duality of distributive continuous lattices, *Canad. J. Math.*, Vol. XXXII, No. 2 (1980), 385-394.

[9] B. Banaschewski, Another look at the localic Tychonoff theorem, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 29 (1988), 647-656.

[10] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge Univ. Press, vol. 1-3, (1994).

[11] F. Cagliari, M. M. Clementino, S. Mantovani, Fibrewise injectivity and Kock-Zöberlein monads, *J. Pure Appl. Algebra* 216 nº 11 (2012), 2411-2424.

[12] M. Carvalho, L. Sousa, Order-preserving reflectors and injectivity, *Topology and its Applications* 158 (2011), 2408-2422.

[13] M. Carvalho, L. Sousa, On Kan-injectivity for spaces and locales, *Pré-publicações do Departamento de Matemática*, Universidade de Coimbra, Preprint 14-26 (2014).

[14] M. M. Clementino, E. Giuli, W. Tholen *A functional approach to general topology. In: Categorical Foundations*, eds. M. C. Pedicchio and W. Tholen, Cambridge University Press (2004).

[15] N. Conceição, *Objectos injectivos como álgebras de mónadas de filtros*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (2004).

[16] A. Davey, A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press (1990).

[17] A. Day, Filter monads, continuous lattices and closure systems, *Canad. J. Math.* 27 (1975), 50-59.

[18] M. H. Escardó, R. C. Flagg, Semantic domains, injective spaces and monads, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 20 (1999).

[19] M. H. Escardó, Injective spaces via the filter monad, *Topology Proc.* 22 (1997), 97-100.

[20] M. H. Escardó, Properly injective spaces and function spaces, *Topology and its Applications* 89 (1997), 75-120.

[21] M. H. Escardó, Injective locales over perfect embeddings and algebras of the upper powerlocale monad, *Appl. Gen. Topology* 4 (2003), 193-200.

[22] R. Engelking, *General topology*, Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[23] B. Flagg, Algebraic theories of compact pospaces, *Topology and its Applications* 77 (1997), 277-290.

[24] P. J. Freyd, G.M. Kelly, Categories of continuous functors I, *J. Pure Appl. Algebra* 2 (1972), 169-191.

[25] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, D. S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Cambridge University Press (2003).

[26] D. Hofmann, A four for the price of one duality principle for distributive topological spaces,*Order* 30 (2013), nº 2, 643-655.

[27] P. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[28] G. M. Kelly, A united treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on, *Bull. Austral. Math. Soc.* 22 (1980), 1-84.

[29] A. Kock, Monads for wich structures are adjoint to units (version 3), *J. Pure Appl. Algebra* 104 (1995), 41-59.

[30] J. MacDonald, M. Sobral *Aspects of monads. In: Categorical Foundations*, eds. M. C. Pedicchio and W. Tholen, Cambridge University Press (2004).

[31] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[32] J. Picado, A. Pultr, A. Tozzi, *Locales. In: Categorical Foundations*, eds. M. C. Pedicchio and W. Tholen, Cambridge University Press (2004).

[33] J. Picado, A. Pultr, *Frames and Locales: Topology Without Points.* Basel: Birkhäuser (2012).

[34] G. Raney, A subdirected union representation of completely distributive complete lattices, *Proc. Amer. Math. Soc* 4 (1953), 518-522.

[35] S. Roman, *Lattices and Ordered Sets*, Springer (2008).

[36] J. Rosický, W. Tholen, Orthogonal and prereflective subcategories, *Cahiers de Topol. Géom. Différ. Cat.* 29 (1988), 203-215.

[37] M.B. Smyth, Topology, In S. Abramsky, D. M. Gabbay, T.S.E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 1, pages 641-761, Clarendon Press, Oxford (1992).

[38] H. Simmons, A couple of triples, *Topology Appl.* 13 (1982), 201-223.

[39] L. Sousa, Solid hulls of concrete categories, *Appl. Categ. Structures* 3 (1995), 105-118.

[40] L. Sousa, α-sober spaces via the orthogonal closure operator, *Appl. Categ. Structures* 4 (1996), 87-95.

[41] L. Sousa, Orthogonality and closure operators, *Cahiers de Topol. Géom. Différ. Cat.* 36 (1995), 323-343.

[42] W. Tholen, Factorizations, localizations, and the orthogonal subcategory problem, *Math. Nachr.* 114 (1983), 63-85.

[43] H. Wolff, Free monads and the orthogonal subcategory problem, *J. Pure Appl. Algebra* 13 (1978), 233-242.

[44] R. J. Wood *Ordered sets via sdjunction. In: Categorical Foundations*, eds. M. C. Pedicchio and W. Tholen, Cambridge University Press (2004).

[45] O. Wyler, Algebraic theories for continuous semilattices, *Arch. Rational Mech. Anal.* 90 (1985), 99-113.

[46] O. Wyler, Compact ordered spaces and prime Wallman compactifications, *Categorical Topology*, Heldermann Verlag, Berlin (1984).

[47] V. Zöberlein, Doctrines on 2-categories, *Math Z.* 148 (1976), 267-279.

Tabela 4.1: **TABELA DE CATEGORIAS**

Categorias	*Objectos e Morfismos*	*1ª ref.*
Conj	conjuntos e funções	Capítulo 0
Cont	reticulados contínuos e funções que preservam supremos dirigidos e ínfimos quaisquer	2.35
CPO	conjuntos parcialmente ordenados e funções monótonas	Capítulo 0
CPOC	reticulados completos e funções que preservam ínfimos quaisquer	1.33
EComp	espaços topológicos estavelmente compactos e funções estavelmente contínuas	2.35
RetLoc	reticulados locais e funções que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer	1.27
RetEsp	reticulados espaciais e funções que preservam ínfimos finitos e supremos quaisquer	4.17
RetLoc $- \lhd_0$	reticulados locais estavelmente super-contínuos e morfismos de **RetLoc** que preservam a relação "$\lll$"	4.24
RetLoc $- \lhd_2$	reticulados locais estavelmente contínuos e morfismos de **RetLoc** que preservam a relação "$\ll$"	4.24
ScottD	domínios de Scott contínuos e funções que preservam supremos dirigidos e ínfimos não vazios	2.35
Sob	espaços sóbrios e funções contínuas	3.3
SRet	inf-semi-reticulados e funções que preservam ínfimos finitos não vazios	1.37
SRet$_1$	inf-semi-reticulados com elemento último e funções que preservam ínfimos finitos	1.27
Top$_0$	espaços topológicos que satisfazem o axioma T_0 e funções contínuas	Capítulo 0
Top$_1$	espaços topológicos que satisfazem o axioma T_1 e funções contínuas	2.36