

André Codeço Marques

ROLAMENTOS SEM DESLIZE NEM TORÇÃO EM VARIEDADES PSEUDO-RIEMANNIANAS

Tese de Doutoramento em Matemática, especialidade de Matemática Pura, orientada pela Professora Doutora Maria de Fátima da Silva Leite e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Julho de 2014



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



André Codeço Marques

ROLAMENTOS SEM DESLIZE NEM TORÇÃO EM VARIEDADES PSEUDO-RIEMANNIANAS

Tese de Doutoramento em Matemática, especialidade de Matemática Pura,
orientada pela Professora Doutora Maria de Fátima da Silva Leite e apresentada ao
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade de Coimbra

Julho de 2014

Resumo

O objetivo fundamental desta dissertação é apresentar uma visão abrangente sobre rolamentos, sem deslize nem torção, de variedades diferenciáveis, contribuindo para aprofundar o conhecimento teórico nesta área e evidenciar potenciais aplicações.

Começamos por apresentar uma definição de aplicação rolamento para o caso mais geral em que o movimento acontece dentro de espaços ambiente que são variedades pseudo-Riemannianas. Isto generaliza a definição clássica de Sharpe. A seguir, provamos algumas propriedades essenciais dos rolamentos e fazemos a ligação destes com o transporte paralelo de vetores.

Dentro do contexto geral, analisamos os rolamentos das hiperquádricas de espaços pseudo-Euclidianos, com enfoque no caso dos espaços pseudo-hiperbólicos $H_\kappa^n(r)$. Apresentamos as equações da cinemática do rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim associado ao espaço tangente num ponto. A obtenção de soluções explícitas destas equações é alcançada em dois casos particulares, destacando-se a situação em que o rolamento é feito ao longo de geodésicas. Rolamentos de um espaço pseudo-hiperbólico sobre outro e de pseudo-esferas são igualmente tratados.

Investigamos os rolamentos de grupos de Lie quadráticos sobre um espaço afim tangente. Também nestes casos se deduzem as equações da cinemática e se procuram soluções explícitas. A abordagem usada neste caso tem a preocupação de não destruir a estrutura matricial que caracteriza os elementos destes grupos matriciais.

Estudamos a controlabilidade de rolamentos nos casos da hiperquádrica $H_\kappa^n(r)$ e dos grupos de Lie quadráticos principais, os grupos pseudo-ortogonais e os grupos simpléticos. Seguimos uma abordagem algébrica que passa por reescrever as equações da cinemática como um sistema de controlo afim a evoluir num grupo de Lie.

Aplicamos os resultados obtidos anteriormente na resolução de problemas de

interpolação suave em variedades e apresentamos um algoritmo interpolador. As propriedades dos rolamentos permitem transformar um problema de interpolação complicado, formulado numa variedade, num outro mais simples de resolver. São ainda fornecidos os ingredientes necessários para a implementação prática do algoritmo nos casos particulares de $H_0^n(r)$ e $H_1^n(r)$.

Palavras chave: Rolamentos, deslize, torção, variedades pseudo-Riemannianas, grupos de isometrias, grupos de Lie quadráticos, grupos pseudo-ortogonais, grupos simpléticos, aplicações rolamento, transporte paralelo, espaço pseudo-hiperbólico, pseudo-esfera, equações da cinemática, sistemas de controlo afim, curvas interpoladoras.

Abstract

The primary goal of this dissertation is to present a comprehensive overview about rolling motions, subject to non-slip and non-twist constraints, of differentiable manifolds, contributing to deepen the theoretical knowledge in this area and to point out potential applications.

We first present a definition of rolling map for the situation when the motion occurs inside an ambient space which is a pseudo-Riemannian manifold. This generalizes the classical definition of Sharpe. We then present several essential properties of rolling and make the connection between rolling motions and parallel transport of vectors.

Within this general framework, we analyze the rolling of hyperquadrics embedded in pseudo-Euclidean spaces, focusing on the case of pseudo-hyperbolic spaces $H_{\kappa}^n(r)$. The kinematic equations of rolling $H_{\kappa}^n(r)$ on the affine space associated to the tangent space at a point is presented. Explicit solutions of these equations are obtained in two particular cases, with emphasis when the rolling is done along geodesics. Rolling of a pseudo-hyperbolic space on another and rolling of pseudo-spheres are equally treated.

We investigate the rolling of quadratic Lie groups on an affine space tangent. We also derive the corresponding kinematic equations and look for explicit solutions. The approach used here is chosen so that the matrix structure that characterizes the elements of these matrix groups is not destroyed.

We also address the controllability issue of rolling motions in the cases of hyperquadrics $H_{\kappa}^n(r)$ and of the most important quadratic Lie groups, pseudo-orthogonal groups and symplectic groups. We used an algebraic approach to controllability that requires rewriting the kinematic equations as a control system evolving on a Lie group.

We apply the results previously obtained to solve problems of smooth interpolation on manifolds and present an interpolating algorithm. The properties of rolling enable to transform a complicated interpolation problem, formulated on a

manifold, on another much simpler to solve. Ingredients needed to implement the algorithm are provided in the specific cases of $H_0^n(r)$ and $H_1^n(r)$.

keywords: rolling, sliding, twisting, pseudo-Riemannian manifolds, groups of isometries, quadratic Lie groups, pseudo-orthogonal groups, symplectic groups, rolling motions, parallel transport, pseudo-hyperbolic space, pseudo-sphere, kinematic equations, affine control systems, interpolating curves.

Agradecimentos

Desejo expressar os meus mais sinceros agradecimentos à Professora Doutora Fátima Silva Leite, pela superior orientação, permanente disponibilidade, paciência, e por tudo o que me ensinou.

Agradeço ao Instituto Politécnico de Viseu, pelas condições materiais e financeiras que me concedeu.

Agradeço aos meus colegas da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu, pela solidariedade e por todas as ajudas que recebi.

Quero ainda deixar um sincero agradecimento à minha família e aos meus amigos, pelo apoio que sempre me ofereceram.

Conteúdo

Resumo	i
Introdução	ix
1 Conceitos Fundamentais de Geometria Pseudo-Riemanniana	1
1.1 Espaços com Produto Escalar	1
1.2 Variedades Pseudo-Riemannianas	3
1.3 Isometrias em Variedades Pseudo-Riemannianas	7
1.4 Conexão e Derivada Covariante	12
1.5 Conexão de Levi-Civita, Transporte Paralelo e Geodésicas	15
1.6 Fórmula de Gauss, Geodésias em Subvariedades e Transporte Paralelo Normal	19
1.7 Orientabilidade	23
2 Aplicações Rolamento em Variedades Pseudo-Riemannianas	27
2.1 Grupos Matriciais Associados a Isometrias	27
2.1.1 Grupos de Lie Quadráticos	27
2.1.2 Grupos Pseudo-Ortogonais	33
2.2 Definição (Geral) de Aplicação Rolamento sem Deslize nem Torção	36
2.3 Interpretação da Definição de Aplicação Rolamento em $\overline{M} = \mathbb{R}^n$.	39
2.4 Aplicações Rolamento em $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$	40
2.5 Aplicações Rolamento em $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$	42
2.6 Propriedades dos Rolamentos	45
2.7 Rolamento <i>versus</i> Transporte Paralelo	51
3 Rolamento de Hiperquádricas dum Espaço Pseudo-Euclidiano	57
3.1 Hiperquádricas em \mathbb{R}_κ^{n+1}	57
3.2 Resultados Preliminares	60
3.3 Geodésicas de $H_\kappa^n(r)$	64

3.4	Rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$	67
3.4.1	Equações da Cinemática	67
3.4.2	Soluções Explícitas das Equações da Cinemática	71
3.5	Rolamento dum Espaço Pseudo-Hiperbólico não Centrado na Origem	76
3.6	Rolamento dum Espaço Pseudo-Hiperbólico Sobre Outro	77
3.7	Rolamento da Pseudo-Esfera $S_\kappa^n(r)$ a Partir do Rolamento de $H_{n-\kappa}^n(r)$	79
4	Rolamento de Grupos de Lie Quadráticos	85
4.1	Resultados Preliminares	86
4.2	Equações da Cinemática	88
5	Controlabilidade de Rolamentos sem Deslize nem Torção	93
5.1	Controlabilidade de Sistemas Invariantes em Grupos de Lie Matriciais	94
5.2	Controlabilidade do Rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$	96
5.3	Controlabilidade dos Rolamentos de $O_\kappa(n)$ e $\text{Sp}(2m)$	99
5.3.1	Controlabilidade do Rolamento de $O_\kappa(n)$	100
5.3.2	Controlabilidade do Rolamento de $\text{Sp}(2m)$	106
6	Interpolação Suave em Subvariedades de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ com Recurso a Rolamentos	111
6.1	Formulação do Problema e sua Resolução	112
6.2	Implementação do Algoritmo Interpolador	117
6.2.1	Interpolação em $H_0^n(r)$	117
6.2.2	Interpolação em $H_1^n(r)$	119
	Considerações finais	123
	Bibliografia	127

Introdução

Se considerarmos que duas variedades diferenciáveis, com igual dimensão, estão mergulhadas no mesmo espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e que uma rola sobre a outra (estacionária), sem deslizar nem torcer, ao longo de uma curva de contacto, então estamos na presença do movimento de um corpo rígido, sujeito a várias restrições, nesse espaço. Tal movimento numa variedade sobre outra resulta da ação usual do grupo Euclidiano especial $SE(n)$, o grupo das isometrias de \mathbb{R}^n que preservam a orientação, e é descrito pelas chamadas aplicações rolamento, abordadas com detalhe por Sharpe [39].

Um exemplo clássico é o rolamento da esfera unitária S^2 sobre o seu plano tangente num ponto. Este caso está bem estudado na literatura, em parte devido à fácil visualização do que acontece no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 onde as duas variedades estão mergulhadas, mas também devido a diversas aplicações nas áreas de engenharia. Quando se passa para dimensões superiores ou para outros espaços, a perda de intuição geométrica é um obstáculo que pode justificar a escassez de resultados.

Nestes movimentos há restrições de dois tipos: restrições holónomas, que limitam o espaço das configurações, e restrições não-holónomas, que limitam as velocidades (de translação e de rotação) e não derivam de restrições holónomas. No caso da esfera S^2 , configurações admissíveis são todas as posições que a mantenham tangente ao plano estacionário, enquanto que as restrições não-holónomas proíbem translações puras (deslizes) e rotações em torno do eixo perpendicular ao plano tangente (torções). As equações que permitem descrever o movimento e incorporam as suas restrições são conhecidas como equações da cinemática. Para a esfera rolante S^n (que rola sobre um hiperplano sem deslizar nem torcer), estas equações podem encontrar-se em Jurdjevic [19].

O termo “completamente não-holónomo” foi introduzido por Heinrich Hertz no final do século dezanove para descrever a capacidade dum sistema mecânico, cujo movimento está sujeito a restrições nas velocidades, de poder passar de uma

configuração admissível para outra qualquer sem violar as restrições impostas. Em Teoria de Controlo isto corresponde à noção de controlabilidade das equações da cinemática do sistema.

Jurdjevic [19] conjecturou que a esfera rolante S^n é completamente não-holónoma para $n \geq 2$. A confirmação da veracidade dessa afirmação foi apresentada em 2005 por Zimmerman [43], contudo, a prova, baseada em resultados sobre controlabilidade em grupos de Lie, não é construtiva, isto é, não descreve o procedimento que permite levar a esfera duma configuração para outra. Entretanto, uma demonstração construtiva foi publicada em Kleinstеuber *et al.* [21]. Um processo similar a este para o rolamento de uma esfera sobre outra esfera foi estudado em Louro *et al.* [26].

São recentes os trabalhos teóricos dedicados ao estudo de rolamentos de variedades. Depois da definição formal de aplicação rolamento para subvariedades do espaço Euclidiano introduzida por Sharpe [39] em 1996, surgiram vários trabalhos dedicados a rolamentos de certas variedades concretas. Em Huper *et al.* [14] foram deduzidas as equações da cinemática para rolamentos do grupo ortogonal especial $SO(n)$ e variedades de Grassmann sobre o espaço afim associado ao espaço tangente num ponto. Neste artigo também se provaram propriedades importantes das correspondentes aplicações rolamento, mas não são abordados problemas de controlabilidade. Em Huper *et al.* [15] foram generalizados para subvariedades duma variedade Riemanniana arbitrária alguns dos resultados contidos em Huper *et al.* [14]. O caso particular do rolamento de um elipsoide, mergulhado num espaço munido com uma métrica que resulta de uma deformação da métrica Euclidiana, aparece em Krzysztof *et al.* [24].

Tratando-se de variedades não Riemannianas, o trabalho apresentado em 2008 por Jurdjevic *et al.* [20] foi a primeira tentativa de estender resultados do espaço Euclidiano para variedades pseudo-Riemannianas. Resultados mais recentes a este respeito existem em Korolko *et al.* [23] para a esfera Lorentziana, em Marques *et al.* [32] para espaços pseudo-hiperbólicos, em Crouch *et al.* [6] para grupos pseudo-ortogonais e em Marques *et al.* [33] para grupos simpléticos.

A abordagem usada nas publicações até agora mencionadas é sob um ponto de vista extrínseco, uma vez que é sempre assumido que as duas variedades rolantes estão mergulhadas numa terceira variedade ambiente. Contudo, recentemente, têm surgido trabalhos onde a abordagem é puramente intrínseca, nomeadamente Godoy *et al.* [9] e Chitour *et al.* [4] para o caso Riemanniano e Markina *et al.* [28] para o caso pseudo-Riemanniano. Também com este tipo de abordagem, em Mortada *et al.* [34] é estudado o caso do rolamento de variedades de diferentes

dimensões.

Entre as possíveis aplicações dos rolamentos de variedades, destacam-se problemas de interpolação em espaços não-Euclidianos. Algoritmos que usam rolamentos para produzir curvas interpoladoras (C^2 -)suaves aparecem, por exemplo, em Huper *et al.* [13] para a esfera S^n e em Huper *et al.* [14] para o grupo das rotações $SO(n)$. Uma demonstração da utilidade prática deste tipo de interpolação encontra-se em Shen *et al.* [40], a respeito do planeamento do movimento dum robot. Igualmente com o intuito de aplicação no campo da robótica, em Svinin *et al.* [42] foi tratado o caso do rolamento de uma esfera com limitação na área de contacto.

A presente dissertação concentra-se no estudo de rolamentos que ocorrem dentro de variedades (ambiente) pseudo-Riemannianas, entre subvariedades com igual dimensão. De seguida vamos fazer um resumo, capítulo a capítulo, do conteúdo que a compõe.

Visando tornar este trabalho o mais possível auto-contido, o Capítulo 1 será dedicado aos rudimentos de geometria pseudo-Riemanniana que permitem o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Tendo em conta que rolamentos são movimentos e que para a descrição destes é fundamental conhecer as isometrias da variedade ambiente, o Capítulo 2 vai iniciar-se com alguns tópicos a esse respeito. Depois formalizaremos o conceito de rolamento de uma variedade sobre outra, quando mergulhadas em variedades pseudo-Riemannianas, através da definição de aplicação rolamento. Faremos uma interpretação geométrica desta definição e também a sua particularização para dois casos especiais. Um destes casos é \mathbb{R}^n com uma métrica pseudo-riemanniana de índice κ que generaliza a métrica Euclidiana, e será denotado por \mathbb{R}_κ^n . O outro caso é $\mathfrak{gl}(n)$ equipada com uma métrica pseudo-Riemanniana Φ_J dada por uma generalização do produto interno (usual) de Frobenius. Introduziremos ainda algumas propriedades básicas dos rolamentos, que são essenciais para a dedução de novos rolamentos a partir de rolamentos previamente conhecidos. O capítulo terminará com a análise da estreita relação entre rolamentos e transporte paralelo de vetores.

No Capítulo 3 abordaremos o rolamento das hiperquádricas de \mathbb{R}_κ^{n+1} , que são hypersuperfícies deste espaço. Trata-se da pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$ e do espaço pseudo-hiperbólico $H_\kappa^n(r)$. O assunto central será o rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim associado ao espaço tangente num ponto. Apresentaremos as equações da cinemática deste rolamento e as correspondentes soluções explícitas para alguns casos mais simples. As geodésicas de $H_\kappa^n(r)$, que constituem um importante in-

gradiente no contexto destes rolamentos, serão também estudadas. O rolamento dum espaço pseudo-hiperbólico sobre outro e o rolamento de pseudo-esferas serão alcançados posteriormente com recurso às propriedades introduzidas no segundo capítulo.

O Capítulo 4 é destinado ao rolamento de grupos de Lie quadráticos, que são grupos matriciais cujos elementos se definem através de um conjunto de equações quadráticas nas suas entradas. Estes rolamentos ocorrem em $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Após a demonstração de algumas propriedades preliminares, faremos a dedução das equações da cinemática para o caso do rolamento ocorrer sobre o espaço afim ao espaço tangente num ponto. Também serão discutidas as soluções explícitas das respetivas equações da cinemática e justificaremos a importância do estudo deste tipo de rolamento no contexto geral.

A controlabilidade de rolamentos será o tema do Capítulo 5. Depois de introduzirmos algumas notas básicas sobre sistemas de controlo, examinaremos questões de controlabilidade nos casos de rolamentos do espaço pseudo-hiperbólico $H_\kappa^n(r)$ e dos dois grupos de Lie quadráticos fundamentais, o grupo pseudo-ortogonal e o grupo simplético. A estratégia passará pela reescrita das equações da cinemática numa forma mais conveniente, de modo a podermos usar um teorema clássico sobre controlabilidade em grupos de Lie.

No Capítulo 6 mostraremos que rolamentos sem deslize nem torção podem ser usados como uma ferramenta para resolver problemas de interpolação em variedades. Especificamente, o que teremos no capítulo final é a aplicação de alguma da teoria dos capítulos anteriores na resolução dum problema de interpolação suave com condições de fronteira, em subvariedades pseudo-Riemannianas de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Iniciaremos com a formulação do problema e a apresentação de um algoritmo para o resolver. Na parte final forneceremos os ingredientes necessários para a implementação prática desse método nos casos particulares de $H_0^n(r)$ e $H_1^n(r)$.

Terminaremos a tese com algumas considerações finais, onde destacaremos, de modo sumário, as principais contribuições deste trabalho e indicaremos um pouco do trabalho futuro.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais de Geometria Pseudo-Riemanniana

Neste capítulo introduziremos de forma breve as definições e os resultados fundamentais que serão utilizados nos capítulos seguintes. Os resultados que aparecem na literatura associada serão apresentados como lemas e sem demonstração, enquanto que os novos resultados serão apresentados como proposições com as respectivas demonstrações. Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em O'Neill [35], Lee [25] ou Helgason [12].

1.1 Espaços com Produto Escalar

Uma *forma bilinear* num espaço vetorial real V de dimensão finita é uma aplicação $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ linear em cada uma das variáveis (fixando a outra), que se diz *simétrica* quando $b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) \forall v_1, v_2 \in V$. Se b é uma forma bilinear em V e e_1, \dots, e_n é uma base ordenada de V , então a matriz $B = (b_{ij})$ com $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ é chamada a *matriz de b relativamente à base e_1, \dots, e_n* . Evidentemente, se $v_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ e $v_2 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ tem-se

$$b(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

e b é simétrica se e só B o for. Neste trabalho teremos interesse apenas no caso em que há simetria.

Definição 1.1 *Uma forma bilinear simétrica b em V é*

1. definida positiva [negativa] se a condição $v \neq 0$ implica $b(v, v) > 0$ [< 0];
2. semi-definida positiva [negativa] se $b(v, v) \geq 0$ [≤ 0] $\forall v \in V$;
3. não-degenerada se a condição $b(v_1, v_2) = 0 \forall v_2 \in V$ implica $v_1 = 0$.

Também se diz que b é *definida* [semi-definida] se verificar alguma das alternativas de 1 [2]. Acontece, obviamente, que se b é definida então é simultaneamente semi-definida e não-degenerada, e pode provar-se que a afirmação recíproca também é verdadeira. Diz-se ainda que b é *indefinida* se existirem v_1 e v_2 em V tais que $b(v_1, v_1) < 0$ e $b(v_2, v_2) > 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica em V então para cada subespaço W de V a restrição de b a $W \times W$, que denotaremos meramente por $b|_W$, é novamente uma forma bilinear simétrica. Se b é [semi-]definida, então $b|_W$ também o é. No entanto, b pode ser não-degenerada e $b|_W$ não o ser.

Definição 1.2 O índice κ de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço W de V no qual $b|_W$ é definida negativa.

Evidentemente, tem-se $0 \leq \kappa \leq \dim(V)$ e verifica-se $\kappa = \dim(V)$ se e só se b é definida negativa. Ocorre ainda $\kappa = 0$ se e só se b é semi-definida positiva.

Lema 1.1 Uma forma bilinear simétrica é não-degenerada se e só se a sua matriz relativamente a uma (qualquer) base é invertível

A definição seguinte é fundamental no contexto desta dissertação.

Definição 1.3 Um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V . No caso particular em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida positiva, ela recebe ainda o nome de produto interno em V .

A partir de agora, nesta secção, V designará um espaço com produto escalar, isto é, um espaço vetorial (real e com dimensão finita) equipado com um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Define-se o índice de V como sendo o índice κ do seu produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e escreve-se $\kappa = \text{ind}(V)$. A norma $\|v\|$ de um vetor $v \in V$ define-se como sendo $\sqrt{|\langle v, v \rangle|}$, e esse vetor diz-se *unitário* se tiver norma igual a 1, ou seja, $\langle v, v \rangle = \pm 1$. Dois vetores $v_1, v_2 \in V$ dizem-se *ortogonais*, e escreve-se $v_1 \perp v_2$, se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Um conjunto de vetores unitários mutuamente ortogonais diz-se *ortonormado*.

Um subespaço W de V diz-se *não-degenerado* se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ é não-degenerada. Evidentemente, isto verifica-se sempre quando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno. Mas quando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é indefinida existem subespaços onde tal não acontece.

Lema 1.2 *Um subespaço W de V é não-degenerado se e só se V é a soma direta de W com $W^\perp := \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$.*

O conjunto W^\perp é também um subespaço vetorial de V e, uma vez que se tem $(W^\perp)^\perp = W$, resulta deste lema que W é não-degenerado se e só se W^\perp o for.

A matriz de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ relativamente a uma qualquer base ortonormada e_1, \dots, e_n de V é diagonal; de facto $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$.¹ Nestas condições, a lista $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ diz-se a *assinatura* do produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ relativamente à base considerada.

Lema 1.3 *Para cada base ortonormada e_1, \dots, e_n de V , o número de sinais negativos na correspondente assinatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ é o índice de V .*

Decorre deste lema que para qualquer subespaço não-degenerado W de V , tem-se $\text{ind}(V) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$.

Exemplo 1.1 *Consideremos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$ com o produto escalar dado por*

$$\langle (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = - \sum_{i=1}^{\kappa} v_i w_i + \sum_{i=\kappa+1}^n v_i w_i. \quad (1.1)$$

Obviamente, uma base ortonormada deste espaço com produto escalar é a base canónica $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ e tem-se $\langle e_1, e_1 \rangle = -1, \dots, \langle e_\kappa, e_\kappa \rangle = -1, \langle e_{\kappa+1}, e_{\kappa+1} \rangle = 1, \dots, \langle e_n, e_n \rangle = 1$. Então a correspondente assinatura toma a configuração $(\underbrace{-1, \dots, -1}_{\kappa \text{ elementos}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n - \kappa})$ e, portanto, o índice deste espaço com produto escalar é igual a κ .

1.2 Variedades Pseudo-Riemannianas

A definição que se segue generaliza a ideia de variedade de Riemann ao caso em que métrica não é necessariamente definida-positiva.

Definição 1.4 *Uma métrica pseudo-Riemanniana Φ numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto escalar $\Phi_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, de modo que:*

¹Ao longo desta dissertação o símbolo δ_{ij} significará sempre o “delta de Kronecker”, definido por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftarrow i = j \\ 0 & \Leftarrow i \neq j \end{cases}$.

1. para quaisquer campos de vetores X e Y cujos domínios tenham interseção não-vazia U , a função $p \in U \rightsquigarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p$ é suave;
2. todos os produtos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ têm o mesmo índice.

Uma variedade diferenciável munida com uma métrica pseudo-Riemanniana diz-se uma variedade pseudo-Riemanniana.

Embora uma variedade pseudo-Riemanniana seja um par (M, Φ) , sempre que não haja ambiguidade sobre a métrica em questão denota-la-emos apenas pelo nome da variedade diferenciável subjacente, M .

O valor comum κ dos índices dos produtos escalares é chamado o *índice* de M . Evidentemente, tem-se $0 \leq \kappa \leq n = \dim(M)$. Se (e só se) $\kappa = 0$, ou seja, quando cada $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é um produto interno em $T_p M$, retiraremos o prefixo “pseudo” e diremos, assim, que M é uma *variedade Riemanniana* e que está equipada com uma *métrica Riemanniana*. Quando $\kappa = 1$ e $n \geq 2$, diz-se que M é uma *variedade de Lorentz*. Métricas e variedades pseudo-Riemannianas também são frequentemente chamadas de *métricas* e *variedades semi-Riemannianas*.

Para simplificar a notação, habitualmente escreveremos apenas $\langle X_p, Y_p \rangle$ para designar $\langle X_p, Y_p \rangle_p$, e a função real que a cada $p \in M$ associa $\langle X_p, Y_p \rangle$ será denotada por $\langle X, Y \rangle$.

Antes de expormos um exemplo elementar, vamos esclarecer uma notação que usaremos ao longo deste capítulo. Recordamos que se $\varphi = (U, x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais numa variedade diferenciável M e $p \in U$, então as imagens por $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ dos vetores da base canónica de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ formam uma base (referencial coordenado) de $T_p M$.² Denotaremos esta base por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : i = 1 \dots, n \right\}$. Contudo, quando não existir uma indicação explícita das funções coordenadas envolvidas, no lugar de $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ escreveremos apenas $\partial_i \Big|_p$.

Exemplo 1.2 Consideremos a usual identificação de cada $T_p(\mathbb{R}^n)$ com o espaço vetorial \mathbb{R}^n , resultante do isomorfismo canónico que em termos das coordenadas naturais x_1, \dots, x_n é definido por:

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad \Leftrightarrow \quad v_p = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p. \quad (1.2)$$

²Podemos imaginar o i -ésimo vetor da base canónica de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ como sendo o vetor unitário, com origem em $\varphi(p)$, que é paralelo ao i -ésimo eixo coordenado.

Então, pode-se equipar a variedade diferenciável \mathbb{R}^n com uma métrica pseudo-Riemanniana definida em cada $T_p(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle v_p, w_p \rangle := - \sum_{i=1}^{\kappa} v_i w_i + \sum_{i=\kappa+1}^n v_i w_i,$$

onde $v_p \equiv (v_1, \dots, v_n)$ e $w_p \equiv (w_1, \dots, w_n)$.

À variedade pseudo-Riemanniana formada no exemplo anterior, considerando-se $0 \leq \kappa \leq n$, chamaremos *espaço pseudo-Euclidiano* e, uma vez que tem índice κ , será denotada por \mathbb{R}_κ^n . Em particular, o espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_0^n é o *espaço Euclidiano* \mathbb{R}^n . Para $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n é chamado o *espaço de Minkowski n -dimensional*; o caso especial \mathbb{R}_1^4 constitui o exemplo mais simples dum espaço-tempo, a variedade onde a teoria da relatividade especial de Einstein foi formulada.

Uma vez que numa variedade pseudo-Riemanniana o produto escalar em cada espaço tangente pode ser uma forma bilinear indefinida, ser-nos-á conveniente a seguinte classificação.

Definição 1.5 *Sendo M é uma variedade pseudo-Riemanniana, um vetor tangente a M diz-se:*

1. *tipo-espaço* se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,
2. *nulo (tipo-luz)* se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$,
3. *tipo-tempo* se $\langle v, v \rangle < 0$.

O conjunto de todos os vetores nulos de $T_p M$ é chamado o *cone-nulo* (ou *cone de luz*) em $p \in M$. A categoria a que pertence um dado vetor tangente diz-se o seu *caráter causal*. Esta terminologia vem da teoria da relatividade e o vocábulo “luz” tem uma maior associação com o caso Lorentziano, contudo usá-lo-emos com qualquer variedade pseudo-Riemanniana. (Ver a figura 1.1).

Ao longo desta dissertação, sempre que N for uma subvariedade diferenciável de M , cada espaço tangente $T_p N$ será visto como um subespaço de $T_p M$, isto é, empregaremos a vulgar identificação $T_p N \equiv di(T_p N)$, onde $i : N \hookrightarrow M$ é a inclusão natural.³ Quando N é uma subvariedade duma variedade Riemanniana M , podemos construir uma métrica Riemanniana Φ_N em N meramente através da aplicação da métrica Φ_M de M a cada par de vetores tangentes a

³Para denotar o diferencial de uma aplicação f num ponto p , escreveremos usualmente df em vez de df_p .

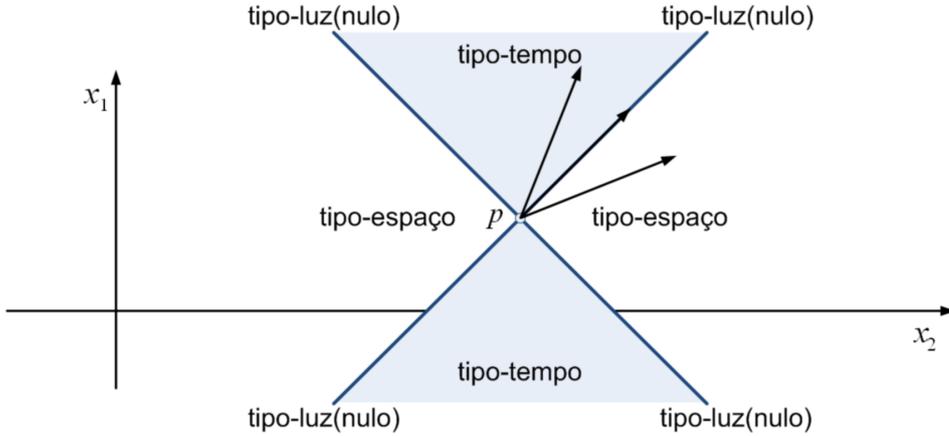


Figura 1.1: Cone de luz em $p \in \mathbb{R}_1^2$. Tipos de vetores tangentes.

N . Formalmente, Φ_N é o pullback $i^*(\Phi_M)$, ou seja, em cada T_pN , define-se $\Phi_N(u_p, v_p) := \Phi_M(di(u_p), di(v_p))$. No entanto, quando a métrica Φ_M de M é indefinida, $i^*(\Phi_M)$ não é necessariamente uma métrica em N . Efetivamente, $i^*(\Phi_M)$ é uma métrica pseudo-Riemanniana se e só se ela associa uma forma não-degenerada em cada T_pN e o índice dos espaços T_pN é o mesmo para todo o $p \in N$.

Definição 1.6 *Seja N uma subvariedade diferenciável duma variedade pseudo-Riemanniana M , com métrica Φ_M . Se o pullback $i^*(\Phi_M)$, onde $i : N \hookrightarrow M$ é a inclusão natural, é uma métrica pseudo-Riemanniana em N então diz-se que N (equipada com $i^*(\Phi_M)$) é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de M .*

Para terminar esta secção, vamos focar agora a construção de variedades pseudo-Riemannianas a partir de espaços vetoriais.

Seja V um espaço vetorial real com dimensão n . Sabemos que existe uma única maneira de tornar V numa variedade diferenciável de modo que cada isomorfismo (entre espaços vetoriais) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas: se fixarmos uma qualquer base (ordenada) u_1, \dots, u_n em V e tomarmos o correspondente isomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n &\rightsquigarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

os abertos da topologia de V são as imagens inversas por φ dos abertos de \mathbb{R}^n (equipado com a topologia Euclidiana) e a estrutura diferenciável de V é o atlas maximal que contém a carta (V, φ) . Esta estrutura é a *estrutura standard* de V como variedade diferenciável, e será a que sempre consideraremos em cada espaço vetorial. Tal como no caso $V = \mathbb{R}^n$, existe uma identificação natural

(independente da base fixada) de cada espaço tangente T_pV com o próprio V , obtida pela identificação

$$v \quad \Leftrightarrow \quad v_p = x_1(v) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \cdots + x_n(v) \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p, \quad (1.3)$$

onde x_1, \dots, x_n são as coordenadas definidas por uma qualquer base de V . Considere-se ainda que V é um espaço com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, novamente como no caso $V = \mathbb{R}^n$, a fórmula $\langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle$ define uma métrica pseudo-Riemanniana na variedade diferenciável V , tornando-a numa variedade pseudo-Riemanniana.

1.3 Isometrias em Variedades Pseudo-Riemannianas

A seguir introduziremos os conceitos de isometria, de comprimento de curvas e de distância Riemanniana, mas primeiramente precisamos de esclarecer o essencial da terminologia básica sobre curvas que empregaremos ao longo de toda a presente dissertação.

Se I é um intervalo aberto de \mathbb{R} e M uma variedade diferenciável, consideraremos que uma aplicação $\gamma : I \rightarrow M$ é uma *curva* (parametrizada) quando ela for uma aplicação contínua (isto é, de classe C^0). Diremos que uma curva γ é *suave* se for uma aplicação de classe C^∞ . Admitiremos também a existência de curvas definidas em intervalos fechados, como sendo segmentos de curvas definidas em intervalos abertos. Ou seja, sempre que considerarmos uma curva da forma $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, ficará subentendido que γ é a restrição ao intervalo $[a, b]$ duma curva, com as mesmas características, definida num intervalo aberto I que contém $[a, b]$. Assim, neste caso, quando a curva é suave, o vetor velocidade $\gamma'(t)$ existe inclusivamente nos extremos a e b do intervalo, sendo independente da extensão admitida.

Relembramos antes de prosseguirmos que, para cada instante $t_0 \in I$, o *vetor velocidade* $\gamma'(t_0)$ duma curva γ é definido como sendo o push-forward $d\gamma(\frac{d}{dt}|_{t_0})$, actuando em funções por $(\gamma'(t_0))(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0)$. Tem-se também que se expressarmos a representação de γ em coordenadas locais como $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ então

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i(t_0) \partial_i \Big|_{\gamma(t_0)},$$

sendo $\dot{\gamma}^i(t)$ a derivada usual da função real γ^i relativamente à sua variável t . Sempre que M for uma subvariedade de \mathbb{R}_κ^n ou de $\mathfrak{gl}(n)$ (conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{R}), e somente nestes casos, influenciados pela igualdade anterior, escreveremos $\dot{\gamma}(t)$ em vez de $\gamma'(t)$ para denotar este vetor velocidade.

Afirmaremos que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma *curva seccionalmente suave* se existir uma partição (finita) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ tal que cada restrição $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é uma curva suave. Desta forma, uma curva seccionalmente suave pode ter associados dois vetores velocidade em cada “quebra” t_i , e não ser um curva suave. Note-se que uma noção ligeiramente diferente da anterior é a de “aplicação seccionalmente suave”. Nos capítulos seguintes assumiremos que uma dada aplicação $f : [a, b] \rightarrow M$ é uma *aplicação seccionalmente suave* se existir uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ tal que cada restrição $f|_{]t_{i-1}, t_i[}$ pode ser estendida por uma curva suave definida no intervalo fechado $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, r$. Portanto, contrariamente a uma curva seccionalmente suave, uma aplicação seccionalmente suave não é necessariamente contínua.

A noção de isometria que vamos abordar agora será fundamental para a definição principal deste trabalho, a definição de aplicação rolamento.

Definição 1.7 *Sejam M e N duas variedades pseudo-Riemannianas com métricas Φ_M e Φ_N , respetivamente. Uma isometria de M para N é um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que “preserva as métricas”, isto é, $\phi^*(\Phi_N) = \Phi_M$ (explicitamente: $\langle d\phi(u_p), d\phi(v_p) \rangle = \langle u_p, v_p \rangle$, $\forall u_p, v_p \in T_p M, \forall p \in M$).*

Se existir alguma isometria entre M e N diz que elas são *isométricas*. Variedades pseudo-Riemannianas isométricas são, *grosso modo*, geometricamente “equivalentes”. A aplicação identidade, uma composição de isometrias e a inversa duma isometria são claramente isometrias. Assim, o conjunto das isometrias de M , isto é, da forma $\phi : M \rightarrow M$, é um grupo, dito o *grupo das isometrias de M* . Quando $n \geq 2$, o caso específico das isometrias de $M = \mathbb{R}_1^n$ diz-se o *grupo de Poincaré* ou *grupo não-homogéneo de Lorentz*.

Exemplo 1.3 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, a aplicação definida por

$$\phi(x_1, x_2) = (\cosh(\theta)x_1 + \sinh(\theta)x_2, \sinh(\theta)x_1 + \cosh(\theta)x_2)$$

é uma isometria de \mathbb{R}_1^2 .

Se na Definição 1.7 substituirmos a relação $\phi^*(\Phi_N) = \Phi_M$ por $\phi^*(\Phi_N) = \mu\Phi_M$, com $\mu \in \mathbb{R}$ (constante), obtemos o conceito de *homotetia de coeficiente μ* . Isto

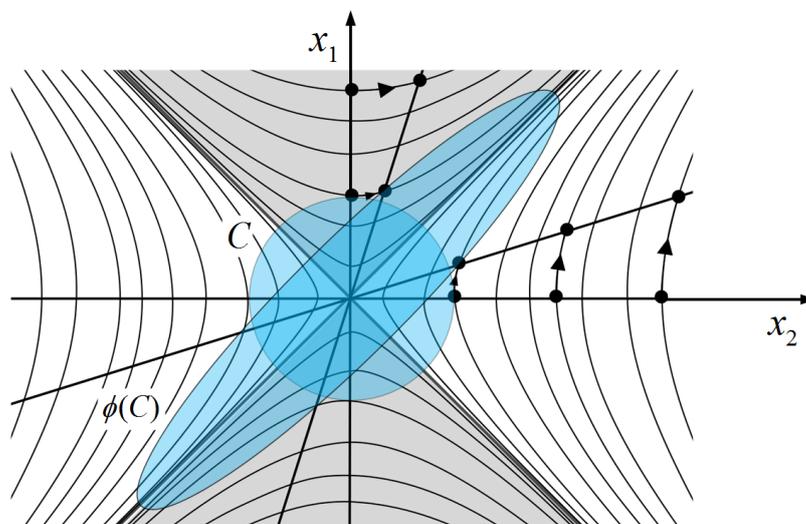


Figura 1.2: Um círculo e a sua imagem pela isometria ϕ .

é, uma isometria é apenas um homotetia com $\mu = 1$. Outro caso particular que também nos interessará corresponde a $\mu = -1$, dizendo-se agora que ϕ é uma *anti-isometria*.

A seguir vamos fazer algumas considerações em torno do conceito de isometria em variedades pseudo-Riemannianas, de maneira a podermos averiguar até que ponto ele generaliza a clássica definição de “isometria Euclidiana”. Estas correspondem aos movimentos rígidos (Euclidianos), ou seja, são as transformações que preservam a distância Euclidiana entre pontos e, como tal, preservam o “tamanho” e a “forma” das figuras do plano e do espaço.

A habitual ideia de comprimento duma curva pode ser generalizada de forma natural do espaço Euclidiano para variedades pseudo-Riemannianas. É por aqui que começamos.

Definição 1.8 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva seccionalmente suave numa variedade pseudo-Riemanniana M . O comprimento de α é*

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} dt. \quad (1.4)$$

No caso de uma curva em \mathbb{R}_κ^n , diga-se $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ com $a \leq t \leq b$, se usarmos as igualdades $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$ e $\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)} \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$

com $\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & \Leftarrow j \leq \kappa \\ 1 & \Leftarrow j > \kappa \end{cases}$, a fórmula (1.4) reduz-se, evidentemente, à seguinte:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\left| -\sum_{i=1}^{\kappa} (\dot{x}_i(t))^2 + \sum_{i=\kappa+1}^n (\dot{x}_i(t))^2 \right|} dt.$$

Quando M é uma variedade Riemanniana esta noção de comprimento comporta-se dum maneira bastante “Euclidiana”. No entanto, para métricas pseudo-Riemannianas indefinidas ela pode ter um comportamento “estranho”. Por exemplo, em \mathbb{R}_κ^n quando $\kappa = 0$ a curva mais curta que une dois pontos $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, \dots, q_n)$ é o segmento de reta \overline{pq} , mas quando $1 \leq \kappa < n$ isso já não acontece. De facto, se em \mathbb{R}_1^2 considerarmos os pontos $p = (8, -1)$ e $q = (-2, 4)$ e as curvas $\alpha : (x_1, x_2) = (8 - 10t, -1 + 5t)$, $0 \leq t \leq 1$ e $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 \cup \beta_4$, com $\beta_1 : (x_1, x_2) = (8 - t, -1 + t)$, $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$, $\beta_2 : (x_1, x_2) = (\frac{7}{2} - t, \frac{7}{2} - t)$, $0 \leq t \leq \frac{7}{2}$, $\beta_3 : (x_1, x_2) = (-t, +t)$, $0 \leq t \leq 3$ e $\beta_4 : (x_1, x_2) = (-3 + t, 3 + t)$, $0 \leq t \leq 2$, observamos que

$$L(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{|\langle (-10, 5), (-10, 5) \rangle|} dt = \int_0^1 \sqrt{|-(-10)^2 + 5^2|} dt = \sqrt{75}$$

$$L(\beta) = L(\beta_1) + L(\beta_2) + L(\beta_3) + L(\beta_4) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

(Ver a figura 1.3). O raciocínio usado na construção da curva β deste exemplo

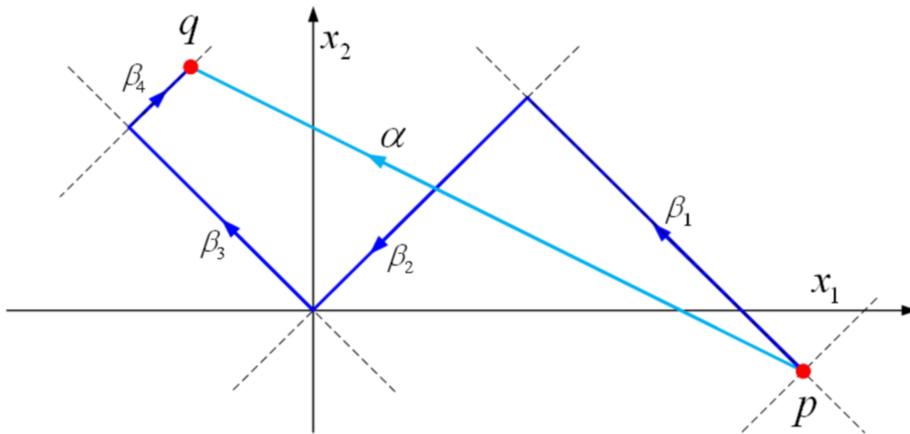


Figura 1.3: Segmento de reta e uma curva mais curta em \mathbb{R}_1^2

permite-nos mostrar que há sempre uma curva de comprimento nulo a unir dois quaisquer pontos de \mathbb{R}_1^2 . Ademais, isto pode ser provado para qualquer variedade conexa com métrica indefinida. (Ver [35], p. 157). Embora possa ser um pouco angustiante para as intuições Euclidianas que um segmento de reta não seja o

caminho mais curto entre dois pontos do plano, é bem conhecido que este facto é fundamental na geometria de Lorentz e suas aplicações à teoria da relatividade.

Visto que dois pontos duma variedade conexa com a métrica pseudo-Riemanniana indefinida podem ser sempre ligados por uma curva (seccionalmente suave) de comprimento nulo, o conceito de distância que se segue é formulado apenas para variedades Riemannianas.

Definição 1.9 *Para dois pontos p e q duma variedade Riemanniana conexa M , a distância de p a q , denotada por $d(p, q)$, é o ínfimo de $\{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\}$, onde $\Omega(p, q)$ é o conjunto das curvas de M seccionalmente suaves que vão de p até q .*

Com esta noção de distância M torna-se num espaço métrico. (Ver [2], p. 187). É obvio que as isometrias entre variedades (pseudo-)Riemannianas preservam o comprimento de curvas, pelo que uma isometria entre variedades Riemannianas M e N é também uma isometria entre M e N como espaços métricos. Apesar de já não ter uma demonstração evidente, a afirmação recíproca é igualmente verdadeira. (Ver [22], p. 169). Estes resultados são expressos no lema que se segue.

Lema 1.4 *Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades Riemannianas conexas é uma isometria se e só se preserva distâncias, isto é, $d(p, q) = d(\phi(p), \phi(q))$, para quaisquer pontos p e q de M .*

Em síntese, pelo factos expostos pode-se concluir o seguinte: como seria de esperar, a Definição 1.7 é uma extensão da usual definição de isometria no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . De resto, em variedades Riemannianas as isometrias continuam a corresponder aos “movimentos rígidos”, na medida em que não alteram a distância entre pontos. No entanto, a associação das isometrias com as transformações que preservam a distância não se mantém válida para variedades pseudo-Riemannianas em geral, uma vez que não existe qualquer noção de distância (canonicamente) estabelecida quando a métrica é indefinida.

Vamos finalizar esta secção apresentando uma caracterização das isometrias entre variedades pseudo-Riemannianas construídas a partir de espaços vetoriais.

Proposição 1.1 *Consideremos uma aplicação linear $\phi : V_1 \rightarrow V_2$, entre espaços com produto escalar de igual dimensão. Então ϕ é uma isometria entre variedades pseudo-Riemannianas (considerando-se em V_1 e V_2 a estrutura descrita na Secção 1.2) se e só se é uma aplicação (bijetiva) que preserva o produto escalar.*

Demonstração. Uma vez que as aplicações lineares são suaves, um isomorfismo ϕ é um difeomorfismo. Por outro lado, usando-se a notação da correspondência (1.3), sabemos que se $v_p \in T_p V_1$ então $d\phi(v_p) = (\phi(v))_p$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle d\phi(u_p), d\phi(w_p) \rangle &= \langle u_p, w_p \rangle \Leftrightarrow \langle (\phi(u))_p, (\phi(w))_p \rangle = \langle u_p, w_p \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle \phi(u), \phi(w) \rangle = \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

■

As isometrias referidas na proposição anterior, isto é, que são também aplicações lineares entre espaços vetoriais, serão designadas por *isometrias lineares*.

Observação 1.1 *Como consequência da proposição anterior, temos que se V é um espaço com produto escalar, dimensão n e índice κ , então como variedade pseudo-Riemanniana V é isométrica a \mathbb{R}_κ^n . De facto, pode-se facilmente verificar que o isomorfismo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ determinado por uma qualquer base ortonormada de V , convenientemente ordenada, preserva o produto escalar se equiparmos \mathbb{R}^n com o produto definido em (1.1).*

1.4 Conexão e Derivada Covariante

Vamos começar por estabelecer algumas notações, muito comuns na bibliografia relacionada. Sendo M uma variedade diferenciável, consideraremos que:

1. $C^\infty(M)$ denota o conjunto das funções reais suaves definidas em M ;
2. $\mathfrak{X}(M)$ denota o conjunto dos campos de vetores suaves definidos em M ;
3. se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então
 - (a) Xf denota a função real suave definida em M por $(Xf)(p) = X_p(f)$;
 - (b) fX denota o campo de vetores suave definido em M pela igualdade $(fX)_p = f(p)X_p$;
4. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $[X, Y]$ denota o campo de vetores suave definido em M por $[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$.

Definição 1.10 *Uma conexão ∇ numa variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, denotando-se $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_X Y$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X , isto é:

$$\nabla_{(f_1 X_1 + f_2 X_2)} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \quad (f_1, f_2 \in C^\infty(M));$$

2. $\nabla_X Y$ é linear sobre \mathbb{R} em Y , isto é:

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R});$$

3. ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y \quad (f \in C^\infty(M)).$$

O campo de vetores $\nabla_X Y$ diz-se a derivada covariante de Y na direcção de X para a conexão ∇ .⁴

Exemplo 1.4 Consideremos que x_1, \dots, x_n são as coordenadas naturais de \mathbb{R}^n .

Se para quaisquer dois campos de vetores X e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ em \mathbb{R}^n definirmos

$\bar{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^n (XY^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$, ou seja, $\bar{\nabla}_X Y$ é o campo de vetores em \mathbb{R}^n definido por

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

então a aplicação $\bar{\nabla} : (X, Y) \rightsquigarrow \bar{\nabla}_X Y$ é uma conexão em \mathbb{R}^n . Esta conexão diz-se a conexão Euclidiana (ou conexão natural). A título ilustrativo, se, em \mathbb{R}^2 , tomarmos os campos $X = (x_1 + 2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - 3) \frac{\partial}{\partial x_2}$ e $Y = (x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + 4) \frac{\partial}{\partial x_2}$, então

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= ((x_1 + 2) \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} + (x_2 - 3) \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2}) \frac{\partial}{\partial x_1} + ((x_1 + 2) \frac{\partial(x_1 + 4)}{\partial x_1} + (x_2 - 3) \frac{\partial(x_1 + 4)}{\partial x_2}) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= (2x_2^2 - 6x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + 2) \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

O lema seguinte mostra que $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas dos valores de Y numa vizinhança de p e do valor de X em p .

Lema 1.5 Admita-se que ∇ é uma conexão numa variedade diferenciável M , que $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ e que $p \in M$. Nestas condições, se $Y = \tilde{Y}$ numa vizinhança (arbitrariamente pequena) de p e $X_p = \tilde{X}_p$ então $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$.

⁴Muitos autores usam os termos *conexão linear* e *conexão afim* como sinónimos de conexão.

Em virtude do lema anterior, escreveremos $\nabla_{X_p} Y$ no lugar de $(\nabla_X Y)_p$. Assim, se $v \in T_p(M)$ então $\nabla_v Y$ representará o valor de $\nabla_X Y$ em p , sendo X um qualquer campo de vetores em M tal que $X_p = v$. Pode-se imaginar $\nabla_{X_p} Y$ como sendo a derivada direccional de Y em p na direcção (e sentido) do vetor X_p .

Definição 1.11 *Suponha-se que x_1, \dots, x_n é um sistema de coordenadas num aberto U duma variedade diferenciável M e que ∇ é uma conexão em M . Então os símbolos de Christoffel de ∇ em relação a x_1, \dots, x_n são as n^3 funções reais Γ_{ij}^k em U tais que*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1 \leq i, j \leq n).^5$$

É imediato verificar que relativamente às coordenadas naturais de \mathbb{R}^n os símbolos de Christoffel da conexão Euclidiana são todos nulos (relativamente a outras coordenadas tal pode já não acontecer).

Considere-se agora uma curva suave arbitrária $\gamma : I \rightarrow M$, sendo M novamente uma variedade diferenciável. Recordamos que um *campo de vetores ao longo da curva* γ é uma aplicação $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo o $t \in I$. Denotaremos o conjunto dos campos de vetores suaves ao longo de γ por $\mathfrak{X}(\gamma)$ e, para $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e $f \in C^\infty(I)$, denotaremos por fV o campo de vetores ao longo de γ definido por $(fV)(t) = f(t)V(t)$. Um óbvio exemplo dum campo de vetores ao longo de γ é o seu campo *velocidade* $\gamma' : t \in I \rightarrow \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Se \widehat{V} for um campo de vetores suave em M e se, para cada $t \in I$, definirmos $V(t) = \widehat{V}_{\gamma(t)}$, então V é um campo de vetores suave ao longo de γ . Um campo de vetores V ao longo de γ diz-se *extensível* se existir um campo de vetores \widehat{V} , definido numa vizinhança da imagem de γ , que está relacionado na forma anterior com V .

Lema 1.6 *Seja M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão em M . Então para cada curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, a conexão ∇ determina um único operador*

$$\begin{array}{ccc} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(\gamma) \\ V & \rightsquigarrow & V' = \frac{DV}{dt} \end{array}$$

⁵As funções Γ_{ij}^k determinam completamente ∇ . De facto, utilizando as propriedades da definição de conexão, tem-se que se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ são dados por $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\text{então } \nabla_X Y = \sum_k \left(X Y^k + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Linearidade sobre \mathbb{R} :*

$$(a_1V_1 + a_2V_2)' = a_1V_1' + a_2V_2' \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R});$$

2. *Regra de produto:*

$$(fV)' = \frac{df}{dt}V + fV' \quad (f \in C^\infty(I));$$

3. *Se V é extensível, então para cada extensão \widehat{V} de V ,*

$$V'(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \widehat{V} \quad (t \in I).$$

Para cada $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, o campo de vetores $V' = \frac{DV}{dt}$ diz-se a *derivada covariante de V ao longo de γ* , e as propriedades de $\frac{D}{dt}$ permitem-nos afirmar que se escolhermos um sistema de coordenadas numa vizinhança de $\gamma(t_0)$ e escrevermos

$$V(t) = \sum_j V^j(t) \partial_j \Big|_{\gamma(t)},$$

para todo t em torno de t_0 , então

$$V'(t_0) = \sum_k \left(\dot{V}^k(t_0) + \sum_{i,j} V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \partial_k \Big|_{\gamma(t_0)}, \quad (1.5)$$

onde $\gamma^i(t)$ são as funções componentes da representação de γ nas coordenadas locais consideradas.

Observação 1.2 *No caso particular em que $M = \mathbb{R}^n$ e ∇ é a conexão Euclidiana, quando consideramos as coordenadas naturais obtemos $V'(t) = \sum_k \dot{V}^k(t) \partial_k \Big|_{\gamma(t)}$ (para todo $t \in I$), pois os símbolos de Christoffel são nulos. Portanto, uma consequência imediata da fórmula (1.5) é que em \mathbb{R}^n com a conexão Euclidiana a derivação covariante coincide (através da identificação usual de cada $T_p(\mathbb{R}^n)$ com \mathbb{R}^n) com a derivação usual.*

1.5 Conexão de Levi-Civita, Transporte Paralelo e Geodésicas

O lema que se segue é habitualmente denominado por *Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana*.

Lema 1.7 *Numa variedade pseudo-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,*

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (simetria), e
2. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ (compatibilidade com a métrica pseudo-Riemanniana).

A conexão referida no lema anterior diz-se a *conexão de Levi-Civita* (ou *Riemanniana*) de M .

Lema 1.8 *A conexão Euclidiana $\bar{\nabla}$ do Exemplo 1.4 é a conexão de Levi-Civita do espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_κ^n , para $\kappa = 0, \dots, n$.*

Convenção 1.1 *Em cada variedade pseudo-Riemanniana usaremos sempre a respectiva conexão de Levi-Civita e a derivação covariante associada a esta conexão, sem efetuarmos qualquer comentário adicional.*

Uma vez que fixámos uma única derivação covariante ao longo de curvas em cada variedade pseudo-Riemanniana, estamos em condições de introduzir os conceitos de transporte paralelo, de aceleração e de geodésica.

Sendo M uma variedade pseudo-Riemanniana, um campo de vetores suave V ao longo de uma curva suave γ de M diz-se *paralelo (ao longo de γ)* se $V' = 0$; e um campo de vetores em M diz-se *paralelo* se a sua restrição a qualquer curva (suave) de M é um campo paralelo (ao longo dessa curva). Por exemplo, em \mathbb{R}_κ^n os campos de vetores paralelos ao longo de cada curva são exatamente aqueles que têm componentes constantes (relativamente às coordenadas naturais).

O facto fundamental sobre campos de vetores paralelos é que qualquer vetor tangente num qualquer ponto de uma curva pode ser estendido, de modo único, a um campo de vetores paralelo ao longo dessa curva.

Lema 1.9 *Dados uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, um valor $t_0 \in I$ e um vetor $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo da curva γ tal que $V(t_0) = V_0$.*

O campo de vetores ao longo de γ cuja existência é garantida pelo lema anterior diz-se o *transporte paralelo de V_0 ao longo de γ* . (Ver a figura 1.4).

Vamos agora estender esta noção de transporte paralelo ao caso em que as curvas são “apenas” seccionalmente suaves. Considere-se uma curva seccionalmente suave $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, ou seja, admita-se que existe uma partição finita

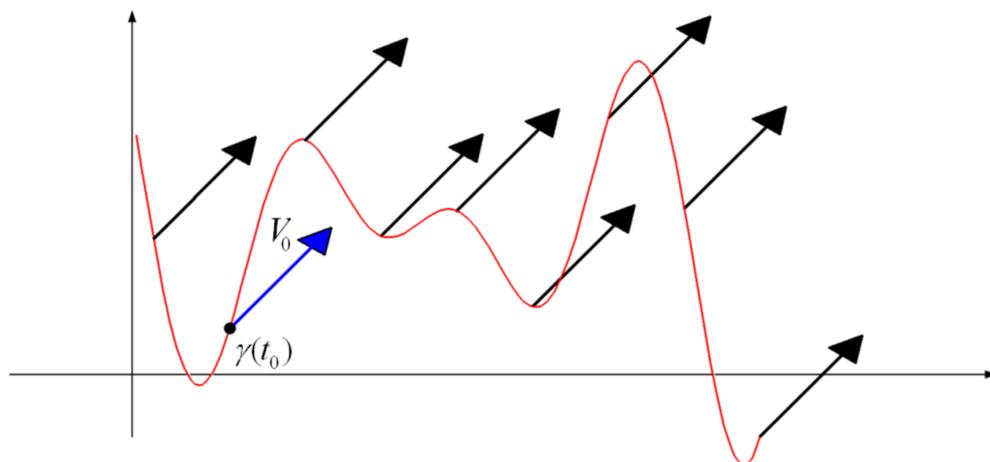


Figura 1.4: Transporte paralelo do vetor V_0 ao longo da curva γ

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ tal que cada restrição de γ aos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ é uma curva suave. Então dado um qualquer vetor $V_a \in T_{\gamma(a)}M$, do Lema 1.9 resulta que existe um único campo contínuo de vetores $V : [a, b] \rightarrow TM$ ao longo da curva γ , de maneira que a sua restrição a cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$ é um campo paralelo e tal que $V(a) = V_a$. Este campo de vetores diz-se o *transporte paralelo de V_a ao longo da curva seccionalmente suave γ* , e consiste no transporte paralelo de V_a ao longo do primeiro segmento suave de γ , quando $a \leq t \leq t_1$, depois no transporte paralelo de $V(t_1)$ ao longo do segundo segmento suave de γ , quando $t_1 \leq t \leq t_2$, e assim sucessivamente.

Uma curva no espaço Euclidiano é uma linha reta se e só se a sua aceleração é identicamente nula. É esta caracterização que vai ser tida em conta na definição de geodésica em variedades pseudo-Riemannianas. Portanto, a ideia básica sob esta definição é que as geodésicas são curvas de “curvatura mínima”.

Definição 1.12 *Sejam M uma variedade pseudo-Riemanniana e γ uma curva suave em M . Então a aceleração de γ é o campo de vetores ao longo de γ definido por $\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt}$. A curva γ diz-se uma geodésica se a sua aceleração é nula.*

Evidentemente, atendendo apenas às respectivas definições, uma geodésica também pode ser caracterizada como uma curva cujo campo de vetores velocidade é paralelo.

Ao longo desta dissertação necessitaremos também da noção de geodésica “por secções”, que generalize o conceito de geodésica. Diremos que uma qualquer curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma *geodésica quebrada* se existir uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ tal que cada restrição de γ aos subintervalos $]t_{i-1}, t_i[$ é uma geodésia.

A partir da igualdade (1.5) e da Definição 1.12 obtém-se de imediato a chamada *equação da geodésica*, que figura no corolário seguinte.

Corolário 1.1 *Sejam x_1, \dots, x_n um sistema de coordenadas num aberto $U \subseteq M$. Uma curva $\gamma : I \rightarrow U$ é uma geodésica de M se e só se as suas funções componentes $\gamma^i = x_i \circ \gamma$ satisfazem*

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0,$$

para $1 \leq k \leq n$.

Utilizando-se o Teorema da Existência e Unicidade para sistemas de EDOs tem-se agora o seguinte resultado:

Lema 1.10 *Para cada $p \in M$, cada $v \in T_p M$ e cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfazendo $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Ademais, se duas geodésicas satisfazem tais condições iniciais, então coincidem na interseção dos seus domínios.*

Resulta da unicidade estabelecida no lema anterior que para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$ existe uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ cujo domínio é o maior possível, ou seja, que não é um segmento duma geodésica com maior domínio, dita *geodésica maximal*, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Frequentemente esta geodésica maximal é simplesmente designada por *a geodésica com ponto inicial p e velocidade inicial v* .

Exemplo 1.5 *Uma vez que os símbolos de Christoffel da conexão Euclidiana em relação às coordenadas naturais são todos nulos, então a equação da geodésica em \mathbb{R}_κ^n (para $\kappa = 0, \dots, n$), a respeito destas coordenadas, fica*

$$\ddot{\gamma}^k(t) = 0 \quad (\text{para } 1 \leq k \leq n).$$

Portanto $\gamma^k(t) = p_k + tv_k$ para todo t , onde p_k e v_k são constantes arbitrárias. Em notação vetorial temos que $\gamma(t) = p + tv$, pelo que as geodésicas em \mathbb{R}_κ^n são linhas retas.

O lema seguinte mostra que as parametrizações das geodésicas têm significância geométrica.

Lema 1.11 *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica não constante. Então uma reparametrização $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ é uma geodésica se e só se a função h tem a forma $h(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

Pretendemos agora destacar que em variedades Riemannianas (com métrica definida), a afirmação “geodésicas são os caminhos mais curtos” é, de certa forma, verdadeira. Pela Definição 1.9, um segmento de curva α ligando p a q numa variedade Riemanniana é um dos segmentos de curva seccionalmente suave mais curtos entre p e q se e só se $L(\alpha) = d(p, q)$. (Podem existir vários ou nenhum destes segmentos). Diz-se nesse caso que α é *minimizante* (ou que minimiza o comprimento do arco entre p e q). Justificando a afirmação acima, o lema que se segue estabelece que as curvas minimizantes têm de ser geodésicas, a menos duma reparametrização.⁶

Lema 1.12 *Numa variedade Riemanniana, um segmento de curva minimizante ligando p a q é uma reparametrização (monótona) dum segmento de geodésica (não-quebrada) entre p e q .*

Para terminar esta secção, vamos ainda introduzir uma natural classificação de curvas relativamente ao seu *carácter causal*.

Definição 1.13 *Uma curva γ numa variedade pseudo-Riemanniana diz-se tipo-espaço [tipo-tempo/tipo-luz(nula)] se todos os seus vetores velocidade $\gamma'(t)$ são tipo-espaço [tipo-tempo/tipo-luz(nulo)].*

Note-se que uma curva arbitrária não tem necessariamente um destes caracteres causais, mas tal acontece para toda a geodésica γ porque γ' é paralelo e o transporte paralelo preserva o carácter causal dos vetores.

1.6 Fórmula de Gauss, Geodésias em Subvariedades e Transporte Paralelo Normal

Nesta secção vamos considerar que \overline{M} é uma variedade pseudo-Riemanniana, com métrica $\overline{\Phi}$, e que M é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de \overline{M} (escreveremos $M \subseteq \overline{M}$). Usaremos barras superiores para distinguir os objetos geométricos correspondentes de M e \overline{M} . Assim, ∇ denotará a conexão de M e $\overline{\nabla}$ denotará a conexão de \overline{M} ; sendo V um campo de vetores ao longo de uma curva, $V' = \frac{DV}{dt}$ denotará a derivada covariante em M e $\dot{V} = \frac{\overline{D}V}{dt}$ denotará a derivada covariante em \overline{M} .

⁶O comprimento duma curva seccionalmente suave é invariante por reparametrizações (monótonas).

Admita-se também que $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ denota o conjunto das restrições a M dos campos de vetores pertencentes a $\mathfrak{X}(\overline{M})$. Assim, qualquer $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $X_p \in T_p\overline{M}$.

Cada espaço tangente T_pM é, por definição, um subespaço não-degenerado de $T_p\overline{M}$. Consequentemente, pelo Lema 1.2, tem-se que

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp, \quad (1.6)$$

onde $(T_pM)^\perp = \{v \in T_p\overline{M} : \langle v, v_p \rangle = 0 \ \forall v_p \in T_pM\}$. Este conjunto $(T_pM)^\perp$ é também um subespaço não-degenerado de $T_p\overline{M}$, chamado o *complemento ortogonal* de T_pM , e os seus vetores dizem-se *normais* a M .

Suponha-se que $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$. Evidentemente, se cada X_p é tangente a M , isto é, $X_p \in di(T_pM) \equiv T_pM$, então X é um campo de vetores (tangentes) em M . Por outro lado, quando cada X_p é normal a M diz-se que X é um *campo de vetores normal* a M . Denotaremos o conjunto de todos estes campos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$.

Para $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, projetando ortogonalmente em cada $T_p\overline{M}$ nos subespaços T_pM e $(T_pM)^\perp$, obtemos os campos de vetores $X^\top \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ tais que $X = X^\top \oplus X^\perp$. As aplicações resultantes

$$\begin{array}{ccc} \pi^\top : \overline{\mathfrak{X}}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ X & \rightsquigarrow & X^\top \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \pi^\perp : \overline{\mathfrak{X}}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M)^\perp \\ X & \rightsquigarrow & X^\perp \end{array},$$

dizem-se as *projeções tangencial* e *normal*, respetivamente. (Ver a figura 1.5).

Considere-se agora que $\overline{X}, \overline{Y} \in \overline{\mathfrak{X}}(\overline{M})$ são extensões arbitrárias a \overline{M} dos campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, respetivamente. Então, define-se o campo $\overline{\nabla}_X Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ como sendo a restrição a M do campo de vetores $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$. De facto, $\overline{\nabla}_X Y$ é independente da escolha das extensões \overline{X} e \overline{Y} . Assim, usando-se a decomposição acima, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top \oplus (\overline{\nabla}_X Y)^\perp. \quad (1.7)$$

A *segunda forma fundamental* de $M \subseteq \overline{M}$ é definida como sendo a aplicação Π de $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$\Pi(X, Y) := (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Pode provar-se que Π é simétrica e bilinear sobre $C^\infty(M)$. O termo “primeira forma fundamental”, por sua vez, foi usado classicamente para se referir a métrica (pseudo-Riemanniana) induzida $\Phi := i^*(\overline{\Phi})$ de M .

Uma vez que $(\overline{\nabla}_X Y)_p$ depende apenas (no que diz respeito a X) de X_p e Π é uma aplicação simétrica, então $(\Pi(X, Y))_p$ só depende dos valores de X e de Y no

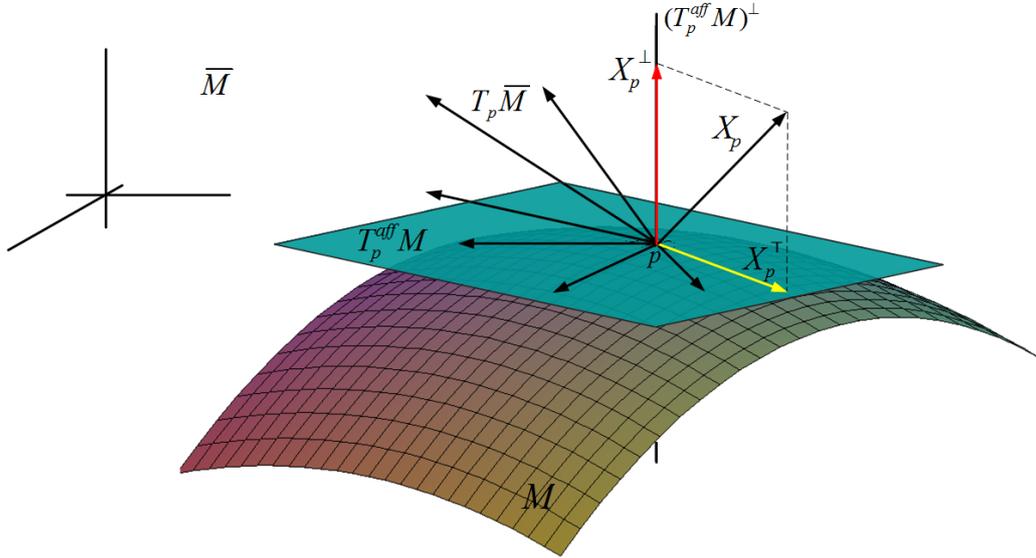


Figura 1.5: Projecção no espaço tangente e no seu complemento ortogonal, em \mathbb{R}^3 .

ponto p . Por este motivo, poderemos escrever $\Pi(X_p, Y_p)$ no lugar de $(\Pi(X, Y))_p$. Assim se $u, v \in T_p M$ então $\Pi(u, v)$ representará o valor de $(\Pi(X, Y))_p$, sendo X e Y dois quaisquer campos de vetores em M tais que $X_p = u$ e $Y_p = v$.

O lema seguinte identifica a componente tangencial da decomposição de $\bar{\nabla}_X Y$ que aparece em (1.7).

Lema 1.13 (Fórmula de Gauss) *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a seguinte fórmula é válida ao longo de M :*

$$\bar{\nabla}_X Y = \underbrace{\nabla_X Y}_{\text{tangente a } M} \oplus \underbrace{\Pi(X, Y)}_{\text{normal a } M}, \quad (1.8)$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Portanto, Π mede a diferença entre a conexão Riemanniana (intrínseca) de M e a conexão Riemanniana (extrínseca) na variedade ambiente \bar{M} . A partir do lema anterior e das propriedades da derivação covariante, obtém-se a importante fórmula seguinte:

Lema 1.14 (Fórmula de Gauss ao Longo de uma Curva) *Suponha-se que $t \rightsquigarrow \gamma(t)$ é uma curva em $M \subseteq \bar{M}$ e que V é um campo de vetores (tangente a*

M) ao longo de γ . Então:

$$\dot{V}(t) = \underbrace{V'(t)}_{\text{tangente a } M} \oplus \underbrace{\Pi(\gamma'(t), V(t))}_{\text{normal a } M},$$

onde $\dot{V} = \frac{\overline{D}V}{dt}$ e $V' = \frac{DV}{dt}$.

Repare-se que, antes de mais, uma consequência imediata da fórmula anterior é que quando γ é uma curva em $M \subseteq \mathbb{R}_\kappa^n$, com $\kappa = 0, \dots, n$, e V é um campo de vetores (tangentes a M) ao longo de γ , então a derivada covariante $\frac{DV}{dt}$ é, para todo o t , a projecção em $T_{\gamma(t)}M$ da derivada usual de V .

Aplicando o lema anterior ao caso especial $V = \gamma'$, tem-se agora a seguinte fórmula para a aceleração de uma qualquer curva γ em $M \subseteq \overline{M}$:

$$\ddot{\gamma} = \gamma'' \oplus \Pi(\gamma', \gamma'),$$

onde $\ddot{\gamma} = \frac{\overline{D}\gamma'}{dt}$ é a aceleração em \overline{M} e $\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt}$ é a aceleração em M . Uma consequência desta fórmula é o resultado que se segue.

Lema 1.15 *Uma curva γ em $M \subseteq \overline{M}$ é uma geodésica em M se e só se a sua aceleração em \overline{M} é, em todos os pontos de γ , normal a M .*

Se particularizarmos no lema anterior $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$, obtemos uma importante caracterização das geodésicas de subvariedades pseudo-Riemannianas do espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_κ^n : uma curva γ em $M \subseteq \mathbb{R}_\kappa^n$ é uma geodésica em M se e só se a sua aceleração usual $\ddot{\gamma}$ é, para todo o t , normal a M .

No remanescente desta secção vamos introduzir o conceito de transporte paralelo normal, realizado com vetores normais à subvariedade M . Considere-se uma curva suave $t \in I \rightsquigarrow \gamma(t) \in M \subseteq \overline{M}$ e admita-se que W é um campo de vetores suave ao longo de γ sempre normal a M , isto é, tal que $W(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$ para todo $t \in I$. A *derivada covariante normal* $\frac{D^\perp W}{dt}$ é definida como sendo (o campo de vetores ao longo de γ dado por) a componente normal da derivada covariante $\frac{\overline{D}W}{dt}$, encontrada com a decomposição referida em (1.6). Diz-se que o campo W é *paralelo normal* se $\frac{D^\perp W}{dt} = 0$. Portanto W é paralelo normal se e só se a sua derivada covariante em \overline{M} é, em todos os pontos de γ , tangente à subvariedade M .

De forma análoga ao exposto no Lema 1.9, o lema que se segue mostra que também qualquer vetor normal a M num qualquer ponto de uma curva pode ser estendido, de modo único, a um campo de vetores paralelo normal ao longo dessa curva.

Lema 1.16 *Seja γ uma curva suave em $M \subseteq \overline{M}$. Se W_0 é um vetor normal a M no ponto $\gamma(t_0)$, então existe um único campo de vetores paralelo normal W ao longo de γ tal que $W(t_0) = W_0$.*

O campo de vetores referido no lema anterior diz-se o *transporte paralelo normal* de W_0 ao longo de γ .

Referimos ainda que, à semelhança do que acontece no caso dos vetores tangentes, se considerarmos uma curva seccionalmente suave $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, para cada vetor $W_a \in (T_{\gamma(a)}M)^\perp$ existe um único campo contínuo W de vetores normais a M ao longo de γ , tal que a sua restrição a cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$ é um campo paralelo normal e $W(a) = W_a$. Este campo de vetores diz-se o *transporte paralelo normal de W_a ao longo da curva seccionalmente suave γ* .

1.7 Orientabilidade

Esta última secção de conceitos fundamentais visa incluir algumas noções gerais sobre orientação de variedades diferenciáveis, que são necessárias para a definição de aplicação rolamento do capítulo seguinte. A definição de variedade orientável generaliza a ideia de superfície orientável do espaço Euclidiano. Recordamos que estas são as superfícies onde é possível construir um vetor normal unitário em cada ponto (excepto nos pontos da fronteira) de forma que eles variem “continuamente” sobre a superfície, isto é, não há mudança abrupta de sentido.

Diz-se que duas bases ordenadas $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ e $\{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \dots, \widehat{b}_n\}$ dum espaço vetorial V têm a *mesma orientação* se $\det(A) > 0$, onde $A = (a_{ij})$ é a (única) matriz não-singular tal que $\widehat{b}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$ ($i = 1, \dots, n$); diz-se que têm *orientação oposta* se $\det(A) < 0$. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 as bases $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 0), (0, -1)\}$ têm orientação oposta. É fácil verificar que “ter a mesma orientação” é uma relação de equivalência no conjunto de todas as bases de V e que existem exactamente duas classes de equivalência, chamadas *orientações* de V . A orientação que contém a base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ será denotada por $[b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Considere-se agora uma variedade diferenciável M e seja φ um sistema de coordenadas em $U \subseteq M$. Com $p \in U$, denote-se

$$\lambda_\varphi(p) := [\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p].$$

(Aqui $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é a base de $T_p M$ determinada por φ). Então, uma *orientação* λ de M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ uma orientação

$\lambda(p)$ de T_pM , que é suave no sentido em que para cada ponto de M existe um sistema de coordenadas φ tal que $\lambda = \lambda_\varphi$ em alguma vizinhança desse ponto.

Uma variedade diferenciável M diz-se *orientável* se existir uma orientação de M ; *orientar* M é escolher uma orientação particular. Por exemplo, \mathbb{R}^n é orientável e uma sua orientação é λ_φ onde φ é o sistema de coordenadas naturais. A esta orientação chama-se *orientação usual* de \mathbb{R}^n .

Se λ é uma orientação de M então também o é $-\lambda$, a qual associa a cada ponto p a orientação oposta de T_pM . Se M é conexa então $\pm\lambda$ são as suas duas únicas orientações. Assim no caso conexo, orientar um único espaço tangente corresponde a orientar toda a variedade.

Se $\phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local, é fácil verificar que, para cada ponto $p \in M$, a correspondência $\widehat{\phi}$ dada por

$$\widehat{\phi}([b_1, \dots, b_n]) := [d\phi(b_1), \dots, d\phi(b_n)]$$

é uma função, das orientações de T_pM para as orientações de $T_{\phi(p)}N$, bem-definida e injetiva.

Definição 1.14 Admita-se ϕ e $\widehat{\phi}$ nas condições anteriores. Se M e N são orientadas por λ_M e λ_N , respetivamente, diz-se que ϕ :

1. preserva a orientação se $\widehat{\phi}(\lambda_M(p)) = \lambda_N(\phi(p))$, $\forall p \in M$;
2. inverte a orientação se $\widehat{\phi}(\lambda_M(p)) = -\lambda_N(\phi(p))$, $\forall p \in M$.

Quando M é conexa existem apenas estas duas possibilidades, mas em caso contrário ϕ pode preservar a orientação numa componente e inverter noutra.

Exemplo 1.6 Tomemos $M = N = \mathbb{R}^2$ com a orientação usual e a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (x, -y)$. Seja $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto arbitrário. Pela identificação habitual de $T_p\mathbb{R}^2$ com \mathbb{R}^2 , temos $\partial_1|_p = (1, 0)$ e $\partial_2|_p = (0, 1)$. Então, $\partial_1|_p = \dot{\gamma}_1(0)$ com $\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0)$ e $\partial_2|_p = \dot{\gamma}_2(0)$ com $\gamma_2(t) = (x_0, y_0 + t)$. Assim, $d\phi(\partial_1|_p) = \frac{d(\phi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = (1, 0)$ e $d\phi(\partial_2|_p) = \frac{d(\phi \circ \gamma_2)}{dt}(0) = (0, -1)$. Portanto podemos concluir que ϕ inverte a orientação, uma vez que $[d\phi(\partial_1|_p), d\phi(\partial_2|_p)] \neq [\partial_1|_{\phi(p)}, \partial_2|_{\phi(p)}]$.

De forma análoga poderíamos mostrar que, para qualquer ângulo θ e qualquer vetor $v = (v_1, v_2)$, as aplicações $\phi_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\phi_v(x, y) = (x + v_1, y + v_2)$ preservam a orientação. (Ver a figura 1.6).

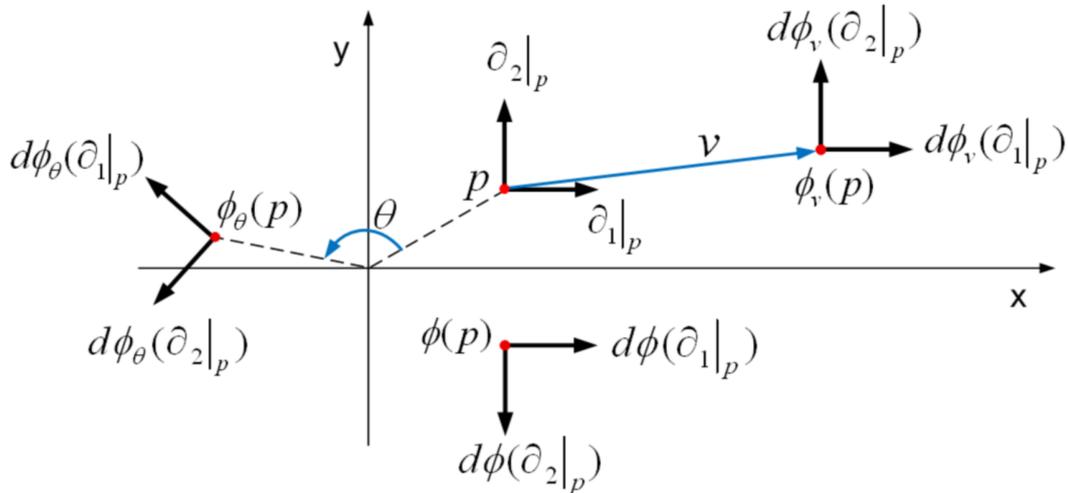


Figura 1.6: Simetria sobre o eixo dos x 's. Rotação em torno da origem. Translação.

Observação 1.3 *Nas condições da Definição 1.14, quando $M = N$, $\lambda_M = \lambda_N$ e M é conexa, uma vez que a função $\hat{\phi}$ é injetiva e existem somente duas orientações possíveis para M , digamos λ e $-\lambda$, tem-se que ϕ preserva [inverte] a orientação quando $\lambda_M = \lambda$ se e só se ϕ preserva [inverte] a orientação quando $\lambda_M = -\lambda$. Efetivamente, $\forall p \in M$, atendendo a que $\lambda(p) \neq -\lambda(p) \Rightarrow \hat{\phi}(\lambda(p)) \neq \hat{\phi}(-\lambda(p))$, tem-se que $\hat{\phi}(\lambda(p)) = \lambda(\phi(p)) \Leftrightarrow \hat{\phi}(-\lambda(p)) \neq \lambda(\phi(p)) \Leftrightarrow \hat{\phi}(-\lambda(p)) = -\lambda(\phi(p))$.*

Sempre que a partir de agora escrevermos simplesmente que um difeomorfismo local $\phi : M \rightarrow M$, sendo M orientável e conexa, *preserva [inverte] a orientação*, isso significará que ϕ preserva [inverte] sempre a orientação, de acordo com a Definição 1.14, independentemente da forma como M seja orientada.

As duas proposições seguintes indicam um critério para que certos difeomorfismos preservem a orientação.

Proposição 1.2 *Consideremos um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\phi(x) = Rx$, com $R \in GL(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n) : \det(X) \neq 0\}$. Então ϕ preserva a orientação se e somente se $\det(R) > 0$.*

Demonstração. Uma vez que \mathbb{R}^n é uma variedade conexa, sabemos que as suas duas únicas orientações são a orientação usual $\lambda(p) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right]$, onde x_1, \dots, x_n são as coordenadas naturais, e a correspondente orientação $-\lambda$.

Suponhamos que \mathbb{R}^n está orientada com a orientação usual. A Observação 1.3 garante que a consideração deste caso é suficiente para a demonstração. Preten-

demos mostrar que $\det(R) > 0$ se e só se $\forall p \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\left[d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p\right), \dots, d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\phi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\phi(p)} \right]. \quad (1.9)$$

Designemos $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Como ϕ é uma aplicação linear, sabemos que $d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ identifica-se (através da identificação usual) com $\phi(e_i) = Re_i \in \mathbb{R}^n$, para $i = 1, \dots, n$.⁷ Portanto podemos afirmar que a igualdade (1.9) acima é equivalente a

$$[Re_1, \dots, Re_n] = [e_1, \dots, e_n].^8 \quad (1.10)$$

Mas se, para $i = 1, \dots, n$, denotarmos a i -ésima coluna da matriz R por R_i , temos que $Re_i = R_i$. Logo a matriz dos coeficientes que expressam a base Re_1, \dots, Re_n em relação à base canónica e_1, \dots, e_n é R^\top . Consequentemente, uma vez que $\det(R) = \det(R^\top)$, podemos concluir que a igualdade (1.10) verifica-se se e só se $\det(R) > 0$. ■

Proposição 1.3 *Consideremos um difeomorfismo $\phi : \mathfrak{gl}(n) \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ definido por $\phi(X) = RX$ ou $\phi(X) = XR$, com $R \in GL(n)$. Então:*

1. *se n é par, ϕ preserva a orientação.*
2. *se n é ímpar, ϕ preserva a orientação se e somente se $\det(R) > 0$.*

Demonstração. Vamos apresentar apenas a demonstração para o caso de $\phi(X) = RX$, sendo a prova para o outro caso totalmente análoga.

Suponhamos que e_1, \dots, e_{n^2} designa a base canónica de $\mathfrak{gl}(n)$. É evidente que a aplicação $\phi(X) = RX$ preserva a orientação se e só se

$$[Re_1, \dots, Re_{n^2}] = [e_1, \dots, e_{n^2}]. \quad (1.11)$$

Mas a matriz dos coeficientes que expressam Re_1, \dots, Re_{n^2} em relação a e_1, \dots, e_{n^2} é a matriz diagonal por blocos $\text{diag}(R^\top, \dots, R^\top)$, de ordem n^2 . Portanto, uma vez que o determinante desta matriz é $\det(R)^n$, a igualdade (1.11) é automaticamente satisfeita quando n é par e verifica-se se e só se $\det(R) > 0$ quando n é ímpar. ■

⁷Considerando-se a notação da identificação (1.2), para toda a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem-se que $d\phi(v_p) = (\phi(v))_{\phi(p)}$, $\forall p \in \mathbb{R}^n, v_p \in T_p\mathbb{R}^n$.

⁸Devido à coincidência entre as respectivas matrizes de mudança de base, se $\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n\}$ são duas quaisquer bases ordenadas de \mathbb{R}^n e $\{(b_1)_p, \dots, (b_n)_p\}$ e $\{(\hat{b}_1)_p, \dots, (\hat{b}_n)_p\}$ são as correspondentes bases de $T_p\mathbb{R}^n$, ocorre que $[b_1, \dots, b_n] = [\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n] \Leftrightarrow [(b_1)_p, \dots, (b_n)_p] = [(\hat{b}_1)_p, \dots, (\hat{b}_n)_p]$.

Capítulo 2

Aplicações Rolamento em Variedades Pseudo-Riemannianas

Os rolamentos que vamos abordar na presente dissertação são, antes de mais, “movimentos” de subvariedades mergulhadas em variedades pseudo-Riemannianas. Estes movimentos são produzidos à custa da ação do grupo das isometrias da variedade ambiente. Portanto, o estudo dessas isometrias será fundamental para podermos descrever rolamentos concretos. É neste contexto que se enquadra a primeira secção deste capítulo, e chegaremos a tal conhecimento para as variedades que nos vão interessar recorrendo a alguma teoria sobre grupos de Lie.

Para além da introdução da definição de aplicação rolamento, que formaliza o conceito de rolamento, nas secções seguintes faremos uma interpretação desta definição no espaço Euclidiano e a sua particularização para dois casos fundamentais. Nas últimas secções serão provadas algumas propriedades dos rolamentos e será feita a ligação com o transporte paralelo de vetores.

2.1 Grupos Matriciais Associados a Isometrias

2.1.1 Grupos de Lie Quadráticos

Na construção desta secção foram consultadas, sobretudo, as referências [8], [11], [41] e [6].

Com $\alpha = \pm 1$, seja J uma qualquer matriz real de ordem n tal que $J^2 = \alpha I_n$ e $J^\top = \alpha J$, onde I_n representa a matriz identidade e J^\top a transposta de J . Da definição de J decorre imediatamente que ela é invertível, tendo-se $J^{-1} = J^\top$. Portanto, o número n é obrigatoriamente par quando $\alpha = -1$, uma vez que toda

a matriz anti-simétrica de ordem ímpar tem determinante nulo. Associado a esta matriz J , considere-se o seguinte grupo matricial:

$$G_J := \{X \in GL(n) : X^\top JX = J\}.^1 \quad (2.1)$$

G_J é um subgrupo algébrico fechado de $GL(n)$, na medida em que pode ser definido por um conjunto finito de equações polinomiais nas entradas de X . Portanto, atendendo ao *teorema do subgrupo fechado de Cartan*, G_J é um subgrupo de Lie de $GL(n)$. Aos grupos assim formados chamaremos *grupos de Lie quadráticos*, devendo-se o nome, naturalmente, ao facto deles serem definidos por um conjunto de equações quadráticas. Uma consequência evidente de (2.1) é que toda a matriz de G_J tem determinante igual a ± 1 . Tem-se ainda que a álgebra de Lie de G_J , equipada com o produto de Lie $[A, B] = AB - BA$, é dada por

$$\mathcal{L}(G_J) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A^\top J = -JA\}.^2 \quad (2.2)$$

Vamos começar por introduzir duas propriedades básicas que nos serão úteis nos capítulos seguintes.

Proposição 2.1 1. Se $X \in G_J$ e $A \in \mathcal{L}(G_J)$, então $X^{-1}AX \in \mathcal{L}(G_J)$.

2. Se $t \rightsquigarrow X(t)$ é uma curva suave em G_J , então $\dot{X}(t)X^{-1}(t)$ e $X^{-1}(t)\dot{X}(t)$ pertencem a $\mathcal{L}(G_J)$.

Demonstração. A verificação da primeira afirmação é trivial:

$$(X^{-1}AX)^\top J = X^\top A^\top (X^{-1})^\top J = X^\top (A^\top J)X = -(X^\top J)AX = -JX^{-1}AX.$$

Relativamente à segunda afirmação, da hipótese $X^\top(t)JX(t) = J$ por derivação resulta imediatamente

$$\dot{X}^\top(t)JX(t) + X^\top(t)J\dot{X}(t) = 0.$$

Consequentemente podemos escrever as igualdades

$$(\dot{X}(t)X^{-1}(t))^\top J = -J\dot{X}(t)X^{-1}(t) \quad \text{e} \quad (X^{-1}(t)\dot{X}(t))^\top J = -JX^{-1}(t)\dot{X}(t),$$

que confirmam o que se pretendia. ■

¹A condição $X^\top JX = J$ é equivalente a $XJX^\top = J$.

²A condição $A^\top J = -JA$ é equivalente a $JA^\top = -AJ$.

Considere-se também a forma bilinear no espaço vetorial \mathbb{R}^n definida por

$$\langle x_1, x_2 \rangle_J := x_1^\top J x_2, \quad \text{com } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Sabemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ é não-degenerada pelo facto de J ser uma matriz invertível. Portanto, esta forma bilinear é um produto escalar, quando J é simétrica, ou um produto simplético, quando J é anti-simétrica.³ Deste modo, tomando-se o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ em cada espaço tangente $T_p \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, a variedade diferenciável \mathbb{R}^n torna-se numa variedade pseudo-Riemanniana ou numa variedade simplética, consoante $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, respetivamente. Denotaremos tal variedade por (\mathbb{R}^n, Φ_J) . Pode-se ainda verificar facilmente que o grupo G_J é constituído pelas representações matriciais das transformações lineares de \mathbb{R}^n que deixam $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ invariante, isto é

$$X \in G_J \quad \text{se e só se} \quad \langle Xa, Xb \rangle_J = \langle a, b \rangle_J, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Uma consequência imediata disto é que, quando J é simétrica, toda a aplicação

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \Phi_J) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \Phi_J) \\ x & \rightsquigarrow & Rx + s \end{array}, \quad (2.4)$$

com $R \in \mathfrak{gl}(n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$, é uma isometria se e só se $R \in G_J$.

Na proposição seguinte vamos formular um produto escalar em $\mathfrak{gl}(n)$, igualmente associado à matriz J , que generaliza o produto interno de Frobenius definido por

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^\top B), \quad \text{com } A, B \in \mathfrak{gl}(n), \quad (2.5)$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ representa o traço da correspondente matriz.

Proposição 2.2 *A forma bilinear definida no espaço vetorial $\mathfrak{gl}(n)$ por*

$$\langle A, B \rangle_J := \text{tr}(J^\top A^\top J B), \quad \text{com } A, B \in \mathfrak{gl}(n), \quad (2.6)$$

é um produto escalar.

Demonstração. De acordo com a respectiva definição, necessitamos de mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ é simétrica e não-degenerada.

Quanto à simetria, efetivamente temos:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_J &= \text{tr}(J^\top A^\top J B) = \text{tr}((J^\top A^\top J B)^\top) = \text{tr}(B^\top J^\top A J) = \text{tr}(J B^\top J^\top A) \\ &= \text{tr}(\pm J^\top B^\top (\pm J) A) = \text{tr}(J^\top B^\top J A) = \langle B, A \rangle_J. \end{aligned}$$

³Um *produto simplético* num espaço vetorial de dimensão finita é uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada.

A fim de provarmos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ é não-degenerada, comecemos por notar que $\langle A, B \rangle_J = \langle AJ, JB \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno definido em (2.5). Agora, suponhamos que $\langle A, B \rangle_J = 0$, $\forall B \in \mathfrak{gl}(n)$. Então $\langle AJ, JB \rangle = 0$ e, equivalentemente, $\langle J^\top AJ, B \rangle = 0$, $\forall B \in \mathfrak{gl}(n)$. Assim, dado que qualquer produto interno é uma forma não-degenerada, $J^\top AJ = 0$ e, portanto, $A = 0$. ■

À custa deste produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$, a seguir vamos introduzir uma nova caracterização do grupo de Lie quadrático G_J .

Proposição 2.3 *Com $X \in GL(n)$, tem-se:*

$$X \in G_J \text{ se e só se } \langle XA, XB \rangle_J = \langle AX, BX \rangle_J = \langle A, B \rangle_J, \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n).$$

Demonstração. Apresentaremos somente a demonstração da equivalência

$$X \in G_J \text{ se e só se } \langle AX, BX \rangle_J = \langle A, B \rangle_J, \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n),$$

uma vez a prova do outro caso é naturalmente idêntica.

Para verificarmos a implicação (\implies), consideremos $X \in G_J$ e $A, B \in \mathfrak{gl}(n)$ arbitrárias. Então,

$$\begin{aligned} \langle AX, BX \rangle_J &= \text{tr}((J^\top(AX)^\top JBX)) = \text{tr}(XJ^\top X^\top A^\top JB) = \text{tr}((XJX^\top)^\top A^\top JB) \\ &= \text{tr}(J^\top A^\top JB) = \langle A, B \rangle_J. \end{aligned}$$

Para a prova a implicação (\impliedby) precisamos de observar previamente que $\langle A, BC \rangle_J = \langle AJ^\top C^\top J, B \rangle_J$, com quaisquer $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n)$.⁴ Admitamos agora a igualdade $\langle AX, BX \rangle_J = \langle A, B \rangle_J$, para todas as matrizes $A, B \in \mathfrak{gl}(n)$. Assim, $\langle AXJ^\top X^\top J, B \rangle_J = \langle A, B \rangle_J$ e, equivalentemente, $\langle AXJ^\top X^\top J - A, B \rangle_J = 0$, $\forall A, B \in \mathfrak{gl}(n)$. Portanto $AXJ^\top X^\top J - A = 0$, $\forall A \in \mathfrak{gl}(n)$. Particularizado-se $A = I_n$, resulta ainda $XJ^\top X^\top J - I = 0$, que é equivalente a $X^\top JX = J$. ■

Admita-se que $\mathfrak{gl}(n)$ está equipada com a sua estrutura standard de variedade diferenciável. De forma análoga ao caso de (\mathbb{R}^n, Φ_J) , se tomarmos o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$, definido em (2.6), em cada espaço tangente $T_P \mathfrak{gl}(n) \equiv \mathfrak{gl}(n)$, a variedade $\mathfrak{gl}(n)$ torna-se numa variedade pseudo-Riemanniana, que denotaremos por $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Será sempre este o significado de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ até ao final desta dissertação.

Perseguindo o que referimos no início, no remanescente desta secção estaremos interessados na relação de G_J com grupos de isometrias de (\mathbb{R}^n, Φ_J) e $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$.

⁴Analogamente, também se tem $\langle A, CB \rangle_J = \langle J^\top C^\top JA, B \rangle_J$.

Isto assentará no conceito de produto semi-directo de grupos de Lie, determinado pela ação de um deles sobre o outro, que vamos introduzir de seguida.

Recordamos que uma *ação* (à esquerda) dum grupo de Lie H (multiplicativo) numa variedade diferenciável N é uma aplicação suave $*$: $H \times N \longrightarrow N$, denotada por $(h, n) \rightsquigarrow h * n$, tal que

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \text{Diff}(N) \\ h &\rightsquigarrow *_{h} : N \longrightarrow N \\ & \quad n \rightsquigarrow h * n \end{aligned} \tag{2.7}$$

é um homomorfismo de H no grupo dos difeomorfismos de N . Deste modo, $*$ é uma ação se, e somente se,

1. $(h_1 h_2) * n = h_1 * (h_2 * n) \quad \forall h_1, h_2 \in H, n \in N$;
2. $1 * n = n \quad \forall n \in N$, sendo 1 o elemento neutro de H .

Suponha-se agora que H e N são grupos de Lie, e que H atua em N através duma ação $*$. Assumiremos N como um grupo abeliano e aditivo, somente para obtermos uma mais imediata harmonia com os exemplos concretos que nos interessarão a seguir. Admita-se ainda adicionalmente que todo o difeomorfismo $*_{h}$, definido em (2.7), é um automorfismo.

Diremos que uma aplicação $N \longrightarrow N$ é uma *transformação afim* se for a composta dum homomorfismo com uma translação. Cada $(h, n) \in H \times N$ define naturalmente uma transformação afim $T_{(h,n)} : N \longrightarrow N$ dada por

$$T_{(h,n)}(x) := *_{h}(x) + n. \tag{2.8}$$

Além disto, a composição destas transformações verifica

$$\begin{aligned} (T_{(h_2,n_2)} \circ T_{(h_1,n_1)})(x) &= *_{h_2}(*_{h_1}(x) + n_1) + n_2 \\ &= *_{h_2}(*_{h_1}(x)) + *_{h_2}(n_1) + n_2, \quad (*_{h_2} \text{ é um homomorfismo}) \\ &= *_{h_2 h_1}(x) + *_{h_2}(n_1) + n_2 \quad (* \text{ é uma ação}). \end{aligned}$$

Então, no contexto descrito, o *produto semi-direto* $H \rtimes N$ (determinado pela ação $*$) é o grupo de Lie formado pelo produto cartesiano $H \times N$, enquanto variedade diferenciável, com a operação de grupo, \circ , determinada pela composta das transformações afim correspondentes, isto é,

$$(h_2, n_2) \circ (h_1, n_1) := (h_2 h_1, *_{h_2}(n_1) + n_2).$$

Um caso particular do produto semi-directo é evidentemente o *produto directo*, obtido quando a ação $*$ é dada por $h * n = n$ e, portanto, cada automorfismo $*_{h}$ é a aplicação identidade.

Exemplo 2.1 Neste exemplo vamos efetuar a construção do produto semi-directo em dois casos particulares, que nos serão úteis.

Caso I: Tomemos os grupos de Lie $H = G_J$ e $N = \mathbb{R}^n$ e a ação $*$ definida por $R * s = Rs$. Então

$$G_J \rtimes \mathbb{R}^n = \{(R, s) : R \in G_J, s \in \mathbb{R}^n\},$$

com a operação de grupo dada por

$$(R_2, s_2) \circ (R_1, s_1) = (R_2 R_1, R_2 s_1 + s_2).$$

Caso II: Aqui vamos considerar o produto directo $H = G_J \times G_J$, o grupo aditivo $N = \mathfrak{gl}(n)$ e a ação $*$ definida por $(U, W) * Z = UZW^{-1}$. Repare-se que a inversa em W garante a verificação da lei de composição, exigida na definição de ação dum grupo sobre uma variedade. Então,

$$G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n) = \{((U, W), Z) \equiv (U, W, Z) : U, W \in G_J, Z \in \mathfrak{gl}(n)\},$$

com a operação de grupo dada por

$$(U_2, W_2, Z_2) \circ (U_1, W_1, Z_1) = (U_2 U_1, W_2 W_1, U_2 Z_1 W_2^{-1} + Z_2),$$

A transformação afim definida por $(R, s) \in G_J \rtimes \mathbb{R}^n$ é a isometria dada em (2.4), onde admitimos que J é simétrica. Logo se identificarmos cada par ordenado (R, s) com a correspondente aplicação $T_{(R,s)}$, poderemos interpretar o grupo $G_J \rtimes \mathbb{R}^n$ como um grupo de isometrias (com a composição) da variedade pseudo-Riemanniana (\mathbb{R}^n, Φ_J) .

De forma análoga ao caso de (\mathbb{R}^n, Φ_J) , resulta das propriedades contidas nas Proposições 1.1 e 2.3, que toda aplicação do tipo $X \rightsquigarrow RX + S$ ou $X \rightsquigarrow XR + S$ é uma isometria em $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ se e só se $R \in G_J$. Consequentemente, a transformação afim determinada por cada $(U, W, Z) \in G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$,

$$T_{(U,W,Z)} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(n) \\ X & \rightsquigarrow & UXW^{-1} + Z \end{array} \quad (2.9)$$

é uma isometria na variedade pseudo-Riemanniana $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Portanto podemos associar o grupo $G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ com o grupo das isometrias de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ que se podem escrever na forma (2.9), para algum $(U, W, Z) \in G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$, com a operação de composição.⁵ Por esta razão, sempre que for apropriado e sem comentários adicionais, consideraremos $G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ como um subgrupo do grupo

⁵Contrariamente ao caso das isometrias com a forma dada em (2.4), a parametrização $(U, W, Z) \in G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ das isometrias que se podem escrever na forma (2.9) não é única. Por exemplo, $(U_1 = I_n, W_1 = I_n, Z_1 = 0)$ e $(U_2 = -I_n, W_2 = -I_n, Z_2 = 0)$ dão origem à mesma isometria, a aplicação identidade.

das isometrias da variedade pseudo-Riemanniana $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Note-se, no entanto, que nem toda a isometria de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ pertence ao grupo $G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$. Por exemplo, quando $n = 2$ e $J = I_2$, não é possível escrever a isometria $T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix}$ com a configuração das aplicações $T_{(U,W,Z)}$.

Observação 2.1 *Decorre de resultados contidos em [3] que cada grupo de Lie quadrático é isomorfo a algum associado com uma das matrizes*

$$J = \left[\begin{array}{c|c} -I_\kappa & 0 \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right], \text{ com } \kappa \geq 0, \quad \text{ou} \quad J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array} \right], \text{ com } n = 2m \geq 2. \quad (2.10)$$

O grupo definido pela primeira matriz diz-se o grupo pseudo-ortogonal $O(\kappa, n-\kappa)$, enquanto que o associado à segunda matriz diz-se o grupo simplético $Sp(2m)$. Mais precisamente, cada grupo de Lie quadrático é isomorfo a um grupo pseudo-ortogonal quando $\alpha = 1$ e a um grupo simplético quando $\alpha = -1$.

2.1.2 Grupos Pseudo-Ortogonais

Aqui focaremos a nossa atenção nos grupos de Lie quadráticos associados ao caso específico da primeira matriz J de (2.10). Apesar de na teoria dos grupos de Lie esses grupos serem vulgarmente denotados por $O(\kappa, n-\kappa)$, no presente contexto vamos denotá-los por $O_\kappa(n)$, para manter a coerência com notações já adotadas. Iremos ainda acrescentar um índice em J de forma a podermos reconhecer de imediato o tamanho dos blocos que a compõem. Os lemas que figuram nesta secção encontram-se demonstrados em [35].

Para $0 \leq \kappa \leq n$, J_κ designará a matriz diagonal $[\delta_{ij}\varepsilon_j]$ cujas entradas da diagonal principal são $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_\kappa = -1$ e $\varepsilon_{\kappa+1} = \dots = \varepsilon_n = 1$. Tem-se portanto que $J_\kappa^{-1} = J_\kappa^\top = J_\kappa$, e

$$O_\kappa(n) \equiv O(\kappa, n-\kappa) = \{R \in GL(n) : R^{-1} = J_\kappa R^\top J_\kappa\}.$$

O subgrupo de Lie

$$SO_\kappa(n) := \{R \in O_\kappa(n) : \det(R) = 1\}$$

é dito o *grupo pseudo-ortogonal especial*.

Exemplo 2.2 *Para cada $\varphi \in \mathbb{R}$,*

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{bmatrix}$$

é uma matriz de $SO_1(2)$, dizendo-se um impulso (boost) de \mathbb{R}_1^2 . Esta matriz B_φ transforma cada hipérbole definida por $\langle p, p \rangle = r^2$ ou $\langle p, p \rangle = -r^2$, em \mathbb{R}_1^2 , nela própria sem inverter os ramos. Além disto, se p e q são dois pontos dum mesmo ramo de qualquer uma destas hipérboles e tais que $q = B_\varphi p$, então o comprimento do arco da hipérbole entre p e q é $L(\widehat{pq}) = |r\varphi|$. (Ver a figura 2.1).

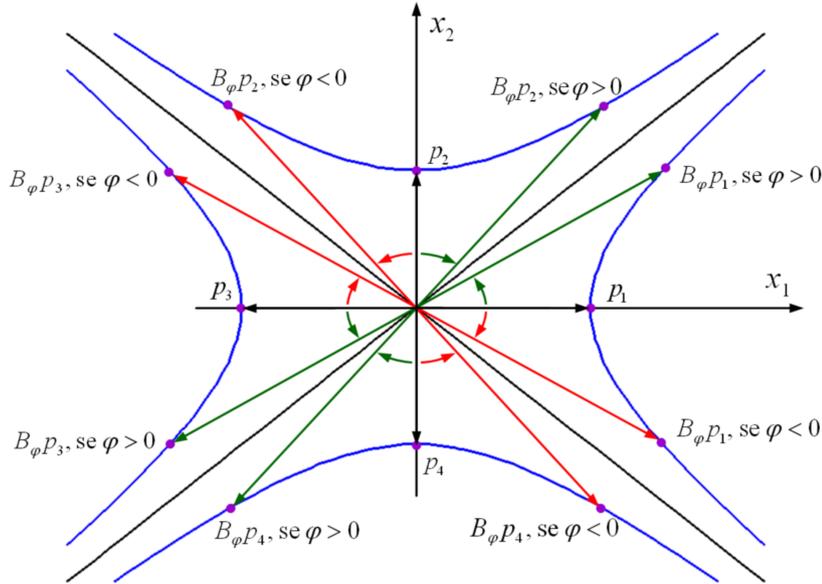


Figura 2.1: Impulsos de \mathbb{R}_1^2

Lema 2.1 *Tem-se que $R \in O_\kappa(n)$ se e só se as colunas [linhas] de R formam uma base ortonormada de \mathbb{R}_κ^n , estando os vetores tipo-tempo nas primeiras κ colunas [linhas].*

Dado que $(\mathbb{R}^n, \Phi_{J_\kappa}) = \mathbb{R}_\kappa^n$, decorre imediatamente da Secção 2.1.1 que toda a aplicação da forma $T_{(R,s)}(x) = Rx + s$, com $R \in O_\kappa(n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$, é uma isometria de \mathbb{R}_κ^n . O lema seguinte assinala ainda que, neste caso particular, cada isometria tem exatamente essa forma.

Lema 2.2 *Cada isometria do espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_κ^n , para $0 \leq \kappa \leq n$, tem uma única expressão da forma*

$$T_{(R,s)} : \mathbb{R}_\kappa^n \longrightarrow \mathbb{R}_\kappa^n \\ x \rightsquigarrow Rx + s$$

com $R \in O_\kappa(n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$.

Em virtude do lema anterior, sempre que for conveniente, o grupo das isometrias de \mathbb{R}_κ^n será identificado com o grupo $O_\kappa(n) \times \mathbb{R}^n$. Usaremos ainda as óbvias identificações entre o subgrupo das isometrias lineares $T_{(R,0)} : x \rightsquigarrow Rx$ e o grupo multiplicativo $O_\kappa(n)$ e entre o subgrupo das translações $T_{(I_n,s)} : x \rightsquigarrow x + s$ e o grupo aditivo \mathbb{R}^n . Assim, como consequência imediata da Proposição 1.2, temos que o subgrupo das isometrias lineares de \mathbb{R}_κ^n que preservam a orientação é $SO_\kappa(n)$.

Quando κ é igual a 0 ou a n , o grupo pseudo-ortogonal $O_\kappa(n)$ é o grupo ortogonal $O(n) := \{R \in GL(n) : R^{-1} = R^\top\}$ das isometrias lineares do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Este grupo é a união disjunta do grupo ortogonal especial $O^+(n) \equiv SO(n) := \{R \in O(n) : \det(R) = 1\}$ com $O^-(n) = \{R \in O(n) : \det(R) = -1\}$, sendo $SO(n)$ um subgrupo de Lie conexo. Quando $0 < \kappa < n$, considerando-se cada matriz de $O_\kappa(n)$ decomposta na forma

$$R = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline R_3 & R_4 \end{array} \right],$$

com R_1 de ordem κ e R_4 de ordem $(n - \kappa)$, temos que $O_\kappa(n)$ decompõe-se em 4 conjuntos disjuntos indexados aos sinais dos determinantes (sempre não-nulos) $\det(R_1)$ e $\det(R_4)$ (por esta ordem):

$$O_\kappa^{++}(n), O_\kappa^{+-}(n), O_\kappa^{-+}(n), O_\kappa^{--}(n)$$

e pode provar-se que $O_\kappa^{++}(n) \cup O_\kappa^{--}(n) = SO_\kappa(n)$, pelo que esta união é um subgrupo de $O_\kappa(n)$ e constitui o grupo das isometrias lineares de \mathbb{R}_κ^n que preservam a orientação. Tem-se ainda que, contrariamente a $SO_\kappa(n)$, o conjunto $O_\kappa^{++}(n)$ é conexo. A partir daqui esta componente conexa, que contém a identidade e, portanto, é um subgrupo de Lie de $O_\kappa(n)$, será denotada por $SO_\kappa^I(n)$.⁶

Considere-se agora $0 \leq \kappa \leq n$. Por conveniência de escrita, vamos aceitar as igualdades $SO_0^I(n) = SO_n^I(n) = SO(n)$. Uma vez que as translações em \mathbb{R}_κ^n preservam a orientação, resulta das notas anteriores que o grupo das isometrias de \mathbb{R}_κ^n que preservam a orientação é o subgrupo de Lie de $O_\kappa(n) \times \mathbb{R}^n$ definido por

$$SO_\kappa(n) \times \mathbb{R}^n := \{(R, s) : R \in O_\kappa(n), \det(R) = 1, s \in \mathbb{R}^n\}$$

e que o subgrupo de Lie conexo maximal deste grupo é

⁶Em particular, $SO_1^I(n) = \{R = [r_{ij}] \in SO_1(n) : r_{11} > 0\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}_\kappa^{\mathrm{I}}(n) \times \mathbb{R}^n &:= \{(R, s) : R \in \mathrm{SO}_\kappa^{\mathrm{I}}(n), s \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \left\{ (R, s) : R = \left[\begin{array}{c|c} (R_1)_{\kappa \times \kappa} & R_2 \\ \hline R_3 & R_4 \end{array} \right] \in \mathrm{O}_\kappa(n), \det(R_1) > 0, \det(R_4) > 0, s \in \mathbb{R}^n \right\}, \end{aligned}$$

admitindo-se na igualdade anterior que $R = R_4$ quando $\kappa = 0$ e que $R = R_1$ quando $\kappa = n$.⁷

Para terminar esta secção, vamos indicar a estrutura das matrizes da álgebra de Lie do grupo $\mathrm{O}_\kappa(n)$. Recordamos, antes de mais, que a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n)$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, constituída por todas as matrizes reais $n \times n$ e com $[A, B] = AB - BA$, e que a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ do grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ consiste em todas as matrizes $X \in \mathfrak{gl}(n)$ que são anti-simétricas, isto é, $X^\top = -X$.

Lema 2.3 *Para $0 \leq \kappa \leq n$, a álgebra de Lie $\mathfrak{o}_\kappa(n)$ de $\mathrm{O}_\kappa(n)$ é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$ formada por todas as matrizes S tais que $S^\top = -J_\kappa S J_\kappa$. Quando $0 < \kappa < n$, tais matrizes têm a forma*

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline B^\top & A_2 \end{array} \right],$$

onde $A_1 \in \mathfrak{o}(\kappa)$, $A_2 \in \mathfrak{o}(n - \kappa)$ e B é uma matriz $\kappa \times (n - \kappa)$.

Note-se ainda, uma vez que têm vizinhanças da identidade I_n comuns, que os grupos $\mathrm{O}_\kappa(n)$, $\mathrm{SO}_\kappa(n)$ e $\mathrm{SO}_\kappa^{\mathrm{I}}(n)$ têm a mesma álgebra de Lie, ou seja, $\mathfrak{o}_\kappa(n) = \mathfrak{so}_\kappa(n) = \mathfrak{so}_\kappa^{\mathrm{I}}(n)$.

2.2 Definição (Geral) de Aplicação Rolamento sem Deslize nem Torção

A definição que vamos introduzir nesta secção é a definição principal da presente dissertação. Ela formaliza o conceito de rolamento “puro” de uma variedade pseudo-Riemanniana (a mover-se) sobre outra (estacionária) de igual dimensão, numa abordagem extrínseca. A base da definição que agora apresentamos é a definição de rolamento sem deslize nem torção para subvariedades do espaço Euclidiano que se encontra em [39]. Começamos por fixar alguma notação auxiliar.

Seja \overline{M} uma variedade pseudo-Riemanniana conexa e orientável. Denote-se o grupo das isometrias de \overline{M} por $\mathrm{Isom}(\overline{M})$ e o seu subgrupo das isometrias que preservam a orientação por $\mathrm{Isom}^+(\overline{M})$. É bem sabido que $\mathrm{Isom}(\overline{M})$ tem uma

⁷Em particular, $\mathrm{SO}_0^{\mathrm{I}}(n) \times \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{SO}_n^{\mathrm{I}}(n) \times \mathbb{R}^n$ coincidem com o grupo $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^n$.

estrutura de grupo de Lie, com que atua suavemente em \overline{M} . O símbolo $*$ representará a ação natural de $\text{Isom}(\overline{M})$ em \overline{M} , isto é, $*$: $\text{Isom}(\overline{M}) \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ é definida por $f * p := f(p)$. Desta forma, em particular, cada aplicação orbital $\zeta_p : \text{Isom}(\overline{M}) \rightarrow \overline{M}$, $f \rightsquigarrow f * p$, é suave.

Tome-se agora uma curva seccionalmente suave $g : t \in I \rightsquigarrow g(t) \in \text{Isom}(\overline{M})$. Para t fixo num qualquer intervalo aberto onde g é suave, $\dot{g}(t)$ denotará a aplicação $\overline{M} \rightarrow T\overline{M}$ definida por

$$\dot{g}(t)(p) := (\zeta_p \circ g)'(t) = (\sigma \rightsquigarrow g(\sigma) * p)'(t) \in T_{g(t)*p}\overline{M}.^8$$

Assim, em especial, terá sentido a aplicação composta $\dot{g}(t) \circ g(t)^{-1} : \overline{M} \rightarrow T\overline{M}$, sendo o campo de vetores dado por

$$(\dot{g}(t) \circ g(t)^{-1})(p) = \dot{g}(t)(g(t)^{-1} * p) = (\sigma \rightsquigarrow (g(\sigma) \circ g(t)^{-1}) * p)'(t) \in T_p\overline{M}.$$

Notamos que a aplicação $\dot{g}(t)$ não significa o vetor velocidade $g'(t) \in T_{g(t)}\text{Isom}(\overline{M})$, da curva g no instante t . No entanto, evidentemente, $\dot{g}(t)$ e $g'(t)$ existem para os mesmos instantes t . É a concretização de $\dot{g}(t)$ no caso particular em que $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$, que figura em (2.17) abaixo, quem justifica a notação que adotamos para esta aplicação.

Definição 2.1 *Sejam M_1 e M_2 duas subvariedades pseudo-Riemannianas de \overline{M} , tendo igual dimensão e índice. Uma aplicação rolamento sem deslize nem torção de M_1 sobre M_2 é uma curva seccionalmente suave*

$$\begin{aligned} g : [0, \tau] &\longrightarrow \overline{G} \\ t &\rightsquigarrow g(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde \overline{G} é um subgrupo conexo de $\text{Isom}^+(\overline{M})$, satisfazendo as seguintes propriedades 1, 2 e 3.

1. Condição de rolamento. *Existe uma curva seccionalmente suave em M_1 , $\alpha : [0, \tau] \rightarrow M_1$, suave em todos os instantes t onde g é suave, tal que para todo $t \in [0, \tau]$:*

$$(a) \quad g(t) * \alpha(t) \in M_2,$$

$$(b) \quad T_{g(t)*\alpha(t)}(g(t) * M_1) = T_{g(t)*\alpha(t)}M_2.$$

⁸Atendendo a que ζ_p é uma aplicação suave, a curva $\sigma \in I \rightsquigarrow g(\sigma) * p \in \overline{M}$ é suave nos intervalos abertos onde g é suave.

A curva α é chamada curva de rolamento, enquanto que a correspondente curva $\alpha_{\text{dev}} : [0, \tau] \rightarrow M_2$ definida por $\alpha_{\text{dev}}(t) := g(t) * \alpha(t)$ é dita o desenvolvimento de α em M_2 .

2. Condição de não-deslize. Existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \tau$ tal que g é suave em todos os subintervalos $]t_{i-1}, t_i[$ e para cada valor t destes subintervalos tem-se:

$$(\dot{g}(t) \circ g(t)^{-1})(\alpha_{\text{dev}}(t)) = 0 \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}\overline{M}. \quad (2.12)$$

3. Condição de não-torção. Existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \tau$ de forma que g é suave em todos os subintervalos $]t_{i-1}, t_i[$ e são verificadas as seguintes alíneas (a) e (b). Sempre que t é um valor fixo em $]t_{i-1}, t_i[$, com $i = 1, \dots, r$, para cada vetor $v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}\overline{M}$, X^v denotará o campo de vetores (suave) ao longo da restrição da curva $\sigma \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(\sigma) * \alpha(t) \in \overline{M}$ ao intervalo $]t_{i-1}, t_i[$ definido por

$$X^v(\sigma) := d(g(\sigma) \circ g(t)^{-1})(v) \in T_{g(\sigma)*\alpha(t)}\overline{M}. \quad (2.13)$$

Então:

(a) (parte tangencial) $\forall t \in \cup_{i=1}^r]t_{i-1}, t_i[$,

$$\forall v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2, \text{ tem-se } \dot{X}^v(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp; \quad (2.14)$$

(b) (parte normal) $\forall t \in \cup_{i=1}^r]t_{i-1}, t_i[$,

$$\forall v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp, \text{ tem-se } \dot{X}^v(t) \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2, \quad (2.15)$$

onde $\dot{X}^v(t) = \frac{\overline{D}X^v}{d\sigma}(t)$ denota a derivada covariante em \overline{M} , determinada pela respectiva conexão de Levi-Civita.

Com a terminologia introduzida por Heinrich Hertz, as restrições que figuram na condição de rolamento dizem-se *restrições holónomas*, dado que são restrições nas configurações das duas subvariedades. Por oposição a estas, as restrições das condições de não-deslize e de não-torção, que correspondem as restrições nas velocidades quando $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, são ditas *restrições não-holónomas*. Pormenores sobre estas restrições podem ser encontrados em [27].

Sempre que neste trabalho usarmos o termo “rolamento” isso significará “rolamento sem deslize nem torção”. Às equações (dum sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem) que nos permitam descrever $g'(t)$, chamaremos *equações da cinemática* do rolamento.

Observação 2.2 *Suponha-se que M_1 e M_2 são subvariedades de $\overline{M} = \mathbb{R}^n$ e que $q_0 \in M_1$, $p_0 \in M_2$. Se $g_0 = (R_0, s_0) \in \overline{G} = \text{SO}(n) \times \mathbb{R}^n$ é tal que $g_0 * q_0 = p_0$ e $T_{p_0}g_0 * M_1 = T_{p_0}M_2$, de acordo com [39], para cada curva seccionalmente suave $\alpha : [0, \tau] \rightarrow M_1$ com origem em q_0 [$\alpha_{\text{dev}} : [0, \tau] \rightarrow M_2$ com origem em p_0] existe uma única aplicação rolamento $g : [0, \tau] \rightarrow \overline{G}$ que verifica $g(0) = g_0$ e tem α como curva de rolamento [α_{dev} como curva de desenvolvimento].*

2.3 Interpretação da Definição de Aplicação Rolamento em $\overline{M} = \mathbb{R}^n$

A aplicação rolamento g associa uma isometria a cada valor $t \in [0, \tau]$. Portanto, com as “sucessivas” transformações $g(t)$ podemos conceber que cada ponto efetua um determinado “movimento” em \mathbb{R}^n , descrevendo uma trajectória contínua com as posições ocupadas do decorrer do tempo t . Concretamente, sob o “efeito” da aplicação g , cada “ponto móvel” viaja ao longo da sua trajectória desde a correspondente posição inicial $g(0) * p$ até à posição final $g(\tau) * p$, de forma que no instante t ele “passa” na posição $g(t) * p$ com a velocidade $\dot{g}(t)(p)$, se g é suave nesse instante. Assim,

1. a condição de rolamento diz que M_1 move-se de maneira a ser, em qualquer instante t , tangente a M_2 no ponto $\alpha_{\text{dev}}(t)$;
2. quando verificada a alínea (a) da condição de rolamento, a condição de não-deslize diz que para quase todo o t (isto é, excepto quando muito para um número finito de valores t) o ponto móvel que no instante inicial ocupa a posição correspondente a $\alpha(t) \in M_1$ descreve um movimento com uma paragem (“suave”), no instante t , quando atinge a posição $\alpha_{\text{dev}}(t)$. Ou seja, esta condição significa que a velocidade linear no ponto de contacto é nula. (Ver a figura 2.2).

Se assumirmos a condição de rolamento, para cada $v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2 \setminus [(T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp]$, o vetor $dg(t)^{-1}(v)$ pertence a $T_{\alpha(t)}M_1 \setminus [(T_{\alpha(t)}M_1)^\perp]$; ⁹ e o campo de vetores X^v exprime o “transporte” deste vetor pelo rolamento, durante o intervalo temporal

⁹Dado que $g(t)$ é um difeomorfismo, $dg(t)(T_{\alpha(t)}M_1) = T_{g(t)*\alpha(t)}g(t) * M_1$. Portanto da condição de rolamento resulta $dg(t)^{-1}(T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2) = T_{\alpha(t)}M_1$.

Dado que $g(t)$ é uma isometria, $dg(t)((T_{\alpha(t)}M_1)^\perp) = (dg(t)(T_{\alpha(t)}M_1))^\perp$. Portanto $dg(t)^{-1}((T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp) = (T_{\alpha(t)}M_1)^\perp$.

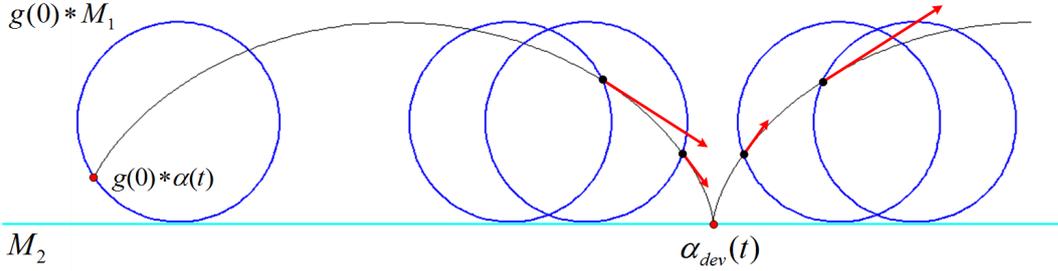


Figura 2.2: Vetor velocidade dum ponto móvel no rolamento sem deslize de $S_0^1(r)$.

$]t_{i-1}, t_i[\ni t$, descrevendo-o “colado” à variedade em movimento e levando-o a coincidir com v no instante t . Além disto, em \mathbb{R}^n a derivada covariante $\dot{X}^v(t) = \frac{\overline{D}X^v}{d\sigma}(t)$ é a derivada usual. Então, neste contexto,

3. a parte tangencial [parte normal] da condição de não-torção diz que, para quase todo o t , a velocidade do transporte de cada vetor tangente [normal] a M_1 em $\alpha(t)$ não tem componente na direção tangencial [direção normal] no instante t . (Ver a figura 2.3).

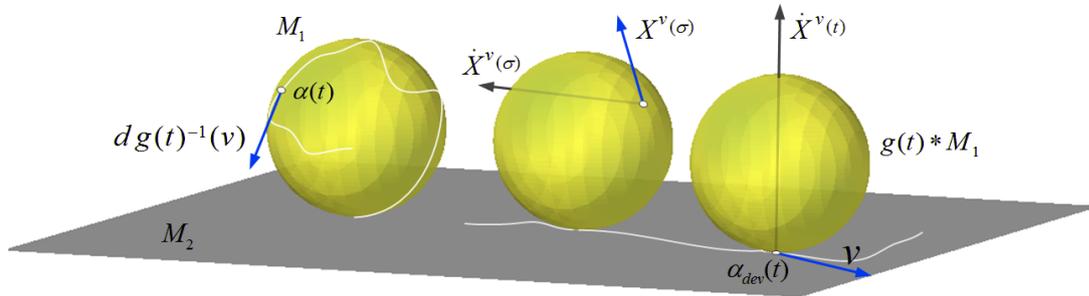


Figura 2.3: Condição de não-torção (parte tangencial) no rolamento da esfera $S_0^2(r)$.

2.4 Aplicações Rolamento em $\overline{M} = \mathbb{R}_{\kappa}^n$

No caso particular $\overline{M} = \mathbb{R}_{\kappa}^n$, para $0 \leq \kappa \leq n$, sabemos que $\overline{G} = \text{SO}_{\kappa}^{\text{I}}(n) \times \mathbb{R}^n$ é um subgrupo de Lie conexo do grupo das isometrias de \overline{M} que preservam a orientação. Deste modo, uma curva seccionalmente suave

$$g : [0, \tau] \longrightarrow \text{SO}_{\kappa}^{\text{I}}(n) \times \mathbb{R}^n \quad (2.16)$$

$$t \rightsquigarrow (R(t), s(t)),$$

é uma aplicação rolamento se verificar as correspondentes propriedades 1, 2 e 3 da Definição 2.1, com a ação natural $*$ das isometrias dada por

$$(R, s) * p = Rp + s, \quad \forall (R, s) \in \text{O}_\kappa(n) \rtimes \mathbb{R}^n, \quad \forall p \in \mathbb{R}_\kappa^n.$$

De forma a que posteriormente possam ser prontamente usadas, a seguir vamos reescrever as relações (2.12) - (2.15), adaptando-as à presente situação.

Sejam $t \rightsquigarrow g(t) = (R(t), s(t))$ uma curva seccionalmente suave em $\text{SO}_\kappa^{\text{I}}(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ e v um vetor tangente a \mathbb{R}_κ^n , arbitrários. Então, com a usual identificação de cada $T_p \mathbb{R}^n$ com \mathbb{R}^n , podemos facilmente verificar que:

1. Nos instantes t dos intervalos abertos onde g é suave,

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) : \mathbb{R}_\kappa^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\rightsquigarrow \dot{R}(t)p + \dot{s}(t), \end{aligned} \tag{2.17}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) \circ g(t)^{-1} : \mathbb{R}_\kappa^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\rightsquigarrow \dot{R}(t)R^{-1}(t)(p - s(t)) + \dot{s}(t). \end{aligned}$$

2. Com qualquer $\sigma \in [0, \tau]$ tem-se

$$\begin{aligned} dg(\sigma) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \eta &\rightsquigarrow R(\sigma)\eta, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$X^v(\sigma) = dg(\sigma) (dg(\sigma)^{-1}(v)) = R(\sigma)R^{-1}(t)v.$$

Assim, na presente situação, a igualdade (2.12) da condição não-deslize reduz-se a

$$\dot{R}(t)R^{-1}(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - s(t)) + \dot{s}(t) = 0_{\mathbb{R}^n}. \tag{2.18}$$

Podemos ainda confirmar diretamente que a condição (2.18) é também equivalente a ter-se que o diferencial de aplicação $g(t)$ no ponto $\alpha(t)$ transforma o vetor velocidade $\dot{\alpha}(t)$ da curva de rolamento no vetor velocidade $\dot{\alpha}_{\text{dev}}(t)$ da curva de desenvolvimento, isto é,

$$(2.12) \iff \dot{\alpha}_{\text{dev}}(t) = dg(t)(\dot{\alpha}(t)).$$

Uma vez que em \mathbb{R}_κ^n a derivada covariante coincide com a derivada usual, as relações (2.14) e (2.15) da condição de não-torção reduzem-se a

(a) (parte tangencial)

$$\forall v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2, \text{ temos } \dot{R}(t)R^{-1}(t)v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp; \quad (2.19)$$

(b) (parte normal)

$$\forall v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp, \text{ temos } \dot{R}(t)R^{-1}(t)v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2. \quad (2.20)$$

Exemplo 2.3 Em $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, tomemos a esfera Euclidiana $M_1 = S_0^{n-1}(1)$ e o hiperplano $M_2 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, -1) : x_i \in \mathbb{R}\}$. Como exemplos imediatos de curvas $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (R(t), s(t)) \in \text{SO}_\kappa^1(n) \times \mathbb{R}^n$ que não cumprem as restrições não-holónomas temos os seguintes:

1. casos em que $R(t)$ é constante e $s(t)$ é não-constante. Aqui é violada a condição de não-deslize. Na figura 2.4 está representada a transformação (deslize) correspondente a $R(t) = I_3$ e um certo $s(t) = (s_1(t), s_2(t), 0)$.

2. casos em que $R(t) = \left[\begin{array}{c|c} Q(t) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$ com $Q(t) \in \text{SO}(n-1)$ não-constante. Independentemente de $s(t)$, aqui é violada a (parte tangencial da) condição de não-torção. Na figura 2.4 está representada a transformação (torção) correspondente a $R(t) = \left[\begin{array}{ccc} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ e $s(t) = (0, 0, 0)$.

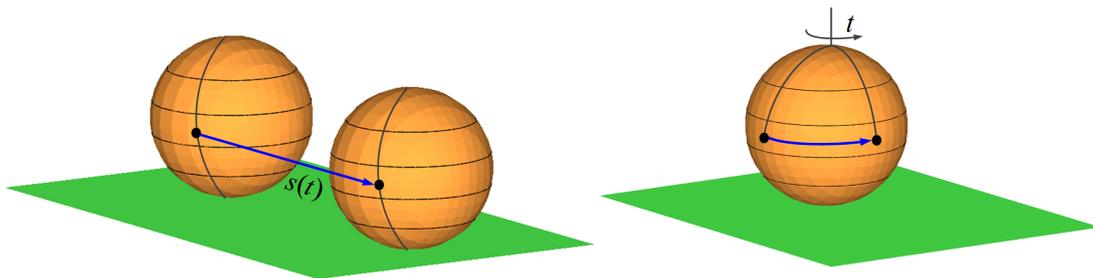


Figura 2.4: Deslize

Torção

2.5 Aplicações Rolamento em $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$

Tal como na Secção 2.1.1, nesta secção $J \in GL(n)$ significará uma matriz tal que $J^2 = \alpha I_n$ e $J^\top = \alpha J$, com $\alpha = \pm 1$, G_J representará o grupo de Lie quadrático

associado a essa matriz J e $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ denotará a variedade diferenciável $\mathfrak{gl}(n)$ equipada com a métrica pseudo-Riemanniana definida pelo produto escalar dado em (2.6).

Sabemos que $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ é isométrica a alguma variedade pseudo-Riemanniana da forma $\mathbb{R}_\kappa^{n^2}$. Por exemplo, no caso em que J é a matriz que define o grupo simplético $G_J = \text{Sp}(2m)$ temos explicitamente a isometria

$$(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J) \longrightarrow \mathbb{R}_{2m^2}^{n^2}$$

$$X = \alpha_{1,1}B_{1,1} + \alpha_{1,2}B_{1,2} + \cdots + \alpha_{4,m^2}B_{4,m^2} \rightsquigarrow x = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{4,m^2}),$$

determinada pela seguinte base ortonormada com as matrizes $B_{1,i}, B_{2,i}, B_{3,i}$ e $B_{4,i}$, respectivamente:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -e_i & 0 \\ 0 & e_i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & e_i \\ e_i & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & e_i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & e_i \\ -e_i & 0 \end{bmatrix} : i=1, \dots, m^2 \right\},$$

onde $\{e_i : i=1, \dots, m^2\}$ denota a base canónica de $\mathfrak{gl}(m)$. Portanto os rolamentos de subvariedades de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ podem ser vistos como rolamentos em $\mathbb{R}_\kappa^{n^2}$. Contudo, não vamos considerar esta perspectiva porque com o mergulho das subvariedades M_1 e M_2 nesse novo espaço ambiente, a estrutura matricial que as caracteriza ficaria destruída.

Na Secção 2.1.1 vimos que $\overline{G}_J := G_J \times G_J \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ é um subgrupo das isometrias de $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Também é sabido que \overline{G}_J é conexo quando $\alpha = -1$, mas que o mesmo não acontece quando $\alpha = 1$. Por esta razão, de modo a termos um grupo de isometrias conexo, precisamos ainda tomar a componente conexa de \overline{G}_J que contém a identidade, que denotaremos por \overline{G}_J^I . Em particular, a partir deste momento \overline{G}_J^I designará $\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2m) \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ se $G_J = \text{Sp}(2m)$, e representará $\text{SO}_\kappa^I(n) \times \text{SO}_\kappa^I(n) \rtimes \mathfrak{gl}(n)$ quando $G_J = \text{O}_\kappa(n)$. Nestas condições a Proposição 1.3 garante ainda que as isometrias de \overline{G}_J^I preservam a orientação.¹⁰ Deste modo, uma curva seccionalmente suave

$$g : [0, \tau] \longrightarrow \overline{G}_J^I$$

$$t \rightsquigarrow (U(t), W(t), Z(t)), \tag{2.21}$$

é uma aplicação rolamento se verificar as correspondentes propriedades 1, 2 e 3 da Definição 2.1, com a ação natural $*$ das isometrias dada por

$$(U, W, Z) * P = UPW^{-1} + Z, \quad \forall (U, W, Z) \in \overline{G}_J^I, \quad \forall P \in \overline{M}. \tag{2.22}$$

¹⁰Da continuidade da aplicação $\det|_{G_J} : G_J \longrightarrow \{-1, 1\}$ resulta imediatamente que todas as matrizes da componente conexa de G_J que contém a identidade têm determinante igual a 1.

De forma análoga ao caso de \mathbb{R}_κ^n , a seguir vamos reescrever as relações (2.12) - (2.15), adaptando-as à presente situação particular.

Sejam $t \rightsquigarrow g(t) = (U(t), W(t), Z(t))$ uma curva seccionalmente suave em $\overline{\mathbb{G}}_J^1$ e v um vetor tangente a \overline{M} , arbitrários. Então, considerando-se a usual identificação de cada $T_P \mathfrak{gl}(n)$ com $\mathfrak{gl}(n)$, podemos facilmente verificar que:

1. Nos instantes t dos intervalos abertos onde g é suave,

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) : \overline{M} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n) \\ P &\rightsquigarrow \left(\dot{U}(t)P - U(t)PW^{-1}(t)\dot{W}(t) \right) W^{-1}(t) + \dot{Z}(t), \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, já que $g(t)^{-1} = (U^{-1}(t), W^{-1}(t), -U^{-1}(t)Z(t)W(t))$,

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) : \overline{M} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n) \\ P &\rightsquigarrow \dot{U}(t)U^{-1}(t)(P - Z(t)) + (Z(t) - P)\dot{W}(t)W^{-1}(t) + \dot{Z}(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

2. Com qualquer $\sigma \in [0, \tau]$ tem-se

$$\begin{aligned} dg(\sigma) : \mathfrak{gl}(n) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n) \\ \eta &\rightsquigarrow U(\sigma)\eta W^{-1}(\sigma), \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$X^v(\sigma) = U(\sigma)U^{-1}(t)vW(t)W^{-1}(\sigma).$$

Assim, a igualdade (2.12) da condição de não-deslize reduz-se a

$$\dot{U}(t)U^{-1}(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - Z(t)) + (Z(t) - \alpha_{\text{dev}}(t))\dot{W}(t)W^{-1}(t) + \dot{Z}(t) = 0. \quad (2.24)$$

Tal como no caso dos rolamentos em \mathbb{R}_κ^n , a condição anterior é igualmente equivalente a ter-se $\dot{\alpha}_{\text{dev}}(t) = dg(t)(\dot{\alpha}(t))$. Esta afirmação pode ser atestada com cálculos diretos.

Em virtude do exposto na Observação 1.1, também na presente situação podemos afirmar que a derivada covariante coincide com a derivada usual. Portanto, as relações (2.14) e (2.15) da condição de não-torção reduzem-se a:

1. (parte tangencial)

$$\forall v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2, \quad \dot{U}(t)U^{-1}(t)v - v\dot{W}(t)W^{-1}(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp; \quad (2.25)$$

2. (parte normal)

$$\forall v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp, \quad \dot{U}(t)U^{-1}(t)v - v\dot{W}(t)W^{-1}(t) \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2. \quad (2.26)$$

2.6 Propriedades dos Rolamentos

Nesta secção vamos expor três propriedades básicas dos rolamentos sem deslize nem torção. As duas primeiras estão limitadas aos casos em que a variedade ambiente \overline{M} é \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Assumiremos que as aplicações rolamento envolvidas têm a forma de (2.16) ou de (2.21) quando se suponha $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$ ou $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, respetivamente.

Proposição 2.4 (Transitividade dos rolamentos) *Sejam M_1, M_2 e M_3 subvariedades pseudo-Riemannianas de \overline{M} , sendo esta igual a \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Suponhamos que:*

(i) $g_1 : [0, \tau] \longrightarrow \overline{G}$ é uma aplicação rolamento de M_1 sobre M_2 , com curva de rolamento $\alpha_1 : [0, \tau] \longrightarrow M_1$ e curva de desenvolvimento $\alpha_2 : [0, \tau] \longrightarrow M_2$.

(ii) $g_2 : [0, \tau] \longrightarrow \overline{G}$ é uma aplicação rolamento de M_2 sobre M_3 , tendo como curva de rolamento α_2 e com curva de desenvolvimento $\alpha_3 : [0, \tau] \longrightarrow M_3$.

Então $g_2 \circ g_1 : [0, \tau] \longrightarrow \overline{G}$, definida por $(g_2 \circ g_1)(t) = g_2(t) \circ g_1(t)$, é uma aplicação rolamento de M_1 sobre M_3 , tendo α_1 como curva de rolamento e α_3 como curva de desenvolvimento.

Demonstração. A demonstração consistirá na confirmação das condições 1, 2 e 3 da Definição 2.1. As condições de não-deslize e de não-torção serão verificadas nos intervalos resultantes da partição que se obtém “sobrepondo” as partições garantidas pela hipótese para g_1 e g_2 .

1. Verificação da condição de rolamento. ($t \in [0, \tau]$ é arbitrário).

Por (i), $\alpha_2(t) = g_1(t) * \alpha_1(t) \in M_2$ e $T_{\alpha_2(t)}g_1(t) * M_1 = T_{\alpha_2(t)}M_2$. Por (ii), $\alpha_3(t) = g_2(t) * \alpha_2(t) \in M_3$ e $T_{\alpha_3(t)}g_2(t) * M_2 = T_{\alpha_3(t)}M_3$. Assim, $(g_2 \circ g_1)(t) * \alpha_1(t) = g_2(t) * (g_1(t) * \alpha_1(t)) = g_2(t) * (\alpha_2(t)) = \alpha_3(t) \in M_3$ e

$$\begin{aligned} T_{\alpha_3(t)}(g_2 \circ g_1)(t) * M_1 &= dg_2(t) (T_{\alpha_2(t)}g_1(t) * M_1) \\ &= dg_2(t) (T_{\alpha_2(t)}M_2) \\ &= T_{\alpha_3(t)}g_2(t) * M_2 \\ &= T_{\alpha_3(t)}M_3. \end{aligned}$$

2. Verificação da condição de não-deslize.

Sabemos ser suficiente provar que $\dot{\alpha}_3(t) = d(g_2(t) \circ g_1(t))(\dot{\alpha}_1(t))$. Mas pelas hipóteses (i) e (ii) temos $\dot{\alpha}_2(t) = dg_1(t)(\dot{\alpha}_1(t))$ e $\dot{\alpha}_3(t) = dg_2(t)(\dot{\alpha}_2(t))$, portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} d(g_2(t) \circ g_1(t))(\dot{\alpha}_1(t)) &= (dg_2(t) \circ dg_1(t))(\dot{\alpha}_1(t)) \\ &= dg_2(t)(dg_1(t)(\dot{\alpha}_1(t))) \\ &= dg_2(t)(\dot{\alpha}_2(t)) \\ &= \dot{\alpha}_3(t). \end{aligned}$$

3. Verificação da condição de não-torção.

Vamos abordar apenas a parte tangencial desta condição, uma vez que a prova da parte normal é totalmente similar. A partir de (i) e (ii), com $j = 1, 2$, temos

$$\forall v \in T_{\alpha_{j+1}(t)}M_{j+1}, \dot{X}_j^v(t) \in (T_{\alpha_{j+1}(t)}M_{j+1})^\perp,$$

sendo

$$X_j^v(\sigma) := (dg_j(\sigma) \circ dg_j(t)^{-1})(v).$$

Agora está em causa garantirmos que

$$\forall v \in T_{\alpha_3(t)}M_3, \dot{X}^v(t) \in (T_{\alpha_3(t)}M_3)^\perp,$$

com

$$\begin{aligned} X^v(\sigma) &:= (d(g_2(\sigma) \circ g_1(\sigma)) \circ d(g_2(t) \circ g_1(t))^{-1})(v) \\ &= (dg_2(\sigma) \circ dg_1(\sigma) \circ dg_1(t)^{-1} \circ dg_2(t)^{-1})(v) \\ &= dg_2(\sigma) \left(X_1^{dg_2(t)^{-1}(v)}(\sigma) \right). \end{aligned}$$

Mas quando \bar{M} é \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, a partir de cálculos diretos podemos confirmar a seguinte igualdade com qualquer v ,

$$\dot{X}^v(t) = \dot{X}_2^v(t) + dg_2(t) \left(\dot{X}_1^{dg_2(t)^{-1}(v)}(t) \right). \quad (2.27)$$

Logo, as hipóteses permitem-nos concluir que, $\forall v \in T_{\alpha_3(t)}M_3$,

$$\dot{X}^v(t) \in ((T_{\alpha_3(t)}M_3)^\perp + dg_2(t) \left((T_{\alpha_2(t)}M_2)^\perp \right)) = (T_{\alpha_3(t)}M_3)^\perp,$$

tal como pretendido.

(Ver a figura 2.5). ■

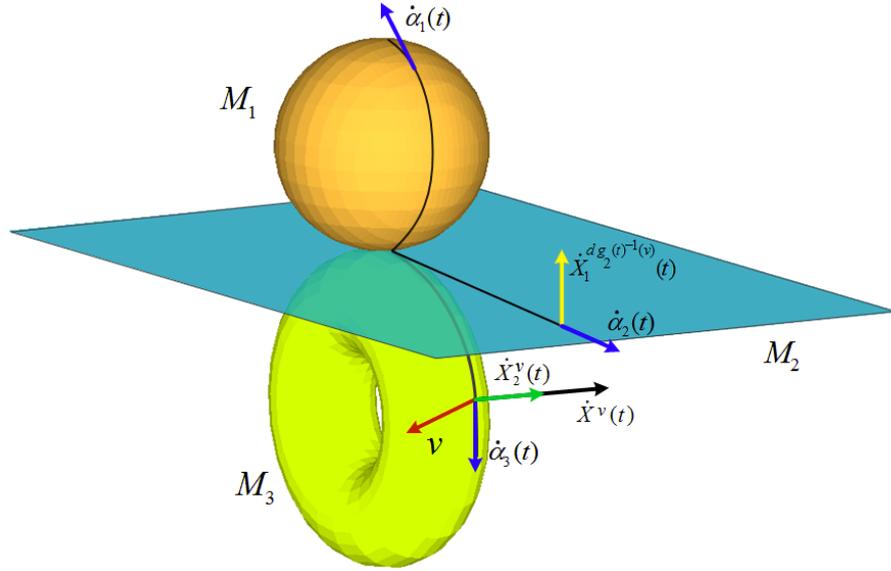


Figura 2.5: Transitividade dos rolamentos.

Proposição 2.5 (Simetria dos rolamentos) *Sejam M_1 e M_2 subvariedades pseudo-Riemannianas de \mathbb{R}_k^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Suponhamos que $g : [0, \tau] \rightarrow \bar{G}$ é uma aplicação rolamento de M_1 sobre M_2 , com curva de rolamento α_1 e curva de desenvolvimento α_2 . Então $g^{-1} : [0, \tau] \rightarrow \bar{G}$, definida por $g^{-1}(t) = g(t)^{-1}$, é uma aplicação rolamento de M_2 sobre M_1 , tendo α_2 como curva de rolamento e α_1 como curva de desenvolvimento.*

Demonstração. A confirmação das condições de não-deslize e de não-torção será feita, naturalmente, com a mesma partição do intervalo $[0, \tau]$ que a hipótese garante a respeito da aplicação rolamento g .

1. Verificação da condição de rolamento.

Em virtude de se ter $g^{-1}(t) * \alpha_2(t) = g(t)^{-1} * (g(t) * \alpha_1(t)) = \alpha_1(t)$, é imediato que $g^{-1}(t) * \alpha_2(t) \in M_1$ e que α_1 é a curva de desenvolvimento para g^{-1} .

À parte disto, a hipótese garante-nos a igualdade $T_{\alpha_2(t)}g(t) * M_1 = T_{\alpha_2(t)}M_2$. Logo,

$$\begin{aligned}
 T_{g^{-1}(t) * \alpha_2(t)}g^{-1}(t) * M_2 &= dg^{-1}(t) (T_{\alpha_2(t)}M_2) \\
 &= dg^{-1}(t) (T_{\alpha_2(t)}g(t) * M_1) \\
 &= T_{g^{-1}(t) * \alpha_2(t)}g^{-1}(t) * (g(t) * M_1) \\
 &= T_{g^{-1}(t) * \alpha_2(t)}M_1.
 \end{aligned}$$

2. Verificação da condição de não-deslize.

Sabemos pela hipótese que $\dot{\alpha}_2(t) = dg(t)(\dot{\alpha}_1(t))$. Portanto, com as propriedades de $dg(t)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} dg^{-1}(t)(\dot{\alpha}_2(t)) &= dg^{-1}(t)(dg(t)(\dot{\alpha}_1(t))) \\ &= (dg(t)^{-1} \circ dg(t))(\dot{\alpha}_1(t)) \\ &= \dot{\alpha}_1(t). \end{aligned}$$

3. Verificação da condição de não-torção.

Relativamente à parte tangencial, precisamos de mostrar que

$$\forall v \in T_{\alpha_1(t)}M_1, \dot{X}_{-1}^v(t) \in (T_{\alpha_1(t)}M_1)^\perp,$$

sendo

$$X_{-1}^v(\sigma) := (dg(\sigma)^{-1} \circ dg(t))(v).$$

Mas a hipótese assegura-nos

$$\forall v \in T_{\alpha_2(t)}M_2, \dot{X}^v(t) \in (T_{\alpha_2(t)}M_2)^\perp,$$

onde $X^v(\sigma) = (dg(\sigma) \circ dg(t)^{-1})(v)$. Além disto, para todo v , podemos confirmar diretamente a igualdade

$$\dot{X}_{-1}^v(t) = -dg(t)^{-1} \left(\dot{X}^{dg(t)(v)}(t) \right). \quad (2.28)$$

Portanto, $\forall v \in T_{\alpha_1(t)}M_1$,

$$\dot{X}_{-1}^v(t) \in \left(-dg(t)^{-1} \left((T_{\alpha_2(t)}M_2)^\perp \right) \right) = (T_{\alpha_1(t)}M_1)^\perp.$$

A prova referente à parte normal é feita com as evidentes adaptações. ■

Observação 2.3 *As proposições anteriores permitem reduzir o estudo dos rolamentos entre subvariedades de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, sob a condição de que elas tenham igual dimensão e índice e sejam tangentes entre si, ao caso em que uma das duas é o espaço afim associado ao espaço tangente à outra variedade num ponto (arbitrário), que se define para quaisquer M e $p \in M$ por*

$$T_p^{\text{aff}} M := \{p + v : v \in T_p M\}.$$

Efetivamente, considerando-se M_1 e M_2 tangentes num ponto p_0 , isto é, tais que $T_{p_0}^{\text{aff}} M_1 = T_{p_0}^{\text{aff}} M_2 =: N$, se soubermos como rolar M_1 e M_2 sobre N , por simetria saberemos também como rolar N sobre M_2 , portanto o rolamento de M_1 sobre M_2 poderá depois ser obtido por transitividade. A importância deste raciocínio deve-se ao facto dos rolamentos sobre um espaço tangente (afim) serem, à partida, mais fáceis de descrever. À parte disto, o caso dos rolamentos de M sobre $T_p^{\text{aff}} M$ é também muito importante para resolver problemas de interpolação, como se verá no Capítulo 6.

Proposição 2.6 *Sejam \overline{M}_1 e \overline{M}_2 quaisquer variedades pseudo-Riemannianas conexas, orientáveis e com igual dimensão. Consideremos que:*

- (i) M_1 e M_2 são duas subvariedades pseudo-Riemannianas de \overline{M}_1 ;
- (ii) $g : [0, \tau] \rightarrow \overline{G}_1$ é uma aplicação rolamento de M_1 sobre M_2 , com curva de rolamento α_1 e curva de desenvolvimento α_2 ;
- (iii) $\phi : \overline{M}_1 \rightarrow \overline{M}_2$ é uma homotetia (fixa).

Então $\phi \circ g \circ \phi^{-1} : [0, \tau] \rightarrow \overline{G}_2 = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in \overline{G}_1\}$, definida através de $(\phi \circ g \circ \phi^{-1})(t) = \phi \circ g(t) \circ \phi^{-1}$, é uma aplicação rolamento de $\phi(M_1)$ sobre $\phi(M_2)$, tendo $\phi \circ \alpha_1 : t \rightsquigarrow \phi(\alpha_1(t))$ como curva de rolamento e $\phi \circ \alpha_2 : t \rightsquigarrow \phi(\alpha_2(t))$ como curva de desenvolvimento.

Demonstração. Notamos em primeiro lugar que cada aplicação $\phi \circ f \circ \phi^{-1} \in \overline{G}_2$ é uma isometria de \overline{M}_2 e que ela preserva a orientação. De facto, uma vez que se a homotetia ϕ tem coeficiente μ então ϕ^{-1} é uma homotetia com coeficiente μ^{-1} , podemos escrever o seguinte: $\forall p \in M_2, \forall u_p, v_p \in T_p M_2$,

$$\begin{aligned} \langle d(\phi \circ f \circ \phi^{-1})(u_p), d(\phi \circ f \circ \phi^{-1})(v_p) \rangle &= \langle d\phi(df(d\phi^{-1}(u_p))), d\phi(df(d\phi^{-1}(v_p))) \rangle \\ &= \mu \langle df(d\phi^{-1}(u_p)), df(d\phi^{-1}(v_p)) \rangle \\ &= \mu \langle d\phi^{-1}(u_p), d\phi^{-1}(v_p) \rangle \\ &= \langle u_p, v_p \rangle. \end{aligned}$$

Além disto, com variedades diferenciáveis conexas orientadas, podemos provar que um difeomorfismo preserva a orientação se e só se a sua inversa preserva a orientação, e também que a composição de dois difeomorfismos inverte a orientação se e só se um deles preserva e o outro inverte a orientação. Portanto, é imediata a conclusão de que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ preserva a orientação.

Vamos agora confirmar as condições de rolamento, de não-deslize e de não-torção, tomando-se, a respeito da duas últimas, os intervalos resultantes da partição de $[0, \tau]$ que a hipótese garante para a aplicação g .

1. Verificação da condição de rolamento.

Uma vez que

$$\begin{aligned} (\phi \circ g \circ \phi^{-1})(t) * (\phi \circ \alpha_1)(t) &= (\phi \circ g(t) \circ \phi^{-1}) * (\phi(\alpha_1(t))) \\ &= \phi(g(t) * (\alpha_1(t))) \\ &= (\phi \circ \alpha_2)(t), \end{aligned}$$

então $(\phi \circ g \circ \phi^{-1})(t) * (\phi \circ \alpha_1)(t) \in \phi(M_2)$ e a curva $\phi \circ \alpha_2$ é a curva de desenvolvimento para a aplicação $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$. As hipóteses permitem-nos escrever ainda

$$\begin{aligned} T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}(\phi \circ g \circ \phi^{-1})(t) * (\phi(M_1)) &= T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}(\phi \circ g(t))(M_1) \\ &= d\phi(T_{\alpha_2(t)}g(t) * M_1) \\ &= d\phi(T_{\alpha_2(t)}M_2) \\ &= T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}\phi(M_2). \end{aligned}$$

2. Verificação da condição de não-deslize.

A hipótese garante a igualdade $\dot{g}(t)(\alpha(t)) = 0$ e precisamos de mostrar que $(\phi \circ g \circ \phi^{-1})'(t)(\phi(\alpha(t))) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} (\phi \circ g \circ \phi^{-1})'(t)(\phi(\alpha(t))) &= (\sigma \rightsquigarrow (\phi \circ g \circ \phi^{-1})(\sigma) * \phi(\alpha(t)))'(t) \\ &= (\sigma \rightsquigarrow (\phi \circ g(\sigma))(\alpha(t)))'(t) \\ &= d\phi((\sigma \rightsquigarrow g(\sigma) * \alpha(t))'(t)) \\ &= d\phi(\dot{g}(t)(\alpha(t))). \end{aligned}$$

Portanto está provado o que se pretendida, uma vez que $d\phi(0) = 0$.

3. Verificação da condição de não-torção.

Em resultado da evidente conformidade entre a parte tangencial e a parte normal, uma vez mais vamos apresentar somente a prova referente à parte tangencial.

Com $X^v(\sigma) = d(g(\sigma) \circ g(t)^{-1})(v)$, por hipótese temos $\dot{X}^v(t) \in (T_{\alpha_2(t)}M_2)^\perp$, $\forall v \in T_{\alpha_2(t)}M_2$. Necessitamos agora de garantir que

$$\forall v \in T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}\phi(M_2), \quad \dot{X}_\phi^v(t) \in (T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}\phi(M_2))^\perp,$$

sendo

$$\begin{aligned}
X_\phi^v(\sigma) &= d((\phi \circ g(\sigma) \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ g(t) \circ \phi^{-1})^{-1})(v) \\
&= d(\phi \circ g(\sigma) \circ g(t)^{-1} \circ \phi^{-1})(v) \\
&= d\phi(d(g(\sigma) \circ g(t)^{-1})(d\phi^{-1}(v))) \\
&= d\phi(X^{d\phi^{-1}(v)}(\sigma)).
\end{aligned}$$

Tomemos arbitrariamente $v \in T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}\phi(M_2)$. Em virtude de ϕ ser uma homotetia temos

$$\dot{X}_\phi^v(\sigma) = d\phi(\dot{X}^{d\phi^{-1}(v)}(\sigma)).^{11} \quad (2.29)$$

Portanto, já que $d\phi^{-1}(v) \in T_{\alpha_2(t)}M_2$, a hipótese permite-nos concluir a relação pretendida,

$$\dot{X}_\phi^v(t) \in d\phi\left((T_{\alpha_2(t)}M_2)^\perp\right) = (T_{(\phi \circ \alpha_2)(t)}\phi(M_2))^\perp.$$

■

Observação 2.4 *A razão para as Proposições 2.4 e 2.5 estarem limitadas a rolagmentos em \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ prende-se, sobretudo, com o facto de somente nestas variedades conseguirmos apresentar a prova de (2.27) e (2.28). Já a igualdade análoga a estas que figura na demonstração da Proposição 2.6, a igualdade (2.29), é facilmente estabelecida para variedades em geral. É essencialmente isto que nos permite libertar a última proposição da limitação das primeiras.*

2.7 Rolamento *versus* Transporte Paralelo

Aqui abordaremos a estreita relação entre o conceito de rolamento sem torção e o conceito de campo de vetores paralelo ao longo de uma curva. Nesta secção a derivada covariante da variedade ambiente \overline{M} será denotada com o símbolo $\frac{\overline{D}}{d\sigma}$.

Teorema 2.1 *Consideremos que:*

1. $g : [0, \tau] \longrightarrow \overline{G}$, definida como em (2.11), satisfaz as condições de rolamento e não-torção da Definição 2.1, e $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \tau$ é uma partição do intervalo $[0, \tau]$ cumprindo os requisitos da condição de não-torção;

¹¹Homotetias preservam conexões de Levi-Civita, pelo que preservam a correspondente derivada covariante ao longo de uma curva.

2. $V : [0, \tau] \longrightarrow T\bar{M}$ é um campo de vetores suave em cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$ tal que $V(\sigma) \in T_{\alpha_{\text{dev}}(\sigma)}\bar{M}$, $\forall \sigma \in [0, \tau]$, e $Y : [0, \tau] \longrightarrow T\bar{M}$ é o correspondente campo de vetores definido por

$$Y(\sigma) := dg(\sigma)^{-1}(V(\sigma)) \in T_{\alpha(\sigma)}\bar{M}.$$

Se g e V são tais que Y verifica a seguinte igualdade para todo t fixo em $\cup_{i=1}^r]t_{i-1}, t_i[$,

$$dg(t) \left(\frac{\bar{D}Y}{d\sigma}(t) \right) + \frac{\bar{D}}{d\sigma} \left(dg(\sigma)(Y(t)) \right) (t) = \frac{\bar{D}V}{d\sigma}(t), \quad (2.30)$$

então em cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$, tomando-se as respectivas restrições, Y é um campo de vetores paralelo [paralelo normal] ao longo da curva de rolamento α se e só se V é um campo de vetores paralelo [paralelo normal] ao longo da curva de desenvolvimento α_{dev} .¹²

Demonstração. Vamos provar somente a afirmação referente aos vetores tangentes, podendo a demonstração da parte referente aos vetores normais ser feita de forma similar. Note-se antes de mais que a afirmação faz sentido, já que $Y(\sigma) \in T_{\alpha(\sigma)}M_1$, $\forall \sigma \in [0, \tau]$, sempre que $V(\sigma) \in T_{\text{dev}(\sigma)}M_2$. Efetivamente, uma vez que $g(\sigma)^{-1}$ é um difeomorfismo, tem-se

$$\begin{aligned} dg(\sigma)^{-1} \left(T_{\text{dev}(\sigma)}M_2 \right) &= dg(\sigma)^{-1} \left(T_{\text{dev}(\sigma)}g(\sigma) * M_1 \right) \\ &= T_{g(\sigma)^{-1}(\alpha_{\text{dev}}(\sigma))}g(\sigma)^{-1} \left(g(\sigma) * M_1 \right) = T_{\alpha(\sigma)}M_1. \end{aligned}$$

Tomemos, então, um instante t (fixo) arbitrariamente num qualquer subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$. Em primeiro lugar, da parte tangencial da condição de não-torção resulta

$$\frac{\bar{D}}{d\sigma} \left(dg(\sigma)(Y(t)) \right) (t) \left[= \frac{\bar{D}X^{V(t)}}{d\sigma}(t) \right] \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp.$$

Portanto, de (2.30) obtemos

$$dg(t) \left(\frac{\bar{D}Y}{d\sigma}(t) \right) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp \text{ se e só se } \frac{\bar{D}V}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp. \quad (2.31)$$

Por outro lado, o facto de $g(t)$ ser uma isometria permite-nos escrever

$$dg(t) \left((T_{\alpha(t)}M_1)^\perp \right) = \left(dg(t) (T_{\alpha(t)}M_1) \right)^\perp = \left(T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}g(t) * M_1 \right)^\perp = \left(T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2 \right)^\perp.$$

Assim, em virtude de $dg(t)_{\alpha(t)} : T_{\alpha(t)}\bar{M} \longrightarrow T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}\bar{M}$ ser um isomorfismo, temos também

$$dg(t) \left(\frac{\bar{D}Y}{d\sigma}(t) \right) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp \text{ se e só se } \frac{\bar{D}Y}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha(t)}M_1)^\perp. \quad (2.32)$$

¹²Entende-se que Y é paralelo enquanto campo de vetores tangentes à variedade M_1 e que V é paralelo enquanto campo de vetores tangentes à variedade M_2 .

Finalmente, de (2.31) e (2.32) deduz-se agora imediatamente por transitividade:

$$\frac{\overline{DY}}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha(t)}M_1)^\perp \text{ se e só se } \frac{\overline{DV}}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp,$$

pelo que se pode concluir a equivalência afirmada. \blacksquare

Observação 2.5 *Quando para além das condições assumidas no teorema anterior ocorre ainda que V e Y são contínuos, como consequência particular tem-se o seguinte: Y é o transporte paralelo [paralelo normal] de $Y_0 = Y(0) \in T_{\alpha(0)}M_1$ [$\in (T_{\alpha(0)}M_1)^\perp$] ao longo de α se e só se V é o transporte paralelo [paralelo normal] de $V_0 = V(0) \in T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2$ [$\in (T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2)^\perp$] ao longo de α_{dev} .*

Sempre que a aplicação g tem a forma dada em (2.16), caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$, ou a forma dada em (2.21), caso em que $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, a condição expressa pela igualdade (2.30) é satisfeita com quaisquer campos V e Y , relacionados pela maneira descrita. Este facto pode ser confirmado com cálculos diretos a partir das considerações introduzidas nas Secções 2.4 e 2.5, e é independente da condição de não-torção. Também é imediata a verificação, em tais casos, de que o campo Y é contínuo sempre que V o for.

As condições particulares dos rolamentos em \mathbb{R}_κ^n e em $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ permitem-nos encontrar fórmulas explícitas para expressar o transporte paralelo dum vetor ao longo da curva de rolamento, em função do transporte paralelo desse vetor ao longo da curva de desenvolvimento. Isto poderá ter especial interesse quando o transporte paralelo ao longo da curva de desenvolvimento se configurar mais simples de descrever que o transporte paralelo ao longo da curva de rolamento, como por exemplo no rolamento de uma superfície esférica sobre um plano.

Corolário 2.1 *1. Suponhamos que g tem a forma dada em (2.16), satisfaz as condições de rolamento e não-torção da Definição 2.1, e é tal que $g(0) = (I_n, 0)$. Então o transporte paralelo [paralelo normal] dum qualquer vetor $v \in T_{\alpha(0)}M_1 = T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2$ [$v \in (T_{\alpha(0)}M_1)^\perp = (T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2)^\perp$] ao longo da curva de rolamento α é dado por*

$$Y(\sigma) = R^{-1}(\sigma)V(\sigma), \quad (\text{com } 0 \leq \sigma \leq \tau) \quad (2.33)$$

onde V é o transporte paralelo [paralelo normal] de v ao longo da curva de desenvolvimento α_{dev} . (Ver a figura 2.6).

2. Suponhamos que g tem a forma dada em (2.21), satisfaz as condições de rolamento e não-torção da Definição 2.1, e é tal que $g(0) = (I_n, I_n, 0)$. Então

o transporte paralelo [paralelo normal] dum qualquer vetor $v \in T_{\alpha(0)}M_1 = T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2$ [$v \in (T_{\alpha(0)}M_1)^\perp = (T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2)^\perp$] ao longo da curva de rolamento α é dado por

$$Y(\sigma) = U^{-1}(\sigma)V(\sigma)W(\sigma), \quad (\text{com } 0 \leq \sigma \leq \tau) \quad (2.34)$$

onde V é o transporte paralelo [paralelo normal] de v ao longo da curva de desenvolvimento α_{dev} .

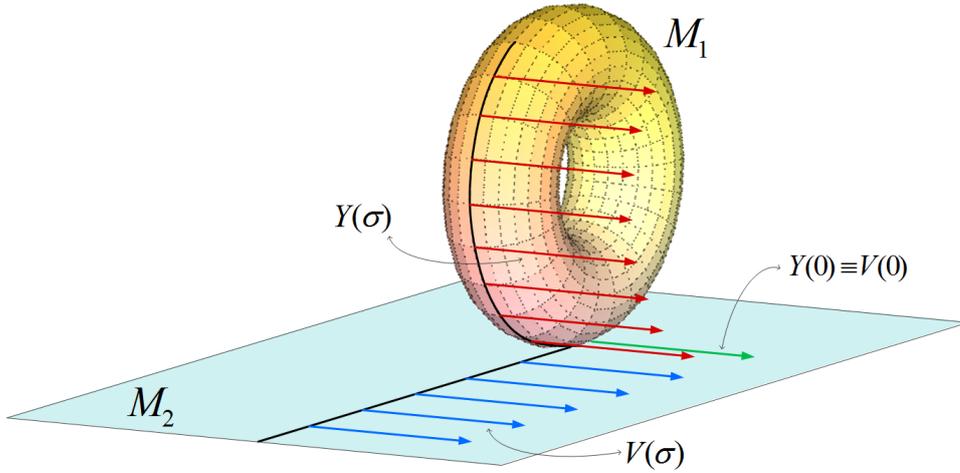


Figura 2.6: Transporte paralelo (tangente) de $Y(0) = V(0)$ ao longo de α e α_{dev} .

Demonstração. Tanto para 1 como para 2, se fixarmos arbitrariamente $v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2$ [$v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(0)}M_2)^\perp$] e tomarmos o correspondente transporte paralelo [paralelo normal] V ao longo da curva α_{dev} , com as expressões apresentadas tem-se $Y(\sigma) = dg(\sigma)^{-1}(V(\sigma))$ em todo o instante σ . Portanto ficam reunidas todas hipóteses do Teorema 2.1. Uma vez que $g(0)$ é a aplicação identidade, verifica-se ainda $Y(0) = V(0) = v$. Deste modo, pode aplicar-se a Observação 2.5 e esta permite-nos concluir diretamente as afirmações correspondentes às duas alternativas aqui indicadas. ■

Com um sentido recíproco ao do Teorema 2.1, na proposição seguinte vamos ver que, sob certas condições, é possível expressar a condição de não-torção à custa da noção de campo de vetores paralelo.

Proposição 2.7 Consideremos que $g : [0, \tau] \rightarrow \bar{G}$, definida como em (2.11), satisfaz a condição de rolamento, e suponhamos que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \tau$ é uma partição do intervalo $[0, \tau]$ de modo que g é suave em cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$. Admitamos ainda que g é tal que a condição expressa pela igualdade

(2.30) é satisfeita com quaisquer campos V e Y . Então verifica-se a parte tangencial [parte normal] da condição de não-torção se em cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$ for cumprida a seguinte condição: “Sempre que $V(\sigma)$ é um campo de vetores paralelo [paralelo normal] ao longo da curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(\sigma)$, o correspondente campo $Y(\sigma) = dg(\sigma)^{-1}(V(\sigma))$ é um campo de vetores paralelo [paralelo normal] ao longo da curva de rolamento $\alpha(\sigma)$ ”.

Demonstração. Tomemos um instante t (fixo) arbitrariamente num qualquer subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$. Com qualquer $v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2$, seja $V(\sigma)$ o transporte paralelo do v ao longo da restrição de $\alpha_{\text{dev}}(\sigma)$ ao intervalo $]t_{i-1}, t_i[$, satisfazendo $V(t) = v$. Portanto temos $\frac{\overline{D}V}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp$.

Por outro dado, se admitirmos que a condição aqui indicada é válida, $Y(\sigma)$ é um campo de vetores paralelo ao longo da restrição da curva $\alpha(\sigma)$ ao intervalo $]t_{i-1}, t_i[$. Logo $\frac{\overline{D}Y}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha(t)}M_1)^\perp$ e, conseqüentemente, $dg(t)\left(\frac{\overline{D}Y}{d\sigma}(t)\right) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp$.

Assim podemos concluir diretamente de (2.30) que $\frac{\overline{D}X^v}{d\sigma}(t) \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}M_2)^\perp$, se considerarmos X^v definido como em (2.13).

A demonstração para a alternativa referente à parte normal é feita com as evidentes adaptações, razão pela qual a vamos omitir. ■

Em virtude do exposto no Teorema 2.1 e na Proposição 2.7 podemos agora apresentar uma reformulação da definição de condição de não-torção, válida para rolamentos em $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$ e em $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$.

Observação 2.6 Quando a aplicação g tem a forma dada em (2.16) ou a forma dada em (2.21), se verificada a condição de rolamento, as alíneas (a) e (b) da condição de não-torção, na Definição 2.1, são equivalentes às seguintes:

(a') (parte tangencial) Em cada intervalo $]t_{i-1}, t_i[$, um campo de vetores $Y(\sigma)$ é paralelo ao longo da curva $\alpha(\sigma)$ se e só se $V(\sigma) = dg(\sigma)(Y(\sigma))$ é um campo de vetores paralelo ao longo da curva $\alpha_{\text{dev}}(\sigma)$.

(b') (parte normal) Em cada intervalo $]t_{i-1}, t_i[$, um campo de vetores $Y(\sigma)$ é paralelo normal ao longo da curva $\alpha(\sigma)$ se e só se $V(\sigma) = dg(\sigma)(Y(\sigma))$ é um campo de vetores paralelo normal ao longo da curva $\alpha_{\text{dev}}(\sigma)$.

Esta reformulação da condição de não-torção aparece igualmente em [28] (Proposition 1, p. 7), para rolamentos em \mathbb{R}_κ^n . Contudo, a argumentação feita pelos autores é substancialmente diferente, uma vez que a definição de rolamento sem

deslize nem torção por eles usada, embora equivalente, tem um enunciado diferente daquele que construímos na presente dissertação.

A afinidade da condição de não-torção com os campos de vetores paralelos ao longo das curvas associadas ao rolamento, permite ainda relacionar uniões de geodésicas de distintas subvariedades de \mathbb{R}_κ^n ou de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ através de rolamentos.

Proposição 2.8 *Consideremos que g é uma aplicação rolamento sem deslize nem torção tendo a forma dada em (2.16) ou a forma dada em (2.21). Então a curva de rolamento α é uma geodésica quebrada em M_1 se e só se a correspondente curva de desenvolvimento α_{dev} é uma geodésica quebrada em M_2 .*

Demonstração. Evidentemente, uma geodésica pode ser caracterizada como sendo uma curva suave cujo campo velocidade é paralelo. Também sabemos que quando g tem a forma (2.16) ou a forma em (2.21), a condição de não-deslize (2.18) é equivalente a ter-se que $\dot{\alpha}_{\text{dev}}(t) = dg(t)(\dot{\alpha}(t))$.

Suponhamos que α é uma geodésica quebrada e seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \tau$ uma partição do intervalo $[0, \tau]$, cumprindo os requisitos das condições de não-deslize e não-torção, de forma que cada restrição de α aos subintervalos $]t_{i-1}, t_i[$ é uma geodésia. Então, em cada um destes intervalos, o campo $Y(\sigma) = \dot{\alpha}(\sigma)$ é paralelo ao longo de α . Consequentemente o campo $V(\sigma) = \dot{\alpha}_{\text{dev}}(\sigma)$ é paralelo ao longo de α_{dev} nos mesmos intervalos, pelo que α_{dev} é igualmente uma geodésica quebrada. Com o mesmo raciocínio poder-se-ia mostrar também que α é uma geodésica quebrada sempre que α_{dev} o for, logo a demonstração está concluída. ■

Capítulo 3

Rolamento de Hiperquádricas dum Espaço Pseudo-Euclidiano

No presente capítulo estudaremos rolamentos, sem deslize nem torção, duma importante família de hipersuperfícies pseudo-Riemannianas de espaços pseudo-Euclidianos. Esta família é constituída pelo espaço pseudo-hiperbólico $H_\kappa^n(r)$ e pela pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$, que vamos definir em (3.2) e (3.1) abaixo. A nossa principal preocupação será o rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim associado ao seu espaço tangente num ponto p_0 , definido por

$$T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r) := \{p_0 + v : v \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)\}.$$

O conhecimento deste rolamento possibilitará depois a dedução de diversos rolamentos, à custa de propriedades introduzidas no capítulo anterior. Nomeadamente, analisaremos o rolamento dum espaço pseudo-hiperbólico sobre outro recorrendo às propriedades de simetria e transitividade. Rolamentos com a pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$ serão abordados apenas no final do capítulo, por meio duma homotetia conveniente que nos permitirá importar a informação do caso $H_\kappa^n(r)$.

Parte dos resultados deste capítulo estão publicados em Marques *et al.* [32]

3.1 Hiperquádricas em \mathbb{R}_κ^{n+1}

Vamos começar este capítulo com a introdução das hiperquádricas de \mathbb{R}_κ^{n+1} .

Considere-se que M é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de \overline{M} . Para todo $p \in M$, do Lema 1.3 resulta

$$\text{ind}(\overline{M}) = \text{ind}(T_p M) + \text{ind}((T_p M)^\perp),$$

pelo que todos os $(T_p M)^\perp$ têm o mesmo índice. Esse valor comum é chamado o *co-índice* de M (em \overline{M}). Quando M é uma hipersuperfície pseudo-Riemanniana de \overline{M} , isto é, M tem co-dimensão ($= \dim(\overline{M}) - \dim(M)$) igual a 1, uma vez que os espaços $(T_p M)^\perp$ são unidimensionais, o co-índice de M tem de ser 0 ou 1. O sinal ϵ de M define-se como sendo +1 se o co-índice de M é 0 e como sendo -1 se o co-índice de M é 1. Portanto, $\text{ind}(M) = \text{ind}(\overline{M})$ se $\epsilon = +1$ e $\text{ind}(M) = \text{ind}(\overline{M}) - 1$ se $\epsilon = -1$.

Lema 3.1 *Suponha-se que $q : \mathbb{R}_\kappa^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $q(u) = \langle u, u \rangle$ e seja P o campo de vetores posição de \mathbb{R}_κ^{n+1} . Então, para $r > 0$ e $\epsilon = \pm 1$, tem-se que $Q = q^{-1}(\epsilon r^2)$ é uma hipersuperfície pseudo-Riemanniana de \mathbb{R}_κ^{n+1} com campo de vetores normais unitários $U = \frac{P}{r}$ e sinal ϵ .*

Estas hipersuperfícies Q são chamadas as *hiperquádricas* (com centro) do espaço \mathbb{R}_κ^{n+1} . Mediante o sinal ϵ que seja considerado, a definição seguinte atribui um nome específico à hiperquádrica correspondente.

Definição 3.1 *Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq \kappa \leq n$. Então:*

1. *A pseudo-esfera de raio $r > 0$ em \mathbb{R}_κ^{n+1} é a hiperquádrica*

$$S_\kappa^n(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \in \mathbb{R}_\kappa^{n+1} : \langle p, p \rangle = r^2\}. \quad (3.1)$$

2. *O espaço pseudo-hiperbólico de raio $r > 0$ em $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ é a hiperquádrica*

$$H_\kappa^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{p \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2\}. \quad (3.2)$$

(Ver a tabela 3.1.)

Observação 3.1 *$S_\kappa^n(r)$ e $H_\kappa^n(r)$ têm ambas dimensão n pois são hipersuperfícies numa variedade diferenciável com dimensão $n + 1$. O índice de $S_\kappa^n(r)$ é κ , pois o seu sinal é +1 e, portanto, $\text{ind}(S_\kappa^n(r)) = \text{ind}(\mathbb{R}_\kappa^{n+1})$. O índice de $H_\kappa^n(r)$ também é κ , pois o seu sinal é -1 e, assim, $\text{ind}(H_\kappa^n(r)) = \text{ind}(\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}) - 1$. Repare-se, no entanto, que $S_\kappa^n(r) \subset \mathbb{R}_\kappa^{n+1}$ enquanto que $H_\kappa^n(r) \subset \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$.*

Observação 3.2 *Uma vez que têm índice igual a zero, $S_0^n(r)$ e $H_0^n(r)$ são variedades Riemannianas. Obviamente estas são as duas únicas hiperquádricas onde tal acontece.*

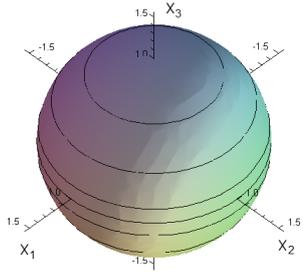
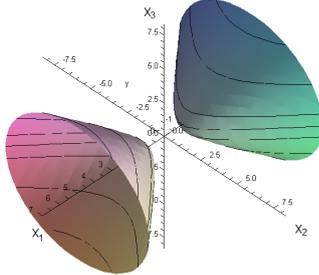
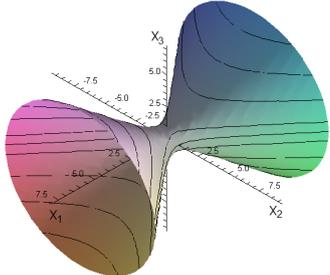
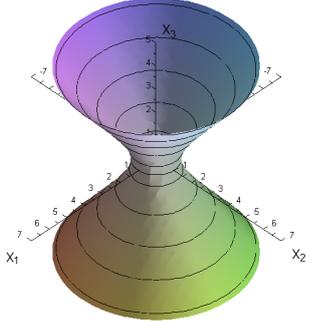
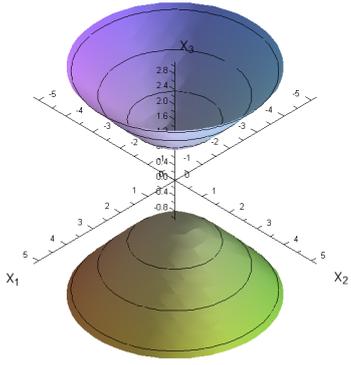
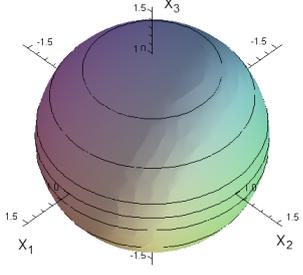
	$S_{\kappa}^n(r) \subset \mathbb{R}_{\kappa}^{n+1}$	$H_{\kappa}^n(r) \subset \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$
$n = 2$ $\kappa = 0$ $r = 1$		
$n = 2$ $\kappa = 1$ $r = 1$		
$n = 2$ $\kappa = 2$ $r = 1$		

Tabela 3.1: Hiperquádricas

3.2 Resultados Preliminares

$H_\kappa^n(r)$ é conexa sempre que $\kappa \geq 1$, mas quando $\kappa = 0$ esta hiperquádrica consiste em duas componentes conexas: a *folha superior*, que contém $(r, 0, \dots, 0)$, e a *folha inferior*, que contém $(-r, 0, \dots, 0)$. No entanto, estas duas componentes podem identificar-se projetivamente e lidaremos apenas com uma delas. Assim, a partir de agora assumiremos que $H_0^n(r)$ designa a correspondente folha superior, ou seja,

$$H_0^n(r) := \{p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2 \wedge x_1 > 0\}. \quad (3.3)$$

Situação análoga acontece com a pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$, e vamos assumir que

$$S_n^n(r) := \{p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_n^{n+1} : \langle p, p \rangle = r^2 \wedge x_{n+1} > 0\}.$$

Tendo em conta que a análise dos rolamentos de pseudo-esferas será feita a partir do estudo sobre rolamentos com espaços pseudo-hiperbólicos, os resultados preliminares que vamos introduzir nesta secção focarão apenas $H_\kappa^n(r)$.

Observamos, antes de mais, que $H_\kappa^n(r)$ e $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$ estão ambas mergulhadas na variedade pseudo-Riemanniana $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$. Aqui, como habitualmente, faremos uso das identificações que nos permitem alternar livremente entre pontos de variedade $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$, vetores tangentes de cada $T_p(\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1})$ e vetores do espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} com o produto escalar definido por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^\top J_{\kappa+1} v_2,$$

onde $J_{\kappa+1} = \text{diag}(-I_{\kappa+1}, I_{n-\kappa})$.

Alguns dos cálculos das demonstrações desta secção são suportados pelo resultado seguinte.

Proposição 3.1 $\text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1)$ atua transitivamente em $H_\kappa^n(r)$, isto é, para quaisquer dois pontos $p, q \in H_\kappa^n(r)$ existe alguma matriz $R \in \text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1)$ tal que $Rp = q$.

Demonstração. Seja $p_0 = (r, 0, \dots, 0)$. Evidentemente, é suficiente demonstrarmos que para cada $q \in H_\kappa^n(r)$ existe $R \in \text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1)$ tal que $Rp_0 = q$.

Primeiramente vamos provar que existe $\widehat{R} \in \text{O}_{\kappa+1}(n+1)$ tal que $\widehat{R}p_0 = q$, isto é, a primeira coluna de \widehat{R} é $\frac{q}{r}$. Para tal, começaremos por mostrar que é possível construir uma base ortonormada de $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ a partir do vetor $\frac{q}{r}$, demonstrando que cada conjunto ortonormado $\{e_1, \dots, e_i\}$ com $i < n+1$ pode ser ampliado com mais um vetor. Efetivamente, o Lema 1.1 garante que estes vetores geram um

subespaço (com dimensão i) não-degenerado W . Por conseguinte, basta apenas encontrarmos um vetor unitário em $W^\perp \neq 0$. Mas sabemos que W^\perp é igualmente não-degenerado, logo existe algum $v \in W^\perp$ tal que $\langle v, v \rangle \neq 0$ e, portanto, $\frac{v}{\|v\|}$ é o vetor unitário procurado. Assim, assumindo-se neste momento que $\frac{q}{r}, v_2, \dots, v_{n+1}$ formam uma base ortonormada de \mathbb{R}^{n+1} , se tomarmos estes vetores como colunas duma matriz \widehat{R} , figurando $\frac{q}{r}$ na primeira coluna e os outros vetores tipo-tempo nas restantes primeiras $\kappa + 1$ colunas, o Lema 2.1 permite-nos afirmar que $\widehat{R} \in \text{O}_{\kappa+1}(n+1)$.

Consideremos agora a matriz \widehat{R} anteriormente construída decomposta na forma $\widehat{R} = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline R_3 & R_4 \end{array} \right]$, com R_1 do tipo $(\kappa + 1) \times (\kappa + 1)$. Antes de mais, note-se que quando $\kappa = 0$ a primeira entrada de q é necessariamente positiva (pois $H_0^n(r)$ designa a componente que contém $(r, 0, \dots, 0)$) e, portanto $\det(R_1) = R_1 > 0$. No entanto, se $\det(R_1) < 0$ substitua-se, em \widehat{R} , a coluna v_2 por $-v_2$ e se $\det(R_4) < 0$ substitua-se a coluna v_{n+1} por $-v_{n+1}$. Finalmente, se designarmos a matriz assim obtida por R , é evidente que $R \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$ e $Rp_0 = q$. ■

Notamos agora a existência de alguns factos que nos serão úteis e que podem ser facilmente deduzidos. Nomeadamente, $\forall 0 \leq \kappa \leq n$:

1. $\forall R \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$, temos $\{Rp : p \in H_\kappa^n(r)\} = H_\kappa^n(r)$. Portanto a “parte rotacional” da aplicação rolamento mantém $H_\kappa^n(r)$ invariante.
2. $\forall \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1), \forall t \in \mathbb{R}$, temos $e^{\Omega t} \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$.
3. Se $A \in \mathfrak{so}(n+1)$, então $J_{\kappa+1}A$ e $AJ_{\kappa+1}$ pertencem a $\mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Se $A \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, então $J_{\kappa+1}A$ e $AJ_{\kappa+1}$ pertencem a $\mathfrak{so}(n+1)$.

A seguir vamos apresentar algumas propriedades preliminares relacionadas com $T_{p_0}H_\kappa^n(r)$, que são necessárias para a construção do resultado principal deste capítulo, o Teorema 3.1.

Proposição 3.2 $\forall 0 \leq \kappa \leq n$ temos

$$T_{p_0}H_\kappa^n(r) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : v = \Omega p_0, \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)\}$$

e

$$(T_{p_0}H_\kappa^n(r))^\perp = \mathbb{R}p_0.$$

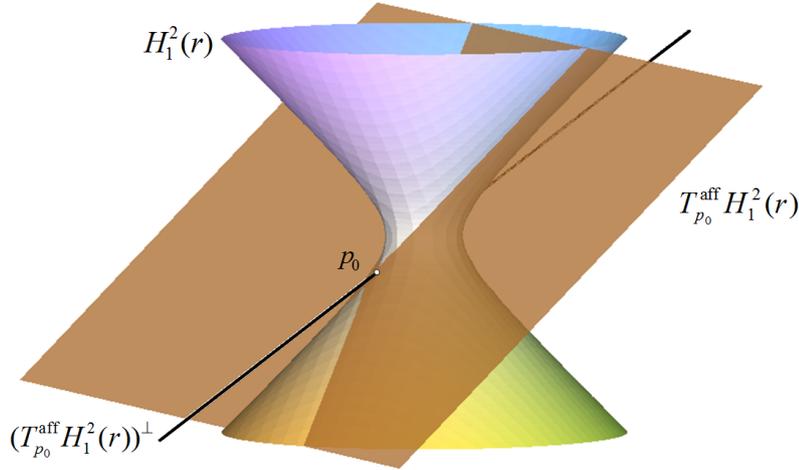


Figura 3.1: espaço afim ao espaço tangente e complemento ortogonal afim.

(Ver a figura 3.1).

Demonstração. Seja $V = \{v \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1} : v = \Omega p_0, \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)\}$. É evidente que $V \subseteq T_{p_0} H_{\kappa}^n(r)$, uma vez que se tomarmos um qualquer $v = \Omega p_0 \in V$ então a curva $\gamma(t) = e^{\Omega t} p_0 \in H_{\kappa}^n(r)$ satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\dot{\gamma}(0) = \Omega p_0$. Agora vamos mostrar que $T_{p_0} H_{\kappa}^n(r) \subseteq V$, ou seja, que todos os vetores tangentes em p_0 são da forma Ωp_0 . Para tal seja $t \rightsquigarrow \gamma(t)$ uma curva arbitrária em $H_{\kappa}^n(r)$ satisfazendo $\gamma(0) = p_0$. Visto que $\text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$ atua transitivamente em $H_{\kappa}^n(r)$, podemos escrever que $\gamma(t) = \delta(t)p_0$, onde $t \rightsquigarrow \delta(t)$ é uma curva em $\text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$ e $\delta(0) = I$. Portanto $\dot{\gamma}(t) = \dot{\delta}(t)p_0 = \Omega(t)\delta(t)p_0 = \Omega(t)\gamma(t)$, para alguma curva $\Omega(t) \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Fazendo aqui $t = 0$ encontramos a igualdade $\dot{\gamma}(0) = \Omega(0)p_0$, que permite concluir o que pretendíamos.

A segunda igualdade resulta trivialmente do facto de $p_0 \in (T_{p_0} H_{\kappa}^n(r))^{\perp}$, que se verifica porque o campo de vetores posição é normal a $H_{\kappa}^n(r)$, e do facto de $\dim((T_{p_0} H_{\kappa}^n(r))^{\perp}) = 1$. ■

Como consequência imediata da proposição anterior temos que, $\forall 0 \leq \kappa \leq n$ e $\forall p_0 \in H_{\kappa}^n(r)$,

$$T_{p_0}^{\text{aff}} H_{\kappa}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1} : p = p_0 + \Omega p_0, \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)\}.$$

Com esta caracterização podemos ainda analisar a interseção das duas subvariedades que irão estar em rolamento. Vamos constatar que, contrariamente ao clássico rolamento da esfera Euclidiana sobre um plano, na presente situação poderá não

haver somente um ponto de contacto entre $H_\kappa^n(r)$ e o seu espaço afim ao espaço tangente. Mais precisamente,

Proposição 3.3 $\forall 0 \leq \kappa \leq n$ e $\forall p_0 \in H_\kappa^n(r)$ temos

$$T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r) \cap H_\kappa^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{\kappa+1} : p = p_0 + \Omega p_0, \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1), \langle \Omega p_0, \Omega p_0 \rangle = 0\}.$$

Demonstração. Seja p um ponto arbitrário de $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r) \cap H_\kappa^n(r)$. Então $p = p_0 + \Omega p_0$, com $\Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, e $\langle p, p \rangle = -r^2$. Portanto atendendo à bilinearidade e à simetria do produto escalar, podemos afirmar que

$$\langle p_0, p_0 \rangle + 2\langle p_0, \Omega p_0 \rangle + \langle \Omega p_0, \Omega p_0 \rangle = -r^2.$$

Mas a segunda parcela acima é nula pois $p_0 \in (T_{p_0} H_\kappa^n(r))^\perp$ e $\Omega p_0 \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)$. Logo temos que ter $\langle \Omega p_0, \Omega p_0 \rangle = 0$. ■

Observação 3.3 $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r) \cap H_\kappa^n(r) = \{p_0\}$ se e só se $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p_0}$ restrita a $T_{p_0} H_\kappa^n(r)$ é definida (positiva ou negativa). Portanto p_0 é o único ponto da interseção de $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$ com $H_\kappa^n(r)$ se e só se $\kappa = 0$ ou $\kappa = n$.

Proposição 3.4 $\forall v \in T_{p_0} \mathbb{R}^{\kappa+1}$, verifica-se a equivalência

$$v \in T_{p_0} H_\kappa^n(r) \iff \langle v, p_0 \rangle = 0.$$

Demonstração. A veracidade da implicação (\implies) é evidente, pois $p_0 \in (T_{p_0} H_\kappa^n(r))^\perp$. Para mostrarmos que (\impliedby) também se verifica, suponhamos que $\langle v, p_0 \rangle = 0$. Então, uma vez que $(T_{p_0} H_\kappa^n(r))^\perp = \mathbb{R}p_0$, podemos afirmar que $v \in ((T_{p_0} H_\kappa^n(r))^\perp)^\perp$. Mas como $((T_{p_0} H_\kappa^n(r))^\perp)^\perp = T_{p_0} H_\kappa^n(r)$, a prova está completa. ■

Proposição 3.5 Se $t \in [a, b] \rightsquigarrow s(t) \in \mathbb{R}^{\kappa+1}$ é uma curva suave, então

$$\left(s(a), \dot{s}(t) \in T_{p_0} H_\kappa^n(r), \forall t \in]a, b[\right) \implies \left(s(t) \in T_{p_0} H_\kappa^n(r), \forall t \in [a, b] \right).$$

Demonstração. Suponhamos que se verifica o antecedente da implicação. Então existe alguma aplicação integrável $[a, b] \rightarrow \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, $t \rightsquigarrow \Omega(t)$, tal que $\dot{s}(t) = \Omega(t)p_0$ para todo $t \in]a, b[$. Portanto $s(t) = \left(\int_a^t \Omega(\rho) d\rho \right) p_0 + s(a)$, $\forall t \in [a, b]$. Assim se designarmos $s(a) = \tilde{\Omega} p_0 \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)$, uma vez que

$$\begin{aligned} \left(\int_a^t \Omega(\rho) d\rho + \tilde{\Omega} \right)^\top &= \int_a^t \Omega(\rho)^\top d\rho + \tilde{\Omega}^\top = \int_a^t -J_{\kappa+1} \Omega(\rho) J_{\kappa+1} d\rho - J_{\kappa+1} \tilde{\Omega} J_{\kappa+1} \\ &= -J_{\kappa+1} \left(\int_a^t \Omega(\rho) d\rho + \tilde{\Omega} \right) J_{\kappa+1}, \end{aligned}$$

podemos escrever $s(t) = \bar{\Omega}(t)p_0$ com $\bar{\Omega}(t) = \int_a^t \Omega(\rho)d\rho + \tilde{\Omega} \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, para todo $t \in [a, b]$. Logo está provado que, na implicação, também se verifica o consequente. ■

Proposição 3.6 *Para qualquer ponto $q \in T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)$, temos*

$$T_q(T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)) = T_{p_0}H_\kappa^n(r)$$

Demonstração. Em primeiro lugar note-se que a tese é equivalente à igualdade

$$\{\dot{\gamma}(0) : \gamma(t) \in T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r) \wedge \gamma(0) = q\} = \{\Omega p_0 : \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)\}.$$

A fim de demonstrarmos a inclusão (\subseteq), consideremos um vetor $\dot{\gamma}(0)$ arbitrário. Sabemos que $\gamma(t) = p_0 + \Omega(t)p_0$, para alguma curva $\Omega(t) \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Então se designarmos $\Omega = \dot{\Omega}(0)$ temos que $\dot{\gamma}(0) = \Omega p_0$ e, evidentemente, $\Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Para mostrarmos que a inclusão (\supseteq) também se verifica, consideremos um vetor arbitrário Ωp_0 , com $\Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Então se tomarmos $\gamma(t) = q + (\Omega t)p_0$, verifica-se que $\gamma(0) = q$, $\dot{\gamma}(0) = \Omega p_0$ e $\gamma(t) \in T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)$. Efetivamente, uma vez que $q = p_0 + \bar{\Omega}p_0$, para algum $\bar{\Omega} \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, temos que $\gamma(t) = p_0 + \bar{\Omega}p_0 + (\Omega t)p_0 = p_0 + (\bar{\Omega} + \Omega t)p_0$ e $(\bar{\Omega} + \Omega t)$ pertence, evidentemente, a $\mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Portanto a demonstração está concluída. ■

3.3 Geodésicas de $H_\kappa^n(r)$

Os rolamentos que melhor conseguiremos descrever correspondem ao caso em que a curva de rolamento é uma geodésica de $H_\kappa^n(r)$. Vamos agora ver que estas geodésicas podem ser escritas explicitamente. Nas duas próximas proposições serão apresentadas as equações dos três tipos possíveis de geodésicas de $H_\kappa^n(r)$ e mostraremos em que condições dois pontos desta hiperquádrica podem ser unidos por uma geodésica.

Proposição 3.7 *Sejam $p_0 \in H_\kappa^n(r)$ e $v \in T_{p_0}H_\kappa^n(r)$. Então:*

1. *Se v é um vetor tipo-tempo e $\|v\| = r$, ou seja $\langle v, v \rangle = -r^2$,*

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 \cos(t) + v \sin(t) \tag{3.4}$$

é a única geodésica tipo-tempo em $H_\kappa^n(r)$ com ponto inicial p_0 e velocidade inicial $\dot{\gamma}(0) = v$.

2. Se v é um vetor tipo-espaço e $\|v\| = r$, ou seja $\langle v, v \rangle = r^2$,

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 \cosh(t) + v \sinh(t) \quad (3.5)$$

é a única geodésica tipo-espaço em $H_\kappa^n(r)$ com ponto inicial p_0 e velocidade inicial $\dot{\gamma}(0) = v$.

3. Se v é um vetor tipo-luz ou é o vetor nulo, ou seja $\langle v, v \rangle = 0$,

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 + vt \quad (3.6)$$

é a única geodésica tipo-luz ou constante em $H_\kappa^n(r)$ com ponto inicial p_0 e velocidade inicial $\dot{\gamma}(0) = v$.

(Ver a figura 3.2).

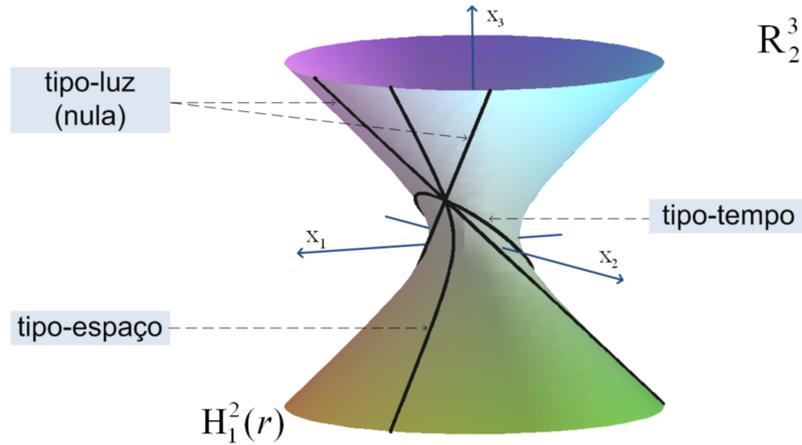


Figura 3.2: Tipos de geodésicas num espaço pseudo-hiperbólico de \mathbb{R}_2^3 .

Demonstração. É evidente que as curvas (3.4), (3.5) e (3.6) verificam as condições iniciais, e o Lema 1.10 garante a unicidade. Também sabemos que carácter causal duma geodésica coincide obrigatoriamente com o do seu vetor velocidade inicial. Assim, resta apenas mostrar que cada uma das curvas γ pertence a $H_\kappa^n(r)$ e que a sua aceleração usual $\ddot{\gamma}$ é, para todo o t , normal a $H_\kappa^n(r)$. Uma vez que para as restantes curvas o processo é inteiramente análogo, apresentaremos somente a prova para a curva $\gamma(t) = p_0 \cos(t) + v \sin(t)$. De facto:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle &= \langle p_0 \cos(t) + v \sin(t), p_0 \cos(t) + v \sin(t) \rangle \\ &= \cos^2(t) \langle p_0, p_0 \rangle + \sin(t) \cos(t) \langle p_0, v \rangle + \sin(t) \cos(t) \langle v, p_0 \rangle + \sin^2(t) \langle v, v \rangle \\ &= -r^2 \cos^2(t) - r^2 \sin^2(t) = -r^2, \end{aligned}$$

pelo que $\gamma(t) \in H_\kappa^n(r)$; Por outro lado,

$$\ddot{\gamma}(t) = -p_0 \cos(t) - v \sin(t) = -\gamma(t) \in \mathbb{R}\gamma(t),$$

e, portanto, $\ddot{\gamma}(t) \in (T_{\gamma(t)}H_\kappa^n(r))^\perp$. ■

Quando p_0 e p_1 são dois pontos antipodais (isto é, $p_1 = -p_0$) em $H_\kappa^n(r)$ é evidente que qualquer geodésica tipo-tempo dada por $\gamma(t) = p_0 \cos(t) + v \sin(t)$, com $v \in T_{p_0}H_\kappa^n(r)$ e $\|v\| = r$, satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(\pi) = p_1$. Na proposição seguinte mostraremos que dois quaisquer pontos distintos e não-antipodais $p_0, p_1 \in H_\kappa^n(r)$ pode ser unidos por uma geodésica de $H_\kappa^n(r)$ se e só se $\langle p_0, p_1 \rangle < r^2$.

Proposição 3.8 *Sejam p_0 e p_1 dois quaisquer pontos distintos não-antipodais em $H_\kappa^n(r)$. Então:*

1. *Se $\langle p_0, p_1 \rangle < -r^2$, digamos $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2 \cosh(\theta)$ para algum $\theta \neq 0$, a geodésica tipo-espaço dada por*

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 \cosh(t) + \frac{p_1 - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} \sinh(t)$$

satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(\theta) = p_1$.

2. *Se $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2$, a geodésica tipo-luz dada por*

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 + t(p_0 - p_1)$$

satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$.

3. *Se $-r^2 < \langle p_0, p_1 \rangle < r^2$, digamos $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2 \cos(\theta)$ para algum $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a geodésica tipo-tempo dada por*

$$t \rightsquigarrow \gamma(t) = p_0 \cos(t) + \frac{p_1 - p_0 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(t)$$

satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(\theta) = p_1$.

4. *Se $\langle p_0, p_1 \rangle \geq r^2$, não existe uma geodésica em $H_\kappa^n(r)$ que ligue os pontos p_0 e p_1 . No entanto, eles podem ser unidos por uma geodésica quebrada.*

Demonstração. A demonstração das afirmações 1, 2 e 3 resulta de forma quase imediata da Proposição 3.7. Por exemplo, para provarmos a primeira afirmação, se designarmos $v = \frac{p_1 - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)}$ temos que $\gamma(t) = p_0 \cosh(t) +$

$v \sinh(t)$ com $\langle v, v \rangle = r^2$. Portanto, podemos afirmar que γ é uma geodésica tipo-espaço de $H_\kappa^n(r)$ e, obviamente, satisfaz $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(\theta) = p_1$.

Para demonstrarmos a última afirmação, suponhamos que existe uma geodésica γ que contém os pontos p_0 e p_1 . Assim, quando γ é tipo-espaço ou tipo-tempo, a reparametrização $\gamma^*(t) = \gamma\left(\frac{r}{\|\dot{\gamma}(0)\|}t\right)$ é uma geodésica em $H_\kappa^n(r)$, com o mesmo carácter causal que γ e contendo p_0 e p_1 , que verifica $\|\dot{\gamma}^*(0)\| = r$. Consideremos que $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma^*(\theta) = p_1$. Se γ é tipo-espaço decorre de (3.5) que $\langle p_0, p_1 \rangle = \langle p_0, \gamma^*(\theta) \rangle = \langle p_0, p_0 \cosh(\theta) + \dot{\gamma}^*(0) \sinh(\theta) \rangle = -r^2 \cosh(\theta) < -r^2$. Analogamente, se γ é tipo-tempo decorre de (3.4) que $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2 \cos(\theta) \in [-r^2, r^2]$. Mas $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2$ (ou seja $\cos(\theta) = 1$) implica que $p_0 = p_1$ e, de igual modo, $\langle p_0, p_1 \rangle = r^2$ implica $p_1 = -p_0$, que são casos impossíveis. Finalmente se γ é tipo-luz, decorre de (3.6) que $\langle p_0, p_1 \rangle = -r^2$. Como só existem as três possibilidades consideradas para o carácter causal de γ , de facto podemos concluir que se p_0 e p_1 verificam $\langle p_0, p_1 \rangle \geq r^2$ então não podem ser unidos por uma geodésica de $H_\kappa^n(r)$. Por fim, se considerarmos que $\langle p_0, p_1 \rangle \geq r^2$, uma vez que $\langle p_0, -p_1 \rangle \leq -r^2$, resulta dos factos já expostos que p_0 e p_1 podem ser ligados pela concatenação duma geodésica (tipo-espaço ou tipo-luz) que une p_0 a $-p_1$ com uma geodésica (tipo-tempo) que une $-p_1$ a p_1 . ■

3.4 Rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$

3.4.1 Equações da Cinemática

No teorema que se segue exibiremos as equações da cinemática, descrevendo as velocidades de “translação” e de “rotação” determinadas por um “controlo”, do rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim ao espaço tangente num seu (qualquer) ponto. A estratégia consistirá em apresentar um conjunto de equações diferenciais a evoluir no grupo de isometrias $\text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$, e demonstrar posteriormente que a sua solução define uma aplicação rolamento.

Teorema 3.1 *Sejam p_0 um ponto arbitrário de $H_\kappa^n(r)$ e $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow u(t) \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ uma aplicação seccionalmente suave tal que $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$. Se $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow (R(t), s(t)) \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$ é a curva seccionalmente suave que em cada intervalo aberto onde u é suave verifica o sistema*

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = r^2 u(t) \\ \dot{R}(t) = R(t) (-u(t)p_0^\top + p_0 u^\top(t)) J_{\kappa+1} \end{cases} \quad (3.7)$$

e satisfaz a condição inicial $(R(0), s(0)) = (I_{n+1}, 0)$, então $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (R^{-1}(t), s(t)) \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente em p_0 , sem deslize nem torção, com a curva de rolamento $t \rightsquigarrow \alpha(t) = R(t)p_0$ e curva de desenvolvimento $t \rightsquigarrow \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + s(t)$.

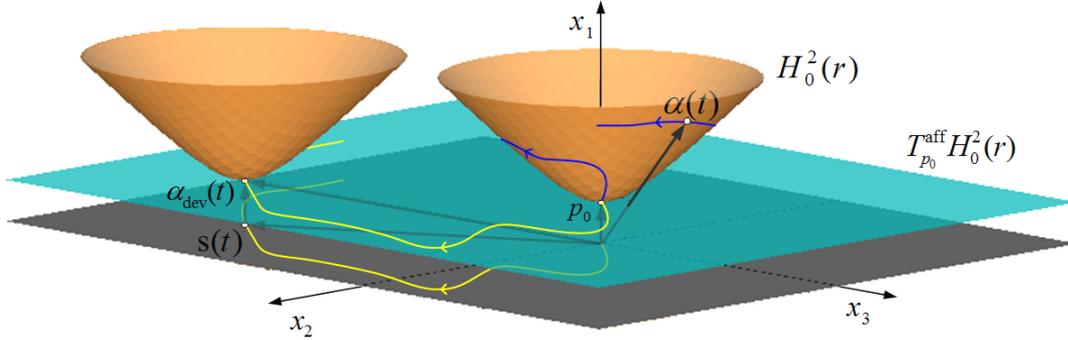


Figura 3.3: Rolamento de $H_0^2(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_0^2(r)$, com $p_0 = (r, 0, 0)$

Antes de passarmos à demonstração, observamos que a segunda equação de (3.7) faz sentido, pois a matriz $-u(t)p_0^\top + p_0u^\top(t)$ é anti-simétrica e, portanto, o seu produto por $J_{\kappa+1}$ pertence a $\mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. Notamos também que as equações (3.7) são as equações da cinemática para o rolamento.

Demonstração. A verificação das relações (2.18)-(2.20), referentes às condições de não-deslize e de não-torção, será feita nos intervalos abertos onde u é suave.

1. Confirmação da condição de rolamento.

Dado que $Rp_0 \in H_\kappa^n(r)$, $\forall R \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1)$, a curva α pertence a $H_\kappa^n(r)$. Conjuntamente, $\forall t \in [0, \tau]$, temos as alíneas que se seguem.

(a) $\alpha_{\text{dev}}(t) \in T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$. De facto:

Desde logo, a curva de desenvolvimento é definida por

$$\alpha_{\text{dev}}(t) = g(t) * \alpha(t) = R^{-1}(t)\alpha(t) + s(t) = p_0 + s(t).$$

À parte disto, com a igualdade $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$, da primeira equação da cinemática tiramos que $\dot{s}(t) \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)$, para todo t de cada intervalo aberto onde u é suave, e, por conseguinte, em virtude de $s(0) = 0 \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)$, a Proposição 3.5 garante-nos que $s(t) \in T_{p_0} H_\kappa^n(r)$, $\forall t \in [0, \tau]$. Portanto, podemos concluir o pretendido.

(b) $T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(g(t) * H_\kappa^n(r)) = T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r))$. De facto:

Em primeiro lugar, sabemos que a igualdade anterior é equivalente a $T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(g(t) * H_{\kappa}^n(r)) = T_{p_0}H_{\kappa}^n(r)$. Agora, a fim de mostrarmos esta igualdade, tomemos $v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(g(t) * H_{\kappa}^n(r))$. Então podemos afirmar que existe uma curva $\bar{t} \rightsquigarrow \gamma(\bar{t}) \in g(t) * H_{\kappa}^n(r)$ tal que $\gamma(0) = \alpha_{\text{dev}}(t)$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Consequentemente, uma vez que

$$\begin{aligned} g(t) * H_{\kappa}^n(r) &= \{R^{-1}(t)p + s(t) : p \in H_{\kappa}^n(r)\} \\ &= \{R^{-1}(t)p : p \in H_{\kappa}^n(r)\} + s(t) \\ &= H_{\kappa}^n(r) + s(t), \end{aligned}$$

$\bar{t} \rightsquigarrow \gamma^*(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) - s(t)$ é uma curva em $H_{\kappa}^n(r)$ com $\gamma^*(0) = p_0$ e $\dot{\gamma}^*(\bar{t}) = \dot{\gamma}(\bar{t})$. Deste modo, resulta que $v = \dot{\gamma}^*(0)$, o que nos permite concluir que $v \in T_{p_0}H_{\kappa}^n(r)$. A prova da outra inclusão é análoga.

2. Confirmação da condição de não-deslize.

Antes de mais, temos que

$$\begin{aligned} (\dot{g}(t) \circ g(t)^{-1})(\alpha_{\text{dev}}(t)) &= \dot{R}^{-1}(t)R^{-1-1}(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - s(t)) + \dot{s}(t) \\ &= -R^{-1}(t)\dot{R}(t)R^{-1}(t)R(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - s(t)) + \dot{s}(t) \\ &= -\left(R^{-1}(t)\dot{R}(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - s(t)) - \dot{s}(t)\right). \end{aligned}$$

Assim, a igualdade (2.18) da condição de não-deslize é equivalente a

$$R^{-1}(t)\dot{R}(t)(\alpha_{\text{dev}}(t) - s(t)) - \dot{s}(t) = 0.$$

Mas pode provar-se facilmente que esta condição se verifica. Efectivamente, atendendo a que $\alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + s(t)$ e à segunda equação da cinemática, a condição anterior é equivalente a $-u(t)p_0^\top J_{\kappa+1}p_0 + p_0u^\top(t)J_{\kappa+1}p_0 - \dot{s}(t) = 0$. Por sua vez esta equação, em virtude de $\langle p_0, p_0 \rangle = -r^2$ e $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$, é equivalente a $\dot{s}(t) = r^2u(t)$, que é a primeira equação da cinemática.

3. Confirmação da condição de não-torção.

(a) Parte tangencial. Evidentemente,

$$\begin{aligned} \dot{R}^{-1}(t)R^{-1-1}(t)v &\in \left(T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}\left(T_{p_0}^{\text{aff}}H_{\kappa}^n(r)\right)\right)^\perp, \quad \forall v \in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}\left(T_{p_0}^{\text{aff}}H_{\kappa}^n(r)\right) \\ &\quad \Updownarrow \\ R^{-1}(t)\dot{R}(t)v &\in \left(T_{p_0}H_{\kappa}^n(r)\right)^\perp, \quad \forall v \in T_{p_0}H_{\kappa}^n(r). \end{aligned}$$

Portanto, a relação (2.19) é equivalente a

$$R^{-1}(t)\dot{R}(t)(\Omega p_0) \in (T_{p_0}H_\kappa^n(r))^\perp, \quad \forall \Omega \in \mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1).$$

Para a prova desta condição, precisamos de observar previamente que se tem $p_0^\top J_{\kappa+1} \Omega p_0 = 0$, como consequência de $J_{\kappa+1} \Omega$ ser anti-simétrica. Assim resulta que

$$\begin{aligned} R^{-1}(t)\dot{R}(t)(\Omega p_0) &= (-u(t)p_0^\top + p_0u^\top(t)) J_{\kappa+1} \Omega p_0 \\ &= -u(t)p_0^\top J_{\kappa+1} \Omega p_0 + p_0u^\top(t) J_{\kappa+1} \Omega p_0 \\ &= p_0 \langle u(t), \Omega p_0 \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que a última expressão é o produto de uma função escalar por p_0 , a demonstração desta parte está completa.

- (b) Parte normal. Vamos mostrar que esta condição é automaticamente satisfeita. Analogamente à situação anterior, temos:

$$\begin{aligned} R^{-1}(t)R^{-1-1}(t)v &\in T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)), \quad \forall v \in (T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)))^\perp \\ &\quad \updownarrow \\ R^{-1}(t)\dot{R}(t)v &\in T_{p_0}H_\kappa^n(r), \quad \forall v \in (T_{p_0}H_\kappa^n(r))^\perp. \end{aligned}$$

Desta forma, a relação (2.20) é equivalente a

$$R^{-1}(t)\dot{R}(t)cp_0 \in T_{p_0}H_\kappa^n(r), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Mas esta inclusão é trivialmente verdadeira, pois $R^{-1}(t)\dot{R}(t)$ pertence a $\mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$. ■

Observação 3.4 *A justificação para termos considerado a inversa na matriz R da aplicação rolamento g prende-se somente com a nossa preocupação em uniformizarmos este trabalho com outros já existentes, nomeadamente [19] (p. 467), quando trata o rolamento da esfera Euclidiana, e [23], sobre a esfera Lorentziana. Se pretendêssemos agora que a aplicação rolamento tivesse a configuração $g(t) = (R(t), s(t))$, bastaria, evidentemente, efetuarmos a “mudança de variável” $R \rightsquigarrow R^{-1}$. As únicas alterações surgiriam na segunda equação cinemática, que passaria a ter a forma $\dot{R}(t) = (u(t)p_0^\top - p_0u^\top(t)) J_{\kappa+1} R(t)$, e na curva de rolamento, que seria dada por $\alpha(t) = R^{-1}(t)p_0$.*

Observação 3.5 *No caso particular em que $p_0 = (r, 0, \dots, 0)$, temos que ter $u(t) = \left[0 \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_{n+1}(t) \right]^\top$ e as equações da cinemática (3.7) reduzem-se a*

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = r^2 u(t) \\ \dot{R}(t) = R(t) \left(\sum_{i=2}^{\kappa+1} r u_i(t) (E_{i1} - E_{1i}) + \sum_{i=\kappa+2}^{n+1} r u_i(t) (E_{i1} + E_{1i}) \right), \end{cases}$$

sendo $E_{ij} = [e_{fl}] \in \mathfrak{gl}(n+1)$ com $e_{fl} = \begin{cases} 1 & \Leftarrow (f, l) = (i, j) \\ 0 & \Leftarrow (f, l) \neq (i, j) \end{cases}$.

3.4.2 Soluções Explícitas das Equações da Cinemática

Com o objectivo de podermos descrever as soluções das equações da cinemática e as curvas associadas ao rolamento, vamos começar por focar a nossa atenção na matriz dos coeficientes que figura na segunda equação de (3.7).

Proposição 3.9 *Consideremos um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p_0^\top J_{\kappa+1} p_0 = -r^2$ e uma curva $u(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $u(t)^\top J_{\kappa+1} p_0 = 0$. Defina-se*

$$A(t) = (-u(t) p_0^\top + p_0 u^\top(t)) J_{\kappa+1}. \quad (3.8)$$

Então para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$A^{2j-1}(t) = (r^2 u^\top(t) J_{\kappa+1} u(t))^{j-1} A(t). \quad (3.9)$$

e

$$A^{2j}(t) = (r^2 u^\top(t) J_{\kappa+1} u(t))^{j-1} A^2(t). \quad (3.10)$$

Demonstração. Uma vez que (3.10) é uma evidente consequência de (3.9), demonstraremos apenas esta igualdade. A prova será feita por indução matemática e o “passo básico” é imediato. Para simplificar a notação omitiremos a variável t em $A(t)$ e em $u(t)$ e também o índice $\kappa + 1$ na matriz $J_{\kappa+1}$. Relativamente à “tese de indução”, $A^{2j+1} = (r^2 u^\top J u)^j A$, vejamos:

$$A^{2j+1} = A^{2j-1} A^2 = (r^2 u^\top J u)^{j-1} A A^2,$$

mas AA^2 é dada por

$$\begin{aligned}
& (-up_0^\top J + p_0u^\top J) \left(\overbrace{up_0^\top Ju p_0^\top J}^0 - \overbrace{up_0^\top Jp_0 u^\top J}^{-r^2} - p_0u^\top Jup_0^\top J + \overbrace{p_0 u^\top Jp_0 u^\top J}^0 \right) \\
&= -r^2u \overbrace{p_0^\top Ju u^\top J}^0 + \overbrace{up_0^\top Jp_0 u^\top J}^{-r^2} up_0^\top J + r^2p_0u^\top Juu^\top J - p_0 \overbrace{u^\top Jp_0 u^\top J}^0 up_0^\top J \\
&= -r^2u(u^\top Ju)p_0^\top J + r^2p_0(u^\top Ju)u^\top J = r^2u^\top Ju(-up_0^\top J + p_0u^\top J) \\
&= r^2u^\top JuA.
\end{aligned}$$

Portanto o “passo indutivo” está concluído. \blacksquare

Corolário 3.1 Consideremos $p_0 \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ tal que $p_0^\top J_{\kappa+1}p_0 = -r^2$ e suponhamos que $u(t) = u \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ é um vetor constante não-nulo satisfazendo $\langle u, p_0 \rangle = 0$. Então, sendo $A = (-up_0^\top + p_0u^\top) J_{\kappa+1}$, temos:

1. Se u é tipo-tempo, ou seja, $\langle u, u \rangle = -\|u\|^2 < 0$:

$$e^{tA} = I + \frac{\sin(r\|u\|t)}{r\|u\|}A + \frac{1 - \cos(r\|u\|t)}{(r\|u\|)^2}A^2. \quad (3.11)$$

2. Se u é tipo-espaço, ou seja, $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 > 0$:

$$e^{tA} = I + \frac{\sinh(r\|u\|t)}{r\|u\|}A - \frac{1 - \cosh(r\|u\|t)}{(r\|u\|)^2}A^2. \quad (3.12)$$

3. Se u é tipo-luz, ou seja, $\langle u, u \rangle = 0$:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \quad (3.13)$$

Demonstração. Uma vez que quando $u^\top J_{\kappa+1}u = 0$ temos $A^{2j-1} = A^{2j} = 0$ para $j \geq 2$, a igualdade (3.13) é evidente. As demonstrações de (3.11) e (3.12) são inteiramente análogas, pelo que apresentaremos apenas uma delas. De facto, sendo u tipo-espaço, tem-se:

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \frac{t^5}{5!}A^5 + \dots \\
&= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}(r^2u^\top J_{\kappa+1}u)A + \frac{t^4}{4!}(r^2u^\top J_{\kappa+1}u)A^2 + \frac{t^5}{5!}(r^2u^\top J_{\kappa+1}u)^2A + \dots \\
&= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}(r\|u\|)^2A + \frac{t^4}{4!}(r\|u\|)^2A^2 + \frac{t^5}{5!}(r\|u\|)^4A + \frac{t^6}{6!}(r\|u\|)^4A^2 + \dots \\
&= I + \frac{1}{r\|u\|} \left((r\|u\|t) + \frac{(r\|u\|t)^3}{3!} + \dots \right) A + \frac{1}{(r\|u\|)^2} \left(\frac{(r\|u\|t)^2}{2!} + \frac{(r\|u\|t)^4}{4!} + \dots \right) A^2 \\
&= I + \frac{1}{r\|u\|} \sinh(r\|u\|t)A + \frac{1}{(r\|u\|)^2} (\cosh(r\|u\|t) - 1)A^2 \\
&= I + \frac{\sinh(r\|u\|t)}{r\|u\|}A - \frac{1 - \cosh(r\|u\|t)}{(r\|u\|)^2}A^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de apresentar as soluções explícitas das equações da cinemática (3.7), que satisfaçam as condições iniciais $s(0) = 0$ e $R(0) = I_{n+1}$, em dois casos especiais. Isto permitirá caracterizar também, em cada uma das situações, a correspondente aplicação rolamento $g(t) = (R^{-1}(t), s(t))$, a curva de rolamento $\alpha(t) = R(t)p_0$ e o seu desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + s(t)$.

Caso I: Nesta situação a função $u(t)$ será constante e p_0 será um ponto arbitrário.

Proposição 3.10 *Quando $u(t) = u \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ é um vetor constante não-nulo satisfazendo $\langle u, p_0 \rangle = 0$, a solução das equações da cinemática (3.7), com as condições iniciais $R(0) = I_{n+1}$ e $s(0) = 0$, é*

$$s(t) = r^2 ut, \quad R(t) = e^{tA},$$

sendo $A = (-up_0^\top + p_0u^\top) J_{\kappa+1}$.

Além disto, a curva de rolamento $\alpha(t) = R(t)p_0$ e o seu desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + s(t)$ são geodésicas em $H_\kappa^n(r)$ e $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$, respetivamente, tendo o mesmo carácter causal que o vetor u .

Demonstração. A primeira parte é óbvia. Para a segunda, vamos considerar as três situações possíveis para o carácter causal de u .

Se u é tipo-tempo, temos

$$e^{tA} p_0 = p_0 + \frac{\sin(r\|u\|t)}{r\|u\|} Ap_0 + \frac{1 - \cos(r\|u\|t)}{(r\|u\|)^2} A^2 p_0.$$

Mas, neste caso, $Ap_0 = r^2 u$ e $A^2 p_0 = -(r\|u\|)^2 p_0$, logo a curva de rolamento é

$$\alpha(t) = p_0 \cos(r\|u\|t) + \frac{ru}{\|u\|} \sin(r\|u\|t).$$

A partir de (3.4) e do Lema 1.11 é imediato que $\alpha(t)$ é uma geodésica de $H_\kappa^n(r)$. Também é evidente que a curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + r^2 ut$ é uma geodésica de $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$. Estas curvas verificam $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_{\text{dev}}(0) = r^2 u$, logo são tipo-tempo.

Se u é tipo-espaço, com um procedimento análogo ao da situação anterior podemos deduzir que

$$\alpha(t) = p_0 \cosh(r\|u\|t) + \frac{ru}{\|u\|} \sinh(r\|u\|t), \quad \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + r^2 ut,$$

e também que estas curvas são geodésicas tipo-espaço.

Se u é tipo-luz, temos

$$e^{tA}p_0 = p_0 + tAp_0 + \frac{t^2}{2}A^2p_0.$$

Mas neste caso $Ap_0 = r^2u$ e $A^2p_0 = 0$, logo a curva de rolamento e o seu desenvolvimento coincidem, tendo-se

$$\alpha(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + r^2ut.$$

A partir de (3.6) é imediato que $\alpha(t)$ é uma geodésica de $H_\kappa^n(r)$ e, evidentemente, ambas as curvas são tipo-luz. ■

Observação 3.6 De acordo com a demonstração anterior, se tomarmos um qualquer vetor constante tipo-luz $u \in T_{p_0}H_\kappa^n(r)$ e designarmos $A = (-up_0^\top + p_0u^\top) J_{\kappa+1}$, então $g(t) = (e^{-tA}, r^2ut) = (I_{n+1} - tA + \frac{t^2}{2}A^2, r^2ut)$ é uma aplicação rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)$ tal que $\alpha(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + r^2ut \in H_\kappa^n(r) \cap T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)$. Portanto, neste caso, a aplicação rolamento g move $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}}H_\kappa^n(r)$ em $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ mantendo invariante cada ponto da curva de rolamento.

Caso II: A ideia da escolha da função u que consideraremos neste segundo caso foi recolhida em [16], onde o autor mostrou que quando a esfera (Euclidiana) S^2 rola no plano tangente ao polo sul, as equações da cinemática podem ser resolvidas explicitamente se a curva de rolamento for uma circunferência. Em [37] foi ainda feita uma generalização para a esfera S^n do caso estudado em [16].

Nesta situação vamos considerar $p_0 = (r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Consequentemente, teremos $u(t) = (0, u_2(t), \dots, u_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $s(t) = (0, s_2(t), \dots, s_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Contudo, sempre que for apropriado, identificaremos $u(t)$ com $(u_2(t), \dots, u_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}^n$ e $s(t)$ com $(s_2(t), \dots, s_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.11 Quando $u(t) = e^{-tB}Bc$, com $B \in \mathfrak{so}_\kappa(n)$ e $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, a solução das equações da cinemática (3.7), com as condições iniciais $R(0) = I_{n+1}$ e $s(0) = 0$, é

$$s(t) = r^2(I_n - e^{-tB})c, \quad R(t) = e^{t\tilde{A}}Q(t),$$

$$\text{sendo } \tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & (rBc)^\top \\ \hline -rBc & 0 \end{array} \right] J_{\kappa+1} - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right] \text{ e } Q(t) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & e^{tB} \end{array} \right].$$

Demonstração. A expressão de $s(t)$ resulta facilmente da primeira equação da cinemática e da condição inicial $s(0) = 0$.

Para podermos resolver a segunda equação da cinemática, $\dot{R}(t) = R(t)A(t)$, vamos considerar a mudança de variável $R \rightsquigarrow \tilde{R}$ definida por $R(t) = \tilde{R}(t)Q(t)$. Após a substituição obtemos

$$\dot{\tilde{R}}(t) = \tilde{R}(t) \left(Q(t)A(t)Q^{-1}(t) - \dot{Q}(t)Q^{-1}(t) \right). \quad (3.14)$$

Mas

$$\dot{Q}(t)Q^{-1}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Be^{tB} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & e^{-tB} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

e

$$\begin{aligned} Q(t)A(t)Q^{-1}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & e^{tB} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & (re^{-tB}Bc)^\top \\ \hline -re^{-tB}Bc & 0 \end{array} \right] J_{\kappa+1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & J_\kappa(e^{tB})^\top J_\kappa \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & r(Bc)^\top(e^{-tB})^\top \\ \hline -rBc & 0 \end{array} \right] J_{\kappa+1} J_{\kappa+1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (e^{tB})^\top \end{array} \right] J_{\kappa+1} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & (rBc)^\top \\ \hline -rBc & 0 \end{array} \right] J_{\kappa+1}, \end{aligned}$$

portanto a equação (3.14) reduz-se a $\dot{\tilde{R}}(t) = \tilde{R}(t)\tilde{A}$. Sendo esta equação uma equação diferencial em $SO_{\kappa+1}(n+1)$ com \tilde{A} constante e pertencente à álgebra de Lie $\mathfrak{so}_{\kappa+1}(n+1)$, a sua solução que satisfaz $\tilde{R}(0) = I_{n+1}$ é $\tilde{R}(t) = e^{t\tilde{A}}$. Assim, podemos concluir que $R(t) = e^{t\tilde{A}}Q(t)$. ■

Observação 3.7 No caso II, tem-se $\langle s(t) - r^2c, s(t) - r^2c \rangle = \langle r^2c, r^2c \rangle$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar em \mathbb{R}_κ^n , uma vez que $e^{-tB} \in SO_\kappa^1(n)$. Consequentemente:

1. Se c é tipo-luz, $s(t)$ está no pseudo-cone de \mathbb{R}_κ^n com centro em r^2c .¹
2. Se c é tipo-tempo, $s(t)$ está no espaço pseudo-hiperbólico de \mathbb{R}_κ^n com centro em r^2c e raio $\|r^2c\|$.
3. Se c é tipo-espaço, $s(t)$ está na pseudo-esfera de \mathbb{R}_κ^n com centro no ponto r^2c e raio $\|r^2c\|$.

Desta forma, em particular, tem-se que $H_0^2(r)$ (folha superior do hiperboloide de duas folhas) e $H_2^2(r)$ (superfície esférica) rolam sobre uma circunferência, enquanto que $H_1^2(r)$ (hiperboloide de uma folha) rola ou sobre uma reta ou sobre uma hipérbole. (Ver a tabela 3.2 e a figura 3.4)

¹O pseudo-cone em \mathbb{R}_κ^n com centro c é definido por $C_\kappa^n(c) := \{p \in \mathbb{R}_\kappa^n : \langle p - c, p - c \rangle = 0\}$.

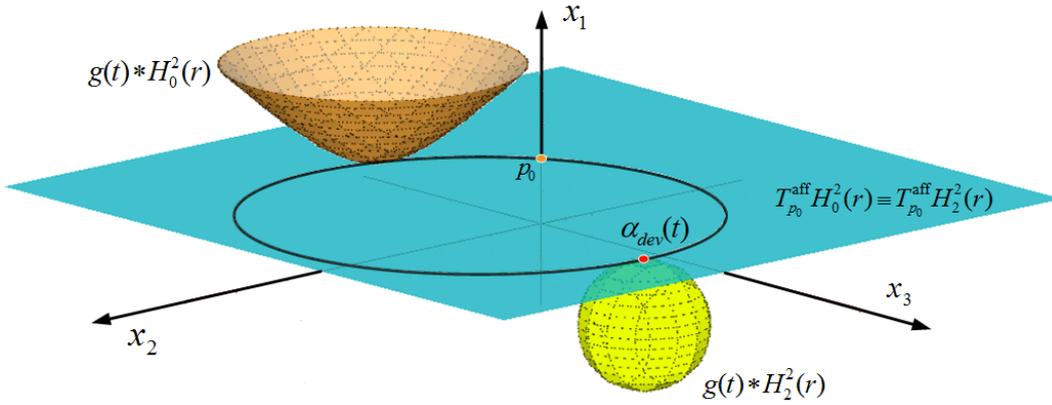


Figura 3.4: Rolamento de $H_0^2(1)$ e de $H_2^2(1)$.

Hiperquádrica	Curva $t \rightsquigarrow s(t)$, no plano x_2ox_3 , sendo $c = (c_1, c_2)$
$H_0^2(1)$	$(x_2 - c_1)^2 + (x_3 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2$
$H_1^2(1)$	$x_3 = \pm x_2 + (c_2 \mp c_1)$ se $c_1 = \pm c_2$ $(x_2 - c_1)^2 - (x_3 - c_2)^2 = c_1^2 - c_2^2$ se $c_1 \neq \pm c_2$
$H_2^2(1)$	$(x_2 - c_1)^2 + (x_3 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2$

Tabela 3.2: Equações de $s(t)$ quando $p_0 = (1, 0, 0)$ e $u(t) = e^{-tB}Bc$.

3.5 Rolamento dum Espaço Pseudo-Hiperbólico não Centrado na Origem

Na secção anterior ocupámo-nos com o rolamento de $H_\kappa^n(r)$, que é uma hiperquádrica “centrada” na origem, sobre o espaço afim a um seu espaço tangente. Pretendemos agora alargar este rolamento para a situação mais geral em que o centro pode ser qualquer outro ponto.

O *espaço pseudo-hiperbólico de raio $r > 0$ e centro c em $\mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$* é a subvariedade pseudo-Riemanniana de dimensão n e índice κ definida por

$$H_\kappa^n(r, c) = \{p \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1} : \langle p - c, p - c \rangle = -r^2\}.$$

À semelhança do que foi feito para $H_0^n(r)$, assumiremos $H_0^n(r, c)$ como sendo a correspondente folha superior. Uma vez que $H_\kappa^n(r, c) = H_\kappa^n(r) + c$, ou seja, $H_\kappa^n(r, c)$ é uma translação de $H_\kappa^n(r)$, a análise do rolamento de $H_\kappa^n(r, c)$ sobre o espaço afim ao espaço tangente num qualquer seu ponto pode ser facilmente feita a partir do Teorema 3.1 com recurso à Proposição 2.6.

Efetivamente, tomando-se a isometria $\phi = (I_{n+1}, c)$ a Proposição 2.6 garante

que se $g(t) = (R^{-1}(t), s(t))$ é uma aplicação rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{q_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$, com curva de rolamento α e curva de desenvolvimento α_{dev} , então

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= \left(\tilde{R}^{-1}(t), \tilde{s}(t) \right) \\ &= \phi \circ g(t) \circ \phi^{-1} \\ &= (R^{-1}(t), -R^{-1}(t)c + s(t) + c)\end{aligned}$$

é uma aplicação rolamento de $H_\kappa^n(r, c)$ sobre $\phi(T_{q_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)) = T_{q_0+c}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r, c)$, com curva de rolamento $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + c$ e curva de desenvolvimento $\tilde{\alpha}_{\text{dev}}(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) + c$.

Desta forma, se fixarmos um ponto $q_0 \in H_\kappa^n(r)$ e uma aplicação seccionalmente suave $t \rightsquigarrow u(t) \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ tal que $\langle u(t), q_0 \rangle = 0$ (função de controlo), por aplicação do Teorema 3.1 fica determinada também uma aplicação rolamento $\tilde{g}(t) = \left(\tilde{R}^{-1}(t), \tilde{s}(t) \right)$ de $H_\kappa^n(r, c)$ sobre $T_{q_0+c}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r, c)$, satisfazendo a condição inicial $(\tilde{R}(0), \tilde{s}(0)) = (I_{n+1}, 0)$. As equações da cinemática correspondentes a este rolamento deduzem-se imediatamente das equações (3.7) e podem escrever-se na forma seguinte:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}(t) = (-u(t)q_0^\top + q_0u^\top(t)) J_{\kappa+1} \tilde{R}^{-1}(t)c + r^2u(t) \\ \dot{\tilde{R}}(t) = \tilde{R}(t) (-u(t)q_0^\top + q_0u^\top(t)) J_{\kappa+1} \end{cases}$$

Além disto, as curvas de rolamento e de desenvolvimento são $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{R}(t)q_0 + c$ e $\tilde{\alpha}_{\text{dev}}(t) = q_0 + \tilde{s}(t) + \tilde{R}^{-1}(t)c$, respetivamente.

3.6 Rolamento dum Espaço Pseudo-Hiperbólico Sobre Outro

O nosso objetivo nesta secção é descrever o rolamento, em $\overline{M} = \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$, de um espaço pseudo-hiperbólico (centrado na origem) sobre outro espaço pseudo-hiperbólico (não centrado na origem) tangente ao primeiro. Empregaremos aqui uma argumentação análoga aquela que aparece em [26] para o rolamento de uma esfera (Euclidiana) sobre outra, implementando o raciocínio que referimos na Observação 2.3. Ou seja, alcançaremos o nosso objectivo à custa das equações da cinemática para o rolamento de tais subvariedades sobre o espaço afim a um espaço tangente, juntamente com as propriedades de simetria e transitividade contidas na Secção 2.6.

Com $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, considere-se $p_0 = (r_1, 0, \dots, 0), q_0 = (r_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ e seja $\eta = p_0 - q_0$. Denote-se $M_1 = H_\kappa^n(r_1)$, $N = T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r_1)$ e $M_2 = H_\kappa^n(r_2, \eta)$.

Uma vez que $T_{p_0}H_\kappa^n(r_2, \eta) = T_{q_0}H_\kappa^n(r_2) = T_{p_0}H_\kappa^n(r_1)$, evidentemente o espaço afim ao espaço tangente a M_2 em p_0 coincide com N .

Sabemos explicitamente como rolar M_1 e M_2 sobre N . Consequentemente, por simetria (Proposição 2.5), conhecemos também como rolar N sobre M_2 . Portanto, por transitividade (Proposição 2.4), conseguiremos descrever o rolamento de M_1 sobre M_2 .

Relativamente ao rolamento de M_1 sobre N , sabemos que após ter sido fixada uma aplicação seccionalmente suave $t \rightsquigarrow u(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$, se $R_1(t)$ e $s_1(t)$ constituem a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = r_1^2 u(t) \\ \dot{R}_1(t) = R_1(t) (-u(t)p_0^\top + p_0 u^\top(t)) J_{\kappa+1} \end{cases}; \quad R_1(0) = I_{n+1}, \quad s_1(0) = 0,$$

então $g_1(t) = (R_1^{-1}(t), s_1(t))$ é uma aplicação rolamento com curva de rolamento $\alpha_1(t) = R_1(t)p_0$ e curva de rolamento $\alpha_{1_{\text{dev}}}(t) = p_0 + s_1(t)$.

Relativamente ao rolamento de M_2 sobre N , sabemos que a partir da escolha duma aplicação seccionalmente suave $t \rightsquigarrow \hat{u}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle \hat{u}(t), q_0 \rangle = 0$, se $R_2(t)$ e $s_2(t)$ formam a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{s}_2(t) = (-\hat{u}(t)q_0^\top + q_0 \hat{u}^\top(t)) J_{\kappa+1} R_2^{-1}(t) \eta + r_2^2 \hat{u}(t) \\ \dot{R}_2(t) = R_2(t) (-\hat{u}(t)q_0^\top + q_0 \hat{u}^\top(t)) J_{\kappa+1} \end{cases}; \quad R_2(0) = I_{n+1}, \quad s_2(0) = 0,$$

então $g_2(t) = (R_2^{-1}(t), s_2(t))$ é uma aplicação rolamento com curva de rolamento $\alpha_2(t) = R_2(t)q_0 + \eta$ e curva de desenvolvimento $\alpha_{2_{\text{dev}}}(t) = q_0 + s_2(t) + R_2^{-1}(t)\eta$. Logo a Proposição 2.5 garante que $g_2^{-1}(t) = (R_2^{-1}(t), s_2(t))^{-1} = (R_2(t), -R_2(t)s_2(t))$ é uma aplicação rolamento de N sobre M_2 , com curva de rolamento $\alpha_{2_{\text{dev}}}$ e curva de desenvolvimento α_2 .

Assim, sob a condição das funções u e \hat{u} serem tais que $\alpha_{1_{\text{dev}}} = \alpha_{2_{\text{dev}}}$, com as aplicações rolamento g_1 e g_2 anteriores, a Proposição 2.4 permite-nos concluir que

$$\begin{aligned} g_3(t) &= g_2^{-1}(t) \circ g_1(t) \\ &= (R_2(t)R_1^{-1}(t), R_2(t)(s_1(t) - s_2(t))) \end{aligned}$$

é uma aplicação rolamento de M_1 sobre M_2 , tendo a curva de rolamento α_1 e a curva de desenvolvimento α_2 . A fim de podermos estabelecer as equações da cinemática para este rolamento, precisamos ainda de ver a relação que deve se cumprida entre $u(t)$ e $\hat{u}(t)$ para que se verifique $\alpha_{1_{\text{dev}}}(t) = \alpha_{2_{\text{dev}}}(t)$. Mas com cálculos diretos sobre as condições assumidas, podemos deduzir as seguintes equi-

valências:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1_{\text{dev}}}(t) &= \alpha_{2_{\text{dev}}}(t) \\
\Leftrightarrow s_2(t) - s_1(t) &= \eta - R_2^{-1}(t)\eta \\
\Leftrightarrow \dot{s}_2(t) - \dot{s}_1(t) &= R_2^{-1}(t)\dot{R}_2(t)R_2^{-1}(t)\eta \\
\Leftrightarrow r_2^2\hat{u}(t) &= r_1^2u(t).
\end{aligned}$$

Em conclusão, tendo ainda em conta a estrutura particular do ponto p_0 e o facto $q_0 = \frac{r_2}{r_1}p_0$, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, $p_0 = (r_1, 0, \dots, 0)$, $q_0 = (r_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ e $\eta = p_0 - q_0$. Seja $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow u(t) = (0, u_2(t), \dots, u_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação seccionalmente suave e defina-se*

$$U(t) = \sum_{i=2}^{\kappa+1} u_i(t)(E_{i1} - E_{1i}) + \sum_{i=\kappa+2}^{n+1} u_i(t)(E_{i1} + E_{1i}),$$

onde E_{ij} denota a matriz de ordem $n+1$ com a entrada (i, j) igual a 1 e as restantes todas nulas. Se $(R_1(t), R_2(t), s_1(t), s_2(t))$ constitui a curva-solução de

$$\begin{cases}
\dot{s}_1(t) = r_1^2 u(t) \\
\dot{s}_2(t) = \frac{r_1^2}{r_2} U(t) R_2^{-1}(t) \eta + r_1^2 u(t) \\
\dot{R}_1(t) = r_1 R_1(t) U(t) \\
\dot{R}_2(t) = \frac{r_1^2}{r_2} R_2(t) U(t)
\end{cases} \quad (3.15)$$

que verifica a condição inicial $(R_1(0), R_2(0), s_1(0), s_2(0)) = (I_{n+1}, I_{n+1}, 0, 0)$, então $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (R_2(t)R_1^{-1}(t), R_2(t)(s_1(t) - s_2(t))) \in \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação rolamento de $H_{\kappa}^n(r_1)$ sobre $H_{\kappa}^n(r_2, \eta)$, sem deslize nem torção, correspondendo-lhe a curva de rolamento $\alpha(t) = R_1(t)p_0$ e a curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = R_2(t)q_0 + \eta$. (Ver a figura 3.5).

3.7 Rolamento da Pseudo-Esfera $S_{\kappa}^n(r)$ a Partir do Rolamento de $H_{n-\kappa}^n(r)$

No que se segue vamos abordar o rolamento de pseudo-esferas, utilizando o conhecimento disponível para o rolamento de espaços pseudo-hiperbólicos. A ideia

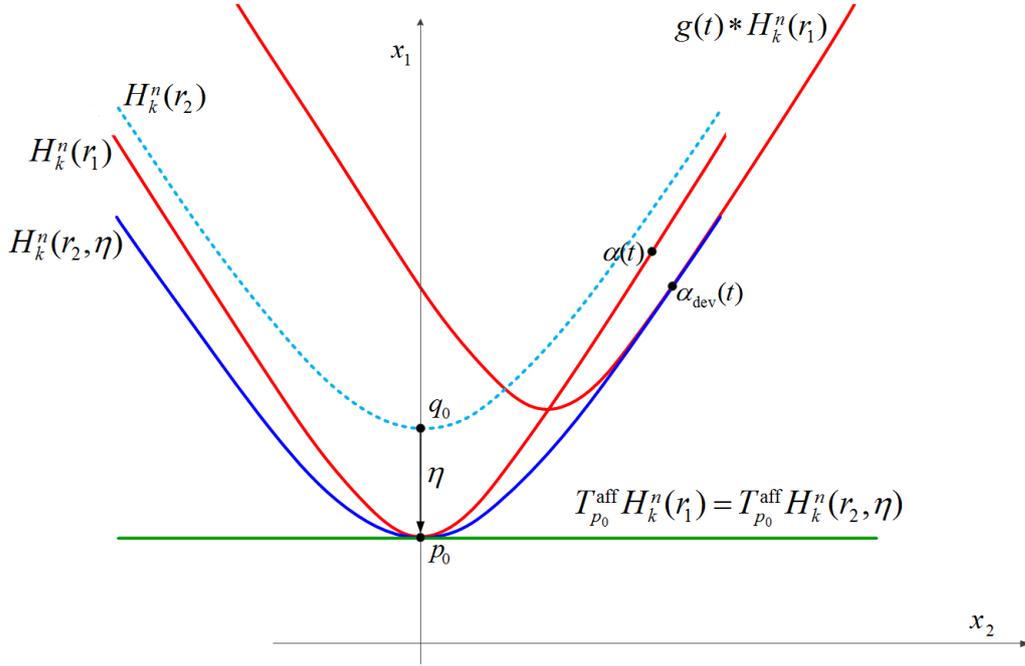


Figura 3.5: Rolamento de $H_\kappa^n(r_1)$ sobre $H_\kappa^n(r_2, \eta)$, quando $n = 1$ e $\kappa = 0$.

fundamental passa pela introdução duma transformação anti-isométrica que possibilitará uma ligação entre os rolamentos das duas hiperquádricas.

Ao longo desta secção $\phi : \mathbb{R}_{n-\kappa+1}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_\kappa^{n+1}$ vai designar a aplicação definida por

$$\phi(x) = Qx, \quad \text{com } Q = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_\kappa \\ \hline I_{n-\kappa+1} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.16)$$

Explicitamente $\phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_{n-\kappa+2}, \dots, x_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-\kappa+1})$, portanto é imediata a confirmação da igualdade

$$\langle \phi(x), \phi(x) \rangle_{J_\kappa} = - \sum_{i=n-\kappa+2}^{n+1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-\kappa+1} x_i^2 = -\langle x, x \rangle_{J_{n-\kappa+1}}.$$

Em consequência desta fórmula, resulta que ϕ é uma anti-isometria e também que $\phi(H_{n-\kappa}^n(r)) = S_\kappa^n(r)$. Ou seja, ϕ transforma anti-isometricamente o espaço pseudo-hiperbólico $H_{n-\kappa}^n(r)$ na pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$. (Ver a figura 3.6).

A transformação ϕ constitui uma via que, grosso modo, nos permite transferir grande parte conhecimento geométrico sobre espaços pseudo-hiperbólicos para o estudo correspondente com pseudo-esferas. Isto resulta da circunstância de ϕ ser uma homotetia. De facto, uma vez que as homotetias preservam conexões de Levi-Civita, elas preservam todas as noções geométricas que dependem unicamente da

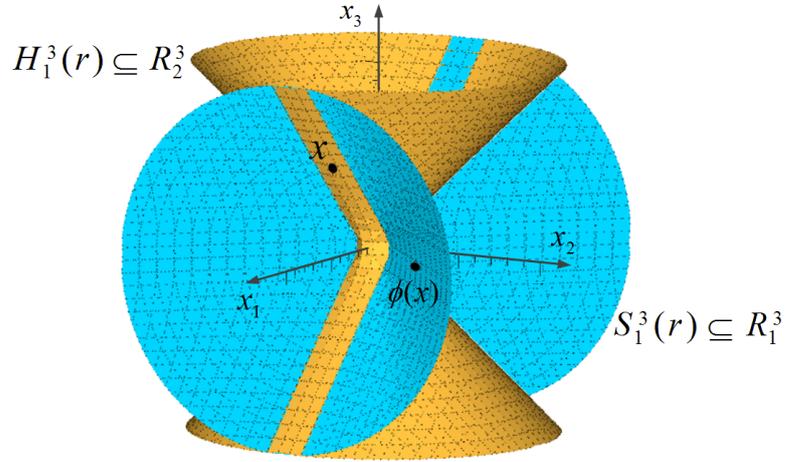


Figura 3.6: Transformação de $H_{n-\kappa}^n(r)$ em $S_\kappa^n(r)$, quando $n = 2$ e $\kappa = 1$.

conexão de Levi-Civita, tais como geodésicas e transporte paralelo. No entanto, sendo ϕ uma homotetia de coeficiente negativo, evidentemente o carácter causal é invertido, isto é: v é tipo-tempo $\Rightarrow d\phi(v)$ é tipo-espaço, v é tipo-espaço $\Rightarrow d\phi(v)$ é tipo-tempo (verificando-se ainda: v é tipo-luz $\Rightarrow d\phi(v)$ é tipo-luz). Em particular, as equações das geodésicas de $S_\kappa^n(r)$, com um ponto e um vetor velocidade iniciais previamente estabelecidos, podem ser prontamente escritas a partir da Proposição 3.7, tendo-se o seguinte:

Proposição 3.12 *Sejam $p_0 \in S_\kappa^n(r)$ e $v \in T_{p_0}S_\kappa^n(r)$. Então:*

1. *Se v é um vetor tipo-tempo e $\|v\| = r$, a curva $\gamma(t) = p_0 \cosh(t) + v \sinh(t)$ é a única geodésica tipo-tempo em $S_\kappa^n(r)$ que parte de p_0 com velocidade v .*
2. *Se v é um vetor tipo-espaço e $\|v\| = r$, a curva $\gamma(t) = p_0 \cos(t) + v \sin(t)$ é a única geodésica tipo-espaço em $S_\kappa^n(r)$ que parte de p_0 com velocidade v .*
3. *Se v é um vetor tipo-luz, a curva $\gamma(t) = p_0 + vt$ é a única geodésica tipo-luz em $S_\kappa^n(r)$ que parte de p_0 com velocidade v .*

Tal como no caso do espaço pseudo-hiperbólico, para além do rolamento de $S_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim ao espaço tangente num ponto, naturalmente faz também sentido o rolamento com uma pseudo-esfera não centrada na origem e o rolamento duma pseudo-esfera sobre outra. Contudo aqui só nos vamos preocupar com o primeiro rolamento, uma vez que os outros podem claramente ser obtidos a partir deste com o raciocínio exposto para $H_\kappa^n(r)$.

Tomando-se um ponto $q_0 \in H_{n-\kappa}^n(r)$ e uma aplicação seccionalmente suave $t \rightsquigarrow \tilde{u}(t) \in \mathbb{R}_{n-\kappa+1}^{n+1}$ tal que $\langle \tilde{u}(t), q_0 \rangle = 0$, pelo Teorema 3.1 sabemos que se $\tilde{R}(t)$ e $\tilde{s}(t)$ formam a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}(t) = r^2 \tilde{u}(t) \\ \dot{\tilde{R}}(t) = \tilde{R}(t) (-\tilde{u}(t)q_0^\top + q_0 \tilde{u}^\top(t)) J_{n-\kappa+1} \end{cases}; \quad \tilde{R}(0) = I_{n+1}, \quad \tilde{s}(0) = 0, \quad (3.17)$$

então $\tilde{g}(t) = (\tilde{R}^{-1}(t), \tilde{s}(t))$ é uma aplicação rolamento $H_{n-\kappa}^n(r)$ sobre $T_{q_0}^{\text{aff}} H_{n-\kappa}^n(r)$, tendo como curva de rolamento $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{R}(t)q_0$ e como curva de desenvolvimento $\tilde{\alpha}_{\text{dev}}(t) = q_0 + \tilde{s}(t)$. Portanto a Proposição 2.6 permite-nos concluir que

$$g(t) = (R^{-1}(t), s(t)) = \left(Q\tilde{R}^{-1}(t)Q^{-1}, Q\tilde{s}(t) \right) \quad (3.18)$$

é uma aplicação rolamento de $S_\kappa^n(r)$ sobre $\phi(T_{q_0}^{\text{aff}} H_{n-\kappa}^n(r)) = T_{Qq_0}^{\text{aff}} S_\kappa^n(r)$, com a curva de rolamento $\alpha(t) = Q\tilde{\alpha}(t) = R(t)Qq_0$ e a curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = Q\tilde{\alpha}_{\text{dev}}(t) = Qq_0 + s(t)$.

Em relação às equações da cinemática deste rolamento, a partir de (3.17) e (3.18) obtemos:

$$\dot{s}(t) = Q\dot{\tilde{s}}(t) = r^2 Q\tilde{u}(t)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= Q\dot{\tilde{R}}(t)Q^{-1} \\ &= R(t)Q(-\tilde{u}(t)q_0^\top + q_0 \tilde{u}^\top(t)) J_{n-\kappa+1} Q^{-1} \\ &= R(t)(-Q\tilde{u}(t)q_0^\top Q^{-1} + Qq_0 \tilde{u}^\top(t)Q^{-1}) Q J_{n-\kappa+1} Q^{-1} \\ &= R(t)(-Q\tilde{u}(t)(Qq_0)^\top + Qq_0(Q\tilde{u}(t))^\top) (-J_\kappa). \end{aligned}$$

Portanto, se definirmos $p_0 = Qq_0$ e $u(t) = Q\tilde{u}(t)$, as expressões das velocidades de s e R podem ser escritas tal como constam no sistema (3.19) abaixo.

Observamos ainda que $\langle \tilde{u}(t), q_0 \rangle = 0$ em $\mathbb{R}_{n-\kappa+1}^{n+1}$ se e só se $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$ em \mathbb{R}_κ^{n+1} , pois $\langle u(t), p_0 \rangle_{J_\kappa} = \langle \phi(\tilde{u}(t)), \phi(q_0) \rangle_{J_\kappa} = -\langle \tilde{u}(t), q_0 \rangle_{J_{n-\kappa+1}}$.

Em suma, temos o seguinte:

Teorema 3.3 *Consideremos arbitrariamente $p_0 \in S_\kappa^n(r)$ e uma aplicação seccionalmente suave $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow u(t) \in \mathbb{R}_\kappa^{n+1}$ tal que $\langle u(t), p_0 \rangle = 0$. Se $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow (R(t), s(t)) \in \text{SO}_\kappa^I(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$ é a curva seccionalmente suave que em cada intervalo aberto onde u é suave verifica o sistema*

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = r^2 u(t) \\ \dot{R}(t) = R(t)(u(t)p_0^\top - p_0 u^\top(t)) J_\kappa \end{cases} \quad (3.19)$$

e satisfaz a condição inicial $(R(0), s(0)) = (I_{n+1}, 0)$, então $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (R^{-1}(t), s(t)) \in \text{SO}_{\kappa}^{\text{I}}(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação rolamento de $S_{\kappa}^n(r)$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente em p_0 , sem deslize nem torção, tendo a curva de rolamento $\alpha(t) = R(t)p_0$ e a curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + s(t)$.

Este teorema está de acordo com Teorema 4.1 em [23], referente ao rolamento da esfera Lorentziana $S_1^n(1)$.

Capítulo 4

Rolamento de Grupos de Lie Quadráticos

No que se segue J , G_J e \overline{G}_J^I terão as mesmas condições que na Secção 2.5, relativa aos rolamentos em $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Portanto G_J representará o grupo de Lie quadrático associado à matriz J , \overline{G}_J^I representará um subgrupo conexo das isometrias de \overline{M} que preservam a orientação e Φ_J representará a métrica pseudo-Riemanniana que a cada $P \in \mathfrak{gl}(n)$ associa o produto escalar em $T_P \mathfrak{gl}(n) \cong \mathfrak{gl}(n)$ definido por $\langle A, B \rangle_J = \text{tr}(J^\top A^\top J B)$.

Analisaremos aqui o caso do rolamento, sem deslize nem torção, de $M_1 = G_J$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente num (qualquer) ponto $P_0 \in G_J$, que se define por $M_2 = T_{P_0}^{\text{aff}} G_J := \{P_0 + v : v \in T_{P_0} G_J\}$. Seguindo o raciocínio feito em Crouch *et al.* [6] para os grupos pseudo-ortogonais, estudaremos este rolamento de forma que a estrutura das matrizes envolvidas seja preservada. Já observamos anteriormente que uma abordagem alternativa, para cada grupo G_J , passaria por mergulharmos isometricamente G_J e $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$ numa variedade pseudo-Riemanniana $\mathbb{R}_\kappa^{n^2}$. No entanto, não teremos interesse em tal perspectiva porque isso destruiria a estrutura matricial das variedades envolvidas.

Embora estes rolamentos tenham *à priori* uma vocação mais abstrata por não se poderem visualizar geometricamente, ainda assim eles têm interesse prático, como se verá no capítulo final.

Os resultados principais do presente capítulo estão parcialmente publicados em Marques *et al.* [33].

4.1 Resultados Preliminares

Vamos começar por verificar que G_J , e por consequência também $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$, é efetivamente uma subvariedade pseudo-Riemanniana de \overline{M} , conforme se requer na definição de rolamento. Isto envolve o espaço tangente a G_J num ponto arbitrário X , que pode ser caracterizado como o subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(n)$ dado por

$$T_X G_J = \{X\Psi : \Psi \in \mathcal{L}(G_J)\} = \{\Psi X : \Psi \in \mathcal{L}(G_J)\}, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L}(G_J)$ é a álgebra de Lie do grupo G_J . Repare-se ainda que em virtude de termos

$$T_Q (T_{P_0}^{\text{aff}} G_J) = T_{P_0} G_J, \quad \forall Q \in T_{P_0}^{\text{aff}} G_J,$$

as duas subvariedades cumprem também, evidentemente, o requisito de possuírem igual dimensão e índice.

Proposição 4.1 *O grupo de Lie quadrático G_J é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$.*

Demonstração. Sabemos que é suficiente mostrar que a restrição do produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ a cada espaço tangente a G_J é uma forma não-degenerada, e que o índice dos espaços $T_X G_J$ é o mesmo para cada $X \in G_J$.

Para verificarmos a primeira das condições, seja $X \in G_J$ arbitrária. Uma vez que $T_X G_J = \{AX : A \in \mathcal{L}(G_J)\}$ e $\langle AX, BX \rangle_J = \langle A, B \rangle_J$, está em causa provarmos, com $A \in \mathcal{L}(G_J)$,

$$\langle A, B \rangle_J = 0, \quad \forall B \in \mathcal{L}(G_J) \implies A = 0.$$

Consideremos então que se verifica o antecedente da implicação. Antes de tudo mais, $\langle A, B \rangle_J = \langle AJ, JB \rangle = \langle J^\top AJ, B \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de Frobenius. Deste modo, resulta $\langle J^\top AJ, B \rangle = 0, \forall B \in \mathcal{L}(G_J)$. Mas, dado que a restrição dum qualquer produto interno a um subespaço é ainda um produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada em $\mathcal{L}(G_J)$. Assim, em virtude de $J^\top AJ \in \mathcal{L}(G_J)$, temos $J^\top AJ = 0$. Podemos pois concluir que $A = 0$.

Relativamente à segunda condição a verificar, uma vez que, $\forall X \in G_J$, o conjunto $\{XV_i : i = 1, \dots, \dim(G_J)\}$ é uma base ortonormada de $T_X G_J$ sempre que $\{V_i : i = 1, \dots, \dim(\mathcal{L}(G_J))\}$ é uma base ortonormada de $\mathcal{L}(G_J)$, é imediato que o número de sinais negativos na correspondente assinatura da restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ a cada $T_X G_J$ coincide com o índice de $\mathcal{L}(G_J)$. Logo, todos os espaços tangentes $T_X G_J$ têm o mesmo índice. ■

Embora não possamos visualizar geometricamente o presente rolamento, uma questão natural que se mantém consiste em saber-se qual o contacto entre as sub-variedades envolvidas. Com este sentido, na proposição seguinte vamos apresentar a interseção de G_J com $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$.

Proposição 4.2 *Para qualquer $P_0 \in G_J$, temos*

$$G_J \cap T_{P_0}^{\text{aff}} G_J = \{P_0 + \Psi P_0 : \Psi \in \mathcal{L}(G_J), \Psi^2 = 0\}.$$

Demonstração. Consideremos $X \in T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$ arbitrária. Então $X = P_0 + \Psi P_0$, para alguma matriz $\Psi \in \mathcal{L}(G_J)$. Assim, uma vez que $P_0^\top J P_0 = J$ e $\Psi^\top J = -J\Psi$, temos

$$X \in G_J \Leftrightarrow (P_0^\top + P_0^\top \Psi^\top) J (P_0 + \Psi P_0) = J \Leftrightarrow \Psi^2 = 0,$$

o que nos permite inferir a igualdade em apreciação. ■

A proposição anterior é uma generalização para qualquer grupo de Lie quadrático da correspondente propriedade contida em [6], referente ao caso do rolamento de $\text{SO}_\kappa^\perp(n)$. Assumindo $\kappa \geq 1$, nesse artigo os autores mostraram também que tal interseção é formada apenas pelo ponto P_0 se e somente se $\kappa = 1$. Podemos ainda afirmar que no caso do grupo simplético $G_J = \text{Sp}(2m)$, independentemente de $m \in \mathbb{N}$, tem-se $G_J \cap T_{P_0}^{\text{aff}} G_J \neq \{P_0\}$. De facto, existem sempre matrizes não-nulas

$\Psi \in \mathcal{L}(G_J) = \mathfrak{sp}(2m)$ tais que $\Psi^2 = 0$, sendo um exemplo $\Psi = \left[\begin{array}{c|c} I_m & I_m \\ \hline -I_m & -I_m \end{array} \right]$.

Antes de finalizarmos esta secção precisamos ainda de caracterizar o complemento ortogonal de $T_X G_J$.

Proposição 4.3 *Para qualquer $X \in G_J$, temos:*

$$(T_X G_J)^\perp = \{X\Upsilon : \Upsilon \in \mathcal{E}_J\} = \{\Upsilon X : \Upsilon \in \mathcal{E}_J\}, \quad (4.2)$$

onde

$$\mathcal{E}_J := \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A^\top J = JA\}^1. \quad (4.3)$$

Demonstração. A demonstração será suportada pelo seguinte resultado auxiliar:

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{L}(G_J)^\perp. \quad (4.4)$$

Para verificarmos esta igualdade, necessitamos de observar previamente que se $\Psi \in \mathcal{L}(G_J)$ então com cada $\Upsilon \in \mathfrak{gl}(n)$ temos

$$\langle \Upsilon, \Psi \rangle_J = \langle \Upsilon^\top, \Psi^\top \rangle_J = \langle J\Upsilon^\top, J\Psi^\top \rangle_J = \langle J\Upsilon^\top, -\Psi J \rangle_J = -\langle J\Upsilon^\top J^\top, \Psi \rangle_J.$$

¹A condição $A^\top J = JA$ é equivalente a $JA^\top = AJ$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon, \Psi \rangle_J = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J) &\Leftrightarrow \langle \Upsilon, \Psi \rangle_J = \langle J\Upsilon^\top J^\top, \Psi \rangle_J, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J) \\
&\Leftrightarrow \langle \Upsilon - J\Upsilon^\top J^\top, \Psi \rangle_J = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J) \\
&\Leftrightarrow \Upsilon - J\Upsilon^\top J^\top = 0 \quad (\mathcal{L}(G_J) \text{ é não-degenerado}) \\
&\Leftrightarrow \Upsilon^\top J = J\Upsilon,
\end{aligned}$$

pelo que $\Upsilon \in \mathcal{L}(G_J)^\perp$ se e só se $\Upsilon \in \mathcal{E}_J$, como queríamos mostrar.

Estamos agora em condições de exhibir a prova pretendida. De facto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
A \in (T_X G_J)^\perp &\Leftrightarrow \langle A, X\Psi \rangle_J = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J) \\
&\Leftrightarrow \langle X^{-1}A, \Psi \rangle_J = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J) \quad (\text{em virtude de } X \in G_J) \\
&\Leftrightarrow X^{-1}A \in \mathcal{E}_J \\
&\Leftrightarrow A = X\Upsilon, \text{ com } \Upsilon \in \mathcal{E}_J,
\end{aligned}$$

portanto está garantida a primeira igualdade de (4.2). A dedução da outra igualdade é feita com as óbvias adaptações. ■

Observação 4.1 De (1.6) e (4.4) resulta imediatamente a igualdade

$$\mathfrak{gl}(n) = \mathcal{L}(G_J) \oplus \mathcal{E}_J. \quad (4.5)$$

4.2 Equações da Cinemática

Nesta secção exibiremos as equações da cinemática do rolamento dum arbitrário grupo de Lie quadrático G_J sobre o espaço afim a um seu qualquer espaço tangente.

Vamos começar por apresentar uma caracterização dos requisitos que cada aplicação com a forma (2.21) deve cumprir neste caso particular para que seja verificada a condição de não-torção. Assumiremos fixada a seguinte notação:

$$\Omega_U(t) := \dot{U}(t)U^{-1}(t) \quad \text{e} \quad \Omega_W(t) := \dot{W}(t)W^{-1}(t).$$

Proposição 4.4 No rolamento de G_J sobre $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$ tem-se o seguinte:

1. a condição (2.25) é equivalente a

$$[\Omega_U(t) + P_0\Omega_W(t)P_0^{-1}, \Psi] = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(G_J); \quad (4.6)$$

2. a condição (2.26) é equivalente a

$$[\Omega_U(t) + P_0\Omega_W(t)P_0^{-1}, \Upsilon] = 0, \quad \forall \Upsilon \in \mathcal{E}_J. \quad (4.7)$$

Além disso, estas duas relações verificam-se em simultâneo se e só se

$$\Omega_U(t)P_0 = -P_0\Omega_W(t). \quad (4.8)$$

Demonstração. De modo a aliviarmos a exposição vamos omitir a dependência explícita de t . Dado que $T_{\alpha_{\text{dev}}}(T_{P_0}^{\text{aff}} \mathbf{G}_J) = T_{P_0} \mathbf{G}_J$, a condição (2.25) reduz-se a

$$\Omega_U v - v\Omega_W \in (T_{P_0} \mathbf{G}_J)^\perp, \quad \forall v \in T_{P_0} \mathbf{G}_J.$$

Mas fazendo-se uso das igualdades (4.1), (4.2), (4.3) e (2.2), podemos deduzir sucessivamente a equivalência da relação anterior com cada uma das seguintes:

$$\begin{aligned} & (\Omega_U \Psi - \Psi P_0 \Omega_W P_0^{-1}) P_0 \in (T_{P_0} \mathbf{G}_J)^\perp, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J) \\ \Leftrightarrow & \Omega_U \Psi - \Psi P_0 \Omega_W P_0^{-1} \in \mathcal{E}_J, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J) \\ \Leftrightarrow & (\Omega_U \Psi - \Psi P_0 \Omega_W P_0^{-1})^\top J = J (\Omega_U \Psi - \Psi P_0 \Omega_W P_0^{-1}), \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J) \\ \Leftrightarrow & J (\Psi \Omega_U - P_0 \Omega_W P_0^{-1} \Psi) = J (\Omega_U \Psi - \Psi P_0 \Omega_W P_0^{-1}), \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J) \\ \Leftrightarrow & \Psi (\Omega_U + P_0 \Omega_W P_0^{-1}) - (\Omega_U + P_0 \Omega_W P_0^{-1}) \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J) \\ \Leftrightarrow & [\Omega_U + P_0 \Omega_W P_0^{-1}, \Psi] = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J). \end{aligned}$$

Portanto está demonstrada a afirmação referente à parte tangencial. A prova para a parte normal pode ser feita de forma inteiramente análoga.

Relativamente à afirmação final, atendendo à decomposição (4.5), verifica-se a conjugação de (4.6) e (4.7) se e só se $[\Omega_U + P_0 \Omega_W P_0^{-1}, A] = 0$ para qualquer $A \in \mathfrak{gl}(n)$, ou seja, se e só se $\Omega_U + P_0 \Omega_W P_0^{-1}$ é uma matriz escalar. Mas esta matriz está em $\mathcal{L}(\mathbf{G}_J)$ e a única matriz escalar desta álgebra de Lie é a matriz nula, logo podemos concluir a equivalência afirmada. ■

Se por outro lado no presente rolamento de grupos de Lie quadráticos impusermos que a curva de desenvolvimento, à semelhança da clássica situação do rolamento numa superfície esférica sobre um plano no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , deve ter a forma $\alpha_{\text{dev}}(t) = P_0 + Z(t)$, a condição de não-deslize (2.24) reduz-se imediatamente a

$$\dot{Z}(t) = -\Omega_U(t)P_0 + P_0\Omega_W(t). \quad (4.9)$$

Assim, as equações da cinemática deste rolamento sem deslize nem torção, descrito por uma aplicação $t \rightsquigarrow g(t) = (U(t), W(t), Z(t)) \in \overline{\mathbf{G}}_J^1$ em que a curva de rolamento tem a forma $\alpha(t) = g(t)^{-1} * (P_0 + Z(t)) = U^{-1}(t)P_0W(t)$, são agora facilmente deduzidas a partir da Proposição 2.1 e das igualdades (4.8) e (4.9). Efetivamente, se introduzirmos a aplicação $t \rightsquigarrow \Omega(t) := -\Omega_U(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_J)$, as

expressões das velocidades de $U(t)$, $W(t)$ e $Z(t)$, nos instantes onde se encontrem definidas, podem ser imediatamente escritas tal como constam no sistema (4.10) do teorema que se segue. Veremos ainda nesse teorema, reciprocamente, que se for escolhida uma condição inicial apropriada, a aplicação $t \rightsquigarrow g(t) = (U(t), W(t), Z(t))$ determinada posteriormente pelo referido sistema de equações diferenciais é uma aplicação rolamento. Será concebível qualquer condição inicial $(U(0), W(0), Z(0)) = (U_0, W_0, Z_0)$, com $(U_0, W_0, Z_0) \in \overline{G}_J^I$, tal que a configuração inicial não inviabiliza a condição de rolamento. Para tal é necessário e suficiente que se verifique $g(0) * \alpha(0) = P_0 + Z_0 \in T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$, ou seja, $Z_0 \in T_{P_0} G_J$

Teorema 4.1 *Sejam P_0 um ponto de G_J e $\Omega : t \in [0, \tau] \rightsquigarrow \Omega(t) \in \mathcal{L}(G_J)$ uma aplicação seccionalmente suave. Se $g : t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (U(t), W(t), Z(t)) \in \overline{G}_J^I$ é a curva seccionalmente suave que nos intervalos abertos onde $\Omega(t)$ é suave verifica o sistema*

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = -\Omega(t)U(t) \\ \dot{W}(t) = P_0^{-1}\Omega(t)P_0W(t) \\ \dot{Z}(t) = 2\Omega(t)P_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

e satisfaz a condição inicial $(U(0), W(0), Z(0)) = (U_0, W_0, Z_0) \in \overline{G}_J^I$ com $Z_0 \in T_{P_0} G_J$, então g é uma aplicação rolamento de G_J sobre o espaço afim associado ao seu espaço tangente em P_0 , sem deslize nem torção, tendo a curva de rolamento $\alpha(t) = U^{-1}(t)P_0W(t)$ e a curva de desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = P_0 + Z(t)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, com base no *Teorema da Existência e Unicidade* de solução para sistemas de equações diferenciais lineares, podemos realmente garantir que existe uma única curva seccionalmente suave $t \in [0, \tau] \rightsquigarrow g(t) = (U(t), W(t), Z(t)) \in \mathfrak{gl}(n)$ que verifica o sistema (4.10) nos intervalos abertos onde $\Omega(t)$ é suave e satisfaz uma qualquer condição inicial que seja prescrita. Além disto, atendendo à forma das equações diferenciais em questão e ao facto de $(U_0, W_0, Z_0) \in \overline{G}_J^I$, podemos ainda assegurar que $g(t) \in \overline{G}_J^I, \forall t \in [0, \tau]$.

Quanto às condições de não-deslize e de não-torção, as igualdades (4.8) e (4.9) podem ser prontamente confirmadas, com recurso às três equações da cinemática, nos intervalos abertos onde $\Omega(t)$ é suave. Assim resta apenas a verificação da condição de rolamento. Mas:

1. Com um raciocínio análogo ao da Proposição 3.5, pode-se provar que se $t \in [a, b] \rightsquigarrow \tilde{Z}(t) \in \mathfrak{gl}(n)$ é uma qualquer curva suave então

$$\left((\dot{\tilde{Z}}(t) \in T_{P_0} G_J, \forall t \in]a, b[) \wedge \tilde{Z}(a) \in T_{P_0} G_J \right) \Rightarrow \left(\tilde{Z}(t) \in T_{P_0} G_J, \forall t \in [a, b] \right).$$

Deste modo, uma vez que $Z(0) \in T_{P_0} G_J$ e da terceira equação da cinemática resulta $\dot{Z}(t) \in T_{P_0} G_J$ nos intervalos abertos onde a aplicação Ω suave, temos $Z(t) \in T_{P_0} G_J$ no intervalo inteiro $[0, \tau]$. Logo a curva $\alpha_{\text{dev}}(t) = P_0 + Z(t)$ está em $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$.

2. Em virtude de em cada instante t termos $g(t) * G_J = G_J + Z(t)$, é evidente que $T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(g(t) * G_J) = T_{P_0} G_J$. Pelo que podemos concluir a igualdade $T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(g(t) * G_J) = T_{\alpha_{\text{dev}}(t)}(T_{P_0}^{\text{aff}} G_J)$.

Portanto estão provadas as três condições da Definição 2.1, e a demonstração está terminada. ■

A aplicação $t \rightsquigarrow \Omega(t) \in \mathcal{L}(G_J)$ do teorema anterior tem o papel de “função controlo”, pois determina completamente o rolamento. Na proposição seguinte vamos descrever explicitamente a correspondente aplicação rolamento quando $\Omega(t)$ é escolhida numa classe específica de funções.

Proposição 4.5 *Quando a função de controlo $\Omega(t)$ é suave e comuta com a sua primitiva $\Theta(t) := \int_0^t \Omega(\rho) d\rho$, isto é, $[\Omega(t), \Theta(t)] = 0$ para todo $t \in [0, \tau]$, a solução das equações (4.10), com a condição inicial $(U(0), W(0), Z(0)) = (I_n, I_n, 0)$, é dada por*

$$U(t) = e^{-\Theta(t)}, \quad W(t) = P_0^{-1} e^{\Theta(t)} P_0, \quad Z(t) = 2\Theta(t) P_0.$$

Além disto, em tal caso a curva de rolamento $\alpha(t) = e^{2\Theta(t)} P_0$ e o respectivo desenvolvimento $\alpha_{\text{dev}}(t) = P_0 + 2\Theta(t) P_0$ são geodésicas em G_J e $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$, respetivamente, se e só se $\Omega(t)$ é constante.

Demonstração. Antes mais, uma vez que $\Theta(t) \in \mathcal{L}(G_J)$, tem-se evidentemente $(e^{-\Theta(t)}, P_0^{-1} e^{\Theta(t)} P_0, 2\Theta(t) P_0) \in \overline{G}_J^1$. As condições iniciais são também trivialmente verificadas.

À parte de tudo isto, com a definição de exponencial matricial prova-se que qualquer curva suave $t \rightsquigarrow X(t) \in \mathfrak{gl}(n)$ verifica

$$\frac{d e^{X(t)}}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} e^{X(t)} = e^{X(t)} \frac{dX(t)}{dt} \quad \text{se} \quad \left[X(t), \frac{dX(t)}{dt} \right] = 0.$$

Portanto, uma vez que $\dot{\Theta}(t) = \Omega(t)$, as expressões apresentadas para $U(t), W(t)$ e $Z(t)$ podem ser diretamente confirmadas.

Passamos agora à análise do que se refere às curvas $\alpha(t)$ e $\alpha_{\text{dev}}(t)$. Da expressão de $\alpha(t)$ deduz-se imediatamente que a sua aceleração usual é

$$\ddot{\alpha}(t) = (2\dot{\Omega}(t) + 4\Omega^2(t))\alpha(t).$$

Por outro lado, a partir do Lema 1.15, sabemos que α é uma geodésica em G_J se e só se $\ddot{\alpha}(t) \in (T_{\alpha(t)} G_J)^\perp$. Logo, fazendo-se uso da caracterização dada em (4.2), resta-nos mostrar que $2\dot{\Omega}(t) + 4\Omega^2(t) \in \mathcal{E}_J$ se e só se $\Omega(t)$ é constante. Mas $\dot{\Omega}(t) \in \mathcal{L}(G_J)$ e $\Omega^2(t) \in \mathcal{E}_J$, pelo que, em virtude de $\mathfrak{gl}(n) = \mathcal{L}(G_J) \oplus \mathcal{E}_J$, tem-se $2\dot{\Omega}(t) + 4\Omega^2(t) \in \mathcal{E}_J$ se e só se $\dot{\Omega}(t) = 0$. Está assim terminada a parte relativa a $\alpha(t)$, e a prova referente à curva $\alpha_{\text{dev}}(t)$ pode ser feita de forma totalmente similar. ■

Observação 4.2 *Entre as funções $\Omega(t)$ que satisfazem a condição $[\Omega(t), \Theta(t)] = 0$ da proposição anterior, estão todas as aplicações da forma $\Omega(t) = f(t)\Omega$, com $\Omega \in \mathcal{L}(G_J)$ constante e f uma função polinomial escalar. Se o rolamento é feito ao longo de geodésicas, correspondendo a uma escolha particular $\Omega(t) = \Omega$, claramente a aplicação rolamento reduz-se a $g(t) = (e^{-\Omega t}, P_0^{-1}e^{\Omega t}P_0, 2t\Omega P_0)$, e as curvas envolvidas são $\alpha(t) = e^{2\Omega t}P_0$ e $\alpha_{\text{dev}}(t) = P_0 + 2t\Omega P_0$.*

Para terminar este capítulo, referimos ainda que os resultados principais aqui obtidos generalizam o que foi obtido em [6] para o rolamento de grupos pseudo-ortogonais.

Capítulo 5

Controlabilidade de Rolamentos sem Deslize nem Torção

É evidente que a aplicação $t \rightsquigarrow u(t)$ que aparece nas equações da cinemática (3.7) da Secção 3.4.1 determina um rolamento concreto de $H_\kappa^n(r)$ sobre o $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$, sob o “efeito” da correspondente aplicação rolamento. Também é imediato, a partir da exposição da Secção 4.2, que a aplicação $t \rightsquigarrow \Omega(t)$ que aparece nas equações da cinemática (4.10) define completamente as soluções deste sistema, pelo que após ter sido fixada uma condição inicial concebível a escolha de $\Omega(t)$ determina a forma como depois G_J rola sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} G_J$. Então, podemos considerar $u(t)$ e $\Omega(t)$ como funções de controlo e as equações da cinemática (3.7) e (4.10) tornam-se sistemas de controlo com estados $(R(t), s(t))$ e $(U(t), W(t), Z(t))$, respetivamente. Estudar a controlabilidade destes sistemas é o objectivo que temos neste capítulo. A estratégia passará por reescrevermos as equações da cinemática numa forma mais conveniente, de modo a podermos usar um teorema clássico sobre controlabilidade em grupos de Lie. A primeira secção destina-se essencialmente a introdução de tal resultado, que foi provado em Jurdjevic *et al.* [18]. A abordagem que empregaremos é unicamente “algébrica”. Com compatível finalidade, mas com um pendor bastante mais “geométrico”, em Grong [10] foi estudada a controlabilidade de rolamentos intrínsecos para variedades Riemannianas. Os resultados principais do presente capítulo estão parcialmente publicados em Marques *et al.* [32] e Marques *et al.* [33].

5.1 Controlabilidade de Sistemas Invariantes em Grupos de Lie Matriciais

Nesta secção G representará um subgrupo de Lie de $GL(n)$, e a sua álgebra de Lie será denotada por $\mathcal{L}(G)$. Introduziremos aqui algumas notas básicas sobre uma classe particular de sistemas de controlo a evoluir em G . Mais detalhes sobre sistemas de controlo em grupos de Lie podem ser encontrados, por exemplo, em [19] ou [38].

Um *sistema de controlo afim, invariante à esquerda*, é um sistema com a forma

$$\dot{X}(t) = X(t)Y_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)X(t)Y_i, \quad u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (5.1)$$

onde $X(t) \in G$, $m \leq \dim(G)$, $Y_0, Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{L}(G)$ e as *funções de controlo* $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$ pertencem a alguma classe \mathfrak{C} de controlos admissíveis, previamente convencionada, tal que para cada escolha de uma função de controlo e uma condição inicial, a equação diferencial tem solução única. O nome destes sistemas deve-se ao facto de eles serem invariantes para translações à esquerda, isto é, mantêm a mesma forma após qualquer mudança de variável $X \rightsquigarrow Z = WX$, com $W \in G$. Sendo suficiente para os nossos interesses, vamos considerar somente sistemas em que \mathfrak{C} é classe das aplicações seccionalmente constantes.

Um dos problemas mais relevantes em teoria de controlo é a questão da controlabilidade dum sistema, que definiremos de seguida. Dizemos que uma curva (contínua) seccionalmente suave $t \in [a, b] \rightsquigarrow X(t) \in G$ é uma *trajetória* do sistema (5.1) se existir uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ e uma função de controlo admissível $u(\cdot)$ constante nos intervalos abertos $]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, \dots, r$, de forma que a restrição de $X(\cdot)$ a cada um destes subintervalos é uma solução da equação diferencial, aí definida, que resulta da escolha do controlo particular $u(\cdot)$.

Definição 5.1 *O sistema (5.1) diz-se controlável se para qualquer par de pontos distintos $X_0, X_1 \in G$, existe um tempo finito $\tau > 0$ e uma trajetória $X(\cdot)$ definida em $[0, \tau]$ tal que $X(0) = X_0$ e $X(\tau) = X_1$.*

Uma condição necessária para a controlabilidade do sistema (5.1) é que G seja conexo. Na verdade, se os pontos X_0 e X_1 pertencerem a duas componentes conexas distintas de G , não existe nenhuma trajetória do sistema que os ligue.

Quando o termo livre Y_0 é nulo e o conjunto de controlo \mathcal{U} é simétrico, isto é $\mathcal{U} = -\mathcal{U}$, o sistema (5.1) diz-se *homogéneo*. Uma vez que nos capítulos seguintes

desta dissertação teremos exclusivamente sistemas homogêneos, vamos preocupar-nos apenas com a análise de sistemas deste tipo. No lema que se segue veremos que a controlabilidade de sistemas homogêneos em grupos conexos pode ser caracterizada algebricamente. Este resultado foi provado em [18].

Lema 5.1 *Se G é um grupo de Lie conexo e o sistema (5.1) é homogêneo, então este sistema é controlável se e só se*

$$\{Y_1, \dots, Y_m\}_{L.A.} = \mathcal{L}(G), \quad (5.2)$$

onde $\{Y_1, \dots, Y_m\}_{L.A.}$ denota a subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(G)$ gerada pelas matrizes Y_1, \dots, Y_m .¹

A condição (5.2) é conhecida como *condição característica de controlabilidade*. Em geral esta condição é apenas necessária. Isto é, quando o sistema (5.1) não é homogêneo têm que existir requisitos suplementares para que (5.2) seja uma condição suficiente para a controlabilidade. Um requisito possível nestas circunstâncias é que o grupo de Lie G seja compacto.

Para terminar esta secção, assinalamos ainda que de modo similar aos sistemas de controlo afim invariantes à esquerda, naturalmente também se poderia considerar os *sistemas de controlo afim invariantes à direita* no grupo de Lie G , tendo estes sistemas a forma

$$\dot{X}(t) = Y_0 X(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) Y_i X(t), \quad u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (5.3)$$

Contudo, todo o sistema com a forma (5.1) pode ser transformado num sistema com a forma (5.3), e vice-versa. Tal transformação passa somente pela mudança de variável $X \rightsquigarrow \tilde{X} = X^{-1}$ (a matriz variável incógnita $X(t)$ dá lugar à sua inversa $\tilde{X}(t) = X^{-1}(t)$, e as matrizes constantes Y_i dão lugar às suas simétricas $\tilde{Y}_i = -Y_i$, para $i = 0, \dots, m$). Portanto os resultados apresentadas para sistemas de controlo invariantes à esquerda são igualmente válidos para sistemas de controlo invariantes à direita.

¹ $\{Y_1, \dots, Y_m\}_{L.A.}$ é a menor subálgebra de $\mathcal{L}(G)$ que contém Y_1, \dots, Y_m , portanto é constituída pelas combinações lineares que se podem efetuar com essas matrizes e seus produtos de Lie.

5.2 Controlabilidade do Rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$

Esta secção destina-se à análise da controlabilidade do sistema constituído pelas equações (3.7), que descreve o rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$. Estudaremos este assunto empregando uma estratégia idêntica à que foi usada em [43] para a esfera Euclidiana e em [23] para a esfera Lorentziana.

Sem perda de generalidade, vamos considerar que $r = 1$ e $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Consequentemente aqui teremos $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 = 1\}$, $u(t) = (0, u_2(t), \dots, u_{n+1}(t))$ e $s(t) = (0, s_2(t), \dots, s_{n+1}(t))$. Para simplificar a notação, E_{ij} designará uma matriz quadrada com a entrada (i, j) igual a 1 e as restantes todas nulas, $A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ e $B_{ij} := E_{ij} + E_{ji}$. Será ainda acrescentada uma vírgula entre os índices sempre que for conveniente esta clarificação. Também omitiremos a variável independente t . Então as equações da cinemática reduzem-se a

$$\begin{cases} \dot{s}_2 &= u_2 \\ &\vdots \\ \dot{s}_{n+1} &= u_{n+1} \\ \dot{R} &= R(u_2 A_{21} + \dots + u_{\kappa+1} A_{\kappa+1,1} + u_{\kappa+2} B_{\kappa+2,1} + \dots + u_{n+1} B_{n+1,1}), \end{cases} \quad (5.4)$$

com $R \in \text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1)$.

Primeiramente vamos reescrever este sistema de controlo numa forma mais conveniente, que nos permitirá aplicar resultados existentes sobre controlabilidade em grupos de Lie. Para tal, vamos juntar as componentes do estado (R, s) numa única matriz $(2n+2) \times (2n+2)$:

$$X = \left[\begin{array}{c|cc} R & & 0 \\ \hline & & s_2 \\ & I_n & \vdots \\ & & s_{n+1} \\ \hline 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right].$$

Denotaremos por $G = \text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1) \times \mathbb{R}^n$ o grupo de Lie de todas estas matrizes, contendo todos $R \in \text{SO}_{\kappa+1}^{\text{I}}(n+1)$ e $(s_2, \dots, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$. A partir do Lema 2.3, é evidente que álgebra de Lie de G é a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(2n+2)$

definida por

$$\mathcal{L}(G) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline B^\top & A_2 \end{array} & & 0 \\ \hline & & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{array} \end{array} \right] : \begin{array}{l} A_1 \in \mathfrak{o}(\kappa + 1), B \in M_{(\kappa+1) \times (n-\kappa)}, \\ A_2 \in \mathfrak{o}(n - \kappa), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\},$$

onde $M_{(\kappa+1) \times (n-\kappa)}$ representa o conjunto das matrizes $(\kappa+1) \times (n-\kappa)$ com entradas reais.

Deste modo, sendo evidentemente equivalente a

$$\left[\begin{array}{c|c} \dot{R} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{array} \right] = X \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} 0 & -u_2 & \cdots & -u_{\kappa+1} & u_{\kappa+2} & \cdots & u_{n+1} \\ u_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} & 0 \\ \hline & \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{array} \right],$$

o sistema (5.4) toma a forma

$$\dot{X} = X \left(u_2 (A_{21} + E_{n+2,2n+2}) + \cdots + u_{\kappa+1} (A_{\kappa+1,1} + E_{n+\kappa+1,2n+2}) + \right. \\ \left. u_{\kappa+2} (B_{\kappa+2,1} + E_{n+\kappa+2,2n+2}) + \cdots + u_{n+1} (B_{n+1,1} + E_{2n+1,2n+2}) \right).$$

Designando ainda (admite-se $0 \leq \kappa \leq n$)

$$Y_i := \begin{cases} A_{i1} + E_{n+i,2n+2} & \Leftarrow 2 \leq i \leq \kappa + 1 \\ B_{i1} + E_{n+i,2n+2} & \Leftarrow \kappa + 2 \leq i \leq n + 1 \end{cases},$$

podemos agora escrever o sistema (5.4) como

$$\dot{X} = \sum_{i=2}^{n+1} u_i X Y_i, \quad (u_2, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \quad (5.5)$$

que é um sistema de controlo afim invariante à esquerda, homogéneo, a evoluir no grupo de Lie conexo $G = \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.1 *Para $n \geq 2$, o sistema de controlo (5.5) (ou, equivalentemente, as equações da cinemática (3.7)), que descreve o rolamento de $H_\kappa^n(1)$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente no ponto $p_0 = (1, 0 \cdots, 0)$, é controlável no grupo $G = \text{SO}_{\kappa+1}^I(n+1) \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.1, sabemos que o sistema é controlável em G se e só se

$$\{Y_2, \dots, Y_{n+1}\}_{L.A.} = \mathcal{L}(G).$$

Portanto é suficiente mostrarmos que todo o elemento da base canónica de $\mathcal{L}(G)$,

$$\begin{aligned} & \{A_{ij} : 1 \leq j < i \leq \kappa + 1\} \cup \{A_{ij} : \kappa + 2 \leq j < i \leq n + 1\} \\ & \cup \{B_{ij} : 1 \leq j \leq \kappa + 1, \kappa + 2 \leq i \leq n + 1\} \cup \{E_{n+i, 2n+2} : 2 \leq i \leq n + 1\}, \end{aligned}$$

pode ser obtido a partir das matrizes Y_2, \dots, Y_{n+1} e dos seus produtos de Lie. Na união anterior estamos a considerar que o primeiro, o segundo e o terceiro conjuntos são vazios quando $\kappa = 0$, $\kappa = n - 1$, n e $\kappa = n$, respetivamente.

Mas com a definição do comutador $[\cdot, \cdot]$ e a igualdade $E_{ij}E_{fl} = \delta_{jf}E_{il}$ podem-se construir as seguintes fórmulas de comutação:

$$\begin{aligned} [E_{ij}, E_{fl}] &= \delta_{jf}E_{il} - \delta_{il}E_{fj} \\ [A_{ij}, A_{fl}] &= \delta_{il}A_{jf} + \delta_{jf}A_{il} - \delta_{if}A_{jl} - \delta_{jl}A_{if} \\ [B_{ij}, B_{fl}] &= \delta_{il}A_{jf} + \delta_{jf}A_{il} + \delta_{if}A_{jl} + \delta_{jl}A_{if} \\ [A_{ij}, E_{fl}] &= \delta_{jf}E_{il} - \delta_{il}E_{fj} - \delta_{if}E_{jl} - \delta_{jl}E_{fi} \\ [B_{ij}, E_{fl}] &= \delta_{jf}E_{il} - \delta_{il}E_{fj} + \delta_{if}E_{jl} - \delta_{jl}E_{fi} \\ [A_{ij}, B_{fl}] &= \delta_{jf}B_{il} - \delta_{il}B_{fj} - \delta_{if}B_{jl} + \delta_{jl}B_{if}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

e com estas fórmulas podemos diretamente verificar que:

1. (considerando $\kappa \geq 1$)

$$\begin{aligned} A_{ij} &= [Y_j, Y_i], \text{ para } 2 \leq j < i \leq \kappa + 1 \\ A_{i1} &= \begin{cases} [[Y_i, Y_{n+1}], Y_{n+1}] & \Leftarrow 1 \leq \kappa \leq n-1 \\ \left\{ \begin{aligned} [Y_{n+1}, [Y_2, Y_{n+1}]] & \Leftarrow i = 2 \\ [[Y_2, Y_i], Y_2] & \Leftarrow 3 \leq i \leq n+1 \end{aligned} \right. & \Leftarrow \kappa = n \end{cases}, \text{ para } 2 \leq i \leq \kappa + 1 \end{aligned}$$

2. (considerando $\kappa \leq n - 2$)

$$A_{ij} = [Y_i, Y_j], \text{ para } \kappa + 2 \leq j < i \leq n + 1$$

3. (considerando $\kappa \leq n - 1$)

$$\begin{aligned} B_{ij} &= [Y_j, Y_i], \text{ para } 2 \leq j \leq \kappa + 1 \text{ e } \kappa + 2 \leq i \leq n + 1 \\ B_{i1} &= \begin{cases} [[Y_2, Y_{n+1}], Y_{n+1}] & \Leftarrow i = 2 \\ \left\{ \begin{aligned} [Y_2, [Y_2, Y_i]] & \Leftarrow 3 \leq i \leq n+1 \\ [Y_2, [Y_i, Y_2]] & \Leftarrow 1 \leq \kappa \leq n-1 \end{aligned} \right. & \Leftarrow \kappa = 0 \end{cases}, \text{ para } \kappa + 2 \leq i \leq n + 1 \end{aligned}$$

4. (considerando $0 \leq \kappa \leq n$)

$$E_{n+i,2n+2} = \begin{cases} Y_i - [Y_2, [Y_2, Y_i]] \Leftarrow \kappa = 0 \\ Y_i + [Y_2, [Y_2, Y_i]] \Leftarrow 1 \leq \kappa \leq n \end{cases}, \text{ para } 3 \leq i \leq n+1$$

$$E_{n+2,2n+2} = \begin{cases} Y_2 - [[Y_2, Y_{n+1}], Y_{n+1}] \Leftarrow 0 \leq \kappa \leq n-1 \\ Y_2 + [[Y_2, Y_{n+1}], Y_{n+1}] \Leftarrow \kappa = n \end{cases}.$$

Assim, a demonstração está terminada. ■

Para concluir esta secção, referimos ainda que a partir duma simples abordagem geométrica pode-se prontamente constatar que o referido rolamento não é controlável quando $n = 1$.

5.3 Controlabilidade dos Rolamentos de $O_\kappa(n)$ e $Sp(2m)$

Já referimos que podemos interpretar o rolamento dum grupo de Lie quadrático G_J sobre $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J$, descrito pelas equações (4.10), como sendo um sistema de controlo com as configurações associadas aos estados $(U(t), W(t), Z(t)) \in \overline{G}_J^1$ e a função de controlo $t \rightsquigarrow \Omega(t) \in \mathcal{L}(G_J)$. Investigaremos a questão da sua controlabilidade nos casos particulares do grupo pseudo-ortogonal $G_J = O_\kappa(n)$ e do grupo simplético $G_J = Sp(2m)$.

Sem perda de generalidade, vamos considerar $P_0 = I_n$. Consequentemente, são válidas as igualdades $T_{P_0} G_J = \mathcal{L}(G_J)$ e $T_{P_0}^{\text{aff}} G_J = I_n + \mathcal{L}(G_J)$, e as equações da cinemática (4.10) ficam reduzidas a

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = -\Omega(t)U(t) \\ \dot{W}(t) = \Omega(t)W(t) \\ \dot{Z}(t) = 2\Omega(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

Deste modo, nas variáveis do sistema anterior, $U(t)$ e $W(t)$ pertencem à componente conexa de G_J que contém a identidade e $Z(t)$ pertence à álgebra de Lie $\mathcal{L}(G_J)$.

Tal como na Secção 5.2, ao longo da presente secção assumiremos sempre que E_{ij} designa uma matriz quadrada com a entrada (i, j) igual a 1 e as restantes todas nulas, $A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ e $B_{ij} := E_{ij} + E_{ji}$. Portanto, mantêm-se válidas as fórmulas de comutação dadas em (5.6). Omitiremos igualmente a variável independente t .

5.3.1 Controlabilidade do Rolamento de $O_\kappa(n)$

Neste caso particular tem-se $U, W \in \text{SO}_\kappa^{\text{I}}(n)$ e $Z \in \mathcal{L}(O_\kappa(n)) = \mathfrak{so}_\kappa(n)$. Recordamos que

$$\mathfrak{so}_\kappa(n) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_3 \\ \hline \Omega_3^\top & \Omega_2 \end{array} \right] : \Omega_1 \in \mathfrak{so}(\kappa), \Omega_2 \in \mathfrak{so}(n - \kappa) \text{ e } \Omega_3 \in M_{\kappa \times (n - \kappa)} \right\},$$

onde $M_{\kappa \times (n - \kappa)}$ denota o conjunto das matrizes reais com κ linhas e $n - \kappa$ colunas.

Tome-se uma qualquer função de controlo, particionada na forma exposta acima,

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_3 \\ \hline \Omega_3^\top & \Omega_2 \end{array} \right], \text{ onde } \Omega_1 = [\bar{\omega}_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq \kappa \\ 1 \leq j \leq \kappa}}, \Omega_2 = [\tilde{\omega}_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n - \kappa \\ 1 \leq j \leq n - \kappa}} \text{ e } \Omega_3 = [\hat{\omega}_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq \kappa \\ 1 \leq j \leq n - \kappa}}. \quad (5.8)$$

Com igual decomposição na matriz $Z = \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & Z_3 \\ \hline Z_3^\top & Z_2 \end{array} \right]$ a terceira equação de (5.7),

$\dot{Z} = 2\Omega$, fica equivalente a

$$\dot{Z}_1 = 2\Omega_1, \quad \dot{Z}_2 = 2\Omega_2, \quad \dot{Z}_3 = 2\Omega_3. \quad (5.9)$$

Portanto as equações da cinemática são equivalentes a um sistema com as duas primeiras equações de (5.7) e as três equações de (5.9), tendo estados (U, W, Z_1, Z_2, Z_3) .

De modo a podermos aplicar a teoria exposta na Secção 5.1, precisamos de começar por reescrever o sistema descrito com a forma dum sistema de controlo afim invariante (à direita), a evoluir nalgum grupo de Lie. Com esse objectivo, vamos identificar (U, W, Z_1, Z_2, Z_3) com a seguinte matriz X , diagonal por blocos, de ordem $5n$:

$$X = \text{diag} \left(U, W, \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_1 \\ \hline 0 & I_\kappa \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_{n - \kappa} & Z_2 \\ \hline 0 & I_{n - \kappa} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_3 \\ \hline 0 & I_{n - \kappa} \end{array} \right] \right). \quad (5.10)$$

O subconjunto de $GL(5n)$ formado por todas as matrizes X com esta estrutura, onde $U, W \in \text{SO}_\kappa^{\text{I}}(n)$, $Z_1 \in \mathfrak{so}(\kappa)$, $Z_2 \in \mathfrak{so}(n - \kappa)$ e $Z_3 \in M_{\kappa \times (n - \kappa)}$, será denotado por $G = \text{SO}_\kappa^{\text{I}}(n)^2 \times \mathfrak{so}(\kappa) \times \mathfrak{so}(n - \kappa) \times M_{\kappa \times (n - \kappa)}$. Este conjunto vai, então, constituir o espaço dos estados onde analisaremos a controlabilidade do rolamento. Nas duas proposições seguintes vamos mostrar que G cumpre os requisitos exigidos no Lema 5.1, referente à condição característica de controlabilidade, e apresentaremos a sua álgebra de Lie.

Proposição 5.1 $G = \text{SO}_\kappa^{\text{I}}(n)^2 \times \mathfrak{so}(\kappa) \times \mathfrak{so}(n - \kappa) \times M_{\kappa \times (n - \kappa)}$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(5n)$.

Demonstração. Antes de mais, G é efetivamente um subgrupo de $GL(5n)$. Isto pode ser imediatamente constatado, uma vez que se tomarmos duas quaisquer matrizes em G ,

$$X_i = \text{diag} \left(U_i, W_i, \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_{1,i} \\ \hline 0 & I_\kappa \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_{n-\kappa} & Z_{2,i} \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_{3,i} \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right] \right), i = 1, 2, \quad (5.11)$$

temos

$$X_1 X_2 = \text{diag} \left(U_1 U_2, W_1 W_2, \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_{1,1} + Z_{1,2} \\ \hline 0 & I_\kappa \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_{n-\kappa} & Z_{2,1} + Z_{2,2} \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & Z_{3,1} + Z_{3,2} \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right] \right).$$

Por outro lado, atendendo ao Teorema de Yamable (algumas vezes também chamado por Teorema de Kuranishi-Yamable), sabemos que um qualquer subgrupo dum dado grupo de Lie é um seu subgrupo de Lie conexo se e só for (um subespaço topológico) conexo por arcos. (Ver, por exemplo, [1]). Assim basta-nos mostrar que G é um subconjunto de $GL(5n)$ conexo por arcos, com respeito à topologia relativa.

Tomemos duas quaisquer matrizes $X_1, X_2 \in G$, definidas tal como em (5.11). Dado que $\text{SO}_\kappa^I(n)$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(n)$, está garantida a existência de curvas $\gamma_i : [t_1, t_2] \rightarrow GL(n)$, com $i = 1, 2$, totalmente contidas em $\text{SO}_\kappa^I(n)$ tais que $\gamma_1(t_1) = U_1, \gamma_1(t_2) = U_2$ e $\gamma_2(t_1) = W_1, \gamma_2(t_2) = W_2$. Consideremos ainda as seguintes curvas, para $t \in [t_1, t_2]$,

$$\theta_j(t) = Z_{j,1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (Z_{j,2} - Z_{j,1}), \text{ com } j = 1, 2, 3.$$

É evidente que as matrizes $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são anti-simétricas. Então, a curva $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow GL(5n)$ definida por

$$\gamma(t) = \text{diag} \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & \theta_1(t) \\ \hline 0 & I_\kappa \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_{n-\kappa} & \theta_2(t) \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & \theta_3(t) \\ \hline 0 & I_{n-\kappa} \end{array} \right] \right),$$

está totalmente contida em G e verifica $\gamma(t_1) = X_1, \gamma(t_2) = X_2$. Portanto G é conexo por arcos, como se pretendia provar. \blacksquare

Proposição 5.2 *A álgebra de Lie de $G = \text{SO}_\kappa^I(n)^2 \times \mathfrak{so}(\kappa) \times \mathfrak{so}(n - \kappa) \times M_{\kappa \times (n - \kappa)}$ é formada pelas matrizes da forma*

$$\text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_3 \\ \hline \Omega_3^\top & \Omega_2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} \Omega_4 & \Omega_6 \\ \hline \Omega_6^\top & \Omega_5 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_\kappa & \Omega_7 \\ \hline 0 & 0_\kappa \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_{n-\kappa} & \Omega_8 \\ \hline 0 & 0_{n-\kappa} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_\kappa & \Omega_9 \\ \hline 0 & 0_{n-\kappa} \end{array} \right] \right), \quad (5.12)$$

com $\Omega_1, \Omega_4, \Omega_7 \in \mathfrak{so}(\kappa)$, $\Omega_2, \Omega_5, \Omega_8 \in \mathfrak{so}(n - \kappa)$ e $\Omega_3, \Omega_6, \Omega_9 \in M_{\kappa \times (n - \kappa)}$.

Demonstração. Em primeiro lugar, como habitualmente, nesta proposição estamos a admitir as identificações que permitem escrever

$$\mathcal{L}(G) = T_I(G) = \{\dot{\gamma}(0) : \gamma(t) \text{ é uma curva suave de } G, \gamma(0) = I\}.$$

Tomemos uma curva suave arbitrária $\gamma(t)$ em G tal que $\gamma(0) = I$. Então

$$\gamma(t) = \text{diag}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t), \gamma_5(t)),$$

onde $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in \text{SO}_\kappa^I(n)$, $\gamma_3(t) = \begin{bmatrix} I_\kappa & \tilde{\gamma}_3(t) \\ 0 & I_\kappa \end{bmatrix}$, $\gamma_4(t) = \begin{bmatrix} I_{n-\kappa} & \tilde{\gamma}_4(t) \\ 0 & I_{n-\kappa} \end{bmatrix}$, e

$\gamma_5(t) = \begin{bmatrix} I_\kappa & \tilde{\gamma}_5(t) \\ 0 & I_{n-\kappa} \end{bmatrix}$, com $\tilde{\gamma}_3(t) \in \mathfrak{so}(\kappa)$, $\tilde{\gamma}_4(t) \in \mathfrak{so}(n-\kappa)$ e $\tilde{\gamma}_5(t) \in M_{\kappa \times (n-\kappa)}$.

Portanto $\dot{\gamma}(0)$ tem a forma dada em (5.12), já que $\dot{\gamma}_1(0)$ e $\dot{\gamma}_2(0)$ pertencem à álgebra de Lie $\mathcal{L}(\text{SO}_\kappa^I(n)) = \mathcal{L}(\text{O}_\kappa(n)) = \mathfrak{so}_\kappa(n)$ e a derivada usual duma matriz anti-simétrica é igualmente anti-simétrica.

Por outro lado, reciprocamente, se $A \in \mathfrak{gl}(5n)$ tem a forma descrita em (5.12), a curva suave $\gamma(t) = e^{At}$ pertence a G e verifica $\gamma(0) = I, \dot{\gamma}(0) = A$. Isto pode ser rapidamente confirmado porque que a exponencial duma matriz diagonal por blocos é formada pelas exponenciais dos correspondentes blocos diagonais, as duas primeiras matrizes de (5.12) pertencem à álgebra de Lie de $\text{SO}_\kappa^I(n)$ e as restantes três são matrizes nilpotentes de índice 2. Logo podemos concluir a igualdade pretendida. ■

Com a função de controlo introduzida em (5.8) e a matriz X definida em (5.10), o sistema de controlo em análise é equivalente a

$$\dot{X} = \text{diag}\left(-\Omega U, \Omega W, \begin{bmatrix} 0_\kappa & 2\Omega_1 \\ 0 & 0_\kappa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_{n-\kappa} & 2\Omega_2 \\ 0 & 0_{n-\kappa} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_\kappa & 2\Omega_3 \\ 0 & 0_{n-\kappa} \end{bmatrix}\right),$$

portanto pode ser reescrito como

$$\dot{X} = \text{diag}\left(-\Omega, \Omega, \begin{bmatrix} 0_\kappa & 2\Omega_1 \\ 0 & 0_\kappa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_{n-\kappa} & 2\Omega_2 \\ 0 & 0_{n-\kappa} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_\kappa & 2\Omega_3 \\ 0 & 0_{n-\kappa} \end{bmatrix}\right) X. \quad (5.13)$$

Se definirmos

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{ij} &= -A_{ij} + A_{n+i, n+j} + 2(E_{2n+i, 2n+\kappa+j} - E_{2n+j, 2n+\kappa+i}) \\ \tilde{Y}_{ij} &= -A_{\kappa+i, \kappa+j} + A_{n+\kappa+i, n+\kappa+j} + 2(E_{2n+2\kappa+i, 3n+\kappa+j} - E_{2n+2\kappa+j, 3n+\kappa+i}), \\ \hat{Y}_{ij} &= -B_{i, \kappa+j} + A_{n+i, n+\kappa+j} + 2E_{4n+i, 4n+\kappa+j} \end{aligned}$$

a equação (5.13) pode ainda escrever-se na forma seguinte:

$$\dot{X} = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq \kappa} \bar{\omega}_{ij} \bar{Y}_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n-\kappa} \tilde{\omega}_{ij} \tilde{Y}_{ij} + \sum_{\substack{i=1, \dots, \kappa \\ j=1, \dots, n-\kappa}} \hat{\omega}_{ij} \hat{Y}_{ij} \right) X. \quad (5.14)$$

Este sistema, onde $(\bar{\omega}_{12}, \dots, \hat{\omega}_{\kappa, n-\kappa}) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^{\frac{n^2-n}{2}}$, é um sistema de controlo afim invariante à direita, homogéneo, a evoluir num grupo de Lie conexo, pelo que sua controlabilidade pode ser analisada com recurso ao Lema 5.2. Nesta análise descartaremos o caso $n = 1$, que corresponde à situação desinteressante dum sistema de controlo com um único estado.

Teorema 5.2 *Assumindo-se que $n \neq 1$, o sistema de controlo (5.14), referente ao rolamento de $O_\kappa(n)$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente no ponto $P_0 = I_n$, é controlável no grupo de Lie $G = \text{SO}_\kappa^1(n)^2 \times \mathfrak{so}(\kappa) \times \mathfrak{so}(n-\kappa) \times M_{\kappa \times (n-\kappa)}$ se e só se $n \geq 3$.*

Demonstração. Sabemos que o sistema é controlável em G se e só se

$$\left\{ \left\{ \bar{Y}_{ij} : \begin{array}{l} i < j \\ i = 1, \dots, \kappa-1 \\ j = 2, \dots, \kappa \end{array} \right\} \cup \left\{ \tilde{Y}_{ij} : \begin{array}{l} i < j \\ i = 1, \dots, n-\kappa-1 \\ j = 2, \dots, n-\kappa \end{array} \right\} \cup \left\{ \hat{Y}_{ij} : \begin{array}{l} i = 1, \dots, \kappa \\ j = 1, \dots, n-\kappa \end{array} \right\} \right\}_{L.A.} = \mathcal{L}(G). \quad (5.15)$$

Vamos começar por concretizar ambos os membros da igualdade anterior na situação de $n = 2$, considerando as três correspondentes possibilidades para o valor κ .

Caso $\kappa = 0$ ou $\kappa = 2$. Aqui temos:

$$\mathcal{L}(G) = \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & a \\ -a & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ -b & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{Y}_{ij}, \tilde{Y}_{ij}, \hat{Y}_{ij} \right\}_{L.A.} &= \left\{ -A_{12} + A_{34} + 2(E_{58} - E_{67}) \right\}_{L.A.} \\ &= \text{span} \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right) \right\}. \end{aligned}$$

Caso $\kappa = 1$. Aqui temos:

$$\mathcal{L}(G) = \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & a \\ \hline a & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \right) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{Y}_{ij}, \tilde{Y}_{ij}, \hat{Y}_{ij} \right\}_{L.A.} &= \left\{ -B_{12} + B_{34} + 2E_{9,10} \right\}_{L.A.} \\ &= \text{span} \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \right) \right\}. \end{aligned}$$

Vemos que em nenhum destes dois casos é verificada a condição (5.15). Portanto o sistema não é controlável quando $n = 2$, independentemente do valor de κ .

A partir de aqui vamos assumir que se verifica $n \geq 3$. Evidentemente, para garantirmos a igualdade (5.15) é suficiente mostrarmos que todo o elemento da base canónica de $\mathcal{L}(G)$,

$$\begin{aligned} &\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq \kappa\} \cup \{A_{\kappa+i, \kappa+j} : 1 \leq i < j \leq n - \kappa\} \cup \{B_{i, \kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n - \kappa\} \\ &\cup \{A_{n+i, n+j} : 1 \leq i < j \leq \kappa\} \cup \{A_{n+\kappa+i, n+\kappa+j} : 1 \leq i < j \leq n - \kappa\} \\ &\cup \{B_{n+i, n+\kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n - \kappa\} \cup \{E_{2n+i, 2n+\kappa+j} - E_{2n+j, 2n+\kappa+i} : 1 \leq i < j \leq \kappa\} \\ &\cup \{E_{2n+2\kappa+i, 3n+\kappa+j} - E_{2n+2\kappa+j, 3n+\kappa+i} : 1 \leq i < j \leq n - \kappa\} \cup \{E_{4n+i, 4n+\kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n - \kappa\}, \end{aligned}$$

pode ser obtido a partir de combinações lineares das matrizes \bar{Y}_{ij} , \tilde{Y}_{ij} e \hat{Y}_{ij} e dos seus produtos de Lie. Falta-nos então apresentar a maneira como cada matriz de cada um dos subconjuntos da base acima pode ser assim construída. Mas com recurso às formulas de comutação (5.6), é possível confirmar diretamente todas as igualdades seguintes, que terminam a demonstração.

Construção das matrizes de $\underline{\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq \kappa\}}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, 1$)

se $\underline{\kappa = 2}$,

$$A_{12} = -\frac{1}{2} \left[\left[\bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{11} \right] + \hat{Y}_{21}, \hat{Y}_{11} \right]$$

se $\underline{2 < \kappa \leq n}$,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\left[\bar{Y}_{ij}, \bar{Y}_{1j} \right] - \bar{Y}_{1i}, \bar{Y}_{1j} \right], \text{ para } 2 \leq i < j \leq \kappa \\ A_{1j} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\left[\bar{Y}_{1j}, \bar{Y}_{1, j+1} \right] + \bar{Y}_{j, j+1}, \bar{Y}_{1, j+1} \right], & \text{para } 2 \leq j < \kappa \\ \left[A_{12}, A_{2\kappa} \right], & \text{para } j = \kappa; \end{cases} \end{aligned}$$

Construção das matrizes de $\underline{\{A_{\kappa+i, \kappa+j} : 1 \leq i < j \leq n - \kappa\}}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = n - 1, n$)

se $\underline{\kappa = n - 2}$,

$$\begin{aligned}
A_{n-1,n} &= -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{12}, \hat{Y}_{11}] + \hat{Y}_{12}, \hat{Y}_{11} \right] \\
\text{se } 0 \leq \kappa < n-2, \\
A_{\kappa+i,\kappa+j} &= \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ij}, \tilde{Y}_{1j}] - \tilde{Y}_{1i}, \tilde{Y}_{1j} \right], \text{ para } 2 \leq i < j \leq n-\kappa \\
A_{\kappa+1,\kappa+j} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{1j}, \tilde{Y}_{1,j+1}] + \tilde{Y}_{j,j+1}, \tilde{Y}_{1,j+1} \right], & \text{para } 2 \leq j < n-\kappa \\ [A_{\kappa+1,\kappa+2}, A_{\kappa+2,n}], & \text{para } j = n-\kappa; \end{cases}
\end{aligned}$$

Construção das matrizes de $\{B_{i,\kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n-\kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, n$)

se $\kappa = 1$,

$$B_{1,1+j} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{12}, \hat{Y}_{11}] + \hat{Y}_{12}, \tilde{Y}_{12} \right], & \text{para } j = 1 \\ -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{1j}, \hat{Y}_{1j}] - \hat{Y}_{11}, \tilde{Y}_{1j} \right], & \text{para } 2 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

se $1 < \kappa \leq n-1$, com qualquer $1 \leq j \leq n-\kappa$, tem-se

$$B_{i,\kappa+j} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[[\bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{1j}] + \hat{Y}_{2j}, \bar{Y}_{12} \right], & \text{para } i = 1 \\ -\frac{1}{2} \left[[\bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{2j}] - \hat{Y}_{1j}, \bar{Y}_{1i} \right], & \text{para } 2 \leq i \leq \kappa; \end{cases}$$

Construção das matrizes de $\{A_{n+i,n+j} : 1 \leq i < j \leq \kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, 1$)

se $\kappa = 2$,

$$A_{n+1,n+2} = \frac{1}{2} \left[[\bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{11}] - \hat{Y}_{21}, \hat{Y}_{11} \right]$$

se $2 < \kappa \leq n$,

$$\begin{aligned}
A_{n+i,n+j} &= -\frac{1}{2} \left[[\bar{Y}_{ij}, \bar{Y}_{1j}] + \bar{Y}_{1i}, \bar{Y}_{1j} \right], \text{ para } 2 \leq i < j \leq \kappa \\
A_{n+1,n+j} &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[[\bar{Y}_{1j}, \bar{Y}_{1,j+1}] - \bar{Y}_{j,j+1}, \bar{Y}_{1,j+1} \right], & \text{para } 2 \leq j < \kappa \\ [A_{n+1,n+2}, A_{n+2,n+\kappa}], & \text{para } j = \kappa; \end{cases}
\end{aligned}$$

Construção das matrizes de $\{A_{n+\kappa+i,n+\kappa+j} : 1 \leq i < j \leq n-\kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = n-1, n$)

se $\kappa = n-2$,

$$A_{2n-1,2n} = \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{12}, \hat{Y}_{11}] - \hat{Y}_{12}, \hat{Y}_{11} \right]$$

se $0 \leq \kappa < n-2$,

$$\begin{aligned}
A_{n+\kappa+i,n+\kappa+j} &= -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ij}, \tilde{Y}_{1j}] + \tilde{Y}_{1i}, \tilde{Y}_{1j} \right], \text{ para } 2 \leq i < j \leq n-\kappa \\
A_{n+\kappa+1,n+\kappa+j} &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{1j}, \tilde{Y}_{1,j+1}] - \tilde{Y}_{j,j+1}, \tilde{Y}_{1,j+1} \right], & \text{para } 2 \leq j < n-\kappa \\ [A_{n+\kappa+1,n+\kappa+2}, A_{n+\kappa+2,2n}], & \text{para } j = n-\kappa; \end{cases}
\end{aligned}$$

Construção das matrizes de $\{B_{n+i,n+\kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n-\kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, n$)

se $\kappa = 1$,

$$B_{n+1,n+1+j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \tilde{Y}_{12}, \hat{Y}_{11} \\ \tilde{Y}_{12}, \tilde{Y}_{12} \end{array} \right] - \hat{Y}_{12}, \tilde{Y}_{12}, & \text{para } j = 1 \\ \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \tilde{Y}_{1j}, \hat{Y}_{1j} \\ \tilde{Y}_{1j}, \tilde{Y}_{1j} \end{array} \right] + \hat{Y}_{11}, \tilde{Y}_{1j}, & \text{para } 2 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

se $1 < \kappa \leq n-1$, com qualquer $1 \leq j \leq n-\kappa$, tem-se

$$B_{n+i,n+\kappa+j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{1j} \\ \bar{Y}_{12}, \bar{Y}_{12} \end{array} \right] - \hat{Y}_{2j}, \bar{Y}_{12}, & \text{para } i = 1 \\ \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \bar{Y}_{12}, \hat{Y}_{2j} \\ \bar{Y}_{12}, \bar{Y}_{1i} \end{array} \right] + \hat{Y}_{1j}, \bar{Y}_{1i}, & \text{para } 2 \leq i \leq \kappa; \end{cases}$$

Construção de $\{E_{2n+i,2n+\kappa+j} - E_{2n+j,2n+\kappa+i} : 1 \leq i < j \leq \kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, 1$)

com qualquer $2 \leq \kappa \leq n$, para $1 \leq i < j \leq \kappa$ tem-se

$$E_{2n+i,2n+\kappa+j} - E_{2n+j,2n+\kappa+i} = \frac{1}{2} (\bar{Y}_{ij} + A_{ij} - A_{n+i,n+j});$$

Construção de $\{E_{2n+2\kappa+i,3n+\kappa+j} - E_{2n+2\kappa+j,3n+\kappa+i} : 1 \leq i < j \leq n-\kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = n-1, n$)

com qualquer $0 \leq \kappa \leq n-2$, para $1 \leq i < j \leq n-\kappa$ tem-se

$$E_{2n+2\kappa+i,3n+\kappa+j} - E_{2n+2\kappa+j,3n+\kappa+i} = \frac{1}{2} (\tilde{Y}_{ij} + A_{\kappa+i,\kappa+j} - A_{n+\kappa+i,n+\kappa+j});$$

Construção das matrizes de $\{E_{4n+i,4n+\kappa+j} : 1 \leq i \leq \kappa, 1 \leq j \leq n-\kappa\}$:

(conjunto vazio quando $\kappa = 0, n$)

com qualquer $1 \leq \kappa \leq n-1$, para $1 \leq i \leq \kappa$ e $1 \leq j \leq n-\kappa$ tem-se

$$E_{4n+i,4n+\kappa+j} = \frac{1}{2} (\hat{Y}_{ij} + B_{i,\kappa+j} - B_{n+i,n+\kappa+j}). \quad \blacksquare$$

5.3.2 Controlabilidade do Rolamento de $\text{Sp}(2m)$

Dado que $\text{Sp}(2m)$ é conexo, aqui $U, W \in \text{Sp}(2m)$ e $Z \in \mathcal{L}(\text{Sp}(2m)) = \mathfrak{sp}(2m)$.

Podemos também deduzir rapidamente que

$$\mathfrak{sp}(2m) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \hline \Omega_3 & -\Omega_1^\top \end{array} \right] : \Omega_1 \in \mathfrak{gl}(m) \text{ e } \Omega_2, \Omega_3 \in \text{Sym}(m) \right\},$$

onde $\text{Sym}(m)$ denota o conjunto das matrizes reais de ordem m simétricas.

Tome-se uma qualquer função de controlo, particionada na forma exposta acima,

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \hline \Omega_3 & -\Omega_1^\top \end{array} \right], \text{ onde } \Omega_1 = [\bar{\omega}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}, \Omega_2 = [\tilde{\omega}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \text{ e } \Omega_3 = [\hat{\omega}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (5.16)$$

Com igual decomposição na matriz $Z = \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & Z_2 \\ \hline Z_3 & -Z_1^\top \end{array} \right]$ as equações da cinemática

(5.7) ficam equivalentes ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{U} = -\Omega U \\ \dot{W} = \Omega W \\ \dot{Z}_1 = 2\Omega_1 \\ \dot{Z}_2 = 2\Omega_2 \\ \dot{Z}_3 = 2\Omega_3 \end{cases} \quad (5.17)$$

À semelhança do que fizemos no caso referente a $O_\kappa(n)$, de modo a podermos aplicar a teoria disponível sobre controlabilidade em grupos de Lie matriciais, vamos começar por reescrever o sistema (5.17) com a forma dum sistema de controlo afim invariante (à direita), recorrendo à associação dos estados (U, W, Z_1, Z_2, Z_3) com a seguinte matriz

$$X = \text{diag} \left(U, W, \left[\begin{array}{c|c} I_m & Z_1 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_m & Z_2 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_m & Z_3 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \right). \quad (5.18)$$

O subconjunto de $GL(5n)$ formado todas as matrizes X com esta estrutura, onde $U, W \in \text{Sp}(2m)$, $Z_1 \in \mathfrak{gl}(m)$ e $Z_2, Z_3 \in \text{Sym}(m)$, será denotado por $G = \text{Sp}(2m)^2 \times \mathfrak{gl}(m) \times \text{Sym}(m)^2$. A demonstração da proposição seguinte pode ser construída com um raciocínio análogo ao que foi feito nas Proposições 5.1 e 5.2.

Proposição 5.3 1. $G = \text{Sp}(2m)^2 \times \mathfrak{gl}(m) \times \text{Sym}(m)^2$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(5n)$.

2. A álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ do grupo $G = \text{Sp}(2m)^2 \times \mathfrak{gl}(m) \times \text{Sym}(m)^2$ é formada pelas matrizes da forma

$$\text{diag} \left(\left[\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \hline \Omega_3 & -\Omega_1^\top \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} \Omega_4 & \Omega_5 \\ \hline \Omega_6 & -\Omega_4^\top \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_m & \Omega_7 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_m & \Omega_8 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_m & \Omega_9 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right] \right),$$

com $\Omega_1, \Omega_4, \Omega_7 \in \mathfrak{gl}(m)$, $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6, \Omega_8, \Omega_9 \in \text{Sym}(m)$.

Com a função de controlo introduzida em (5.16) e a matriz X definida em (5.18), podemos confirmar diretamente que o sistema de controlo em análise pode ser reescrito como

$$\dot{X} = \text{diag} \left(-\Omega, \Omega, \left[\begin{array}{c|c} 0_m & 2\Omega_1 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_m & 2\Omega_2 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 0_m & 2\Omega_3 \\ \hline 0 & 0_m \end{array} \right] \right) X. \quad (5.19)$$

A fim de aliviarmos a exposição, vamos agora introduzir as seguintes notações: com quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} C_{ij} &= E_{ij} - E_{m+i, m+j} \\ B_{ij}^{\rightarrow} &= E_{i, m+j} + E_{j, m+i} \\ B_{ij}^{\downarrow} &= E_{m+i, j} + E_{m+j, i}. \end{aligned}$$

Definindo-se também

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{ij} &= -C_{ij} + C_{n+i, n+j} + 2E_{2n+i, 5m+j} \\ \tilde{Y}_{ij} &= \begin{cases} -\frac{1}{2}B_{ii}^{\rightarrow} + \frac{1}{2}B_{n+i, n+i}^{\rightarrow} + B_{3n+i, 3n+i}^{\rightarrow}, & \text{se } i = j \\ -B_{ij}^{\rightarrow} + B_{n+i, n+j}^{\rightarrow} + 2B_{3n+i, 3n+j}^{\rightarrow}, & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \hat{Y}_{ij} &= \begin{cases} -\frac{1}{2}B_{ii}^{\downarrow} + \frac{1}{2}B_{n+i, n+i}^{\downarrow} + B_{4n+i, 4n+i}^{\rightarrow}, & \text{se } i = j \\ -B_{ij}^{\downarrow} + B_{n+i, n+j}^{\downarrow} + 2B_{4n+i, 4n+j}^{\rightarrow}, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \end{aligned}$$

a equação (5.19) pode ainda escrever-se na forma seguinte:

$$\dot{X} = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq m} \bar{\omega}_{ij} \bar{Y}_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \tilde{\omega}_{ij} \tilde{Y}_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \hat{\omega}_{ij} \hat{Y}_{ij} \right) X. \quad (5.20)$$

Este sistema, onde $(\bar{\omega}_{11}, \dots, \hat{\omega}_{m, m}) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$, é um sistema de controlo afim invariante à direita, homogéneo, a evoluir num grupo de Lie conexo, pelo que sua controlabilidade pode ser analisada com recurso ao Lema 5.2.

Teorema 5.3 *Para todo $m \geq 1$, o sistema de controlo (5.20), referente ao rolamento de $\text{Sp}(2m)$ sobre o espaço afim ao seu espaço tangente no ponto $P_0 = I_n$, é controlável no grupo de Lie $G = \text{Sp}(2m)^2 \times \mathfrak{gl}(m) \times \text{Sym}(m)^2$.*

Demonstração. Sabemos que o sistema é controlável em G se e só se

$$\left\{ \{ \bar{Y}_{ij} : 1 \leq i, j \leq m \} \cup \{ \tilde{Y}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \cup \{ \hat{Y}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \right\}_{L.A.} = \mathcal{L}(G).$$

Evidentemente, para garantirmos a igualdade anterior é suficiente mostrarmos que todo o elemento da seguinte base de $\mathcal{L}(G)$,

$$\begin{aligned} & \{ C_{ij} : 1 \leq i, j \leq m \} \cup \{ B_{ij}^{\rightarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \cup \{ B_{ij}^{\downarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \\ & \cup \{ C_{n+i, n+j} : 1 \leq i, j \leq m \} \cup \{ B_{n+i, n+j}^{\rightarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \cup \{ B_{n+i, n+j}^{\downarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \\ & \cup \{ E_{2n+i, 5m+j} : 1 \leq i, j \leq m \} \cup \{ B_{3n+i, 3n+j}^{\rightarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \} \cup \{ B_{4n+i, 4n+j}^{\rightarrow} : 1 \leq i \leq j \leq m \}, \end{aligned}$$

pode ser obtido a partir de combinações lineares das matrizes \bar{Y}_{ij} , \tilde{Y}_{ij} e \hat{Y}_{ij} e dos seus produtos de Lie. Precisamos, então, somente de apresentar a maneira

como cada matriz de cada um dos subconjuntos da base acima pode ser assim construída.

Mas a igualdade $[E_{ij}, E_{fl}] = \delta_{jf}E_{il} - \delta_{il}E_{fj}$ permite-nos construir as seguintes fórmulas de comutação: se $1 \leq i, j, f, l \leq m$,

$$\begin{aligned} [C_{ij}, C_{fl}] &= \delta_{jf}C_{il} - \delta_{il}C_{fj} \\ [C_{ij}, B_{fl}^{\rightarrow}] &= \delta_{jf}B_{il}^{\rightarrow} + \delta_{jl}B_{if}^{\rightarrow} \\ [C_{ij}, B_{fl}^{\downarrow}] &= -\delta_{if}B_{lj}^{\downarrow} - \delta_{il}B_{fj}^{\downarrow} \\ [B_{ij}^{\rightarrow}, B_{fl}^{\downarrow}] &= \delta_{jf}C_{il} + \delta_{il}C_{jf} + \delta_{jl}C_{if} + \delta_{if}C_{jl}; \end{aligned}$$

e fazendo-se uso destas fórmulas podemos verificar diretamente que:

1. com $1 \leq i, j \leq m$,

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \begin{cases} -\frac{1}{4} \left[[\bar{Y}_{ii}, \tilde{Y}_{ii}] - 2\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii} \right], & \text{se } i = j \\ -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii}] - \bar{Y}_{ii}, \bar{Y}_{ij} \right], & \text{se } i \neq j; \end{cases} \\ C_{n+i, n+j} &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left[[\bar{Y}_{ii}, \tilde{Y}_{ii}] + 2\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii} \right], & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii}] + \bar{Y}_{ii}, \bar{Y}_{ij} \right], & \text{se } i \neq j \end{cases}; \end{aligned}$$

2. com $1 \leq i \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} B_{ij}^{\rightarrow} &= -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii}] - \bar{Y}_{ii}, \tilde{Y}_{ij} \right]; \\ B_{ij}^{\downarrow} &= \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{jj}, \hat{Y}_{jj}] - \bar{Y}_{jj}, \hat{Y}_{ij} \right]; \\ B_{n+i, n+j}^{\rightarrow} &= \frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{ii}, \hat{Y}_{ii}] + \bar{Y}_{ii}, \tilde{Y}_{ij} \right]; \\ B_{n+i, n+j}^{\downarrow} &= -\frac{1}{2} \left[[\tilde{Y}_{jj}, \hat{Y}_{jj}] + \bar{Y}_{jj}, \hat{Y}_{ij} \right]; \\ E_{2n+i, 5m+j} &= \frac{1}{2} (\bar{Y}_{ij} + C_{ij} - C_{n+i, n+j}); \\ B_{3n+i, 3n+i}^{\rightarrow} &= \begin{cases} \tilde{Y}_{ii} + \frac{1}{2}B_{ii}^{\rightarrow} - \frac{1}{2}B_{n+i, n+i}^{\rightarrow}, & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2} (\tilde{Y}_{ij} + B_{ij}^{\rightarrow} - B_{n+i, n+j}^{\rightarrow}), & \text{se } i \neq j \end{cases}; \\ B_{4n+i, 4n+j}^{\rightarrow} &= \begin{cases} \hat{Y}_{ii} + \frac{1}{2}B_{ii}^{\downarrow} - \frac{1}{2}B_{n+i, n+i}^{\downarrow}, & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2} (\hat{Y}_{ij} + B_{ij}^{\downarrow} - B_{n+i, n+j}^{\downarrow}), & \text{se } i \neq j \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto a demonstração está concluída. ■

Capítulo 6

Interpolação Suave em Subvariedades de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$ com Recurso a Rolamentos

Vamos mostrar aqui que rolamentos sem deslize nem torção podem ser usados como uma ferramenta para resolver problemas de interpolação em variedades. Especificamente, o objetivo que temos neste capítulo final é a aplicação de alguma da teoria dos capítulos anteriores na resolução dum problema de interpolação suave com condições de fronteira, em subvariedades pseudo-Riemannianas de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$.

Existem vários métodos clássicos para gerar curvas interpoladoras em espaços Euclidianos, sendo o algoritmo de De Casteljaun um dos mais conhecidos. Problemas de interpolação em variedades Riemannianas gerais foram também já estudados por vários autores, a partir da publicação Noakes *et al.* [36]. Os trabalhos realizados a este respeito produziram apropriadas generalizações dos métodos clássicos, encontrando-se em Crouch *et al.* [5] um exemplo disto. No entanto, os métodos que foram desenvolvidos têm difícil implementação prática, na medida em que, por norma, eles não produzem curvas interpoladoras definidas de forma explícita. O algoritmo que vamos apresentar procura essencialmente contribuir para se ultrapassar este obstáculo.

Problemas de interpolação em variedades são, em geral, difíceis de resolver numa forma intrínseca. O que proporemos é um procedimento extrínseco que consiste em transferir o problema para outra variedade mais simples. Esta técnica combina um rolamento sem deslize nem torção com um difeomorfismo e visa especialmente tornar o método menos propenso a distorções, comparativamente

com a alternativa básica em que se utilizaria somente um difeomorfismo. Algumas das ideias usadas aqui são inspiradas em Jupp *et al.* [17], um artigo pioneiro sobre interpolação na esfera bidimensional. Posteriormente a esta publicação e seguindo a mesma linha de raciocínio, surgiram já métodos interpoladores explícitos para a esfera n -dimensional, em Huper *et al.* [13], para o grupo das rotações $\text{SO}(n)$ e variedades de Grassmann, em Huper *et al.* [14], e para os elipsoides, em Krzysztof *et al.* [24].

Contrariamente ao que acontece nos últimos trabalhos citados, o método que vamos introduzir não está confinado a uma variedade específica. Na verdade, a implementação do algoritmo será possível com qualquer subvariedade de \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, desde que ela cumpra um certo requisito e a saibamos rolar. Destacamos ainda, por fim, que é na interpolação em variedades cujos rolamentos só são conhecidos quando mergulhadas num destes espaços ambiente, como é o caso dos hiperboloides e dos grupos de Lie quadráticos em geral, que se manifesta a especial importância do que agora acrescentamos à teoria de interpolação. Em Shen *et al.* [40] encontra-se um exemplo concreto da utilidade prática desta teoria, com o caso particular do grupo $\text{SO}(3)$, no planeamento do movimento dum robot.

6.1 Formulação do Problema e sua Resolução

Na presente secção M designará uma subvariedade pseudo-Riemanniana de \overline{M} , podendo esta variedade ambiente ser \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Além disto, consoante se assuma $\overline{M} := \mathbb{R}_\kappa^n$ ou $\overline{M} := (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, estabeleceremos então $\overline{G} := \text{SO}_\kappa^I(n) \times \mathbb{R}^n$ ou $\overline{G} := \overline{G}_J^I$, respetivamente, considerando-se estes dois grupos de isometrias definidos tal como nas Secções 2.4 e 2.5.

Vamos instituir como hipótese que o subgrupo de \overline{G} das isometrias lineares mantém M invariante, ou seja, com qualquer isometria linear $h \in \overline{G}$ teremos $h * M = M$. São exemplos de subvariedades que cumprem esta condição as hiperquádricas $H_\kappa^n(r) \subseteq \mathbb{R}_{\kappa+1}^{n+1}$ e $S_\kappa^n(r) \subseteq \mathbb{R}_\kappa^{n+1}$, bem como os grupos de Lie quadráticos $G_J \subseteq (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$.

Com este contexto, começamos por enunciar o problema que pretendemos resolver, que é um problema de interpolação suave em M com condições de fronteira.

Problema 6.1 *Dados um conjunto de pontos distintos $p_i \in M$, com $i = 0, \dots, \nu$, uma sequência discreta de tempos fixos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\nu = \tau$ e dois vetores tangentes $\xi_0 \in T_{p_0}M$ e $\xi_\nu \in T_{p_\nu}M$, determine uma curva $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$ de*

classe C^2 satisfazendo o seguinte:

$$\gamma(t_i) = p_i, \forall i \in \{0, \dots, \nu\}, \quad \dot{\gamma}(0) = \xi_0 \quad e \quad \dot{\gamma}(\tau) = \xi_\nu.$$

Passamos de imediato à apresentação dum método para a resolver o problema anterior. A ideia básica sob o procedimento que propomos consiste em transferir os dados da variedade M para $T_{p_0}^{\text{aff}}M$, depois resolver o problema neste espaço e por fim trazer de volta para M a solução calculada em $T_{p_0}^{\text{aff}}M$. Relembramos que num espaço Euclidiano o problema enunciado pode ser facilmente resolvido com o cálculo de uma spline cúbica, por exemplo, através do clássico método de De Casteljaeu (ver, por exemplo, [7]). A passagem entre M e $T_{p_0}^{\text{aff}}M$ é feita com o processo de rolamento e projeção. Esta técnica combina um rolamento sem deslize nem torção com um difeomorfismo. Na prática, para evitarmos as distorções (que surgem com o difeomorfismo), com a inclusão do rolamento procuramos fazer com que os pontos p_i se concentrem perto da posição p_0 , na medida possível, antes de serem projetados em $T_{p_0}^{\text{aff}}M$.

A execução do algoritmo interpolador que enunciamos de seguida assenta em duas escolhas auxiliares prévias. A primeira é a escolha de uma aplicação rolamento suave $g : [0, \tau] \rightarrow \overline{G}$, cumprindo $g(0) = id$, em que a curva de rolamento $\alpha : [0, \tau] \rightarrow M$ verifica $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(\tau) = p_\nu$. O ideal é que esta escolha seja feita de modo que cada ponto p_i fique “próximo” de $\alpha(t_i)$. A segunda escolha necessária é um difeomorfismo $\phi : \Omega \subseteq M \rightarrow \phi(\Omega) \subseteq T_{p_0}^{\text{aff}}M$, onde Ω é um aberto de M e $p_0 \in \Omega$, satisfazendo os requisitos $\phi(p_0) = p_0$ e $d\phi_{p_0} = id$. Após fixarmos g e ϕ , os 4 passos abaixo são automáticos.

Algoritmo 6.1 (para resolver o Problema 6.1)

Passo 1 - envio dos dados de fronteira para $T_{p_0}^{\text{aff}}M$.

Rolar M sobre $T_{p_0}^{\text{aff}}M$ por meio da aplicação g . Este rolamento cria uma curva suave $\alpha_{\text{dev}} : [0, \tau] \rightarrow T_{p_0}^{\text{aff}}M$ e permite enviar os dados de fronteira de M para $T_{p_0}^{\text{aff}}M$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} p_0 = \alpha(0) \in M &\rightsquigarrow q_0 := \alpha_{\text{dev}}(0) = p_0 \in T_{p_0}^{\text{aff}}M \\ p_\nu = \alpha(\tau) \in M &\rightsquigarrow q_\nu := \alpha_{\text{dev}}(\tau) \in T_{p_0}^{\text{aff}}M \\ \xi_0 \in T_{p_0}M &\rightsquigarrow \eta_0 := dg(0)(\xi_0) = \xi_0 \in T_{q_0}(T_{p_0}^{\text{aff}}M) \\ \xi_\nu \in T_{p_\nu}M &\rightsquigarrow \eta_\nu := dg(\tau)(\xi_\nu) \in T_{q_\nu}(T_{p_0}^{\text{aff}}M) \end{aligned}$$

Passo 2 - envio dos pontos intermédios para $T_{p_0}^{\text{aff}}M$.

Combinar a projeção dada por ϕ com o rolamento dado por g para “desenrolar” os

restantes dados $\{p_1, \dots, p_{\nu-1}\}$ em $T_{p_0}^{\text{aff}} M$, de maneira que:

$$p_i \rightsquigarrow q_i := \phi(g(t_i) * p_i - \alpha_{\text{dev}}(t_i) + p_0) + \alpha_{\text{dev}}(t_i) - p_0. \quad (6.1)$$

Passo 3 - interpolar em $\mathbb{R}^{\dim(M)}$ com os dados transferidos para $T_{p_0}^{\text{aff}} M$. Resolver o novo problema de interpolação em $T_{p_0}^{\text{aff}} M \cong \mathbb{R}^{\dim(M)}$, usando os dados $\{q_0, \dots, q_\nu; \eta_0, \eta_\nu\}$ no lugar de $\{p_0, \dots, p_\nu; \xi_0, \xi_\nu\}$. Isto gera uma curva interpoladora de classe C^2 , por exemplo uma spline cúbica, $\beta : [0, \tau] \rightarrow T_{p_0}^{\text{aff}} M$ com as seguintes propriedades:

$$\beta(t_i) = q_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, \nu\}, \quad \dot{\beta}(0) = \eta_0 \quad e \quad \dot{\beta}(\tau) = \eta_\nu.$$

Passo 4 - envio para M da curva interpoladora construída em $T_{p_0}^{\text{aff}} M$. “Enrolar” a curva β na variedade M , usando ϕ^{-1} enquanto M “desrola” ao longo da curva α , para produzir uma curva γ , definida pela seguinte fórmula explícita:

$$\gamma(t) := g(t)^{-1} \left(\phi^{-1}(\beta(t) - \alpha_{\text{dev}}(t) + p_0) + \alpha_{\text{dev}}(t) - p_0 \right). \quad (6.2)$$

No teorema que se segue confirmaremos que este algoritmo produz efetivamente uma solução para o problema formulado, mas antes disso vamos tecer algumas considerações.

Observação 6.1 A fórmula (6.1) para calcular os pontos projetados q_i faz sentido. De facto, em virtude de termos assumido a hipótese de que a “parte rotacional” das isometrias de \bar{G} mantém M invariante, no rolamento de M sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} M$ a “parte translacional” da aplicação rolamento é dada pela expressão $\alpha_{\text{dev}}(t) - p_0$. Portanto $g(t_i) * p_i - \alpha_{\text{dev}}(t_i) + p_0$ pertence a M e o ponto q_i está em $T_{p_0}^{\text{aff}} M$.

Sem prejuízo da observação anterior, reparamos, contudo, que o difeomorfismo ϕ tem que ser escolhido de modo que cada $g(t_i) * p_i - \alpha_{\text{dev}}(t_i) + p_0$ pertence Ω e a curva interpoladora β tem que ser tal que $\beta(t) - \alpha_{\text{dev}}(t) + p_0$ está dentro de $\phi(\Omega)$ em todo o instante $t \in [0, \tau]$. Notamos ainda, por outro lado, que não é necessário que todos os pontos p_i pertençam a Ω , traduzindo-se isto numa importante “mais-valia” quando não existe disponível um difeomorfismo (carta local) que contenha todos os pontos p_i no seu domínio.

Teorema 6.1 A curva $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$ definida em (6.2) resolve o Problema 6.1.

Demonstração. A garantia de que a curva γ é de classe C^2 advém por construção, pois ϕ e g são suaves e β é de classe C^2 . As restantes condições vão ser verificadas separadamente para as duas possibilidades de \bar{M} .

Caso $\overline{M} = \mathbb{R}_\kappa^n$. Suponhamos que $g(t) = (R^{-1}(t), s(t)) \in \text{SO}_\kappa^1(n) \times \mathbb{R}^n$. Uma vez que as hipóteses adotadas implicam $s(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) - p_0$, claramente temos desde já que a curva de rolamento pode ser definida por $\alpha(t) = R(t)p_0$.

Em virtude de $g(t)^{-1} = (R(t), -R(t)s(t))$, por substituição direta em (6.2) obtemos

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= R(t) (\phi^{-1}(\beta(t) - s(t)) + s(t)) - R(t)s(t) \\ &= R(t)\phi^{-1}(\beta(t) - s(t))\end{aligned}\tag{6.3}$$

Assim, dado que a fórmula (6.1) também é válida se $i = 0$ ou $i = \nu$, com qualquer $i = 0, 1, \dots, \nu$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}\gamma(t_i) &= R(t_i)\phi^{-1}(\beta(t_i) - s(t_i)) \\ &= R(t_i)\phi^{-1}(\phi(R^{-1}(t_i)p_i)) \\ &= p_i.\end{aligned}$$

Com o objetivo de comprovarmos que γ tem as velocidades inicial e final prescritas, observemos em primeiro lugar que de (6.3) resulta imediatamente

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{R}(t)\phi^{-1}(\beta(t) - s(t)) + R(t) d\phi^{-1}(\dot{\beta}(t) - \dot{s}(t)).$$

Note-se também, à parte disto, que da hipótese de não-deslize do rolamento resulta a igualdade $\dot{s}(t) = R^{-1}(t)\dot{\alpha}(t)$. Então, podemos afirmar o seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(0) &= \dot{R}(0)\phi^{-1}(\beta(0) - s(0)) + R(0) d\phi^{-1}(\dot{\beta}(0) - \dot{s}(0)) \\ &= \dot{R}(0)\phi^{-1}(p_0) + \dot{\beta}(0) - \dot{s}(0) \\ &= \dot{R}(0)p_0 + \eta_0 - \dot{\alpha}(0) \\ &= \xi_0.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\tau) &= \dot{R}(\tau)\phi^{-1}(\beta(\tau) - s(\tau)) + R(\tau) d\phi^{-1}(\dot{\beta}(\tau) - \dot{s}(\tau)) \\ &= \dot{R}(\tau)\phi^{-1}(p_0) + R(\tau)(\dot{\beta}(\tau) - \dot{s}(\tau)) \\ &= \dot{R}(\tau)p_0 + R(\tau)\eta_\nu - \dot{\alpha}(\tau) \\ &= \xi_\nu.\end{aligned}$$

Caso $\overline{M} = (\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Suponhamos que $g(t) = (U(t), W(t), Z(t)) \in \overline{G}_J^1$. Analogamente ao caso anterior, em virtude de $Z(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) - p_0$, a curva de rolamento pode ser definida por $\alpha(t) = U^{-1}(t)p_0W(t)$.

Uma vez que $g(t)^{-1} = (U^{-1}(t), W^{-1}(t), -U^{-1}(t)Z(t)W(t))$, por substituição em (6.2) obtemos

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= U^{-1}(t) (\phi^{-1}(\beta(t) - Z(t)) + Z(t)) W(t) - U^{-1}(t)Z(t)W(t) \\ &= U^{-1}(t)\phi^{-1}(\beta(t) - Z(t))W(t)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Portanto com qualquer $i = 0, 1, \dots, \nu$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}\gamma(t_i) &= U^{-1}(t_i)\phi^{-1}(\beta(t_i) - Z(t_i))W(t_i) \\ &= U^{-1}(t_i)\phi^{-1}(\phi(U(t_i)p_iW^{-1}(t_i))) W(t_i) \\ &= p_i.\end{aligned}$$

Quanto às velocidades, de (6.4) com cálculos diretos obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= U^{-1}(t) \left(d\phi^{-1}(\dot{\beta}(t) - \dot{Z}(t)) - \dot{U}(t)U^{-1}(t)\phi^{-1}(\beta(t) - Z(t)) \right) W(t) \\ &\quad + U^{-1}(t)\phi^{-1}(\beta(t) - Z(t))\dot{W}(t),\end{aligned}$$

e da condição de não-deslize do rolamento tiramos $\dot{Z}(t) = U(t)\dot{\alpha}(t)W^{-1}(t)$. Logo temos também o seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(0) &= d\phi^{-1}(\dot{\beta}(0) - \dot{Z}(0)) - \dot{U}(0)\phi^{-1}(\beta(0)) + \phi^{-1}(\beta(0))\dot{W}(0) \\ &= \dot{\beta}(0) - \dot{Z}(0) - \dot{U}(0)\phi^{-1}(p_0) + \phi^{-1}(p_0)\dot{W}(0) \\ &= \eta_0 - \dot{\alpha}(0) - \dot{U}(0)p_0 + p_0\dot{W}(0) \\ &= \xi_0.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\tau) &= U^{-1}(\tau) \left(d\phi^{-1}(\dot{\beta}(\tau) - \dot{Z}(\tau)) - \dot{U}(\tau)U^{-1}(\tau)\phi^{-1}(\beta(\tau) - Z(\tau)) \right) W(\tau) \\ &\quad + U^{-1}(\tau)\phi^{-1}(\beta(\tau) - Z(\tau))\dot{W}(\tau) \\ &= U^{-1}(\tau) \left(\dot{\beta}(\tau) - \dot{Z}(\tau) - \dot{U}(\tau)U^{-1}(\tau)p_0 \right) W(\tau) + U^{-1}(\tau)p_0\dot{W}(\tau) \\ &= U^{-1}(\tau)\eta_\nu W(\tau) - \dot{\alpha}(\tau) - U^{-1}(\tau)\dot{U}(\tau)U^{-1}(\tau)p_0W(\tau) + U^{-1}(\tau)p_0\dot{W}(\tau) \\ &= U^{-1}(\tau)\eta_\nu W(\tau) \\ &= \xi_\nu.\end{aligned}$$

■

Observação 6.2 *Se percorrermos a demonstração anterior verificamos que, a respeito do rolamento, nunca foi usada a condição de não-torção e que a condição*

de não-deslize só foi usada em torno dos instantes inicial e final. Portanto se existissem deslizes em instantes intermédios ou torções, ainda assim o algoritmo produziria uma curva interpoladora com as condições requeridas. A razão de não admitirmos tais movimentos prende-se com o facto de que isso aumentaria a exposição ao risco de distorções, que diminuem a “qualidade” da solução construída.

6.2 Implementação do Algoritmo Interpolador

O objetivo desta secção é fornecer os ingredientes fundamentais para gerar curvas interpoladoras C^2 -suaves nas hiperquádricas $H_0^n(r)$ e $H_1^n(r)$. Isto é, para cada um dos dois espaços pseudo-hiperbólicos, pretendemos disponibilizar de forma explícita uma possibilidade de aplicação rolamento g e de difeomorfismo ϕ conformes ao Algoritmo 6.1, tendo em vista a futura implementação prática deste método.

Do Teorema 6.1 resulta a seguinte consequência particular: quando temos $M = H_\kappa^n(r)$ [respetivamente, $M = S_\kappa^n(r)$ ou $M = G_J$], se fixarmos uma função de controlo suave de modo que as equações da cinemática que figuram no Teorema 3.1 [respetivamente, Teorema 3.3 / Teorema 4.1] determinam uma aplicação rolamento g em que a curva de rolamento α une os pontos p_0 e p_ν , então a curva γ definida pela fórmula (6.2) com tais α e g , juntamente com um difeomorfismo conveniente ϕ , resolve o Problema 6.1. Será com base neste raciocínio que iremos abordar a questão do rolamento a utilizar. No entanto, a função de controlo terá ainda, antes de tudo o mais, de ser tal que as equações da cinemática possam ser resolvidas explicitamente.

6.2.1 Interpolação em $H_0^n(r)$

Aqui pretendemos resolver o Problema 6.1 para $M = H_0^n(r)$, encarando-se esta hiperquádrica como em (3.3), através do Algoritmo 6.1. Sem perda de generalidade, adotamos $p_0 = (r, 0, \dots, 0)$. Quando tal não acontece a contrariedade pode ser ultrapassada “girando” a variedade. Basicamente, faz-se uma rotação prévia com esse sentido, a seguir executa-se a interpolação com os dados rodados e no fim reverte-se a rotação feita inicialmente. A existência desta rotação é garantida pela Proposição 3.1. Duas escolhas há então para fazer: a aplicação rolamento $g : [0, \tau] \rightarrow \text{SO}_1^1(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$, $t \rightsquigarrow g(t) = (R^{-1}(t), s(t))$, com curva de rolamento $t \rightsquigarrow \alpha(t) = R(t)p_0$ tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(\tau) = p_\nu$, e o difeomorfismo $\phi : \Omega \subseteq H_0^n(r) \rightarrow \phi(\Omega) \subseteq T_{p_0}^{\text{aff}} H_0^n(r)$ respeitando $\phi(p_0) = p_0$ e $d\phi_{p_0} = id$.

Relativamente à escolha do rolamento, vamos selecionar a opção mais fácil e evidente, que é o rolamento ao longo dum arco de geodésica. Ou seja, vamos escolher a aplicação rolamento g correspondente às equações da cinemática (3.7) com uma função de controlo u constante. Precisamos, então, de encontrar um vetor constante não-nulo $u \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, satisfazendo $\langle u, p_0 \rangle = 0$, tal que a curva de rolamento α por ele determinada uma p_0 a p_ν entre o instante inicial $t = 0$ e o instante final $t = \tau$. Uma vez que $H_0^n(r)$ tem índice zero e $u \in T_{p_0}H_0^n(r)$, este vetor é necessariamente tipo-espaço. Portanto, decorre da Proposição 3.10 que a curva α será a geodésica dada por

$$\alpha(t) = p_0 \cosh(r\|u\|t) + \frac{ru}{\|u\|} \sinh(r\|u\|t).$$

A partir deste conhecimento, para além da trivialidade $\alpha(0) = p_0$, podemos deduzir a equivalência $\alpha(\tau) = p_\nu \Leftrightarrow u = \frac{\|u\|}{r} \frac{p_\nu - p_0 \cosh(r\|u\|\tau)}{\sinh(r\|u\|\tau)}$. Mas com qualquer u desta forma temos $\langle u, p_0 \rangle = 0$ se e só se $\langle p_0, p_\nu \rangle = -r^2 \cosh(r\|u\|\tau)$. Assim podemos concluir que o (único) vetor procurado é

$$u := \frac{\theta}{r^2\tau} \frac{p_\nu - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)}, \text{ onde } 0 \neq \theta := \operatorname{arccosh} \left(\frac{\langle p_0, p_\nu \rangle}{-r^2} \right). \quad (6.5)$$

Note-se que este valor θ existe efetivamente, pois acontece que $\langle p_0, p_\nu \rangle < -r^2$.

Em suma, com o vetor u introduzido em (6.5), se considerarmos a matriz $A := (-up_0^\top + p_0u^\top) J_1$, a aplicação rolamento g que escolhemos é dada por

$$\begin{aligned} g(t) &= (e^{-At}, r^2ut) \\ &= \left(I - \frac{\sinh(\frac{\theta}{\tau}t)}{\frac{\theta}{\tau}} A - \frac{1 - \cosh(\frac{\theta}{\tau}t)}{(\frac{\theta}{\tau})^2} A^2, \frac{\theta}{\tau} \frac{p_\nu - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} t \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

tendo as curvas de rolamento (geodésica de $H_0^n(r)$) e de desenvolvimento (linha reta em $T_{p_0}^{\text{aff}}H_0^n(r)$) definidas por

$$\alpha(t) = p_0 \cosh\left(\frac{\theta}{\tau}t\right) + \frac{p_\nu - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} \sinh\left(\frac{\theta}{\tau}t\right) \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + \frac{\theta}{\tau} \frac{p_\nu - p_0 \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} t. \quad (6.7)$$

Vamos agora fixar um difeomorfismo ϕ com as condições exigidas. A nossa escolha corresponde à *projeção gnomónica* (ou *central*) de $H_0^n(r)$ em $T_{p_0}^{\text{aff}}H_0^n(r)$ (plano de equação cartesiana $x_1 = r$). Quer isto dizer que o difeomorfismo ϕ a cada ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H_0^n(r)$ associará o ponto $\phi(p) \in T_{p_0}^{\text{aff}}H_0^n(r)$ que se obtém intersecando a reta op , onde $o = (0, \dots, 0)$, com o plano $x_1 = r$. Uma vez que esta reta admite a equação vetorial $x = tp$, $t \in \mathbb{R}$, é evidente que tal

interseção ocorre (quando $t = \frac{r}{x_1}$) no ponto $(r, \frac{rx_2}{x_1}, \dots, \frac{rx_{n+1}}{x_1})$. Além disto, se repararmos que

$$\left(\frac{rx_2}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{rx_{n+1}}{x_1}\right)^2 = \frac{r^2}{x_1^2}(x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2) = r^2 \frac{x_1^2 - r^2}{x_1^2} < r^2,$$

constatamos que os pontos $\phi(p)$ pertencem à bola aberta $B(o, r)$, de centro na origem e raio r , do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n \simeq T_{p_0}^{\text{aff}} H_0^n(r)$. A correspondência estabelecida é bijetiva, mas vamos omitir a prova para não sobrecarregarmos a exposição. Inversamente, para cada ponto (y_1, \dots, y_n) da bola $B(o, r)$, com o mesmo raciocínio, também nos é possível verificar que a reta que passa pela origem e por (r, y_1, \dots, y_n) intersesta $H_0^n(r)$ no ponto $\frac{r}{\sqrt{r^2 - y_1^2 - \dots - y_n^2}}(r, y_1, \dots, y_n)$.

Resumindo, o difeomorfismo que escolhemos é

$$\begin{aligned} \phi : H_0^n(r) &\longrightarrow \left\{ (r, y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^n y_i^2 < r^2 \right\}, \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\rightsquigarrow r \left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1} \right) \end{aligned}$$

tendo a inversa

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \left\{ (r, y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^n y_i^2 < r^2 \right\} &\longrightarrow H_0^n(r) \\ (r, y_1, \dots, y_n) &\rightsquigarrow \frac{r}{\sqrt{r^2 - y_1^2 - \dots - y_n^2}}(r, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

(Ver a figura 6.1).

Observamos ainda que se tem claramente $\phi(p_0) = (r, 0, \dots, 0) = p_0$ e que $d\phi_{p_0} : T_{p_0} H_0^n(r) \longrightarrow T_{p_0} H_0^n(r)$ é a aplicação identidade. De facto, com qualquer $v \in T_{p_0} H_0^n(r)$, se δ é uma curva em $H_0^n(r)$, definida por $\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_{n+1}(t))$, tal que $\delta(0) = p_0$ e $\dot{\delta}(0) = v$, então

$$(\phi \circ \delta)(t) = r \left(1, \frac{\delta_2(t)}{\delta_1(t)}, \dots, \frac{\delta_{n+1}(t)}{\delta_1(t)} \right),$$

pelo que

$$d\phi_{p_0}(v) = (\phi \circ \delta)'(0) = (0, \dot{\delta}_2(0), \dots, \dot{\delta}_{n+1}(0)) = v.$$

6.2.2 Interpolação em $H_1^n(r)$

À semelhança do caso anterior, neste exemplo está em causa determinarmos uma aplicação rolamento $g : [0, \tau] \longrightarrow \text{SO}_2^1(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$, $t \rightsquigarrow g(t) = (R^{-1}(t), s(t))$

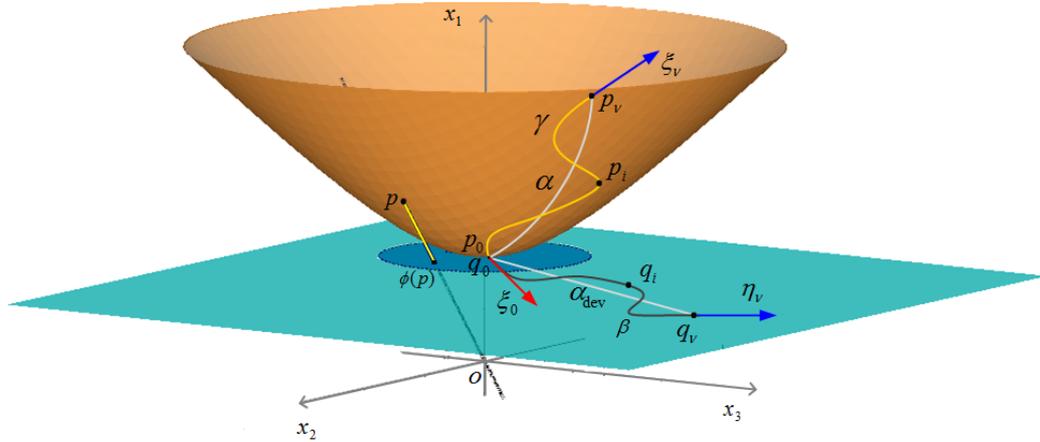


Figura 6.1: Projecção gnomónica. Interpolação suave em $H_0^2(r)$.

e um difeomorfismo $\phi : \Omega \subseteq H_1^n(r) \longrightarrow \phi(\Omega) \subseteq T_{p_0}^{\text{aff}} H_1^n(r)$, com as condições definidas junto do Algoritmo 6.1. Fixamos agora $p_0 = (-r, 0, \dots, 0)$.

Quanto à primeira escolha a fazer, optamos novamente pelo rolamento ao longo dum arco de geodésica. Portanto voltamos a necessitar dum vetor constante não-nulo u (controlo), para as equações da cinemática (3.7), tal que a curva de rolamento α que lhe corresponde tem como extremos p_0 e p_ν . No entanto, no atual exemplo temos de ter em conta o valor de $\langle p_0, p_\nu \rangle$. Graças à Proposição 3.8 sabemos que não existe uma geodésica em $H_1^n(r)$ que ligue p_0 e p_ν quando $\langle p_0, p_\nu \rangle \geq r^2$, a não ser que p_0 e p_ν sejam anti-podais. Por conseguinte, o presente procedimento está, desde logo, condicionado à circunstância dos dados verificarem $\langle p_0, p_\nu \rangle < r^2$ ou $p_0 = -p_\nu$. Sabemos também que o tipo de geodésica que liga os dois pontos varia consoante se verifique $\langle p_0, p_\nu \rangle < -r^2$, $\langle p_0, p_\nu \rangle = -r^2$ ou $-r^2 < \langle p_0, p_\nu \rangle < r^2$; sendo tipo-espaco no primeiro caso, tipo-luz no segundo e tipo-tempo no terceiro. Apesar desta diferença, com um raciocínio análogo ao que expusemos para $H_0^n(r)$, é-nos igualmente possível deduzir as expressões para o necessário vetor-controlo u , quando este existe, que apresentamos a seguir.

De forma sintetizada, com o vetor revelado em cada um dos casos abaixo, se definirmos $A := (-up_0^\top + p_0u^\top) J_2$, a aplicação rolamento g que indicamos para a implementação do algoritmo interpolador e as respetivas curvas de rolamento α e de desenvolvimento α_{dev} são dadas por:

Caso $\langle p_0, p_\nu \rangle < -r^2$ (u , α e α_{dev} são tipo-espaco),

o vetor u é tal qual como em (6.5). Pelo que $g(t)$, $\alpha(t)$ e $\alpha_{\text{dev}}(t)$ têm as expressões dadas em (6.6) e (6.7), diferindo apenas, evidentemente, o produto

escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a matriz A .

Caso $\underline{\langle p_0, p_\nu \rangle = -r^2}$ (u , α e α_{dev} são tipo-luz),

$$u := \frac{p_\nu - p_0}{r^2 \tau}$$

$$g(t) = \left(I - tA + \frac{t^2}{2} A^2, \frac{p_\nu - p_0}{\tau} t \right)$$

$$\alpha(t) = \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + \frac{p_\nu - p_0}{\tau} t.$$

Caso $\underline{-r^2 < \langle p_0, p_\nu \rangle < r^2}$ (u , α e α_{dev} são tipo-tempo),

$$u := \frac{\theta}{r^2 \tau} \frac{p_\nu - p_0 \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \text{ onde } 0 \neq \theta := \vartheta := \arccos\left(\frac{\langle p_0, p_\nu \rangle}{-r^2}\right) \text{ ou } 0 \neq \theta := 2\pi - \vartheta$$

(entre as duas opções existentes para u , é importante que se escolha a alternativa que mais faz com que cada ponto p_i fique “próximo” de $\alpha(t_i)$.)

$$g(t) = \left(I - \frac{\sin(\frac{\theta}{\tau} t)}{\frac{\theta}{\tau}} A - \frac{1 - \cos(\frac{\theta}{\tau} t)}{(\frac{\theta}{\tau})^2} A^2, \frac{\theta}{\tau} \frac{p_\nu - p_0 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} t \right)$$

$$\alpha(t) = p_0 \cos\left(\frac{\theta}{\tau} t\right) + \frac{p_\nu - p_0 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin\left(\frac{\theta}{\tau} t\right) \text{ e } \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + \frac{\theta}{\tau} \frac{p_\nu - p_0 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} t.$$

Caso $\underline{p_0 = -p_\nu}$ (u , α e α_{dev} são tipo-tempo),

$u :=$ qualquer vetor tipo-tempo tal que $\langle u, p_0 \rangle = 0$ e $\|u\| = \frac{(2k+1)\pi}{r\tau}$, com $k \in \mathbb{Z}$

$$g(t) = \left(I - \frac{\sin(\frac{\theta}{\tau} t)}{\frac{\theta}{\tau}} A - \frac{1 - \cos(\frac{\theta}{\tau} t)}{(\frac{\theta}{\tau})^2} A^2, r^2 u t \right)$$

$$\alpha(t) = p_0 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{\tau} t\right) + \frac{r^2 \tau u}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\tau} t\right) \text{ e } \alpha_{\text{dev}}(t) = p_0 + r^2 u t.$$

Resta-nos então fixar o necessário difeomorfismo $\phi : \Omega \subseteq H_1^n(r) \longrightarrow \phi(\Omega) \subseteq T_{p_0}^{\text{aff}} H_1^n(r)$. A opção que fazemos resulta da *projeção estereográfica* do aberto $\Omega := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in H_1^n(r) : x_1 < r\}$ em $T_{p_0}^{\text{aff}} H_1^n(r)$ (plano de equação $x_1 = -r$), a partir do ponto $N := -p_0 = (r, 0, \dots, 0)$. Ou seja, selecionamos a aplicação ϕ que a cada ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega$ associa o ponto $\phi(p) \in T_{p_0}^{\text{aff}} H_1^n(r)$ que se obtém intersecando a reta Np com o plano $x_1 = -r$. A figura 6.2 procura ilustrar esta projeção no caso bidimensional. Se repetirmos a

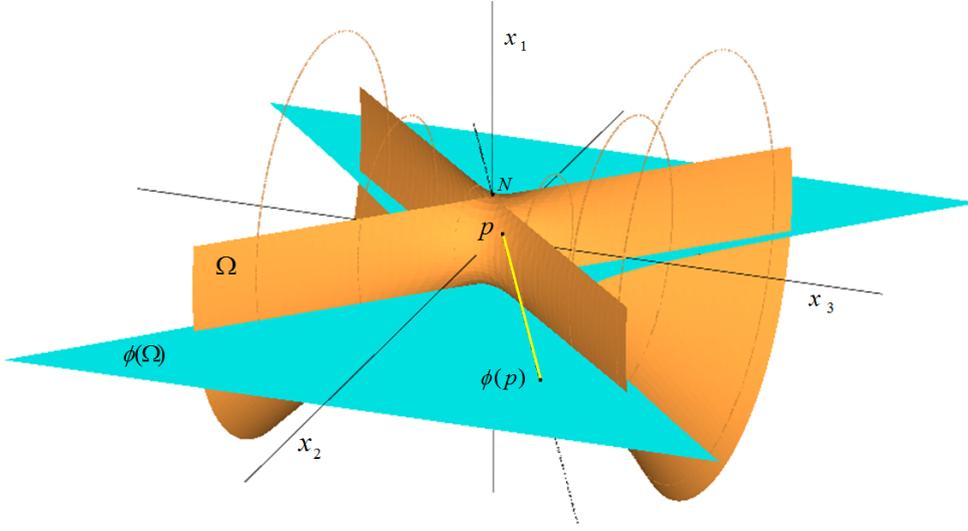


Figura 6.2: Projção estereográfica de $\Omega \subseteq H_1^2(r)$ em $T_{p_0}^{\text{aff}} H_1^2(r)$.

estratégia apresentada anteriormente para o caso de $H_0^n(r)$, podemos caracterizar ϕ da maneira seguinte:

$$\phi : \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H_1^n(r) : x_1 < r \right\} \longrightarrow \left\{ (-r, y_1, \dots, y_n) : -y_1^2 + \sum_{i=2}^n y_i^2 < 4r^2 \right\}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \rightsquigarrow r \left(-1, \frac{2x_2}{r-x_1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{r-x_1} \right),$$

e a sua inversa é definida por

$$\phi^{-1}(-r, y_1, \dots, y_n) = (r, 0, \dots, 0) + \frac{-4r^2}{-4r^2 - y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} (-2r, y_1, \dots, y_n).$$

É também evidente a prova de que ϕ verifica as condições $\phi(p_0) = p_0$ e $d\phi_{p_0} = id$. Assim, esta secção está terminada.

Considerações finais

Nestas notas finais destacamos as principais contribuições desta dissertação, alguns aspetos da problemática dos rolamentos que mereceram a nossa atenção mas não foram incluídos por não termos chegado a respostas conclusivas, e outros aspetos relacionados que, por falta de tempo, não puderam ser abordados aqui mas que estarão nas nossas prioridades em trabalho futuro.

A primeira contribuição da presente dissertação foi o alargamento da definição de aplicação rolamento para o caso em que as variedades rolantes estão mergulhadas numa variedade pseudo-Riemanniana. A partir desta definição, procurámos generalizar resultados que são conhecidos, quer para o caso clássico de variedades mergulhadas em espaços Euclidianos, quer para a situação Riemanniana. Esta dissertação também unifica alguns resultados dispersos sobre rolamentos no caso pseudo-Riemanniano.

Demonstrámos três propriedades fundamentais dos rolamentos. Duas destas propriedades, que generalizam propriedades já abordadas em Sharpe [39] num contexto Euclidiano, estão ainda limitadas a rolamentos em \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Em trabalho futuro, procurar-se-á desprendê-las dessa limitação. Outras questões que continuam em aberto a este respeito, são as da existência e unicidade. Isto é, ainda não há resposta para o seguinte: em que condições será possível garantir que, dadas duas variedades e uma curva de rolamento (ou de desenvolvimento), exista uma única aplicação rolamento a ela associada?

Provámos relações entre rolamentos e transporte paralelo, que nos permitem recuperar as equações do transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva a partir do rolamento ao longo dessa curva. A ligação entre os dois assuntos permitiu-nos reformular a condição de não-torção nos casos em que o rolamento ocorre em \mathbb{R}_κ^n ou $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Esta formulação da condição de não-torção aparece igualmente em Markina *et al.* [28] para rolamentos numa perspectiva intrínseca, isto é, quando não se assume que as variedades rolantes estão mergulhadas numa outra variedade ambiente. Tudo leva a crer que a relação rolamento/transporte

paralelo, que apresentámos sob uma restrição, seja válida em geral e resulte apenas da condição de não torção, mas, por enquanto, esta é outra questão que fica em aberto.

Exibimos algumas propriedades relacionadas com o espaço pseudo-hiperbólico $H_\kappa^n(r)$, com destaque para as expressões dos três tipos possíveis de geodésicas desta hiperquádrica. Apresentámos as equações da cinemática do rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre o espaço afim tangente $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$, para qualquer dimensão n , qualquer índice κ e qualquer ponto de tangência p_0 . Estas equações foram resolvidas explicitamente para dois casos particulares da função de controlo. Encontrámos também as equações da cinemática do rolamento de um espaço pseudo-hiperbólico sobre outro. A respeito da pseudo-esfera $S_\kappa^n(r)$, explicámos como os seus rolamentos podem ser obtidos a partir dos correspondentes com o espaço pseudo-hiperbólico $H_{n-\kappa}^n(r)$. Os resultados conseguidos por esta via generalizam resultados de Korkolko *et al.* [23].

Deduzimos as equações da cinemática do rolamento de um grupo de Lie quadrático G_J arbitrário sobre o espaço afim tangente $T_{p_0}^{\text{aff}} G_J$. As correspondentes soluções explícitas foram encontradas para uma certa classe de funções de controlo. Os resultados obtidos neste contexto generalizam o que foi obtido em Crouch *et al.* [6] para o rolamento de grupos pseudo-ortogonais. Será interessante, em trabalho futuro, considerar outras funções de controlo, por exemplo as que garantam rolamentos suaves.

Demonstrámos algebricamente a controlabilidade do rolamento de $H_\kappa^n(r)$ sobre $T_{p_0}^{\text{aff}} H_\kappa^n(r)$ para $n \geq 2$. Este é um resultado importante, pois garante que dadas duas configurações admissíveis da variedade rolante é sempre possível passar de uma configuração para a outra através de rolamentos sem deslize nem torção. Contudo, é legítimo perguntar como se processa esse movimento. Esta questão pode ser respondida exibindo-se uma prova construtiva da controlabilidade. No sentido de encontrar tal resposta, tentámos inspirar-nos no trabalho de Kleinsteu-ber *et al.* [21] onde o caso da esfera S^n foi estudado, mas mesmo no caso mais simples da variedade $H_\kappa^n(r)$ deparámo-nos com dificuldades adicionais que nos impediram de incluir aqui uma prova construtiva da controlabilidade para esta variedade.

Demonstrámos igualmente a controlabilidade das equações da cinemática para rolamentos dos grupos pseudo-ortogonais $O_\kappa(n)$ para $n \geq 3$ e dos grupos simpléti- cos $\text{Sp}(2m)$ para $m \geq 1$, sobre o correspondente espaço afim tangente na identi- dade.

Apresentámos um algoritmo baseado em rolamentos para resolver um pro-

blema de interpolação suave em subvariedades de \mathbb{R}_κ^n ou de $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$. Este método generaliza resultados obtidos em Huper *et al.* [13] e em Huper *et al.* [14] com variedades específicas. Fornecemos as componentes essenciais para a implementação do algoritmo nos casos de $H_0^n(r)$ e $H_1^n(r)$. Como trabalho futuro a desenvolver neste campo, destacamos o alargamento para outras variedades concretas, nomeadamente grupos de Lie quadráticos, e a implementação computacional do algoritmo.

O trabalho desenvolvido no âmbito desta dissertação já está parcialmente publicado em Marques *et al.* [32] e [33]. Estão ainda em preparação os artigos Marques *et al.* [29], [30] e [31], para posterior submissão a publicação.

Olhando um pouco para além das questões em aberto mais diretamente relacionadas com o trabalho desenvolvido, terminamos estas considerações finais com uma breve referência a três assuntos que nos parecem muito interessantes e sobre os quais há ainda muito pouco trabalho. O primeiro prende-se com problemas de controlo ótimo. Embora a controlabilidade de um sistema seja uma propriedade fundamental em teoria do controlo, nesta questão não há a preocupação em obter trajetórias que minimizem uma certa energia. No caso particular dos rolamentos, sabendo que eles permitem recuperar uma qualquer configuração a partir de uma configuração inicial, uma pergunta crucial é saber se isso é possível usando apenas movimentos suaves, ou movimentos que minimizem a distância percorrida na variedade, ou outra qualquer funcional custo com algum significado. Este assunto dos rolamentos ótimos está praticamente por explorar. Outra questão interessante são os rolamentos com limitação de área de contacto. Tanto quanto sabemos, existem apenas resultados para a esfera S^2 . Esta situação, que é particularmente importante nas aplicações à Robótica, foi estudada por exemplo em Svinin *et al.* [42]. Finalmente, mencionamos trabalho muito recente sobre rolamentos de variedades de dimensões diferentes. Esta questão foi abordada num contexto não extrínseco por Mortada *et al.* [34]. É uma nova perspetiva de rolamentos de variedades que ainda não foi abordada no caso em que as duas variedades, com diferentes dimensões, vivem no mesmo espaço ambiente (pseudo-)Riemanniano.

É nossa intenção estudar estas questões no contexto dos rolamentos apresentados e estudados nesta dissertação.

Bibliografia

- [1] Scot Adams. *Dynamics on Lorentz Manifolds*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapura, 2001.
- [2] William M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc., N.Y., 1975.
- [3] João R. Cardoso. *Logaritmos de Matrizes: Aspectos Teóricos e Numéricos*. Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra, 2003.
- [4] Yacine Chitour, Petri Kokkonen. Rolling Manifolds: Intrinsic Formulation and Controllability. *arXiv:1011.2925v2*, 2011.
- [5] P. Crouch, G. Kun, F. Silva Leite. The De Casteljau Algorithm on Lie Groups and Sphere. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 5, No. 3 (1999), 397-429.
- [6] P. Crouch, F. Silva Leite. Rolling Motions of Pseudo-Orthogonal Groups. *Proc. 51st IEEE-CDC 2012*, 10-13 Dezembro 2012, Hawaii, USA.
- [7] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, 5th ed.* Academic Press, 2002.
- [8] Jean Gallier. *Notes on Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras*. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania Philadelphia, USA, 2005.
- [9] M. Godoy, E. Grong, I. Markina, F. Silva Leite. An Intrinsic Formulation of the Rolling Manifolds Problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 18, No. 2 (2012), 181-214.
- [10] E. Grong. Controllability of Rolling without Twisting or Slipping in Higher Dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 50, No. 4 (2012), 2462-2485.

- [11] Brian C. Hall. An Elementary Introduction to Groups and Representations. *arXiv:math-ph/0005032*, 2010.
- [12] Sigurdor Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, Inc., N. Y., 1978.
- [13] K. Huper, F. Silva Leite. Smooth Interpolating Curves with Applications to Path Planning. *Proc. 10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2002)*. Lisboa-Portugal.
- [14] K. Huper, F. Silva Leite. On the Geometry of Rolling and Interpolation Curves on S^n , SO_n and Grassmann Manifolds. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 13 , No. 4 (Outubro 2007), p. 467-502.
- [15] K. Huper, Krzysztof A. Krakowski, F. Silva Leite. Rolling Maps in a Riemannian Framework. *Textos de Matemática*, Volume 43, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, J. Cardoso, K. Hüper e P. Saraiva Edts, p. 15-30, 2011.
- [16] B. D. Johnson. The Nonholonomy of the Rolling Sphere. *Amer. Math. Monthly*, 114(6)(2007), 500-508.
- [17] P. E. Jupp, J. T. Kent. Fitting Smooth Paths to Spherical Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*. Vol. 36, No. 1 (1987), 34-46
- [18] V. Jurdjevic, H.J. Sussmann. Control Systems on Lie Groups. *Journal of Differential Equations* 12, 313-329, 1972.
- [19] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [20] V. Jurdjevic, J. Zimmerman. Rolling Sphere Problems on Spaces of Constant Curvature. *Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 144, No 3, 2008 , p. 729-747.
- [21] M. Kleinstauber, K. Huper, F. Silva Leite. Complete Controllability of the n -Sphere - a Constructive Proof. *Proc. 3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control (LHMNLC'06)*. Nagoya-Japan, 19-21 Julho, 2006.

- [22] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1*. Interscience (Wiley), N. Y., 1963.
- [23] A. Korolko, F. Silva Leite. Kinematics for Rolling a Lorentzian Sphere. *Proc. 50th IEEE CDC-ECC*, 6522-6528, 12-15 Dezembro 2011, Orlando, USA.
- [24] Krzysztof A. Krakowski, F. Silva Leite. Smooth Interpolation on Ellipsoids Via Rolling Motions. *Proc. PHYSCON 2013*, San Luis Potosí, Mexico, 26-29 Agosto, 2013.
- [25] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, Inc., N. Y., 1997.
- [26] Fernando Louro, F. Silva Leite. Sphere Rolling on Sphere - Alternative Approach to Kinematics and Constructive Proof of Controllability. *Pré-Publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra*. Number 12-25 (2012).
- [27] Jesper Lutzen. *Mechanistic Images in Geometric Form: Hertz's Principles of Mechanics*. Oxford University Press, 2005.
- [28] I. Markina, F. Silva Leite. *An Intrinsic Formulation for Rolling Pseudo-Riemannian Manifolds*. *arXiv:1210.3140*, 2012.
- [29] André Marques, F. Silva Leite. Pure Rolling Motion of Pseudo-Riemannian Manifolds: an Extrinsic Perspective (em preparação).
- [30] André Marques, F. Silva Leite. Complete Controllability of the Kinematics Equations for Rolling Quadratic Lie Groups (em preparação).
- [31] André Marques, F. Silva Leite. Solving Interpolation Problems on Pseudo-Riemannian Manifolds Using Rolling Motions (em preparação).
- [32] André Marques, F. Silva Leite. Rolling a Pseudohyperbolic Space over the Affine Tangent Space at a Point. *Proc. CONTROLO 2012*, pp 123-128, 16-18 Julho 2012, Madeira-Portugal.
- [33] André Marques, F. Silva Leite. Controllability for the Constrained Rolling Motion of Symplectic Groups. *Springer Lecture Notes in Electrical Engineering, Proc. CONTROLO 2014*, A. Moreira, A. Matos e G. Veiga Edts (aceite para publicação).

- [34] Amina Mortada, Petri Kokkonen, Yacine Chitour. Rolling Manifolds of Different Dimensions. *arXiv:1312.4885v1*, 2013.
- [35] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, Inc., N. Y., 1983.
- [36] L. Noakes, G. Heinzinger, B. Paden. Cubic Splines on Curved Spaces. *IMA Journal of Mathematics Control and Information* 6, 465-473, 1989.
- [37] Fátima Pina. *Rolamentos e Não Holonomia da Esfera S^n* . Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2007.
- [38] Y. L. Sachkov. Control Theory on Lie Groups. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 156, No. 3 (2009), p. 612-625.
- [39] R.W. Sharpe. *Differential Geometry*. Springer, N. Y., 1996.
- [40] Y. Shen, K. Huper, F. Silva Leite. Smooth Interpolation of Orientation by Rolling and Wrapping for Robot Motion Planning. *Proc. 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA2006)*, Orlando, USA, Maio 2006.
- [41] F. Silva Leite, P. Crouch. Closed Forms for the Exponential Mapping on Matrix Lie Groups Based on Putzer Method. *Journal of Mathematical Physics*, 40: 3561-3568, 1999.
- [42] Mikhail Svinin, Shigeyuki Hosoe. Motion Planning Algorithms for a Rolling Sphere with Limited Contact Area. *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 24, No. 3, 2008.
- [43] J.A. Zimmerman. Optimal control of the sphere S^n rolling on E^n . *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17, 14-37, 2005.

Índice Remissivo

- $GL(n)$, 25
- $H_\kappa^n(r)$, 58
- J_κ , 33
- $S_\kappa^n(r)$, 58
- V' , $\frac{DV}{dt}$, 15
- X^v , 38
- \mathbb{R}_κ^n , 5
- δ_{ij} , 3
- \dot{V} , $\frac{D\dot{V}}{dt}$, 19
- $\dot{\gamma}$, γ' , 8
- $\dot{g}(t)(p)$, 37
- $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ∂_i , 4
- $\langle A, B \rangle_J$, 29
- $\langle x_1, x_2 \rangle_J$, 29
- $(\mathfrak{gl}(n), \Phi_J)$, 30
- $\mathcal{L}(G_J)$, 28
- $\mathfrak{X}(M)$, 12
- $\mathfrak{gl}(n)$, 8, 36
- $\nabla_X Y$, 12
- df , 5
- G_J , 28
- $O_\kappa(n)$, 33
- $SO_\kappa(n)$, 33
- $SO_\kappa^I(n)$, 35
- \overline{G}_J^I , 43
- \times , 31
- $f * p$, 37
- $C^\infty(M)$, 12
- ação, 31
- anti-isometria, 9
- aplicação rolamento, 37
- aplicação seccionalmente suave, 8
- campo de vetores
 - ao longo duma curva, 14
 - extensível, 14
 - normal a uma variedade, 20
 - paralelo, 16
 - paralelo normal, 22
- complemento ortogonal, 20
- cone de luz, 5
- conexão, 12
 - de Levi-Civita, 16
 - Euclidiana, 13
- curva, 7
 - carácter causal de, 19
 - comprimento de, 9
 - de desenvolvimento, 38
 - de rolamento, 38
 - minimizante, 19
 - seccionalmente suave, 8
 - suave, 7
 - tipo-espaço, tipo-tempo, tipo-luz, 19
- derivada covariante, 13, 15
 - normal, 22
- distância Riemanniana, 11
- equações da cinemática, 38
- espaço afim ao espaço tangente, 48
- espaço Euclidiano, 5

- espaço pseudo-Euclidiano, 5
- espaço pseudo-hiperbólico, 58
 - centro de, 76
 - folha inferior de, 60
 - folha superior de, 60
- forma bilinear, 1
 - indefinida, 2
 - não-degenerada, 2
- funções de controlo, 94
- geodésica, 17
 - maximal, 18
 - quebrada, 17
- grupo
 - de Lie quadrático, 28
 - pseudo-ortogonal, 33
 - especial, 33
 - simplético, 33
- hiperquádricas, 58
- homotetia, 8
- isometria, 8
 - linear, 12
- métrica
 - pseudo-Riemanniana, 3
 - Riemanniana, 4
- orientação, 23
 - preservar, inverter, 24
 - usual de \mathbb{R}^n , 24
- produto direto, 31
- produto escalar, 2
 - assinatura de, 3
- produto interno, 2
- produto semi-direto, 31
- projeção
 - estereográfica, 121
 - gnomónica, 118
 - normal, 20
 - tangencial, 20
- pseudo-esfera, 58
- restrições
 - holónomas, 38
 - não-holónomas, 38
- símbolos de Christoffel, 14
- sistema de controlo afim, 94
 - condição característica de, 95
 - controlável, 94
 - homogéneo, 94
 - invariante à direita, 95
 - invariante à esquerda, 94
 - trajetória de, 94
- subvariedade pseudo-Riemanniana, 6
- transformação afim, 31
- transporte paralelo, 16
 - normal, 23
- variedade
 - orientável, 24
 - pseudo-Riemanniana, 4
 - índice de, 4
 - Riemanniana, 4
 - semi-Riemanniana, 4
- vetor
 - caráter causal de, 5
 - normal a uma variedade, 20
 - tipo-espaço, tipo-tempo, tipo-luz, 5
 - velocidade, 7