

O Operador *Thinning* na Modelação de Séries Temporais de Contagem

Dora Pestana Filipe



O Operador *Thinning* na Modelação de Séries Temporais de Contagem

Dora Pestana Filipe

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**
Área de Especialização em **Estatística, Optimização e Matemática Financeira**
Orientada por **Prof. Doutora Maria de Nazaré S. Q. Mendes Lopes**
Prof. Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves

Júri

Presidente: Prof. Doutor Carlos Manuel Rebelo Tenreiro da Cruz
Vogais: Prof. Doutora Cristina Maria Tavares Martins
Prof. Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves

Data: Junho de 2015

Resumo

As séries temporais de valores inteiros não-negativos podem ser encontradas em muitas situações e actividades, especialmente associadas a processos de contagem. Como os modelos ARMA não são adequados para modelar este tipo de séries, surgiu a necessidade de criar uma nova classe, os modelos INARMA, que utilizam o operador *thinning* binomial em vez da multiplicação usual.

Neste trabalho, começamos por apresentar o operador *thinning* binomial e algumas das suas propriedades. De seguida, estudamos probabilisticamente o modelo INAR(1) em particular no que diz respeito à estacionaridade e ao seu comportamento distribucional. Apresentamos ainda o modelo INAR(1) inflacionado em zero, abreviadamente ZINAR(1), com inovação de Poisson. Por fim, efectuamos um breve estudo do modelo INMA(q), que inclui a análise da estacionaridade e obtenção das funções média e de autocovariância. Os diversos modelos são ilustrados recorrendo a estudos de simulação.

Palavras Chave: Séries temporais de contagem, Operador *thinning* binomial, Modelo INAR(1), Modelo ZINAR(1), Modelo INMA(q)

Abstract

Non-negative integer-valued time series can be found in many situations and activities, specially associated with counting processes. ARMA models are not adequate to model these kind of time series. This gave rise to the necessity of developing the INARMA models, which use the binomial thinning operator instead of the usual multiplication.

In this work, we start by presenting the binomial *thinning* operator and some of its properties. Then we study the INAR(1) model particularly in which concerns the stationary analysis and its distributional behaviour. We also explore the INAR(1) inflated zero, ZINAR(1), with Poisson innovations. Finally, we present a brief study about the INMA(q) model analysing, in particular, its stationarity, and deducing the corresponding mean and autocovariance functions. The presented models are illustrated using simulation studies.

Keywords: Count time series, Binomial *thinning* operator, INAR(1) Model, ZINAR(1) Model, INMA(q) Model

Agradecimentos

Quero agradecer às minhas orientadoras, Professora Doutora Maria de Nazaré S. Q. Mendes Lopes e Professora Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves, pelo apoio, disponibilidade e perseverança em todos os momentos necessários, nomeadamente no que se refere à transmissão do conhecimento e das sugestões, fundamentais para a realização deste trabalho ao longo do ano.

De seguida, agradeço à minha família, em especial à minha mãe, pelo suporte afectivo, essencial para desenvolver o estudo com tranquilidade.

Por fim, agradeço ainda aos meus amigos toda a motivação.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Séries Temporais de Contagem: Resultados Básicos	5
2.1	Função Geradora de Probabilidades	5
2.2	Operador <i>Thinning</i> Binomial	9
2.3	Lei Auto-decomponível Discreta	16
3	Modelo INAR(1)	17
3.1	Definição e Propriedades do Modelo INAR(1)	17
3.2	Modelo INAR(1) de Poisson Inflacionado em Zero	33
3.2.1	Distribuição de Poisson Inflacionada em Zero	33
3.2.2	Modelo ZINAR(1) de Poisson	35
4	Modelo INMA(q)	41
4.1	Definição e Propriedades do Modelo INMA(q)	41
A	Ficheiros em Matlab	51

Capítulo 1

Introdução

Uma série temporal é um conjunto de dados evoluindo de forma aleatória com o tempo, onde a ordem de recolha é fundamental. Um dos objectivos fundamentais destas séries temporais é a modelação dos dados observados. Assim, observada uma série temporal pretende-se encontrar um modelo que se ajuste à série no sentido de reproduzir tão fielmente quanto possível a dinâmica da informação obtida.

As séries temporais de valores inteiros não-negativos, também referidas como séries de contagem, estão naturalmente presentes no nosso quotidiano, geralmente associadas a processos de contagem num determinado intervalo de tempo. Como exemplos de aplicação destes modelos, temos o número de elementos de uma população, o número de acidentes em determinada estrada ou o número de anomalias num sistema durante um certo período de tempo. Além disso, muitas áreas científicas veêm-se também hoje confrontadas com este tipo de séries. Dada a presença frequente destes fenómenos surgiu o interesse e a necessidade de estudar métodos de modelação para estas séries temporais de contagem, sendo, actualmente, um campo emergente da ciência.

São inúmeras as classes de modelos propostas na literatura para a análise de uma série temporal destacando-se, na classe geral dos modelos lineares, os modelos autorregressivos média móvel (ARMA). Tais modelos de valores reais não são, contudo, adequados para séries de valores inteiros, pois a simples operação de multiplicação de um real por um inteiro resulta, frequentemente, num real não inteiro. O facto das propriedades dos modelos ARMA serem muito atraentes motivou a que se procurassem adaptar estes modelos a séries de contagem. Essa adaptação levou à introdução de novos modelos inspirados nos da classe ARMA, sendo a multiplicação substituída por um operador de valores inteiros, designado operador *thinning* binomial. Dado $\alpha \in [0, 1]$ e X uma variável aleatória de suporte contido em \mathbb{N}_0 , este operador, denotado por " \circ ", é definido por

$$\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X Y_j,$$

onde $\{Y_j\}$, designada série de contagem, é uma sucessão de variáveis aleatórias de Bernoulli de parâmetro α , $\beta(\alpha)$, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e independentes de X . Este operador veio "substituir" a multiplicação escalar usual, tornando possível que o resultado do operador *thinning* binomial entre um escalar e um valor inteiro seja ainda um valor inteiro. Note-se que o operador é independente da série de contagem (Y_j) considerada.

Foi criada, assim, uma nova classe, os modelos INARMA, que são uma adaptação dos modelos ARMA usando o operador *thinning* binomial. O nosso estudo vai centrar-se em duas classes importantes desta família que provou ter grande relevância na prática: os modelos INAR(1) (Integer-valued Autoregressive) e INMA(q) (Integer-valued Moving Average). Estes modelos são inspirados nos modelos AR(1) e MA(q), respectivamente.

Brevemente, dizemos que um processo $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1) se admite, para $\alpha \in (0, 1)$, a seguinte representação

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t,$$

e que segue um modelo INMA(q), se para $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q \in [0, 1], \beta_q \neq 0$ se tem

$$X_t = \beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}.$$

onde $e = (e_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo estocástico com valores em \mathbb{N}_0 , ao qual se dá o nome de processo de inovação, em geral formado por variáveis aleatórias i.i.d.. Como podemos observar, o modelo INAR(1) envolve apenas uma operação *thinning* binomial enquanto o modelo INMA(q) necessita de $q + 1$ operações deste tipo.

Com o objectivo de tornar o texto o mais auto-contido possível de modo a facilitar a compreensão e desenvolvimento dos temas, dedicamos o Capítulo 2 à apresentação de conceitos e resultados particularmente relevantes para o estudo dos modelos em causa. Começamos por apresentar o conceito de função geradora de probabilidades bem como alguns resultados associados, seguindo Foata (2005)[5], Pestana e Velosa (2006) [12] e Weiss (2008b) [17]. De seguida, acompanhando Da Silva (2005)[3] e Weiss(2008a) [16], introduzimos a definição de operador *thinning* binomial e apresentamos as propriedades deste operador fundamentais para o desenvolvimento e compreensão do capítulo seguinte. Por fim, introduzimos a definição de distribuição auto-decomponível discreta, de Steutel e van Harn (1979)[14].

Dedicamos o Capítulo 3 ao estudo do modelo INAR(1). Começamos por obter

uma representação em L^2 (e em lei) das variáveis marginais, designadamente

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}.$$

Seguidamente, verificamos que o processo é uma cadeia de Markov homogénea, o que nos permite concluir a estacionaridade estrita deste. Encaminhamos o estudo de modo a obter a função de autocorrelação e apresentamos algumas propriedades da lei condicional do processo.

O modelo INAR(1) é muito utilizado para modelar séries de contagem. Contudo, este modelo é insuficiente para modelar dados de contagem sobredispersos. A sobredispersão ocorre quando o número de contagens do valor zero, por exemplo, é maior que o esperado a partir da distribuição em estudo. Assim, surgiu um novo processo, correspondente ao modelo INAR(1) com inflação em zero que denotamos por ZINAR(1). Deste modo, dedicamos uma última secção deste capítulo ao estudo do modelo ZINAR(1) com processo de inovação de Poisson. Começamos por apresentar o conceito de distribuição de Poisson inflacionada em zero, abreviadamente ZIP, e obtemos algumas propriedades para este novo modelo. Os resultados deste capítulo são baseados em Al-Osh e Alzaid (1987)[1], Weiss (2008) [16] [17] e Jazi, Jones e Lai (2012)[8].

Por último, no Capítulo 4, apresentamos um breve estudo do modelo INMA(q). Obtemos a função geradora de probabilidades do processo, analisamos a sua estacionaridade, provamos que o processo é de segunda ordem e deduzimos os momentos de ordem 1 e 2, seguindo Weiss (2008b)[17].

Os modelos estudados são ilustrados, ao longo dos capítulos, com os exemplos ditos de Poisson e Geométrico, obtidos considerando processos de inovação com tais leis marginais. Estes casos particulares permitem evidenciar aspectos práticos de aplicação da teoria, tais como o cálculo dos momentos. Em ambos os casos foram geradas por simulação e recorrendo ao software Matlab, trajectórias dos processos.

Desenvolvimentos naturais deste trabalho envolveriam o estudo probabilístico de modelos INAR de ordem $p, p > 1$, e de modelos mistos INARMA(p,q). A estimação de parâmetros usando o método da máxima verossimilhança condicional, tal como em Jazi, Jones e Lai (2012) [8], é outro desenvolvimento possível.

Capítulo 2

Séries Temporais de Contagem: Resultados Básicos

O presente capítulo centra-se no desenvolvimento de temas que entendemos relevantes para uma melhor contextualização e compreensão do trabalho subsequente.

2.1. Função Geradora de Probabilidades

Nesta secção será introduzida a função geradora de probabilidades de uma variável aleatória real (v.a.r.) e de um vector aleatório real, que caracterizam as respectivas leis de probabilidade, e serão apresentadas algumas das suas propriedades.

Definição 2.1.1. Seja X uma v.a.r. A função geradora de probabilidades de X é definida por

$$p_X(s) = \mathbf{E}(s^X), s \in D = \{u \in \mathbb{R} : E(|u|^X) < +\infty\}.$$

Exemplo: Quando Y segue uma lei de Bernoulli de parâmetro $\alpha \in (0, 1)$, o seu suporte é $S_Y = \{0, 1\}$ e tem-se

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \alpha.$$

A função geradora de probabilidade de Y é então

$$\begin{aligned} p_Y(s) &= \mathbf{E}(s^Y) \\ &= \sum_{y \in S_Y} s^y P(Y = y) \\ &= s^0 P(Y = 0) + s^1 P(Y = 1) \\ &= 1 - \alpha + \alpha s \end{aligned}$$

△

Proposição 2.1.1. Seja $S = \sum_{j=1}^X Y_j$, onde X é uma v.a.r. de suporte S_X contido em \mathbb{N}_0 , com função geradora de probabilidades p_X e $\{Y_j\}$ uma sucessão de variáveis

aleatórias i.i.d. com uma variável aleatória Y de função geradora de probabilidades p_Y e independentes de X . A função geradora de probabilidades de S é dada por

$$p_S(s) = p_X(p_Y(s)), s \in D = \{u \in \mathbb{R} : E(|u|^Y) < +\infty \text{ e } E(|p_Y(u)|^X) < +\infty\}.$$

Prova. Da definição de função geradora de probabilidades e de esperança condicionada, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_S(s) &= p_{Y_1+Y_2+\dots+Y_X}(s) \\ &= \mathbf{E}(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_X}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_X}|X)) \\ &= \sum_{x \in S_X} \mathbf{E}(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_X}|X=x)P(X=x) \\ &= \sum_{x \in S_X} \mathbf{E}(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_x})P(X=x), \end{aligned}$$

pois as variáveis aleatórias $\{Y_j\}$ são independentes de X . Sabendo que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias reais i.i.d. temos

$$\begin{aligned} p_S(s) &= \sum_{x \in S_X} \mathbf{E}(s^{Y_1} s^{Y_2} \dots s^{Y_x})P(X=x) \\ &= \sum_{x \in S_X} \prod_{i=1}^x \mathbf{E}(s^{Y_i})P(X=x) \\ &= \sum_{x \in S_X} [\mathbf{E}(s^Y)]^x P(X=x) \\ &= \sum_{x \in S_X} [p_Y(s)]^x P(X=x) \\ &= \mathbf{E}[(p_Y(s))^X] \\ &= p_X(p_Y(s)). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias reais independentes. Então

$$p_{X+Y}(s) = p_X(s)p_Y(s), s \in D = \{u \in \mathbb{R} : E(|u|^X) < +\infty \text{ e } E(|u|^Y) < +\infty\}.$$

Prova. Como X e Y são independentes então s^X e s^Y também são independentes. Assim,

$$p_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X s^Y) = E(s^X)E(s^Y) = p_X(s)p_Y(s).$$

□

Apresentamos de seguida a definição de função geradora de probabilidades de um vector aleatório real, particularizando-a, para o caso bidimensional discreto e provando um resultado que nos permite obter os momentos condicionais.

Definição 2.1.2. Seja (X_1, \dots, X_n) um vector aleatório real. A função geradora de probabilidades de (X_1, \dots, X_n) é definida por

$$p_{(X_1, \dots, X_n)}(s_1, \dots, s_n) = E(s_1^{X_1} \dots s_n^{X_n}),$$

para $(s_1, \dots, s_n) \in D = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : E(|u_1^{X_1} \dots u_n^{X_n}|) < \infty\}$.

Uma vez que o nosso estudo recai sobre o caso discreto e só iremos trabalhar neste contexto com vectores bidimensionais, apresentamos a definição de função geradora de probabilidades do vector (X_1, X_2) no caso discreto.

Definição 2.1.3. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias discretas com suportes contidos em \mathbb{N}_0 . A função geradora de probabilidades de (X_1, X_2) é definida por

$$p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_0^r s_1^m P(X_1 = r, X_2 = m),$$

no domínio de convergência da série.

Analisando a série, concluímos que é absolutamente convergente em $[-1, 1] \times [-1, 1]$ uma vez que $\forall (s_0, s_1) \in]-1, 1[\times]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |s_0^r s_1^m| P(X_1 = r, X_2 = m) &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |s_0^r| |s_1^m| \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} |s_0^r| \sum_{m=0}^{\infty} |s_1^m|, \end{aligned}$$

dado que $0 \leq P(X_1 = r, X_2 = m) \leq 1$. Obtemos assim, um produto de séries geométricas que são absolutamente convergentes em $]-1, 1[$.

Vejamos agora que para $s_0, s_1 \in \{-1, 1\}$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |s_0^r s_1^m| P(X_1 = r, X_2 = m) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P(X_1 = r, X_2 = m) \\ &= 1, \end{aligned}$$

uma vez que estamos a somar as probabilidades sobre todos os valores do suporte de X_1 e X_2 .

Assim sendo, $p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1)$ também é absolutamente convergente em $[-1, 1] \times [-1, 1]$, como queríamos mostrar.

A função geradora de probabilidades $p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1)$ admite ainda derivadas de todas as ordens em $]-1, 1[\times]-1, 1[$, tendo-se que as sucessivas derivadas resultam, neste domínio, de derivação sucessiva das séries termo a termo (Foata (2005)[5]).

A fim de garantir a convergência absoluta e derivabilidade da série vamos restringirmo-nos ao domínio $] - 1, 1[\times] - 1, 1[$.

Nestas condições, podemos enunciar o resultado seguinte.

Lema 2.1.1. Seja $p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1)$ definida em 2.1.3.. Temos

$$\frac{\partial}{\partial s_0} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s) \Big|_{s_0=1^-} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m E(X_1 | X_2 = m) P(X_2 = m), |s| < 1$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial s_0^2} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s) \Big|_{s_0=1^-} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m E(X_1(X_1 - 1) | X_2 = m) P(X_2 = m), |s| < 1.$$

Prova. Uma vez que para todo $(s_0, s_1) \in] - 1, 1[\times] - 1, 1[$ a série das derivadas é absolutamente convergente então pela definição de probabilidade condicionada, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_0} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1) &= \frac{\partial}{\partial s_0} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_0^r s_1^m P(X_1 = r, X_2 = m) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P(X_1 = r, X_2 = m) r s_0^{r-1} s_1^m \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r P(X_1 = r | X_2 = m) P(X_2 = m) s_0^{r-1} s_1^m. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{s_0 \rightarrow 1^-} \frac{\partial}{\partial s_0} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} s^m P(X_2 = m) \sum_{r=1}^{\infty} r P(X_1 = r | X_2 = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} s^m E(X_1 | X_2 = m) P(X_2 = m). \end{aligned}$$

Quanto à derivada de segunda ordem tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s_1) &= \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P(X_1 = r, X_2 = m) r(r-1) s_0^{r-2} s_1^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} s_1^m \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) P(X_1 = r | X_2 = m) P(X_2 = m) s_0^{r-2}. \end{aligned}$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \lim_{s_0 \rightarrow 1^-} \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} p_{(X_1, X_2)}(s_0, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} s_1^m P(X_2 = m) \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) P(X_1 = r | X_2 = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} s_1^m E(X_1(X_1 - 1) | X_2 = m) P(X_2 = m). \end{aligned}$$

Concluimos assim o pretendido. □

Os momentos condicionais $E(X_1 | X_2 = m)$ e $V(X_1 | X_2 = m)$ podem ser calculados utilizando este lema, como veremos posteriormente, no capítulo 3, secção 3.1..

2.2. Operador *Thinning* Binomial

O operador *thinning* binomial foi proposto por Steutel e Van Harn (1979) [14] e tem, actualmente, grande utilidade na modelação de séries temporais de contagem.

Definição 2.2.1. Seja X uma variável aleatória discreta com valores em \mathbb{N}_0 e seja $\alpha \in [0, 1]$. A operação *thinning* binomial é definida por

$$\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X Y_j,$$

onde $\{Y_j\}$, designada série de contagem, é uma sucessão de variáveis aleatórias de Bernoulli de parâmetro α , $\beta(\alpha)$, i.i.d. e independentes de X .

Por convenção,

$$\sum_{j=1}^0 Y_j = 0.$$

Note-se que o resultado do operador não depende da série particular de contagem (Y_j) considerada.

Propriedades deste operador foram estudadas por diversos autores, como Da Silva (2005) [3] e Weiss (2008) [16]. Vejamos agora algumas dessas propriedades.

Seja X uma variável aleatória discreta de suporte S_X contido em \mathbb{N}_0 .

Propriedade 2.2.1. $0 \circ X \stackrel{q.c.}{=} 0$.

Prova. Mostremos que $P(0 \circ X = 0) = 1$.

$$\begin{aligned} P(0 \circ X = 0) &= P\left(\sum_{j=1}^X Y_j = 0\right), \text{ com } Y_j, j = 1, \dots, X \text{ a seguir a lei } \beta(0) \\ &= P\left[\sum_{j=1}^X Y_j = 0 \cap (X \in S_X)\right] \\ &= P\left[\sum_{j=1}^X Y_j = 0 \cap \left(X \in \bigcup_{x \in S_X} \{x\}\right)\right] \\ &= \sum_{x \in S_X} P\left[\sum_{j=1}^X Y_j = 0 \cap (X = x)\right] \\ &= \sum_{x \in S_X} P\left(\sum_{j=1}^X Y_j = 0 \mid X = x\right)P(X = x), \end{aligned}$$

usando a definição de probabilidade condicionada. Sabendo que as variáveis aleatórias $\{Y_j\}$ são independentes de X , vem

$$\begin{aligned} P(0 \circ X = 0) &= \sum_{x \in S_X} P\left(\sum_{j=1}^x Y_j = 0\right)P(X = x) \\ &= \sum_{x \in S_X} P(Y_1 = 0, \dots, Y_x = 0)P(X = x) \\ &= \sum_{x \in S_X} \prod_{i=1}^x P(Y_i = 0)P(X = x), \end{aligned}$$

pois as variáveis aleatórias reais $\{Y_j\}$ são independentes. Como $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(0)$, então

$$\begin{aligned} P(0 \circ X = 0) &= \sum_{x \in S_X} P(X = x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.2. $1 \circ X \stackrel{q.c.}{=} X$.

Prova. Verifiquemos que $P(1 \circ X = X) = 1$.

Seguindo o raciocínio da prova da propriedade anterior temos

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^X Y_j = X\right) &= P\left[\sum_{j=1}^X Y_j = X \cap \left(X \in \bigcup_{x \in S_X} \{x\}\right)\right], \text{ com } Y_j, j = 1, \dots, X \text{ a seguir a lei } \beta(1) \\ &= \sum_{x \in S_X} P\left[\sum_{j=1}^X Y_j = X \cap (X = x)\right] \\ &= \sum_{x \in S_X} P\left(\sum_{j=1}^X Y_j = X | X = x\right) P(X = x), \end{aligned}$$

usando a definição de probabilidade condicionada. Assim,

$$P\left(\sum_{j=1}^X Y_j = X\right) = \sum_{x \in S_X} P\left(\sum_{j=1}^x Y_j = x\right) P(X = x),$$

pela independência entre X e as variáveis aleatórias $\{Y_j\}$. Sabendo que a sucessão $\{Y_j\}$ é de variáveis aleatórias reais i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(1)$, temos

$$\begin{aligned} P(1 \circ X = X) &= \sum_{x \in S_X} P(Y_1 = 1, \dots, Y_x = 1) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in S_X} \left(\prod_{i=1}^x P(Y_i = 1)\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in S_X} P(X = x) = 1. \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.3. A lei condicional da v.a.r. $(\alpha \circ X)$ dado X é a lei binomial de parâmetros (X, α) .

Prova. Como referido anteriormente $S_X \subseteq \mathbb{N}_0$ e $\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X Y_j$, com $\{Y_j\}$ uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$.

Mostremos que $\forall k \in S_{(\alpha \circ X)}$ e $x \in \mathbb{N}$,

$$P(\alpha \circ X = k | X = x) = \binom{x}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{x-k}.$$

Pela independência entre X e as variáveis aleatórias $\{Y_j\}$

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \circ X = k | X = x) &= P\left(\sum_{j=1}^x Y_j = k | X = x\right) \\
 &= P\left(\sum_{j=1}^x Y_j = k\right) \\
 &= \binom{x}{k} P(Y_1 = 1, \dots, Y_k = 1, Y_{k+1} = 0, \dots, Y_x = 0) \\
 &= \binom{x}{k} \prod_{j=1}^k P(Y_j = 1) \prod_{i=k+1}^x P(Y_i = 0) \\
 &= \binom{x}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{x-k}.
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.4. Para quaisquer $\alpha, \alpha_1 \in [0, 1]$ temos

$$\alpha_1 \circ (\alpha \circ X) \stackrel{d}{=} (\alpha \alpha_1) \circ X.$$

Prova. A função geradora de probabilidades caracteriza a lei de probabilidade. Mostremos então que, de facto, ambos os membros da igualdade têm a mesma função geradora de probabilidades.

Comecemos por determinar a função geradora de probabilidades de $(\alpha \alpha_1) \circ X$. Temos que $(\alpha \alpha_1) \circ X = \sum_{j=1}^X Y_j$, onde $\{Y_j\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha \alpha_1)$. Assim sendo, pela proposição 2.1.1.,

$$p_{(\alpha \alpha_1) \circ X}(s) = p_X(p_Y(s)) = p_X(1 - \alpha \alpha_1 + \alpha \alpha_1 s).$$

Determinemos agora a função geradora de probabilidades de $\alpha \circ X$. Temos $\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X Y_j$, onde $\{Y_j\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$, logo

$$p_{\alpha \circ X}(s) = p_X(1 - \alpha + \alpha s).$$

Ora $\alpha_1 \circ (\alpha \circ X) = \sum_{j=1}^{\alpha \circ X} Y_j$, com $\{Y_j\}$ variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha_1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha_1 \circ (\alpha \circ X)}(s) &= p_{\alpha \circ X}(p_Y(s)) \\
 &= p_{\alpha \circ X}(1 - \alpha_1 + \alpha_1 s) \\
 &= p_X(1 - \alpha + \alpha(1 - \alpha_1 + \alpha_1 s)) \\
 &= p_X(1 - \alpha \alpha_1 + \alpha \alpha_1 s).
 \end{aligned}$$

□

Apresentamos agora algumas propriedades envolvendo momentos e operador *thinning* binomial. Nestas propriedades consideramos estar sempre assumida a existência dos momentos envolvidos.

Propriedade 2.2.5. Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$E(\alpha \circ X) = \alpha E(X).$$

Prova. Usando a definição de esperança condicionada e lembrando que as variáveis aleatórias $\{Y_j\}$ são i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} E(\alpha \circ X) &= E[E(\alpha \circ X|X)] \\ &= E\left[E\left(\sum_{j=1}^X Y_j|X\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^X E(Y_j|X)\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^X E(Y_j)\right], \end{aligned}$$

sabendo que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes de X . Então

$$\begin{aligned} E(\alpha \circ X) &= E\left(\sum_{j=1}^X \alpha\right) \\ &= E(\alpha X) \\ &= \alpha E(X). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.6. Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$E[(\alpha \circ X)^2] = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)E(X).$$

Prova. Tendo em conta a definição de esperança condicionada e que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir uma lei $\beta(\alpha)$, tem-se

$$\begin{aligned} E[(\alpha \circ X)^2] &= E[E[(\alpha \circ X)^2|X]] \\ &= E\left[E\left[\left(\sum_{j=1}^X Y_j\right)\left(\sum_{i=1}^X Y_i\right)|X\right]\right] \\ &= E\left[E\left(\sum_{j=1}^X Y_j^2 + \sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X Y_j Y_i|X\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left[E\left(\sum_{j=1}^X Y_j^2 | X\right)\right] + E\left[E\left(\sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X Y_j Y_i | X\right)\right] \\
 &= E\left[\sum_{j=1}^X E(Y_j^2 | X)\right] + E\left[\sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X E(Y_j Y_i | X)\right] \\
 &= E\left[\sum_{j=1}^X E(Y_j^2)\right] + E\left[\sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X E(Y_j Y_i)\right],
 \end{aligned}$$

pela independência entre X e as variáveis $\{Y_j\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 E[(\alpha \circ X)^2] &= E\left[\sum_{j=1}^X [V(Y_j) + E^2(Y_j)]\right] + E\left[\sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X E(Y_j)E(Y_i)\right] \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^X \alpha\right) + E\left(\sum_{j=1}^X \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^X \alpha^2\right) \\
 &= E(\alpha X) + E[\alpha^2(X^2 - X)] \\
 &= \alpha E(X) + \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 E(X) \\
 &= \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2 E(X^2).
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.7. Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$V(\alpha \circ X) = \alpha^2 V(X) + \alpha(1 - \alpha)E(X).$$

Prova. Da fórmula de Kőenig e das propriedades 2.2.5. e 2.2.6., temos

$$\begin{aligned}
 V(\alpha \circ X) &= E[(\alpha \circ X)^2] - [E(\alpha \circ X)]^2 \\
 &= \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)E(X) - [\alpha E(X)]^2 \\
 &= \alpha^2 V(X) + \alpha(1 - \alpha)E(X).
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.8. Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$Cov(\alpha \circ X, X) = \alpha V(X)$$

Prova. Usando a definição da covariância

$$Cov(\alpha \circ X, X) = E[(\alpha \circ X)X] - E(\alpha \circ X)E(X),$$

atendendo, uma vez mais, que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X temos

$$\begin{aligned}
 E[(\alpha \circ X)X] &= E\left[E\left[\left(\sum_{j=1}^X Y_j\right)X|X\right]\right] \\
 &= E\left[X \sum_{j=1}^X E(Y_j|X)\right] \\
 &= E\left[X \sum_{j=1}^X E(Y_j)\right] \\
 &= E\left(X \sum_{j=1}^X \alpha\right) \\
 &= E(\alpha X^2) \\
 &= \alpha E(X^2)
 \end{aligned}$$

e pela propriedade 2.2.5. concluímos de imediato o pretendido. □

De seguida, apresentamos propriedades que envolvem mais do que um operador *thinning* binomial. Sejam agora X_1, X_2 variáveis aleatórias discretas de suporte contido em \mathbb{N}_0 e $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$. Vamos considerar as sucessões de variáveis aleatórias $Y_{j,1} (j = 1, \dots, X_1)$ i.i.d. com Y_1 a seguir uma lei $\beta(\alpha_1)$ e $Y_{j,2}, (j = 1, \dots, X_2)$ i.i.d. com Y_2 a seguir a lei $\beta(\alpha_2)$. Consideremos ainda que $\{Y_{j,1}\}$ e $\{Y_{j,2}\}$ são independentes de (X_1, X_2) . Nestas condições temos as seguintes propriedades.

Propriedade 2.2.9. $E[(\alpha_1 \circ X_1)(\alpha_2 \circ X_2)] = \alpha_1 \alpha_2 E(X_1 X_2)$.

Prova. Da definição de esperança condicionada, e tendo em conta que $\{Y_{j,1}\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y_1 a seguir a lei $\beta(\alpha_1)$ e $\{Y_{j,2}\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y_2 a seguir a lei $\beta(\alpha_2)$, podemos escrever sem perda de generalidade

$$\begin{aligned}
 E[(\alpha_1 \circ X_1)(\alpha_2 \circ X_2)] &= E[E[(\alpha_1 \circ X_1)(\alpha_2 \circ X_2)|X_1, X_2]] \\
 &= E\left[E\left[\left(\sum_{j=1}^{X_1} Y_{j,1}\right)\left(\sum_{i=1}^{X_2} Y_{i,2}\right)|X_1, X_2\right]\right] \\
 &= E\left[E\left(\sum_{j=1}^{X_1} \sum_{i=1}^{X_2} Y_{j,1} Y_{i,2} | X_1, X_2\right)\right] \\
 &= E\left[\sum_{j=1}^{X_1} \sum_{i=1}^{X_2} E(Y_{j,1} Y_{i,2}) | X_1, X_2\right] \\
 &= E\left[\sum_{j=1}^{X_1} \sum_{i=1}^{X_2} E(Y_{j,1} Y_{i,2})\right],
 \end{aligned}$$

pela independência existente entre $Y_{j,i}, i = 1, 2$ e (X_1, X_2) . Da independência entre $\{Y_{j,1}\}$ e $\{Y_{j,2}\}$ tem-se

$$\begin{aligned} E[(\alpha_1 \circ X_1)(\alpha_2 \circ X_2)] &= E\left[\sum_{j=1}^{X_1} \sum_{i=1}^{X_2} E(Y_{j,1})E(Y_{i,2})\right] \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{X_1} \sum_{i=1}^{X_2} \alpha_1 \alpha_2\right) \\ &= E(\alpha_1 \alpha_2 X_1 X_2) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 E(X_1 X_2). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.2.10. $Cov(\alpha_1 \circ X_1, \alpha_2 \circ X_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X_1, X_2)$

Prova. Usando a definição da covariância, podemos escrever

$$Cov(\alpha_1 \circ X_1, \alpha_2 \circ X_2) = E[(\alpha_1 \circ X_1)(\alpha_2 \circ X_2)] - E(\alpha_1 \circ X_1)E(\alpha_2 \circ X_2)$$

e pelas propriedades 2.2.5. e 2.2.9. concluímos o pretendido.

□

Propriedade 2.2.11. Se X_1 é independente de X_2 temos

$$\alpha \circ (X_1 + X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha \circ X_1) + (\alpha \circ X_2).$$

Prova. Temos $\alpha \circ (X_1 + X_2) = \sum_{j=1}^{X_1+X_2} Y_j$, onde $\{Y_j\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com uma v.a.r. Y a seguir uma lei de Bernoulli de parâmetro α , $\beta(\alpha)$, independentes de $(X_1 + X_2)$. Assim,

$$p_{\alpha \circ (X_1+X_2)}(s) = p_{X_1+X_2}(1 - \alpha + \alpha s) = p_{X_1}(1 - \alpha + \alpha s)p_{X_2}(1 - \alpha + \alpha s).$$

Notemos que

$\alpha \circ X_1 = \sum_{j=1}^{X_1} Y_{j,1}$, onde $\{Y_{j,1}\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com Y_1 a seguir uma lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X_1 e

$\alpha \circ X_2 = \sum_{j=1}^{X_2} Y_{j,2}$, onde $\{Y_{j,2}\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com Y_2 a seguir uma lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X_2 .

Sem perda de generalidade, assumimos que $\{Y_{j,1}\}$ são independentes de $\{Y_{j,2}\}$. Consequentemente $\alpha \circ X_1$ é independente de $\alpha \circ X_2$. Temos então

$$p_{(\alpha \circ X_1) + (\alpha \circ X_2)}(s) = p_{\alpha \circ X_1}(s)p_{\alpha \circ X_2}(s) = p_{X_1}(1 - \alpha + \alpha s)p_{X_2}(1 - \alpha + \alpha s).$$

A igualdade está assim provada visto que a função geradora de probabilidades caracteriza a lei de probabilidade.

□

2.3. Lei Auto-decomponível Discreta

O operador *thinning* binomial está também ligado ao conceito de distribuição auto-decomponível discreta. Concluimos este capítulo com uma breve referência a este conceito.

Definição 2.4.1. Uma distribuição em \mathbb{N}_0 com função geradora de probabilidades p diz-se auto-decomponível discreta se

$$p(s) = p(1 - \alpha + \alpha s)p_Y(s), \text{ para } |s| < 1 \text{ e } \alpha \in (0, 1)$$

com p_Y uma função geradora de probabilidades.

A proposição seguinte dá-nos uma condição que assegura a auto-decomponibilidade da lei de uma v.a.r. discreta.

Proposição 2.4.1. Se X é uma v.a.r. discreta com valores em \mathbb{N}_0 tal que

$$X \stackrel{d}{=} \alpha \circ X' + Y,$$

onde $\alpha \circ X'$ e Y são independentes e X' tem a mesma lei de X , então a distribuição de X é auto-decomponível.

Prova. Seja $X = \alpha \circ X' + Y$. A sua função geradora de probabilidades é $p_X(s) = p_{X'}(1 - \alpha + \alpha s)p_Y(s)$. Como X tem a mesma lei de X' temos

$$p_X(s) = p_X(1 - \alpha + \alpha s)p_Y(s),$$

ou seja, X é auto-decomponível.

□

Capítulo 3

Modelo INAR(1)

Como referido anteriormente, para modelar adequadamente séries temporais de valores inteiros os modelos ARMA clássicos não devem ser usados pois, frequentemente, a multiplicação de um inteiro por um escalar resulta num valor não-inteiro. Este facto levou a que a operação *thinning* binomial fosse considerada para "substituir" a multiplicação escalar presente naqueles modelos, o que originou o aparecimento de uma nova classe, os modelos INARMA. O primeiro modelo, INAR(1), foi proposto por Mckenzie (1985)[9], e mais tarde estudado por Al-Osh e Alzaid (1987) [1] e ainda, entre outros, por Weiss (2008) [16].

3.1. Definição e Propriedades do Modelo INAR(1)

Vamos começar por definir e mostrar alguns resultados relevantes do modelo INAR(1). Sempre que possível apresentamos exemplos de modo a ilustrar a teoria exposta.

Definição 3.1.1. Seja $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo estocástico real com valores em \mathbb{N}_0 , de segunda ordem, de componentes i.i.d., com média μ_e e variância σ_e^2 e seja $\alpha \in (0, 1)$. Um processo estocástico real $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1) se admite a seguinte representação

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t,$$

com e_t independente de $(X_s)_{s < t}, t \in \mathbb{Z}$.

Com base nesta definição podemos concluir que as operações *thinning* são na recorrência envolvida no modelo, por exemplo $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t, X_{t-1} = \alpha \circ X_{t-2} + e_{t-1}, \dots$, executadas independentemente umas das outras, pois o processo (e_t) é de componentes independentes e, para cada $t \in \mathbb{Z}$, e_t é independente de $(X_s)_{s < t}$.

No sentido de interpretar o modelo INAR(1), seja X_t uma v.a.r. que representa o número de indivíduos que compõem uma população no instante t . Então X_t pode interpretar-se como a soma do número de indivíduos que compõem a população em

$t - 1$ e que nela permaneceram em $]t - 1, t]$ com os que surgem em $]t - 1, t]$.

$$\underbrace{X_t}_{\text{População no instante } t} = \underbrace{\alpha \circ X_{t-1}}_{\text{Indivíduos que permanecem em }]t-1,t]} + \underbrace{e_t}_{\text{Indivíduos que surgem em }]t-1,t]}$$

Propriedade 3.1.1. Se $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo seguindo um modelo INAR(1) então

- a) X é estacionário em média ¹ e tem-se $E(X_t) = \frac{\mu_e}{1 - \alpha}$;
- b) $E(X_t^2)$ existe e é independente de t , tendo-se $E(X_t^2) = \frac{\alpha\mu_e + \sigma_e^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\mu_e^2}{(1 - \alpha)^2}$;
- c) $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}$, onde a igualdade é no sentido de L^2 .

Prova. a) Da linearidade da esperança matemática e da propriedade 2.2.5 aplicadas a funções mensuráveis positivas obtemos

$$E(X_t) = E(\alpha \circ X_{t-1}) + E(e_t) \Leftrightarrow E(X_t) = \alpha E(X_{t-1}) + \mu_e.$$

Esta equação de recorrência de ordem 1 para $E(X_t)$ converge para uma solução quando $t \rightarrow \infty$ uma vez que $0 < \alpha < 1$. Assim, $E(X_t)$ existe e $E(X_t) = \frac{\mu_e}{1 - \alpha}$, independente de t .

- b) Analogamente, usando as propriedades 2.2.5., 2.2.6. e pela alínea a)

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E((\alpha \circ X_{t-1})^2) + E(e_t^2) \\ &= \alpha^2 E(X_{t-1}^2) + \alpha(1 - \alpha)E(X_{t-1}) + 2\alpha E(X_{t-1})\mu_e + \sigma_e^2 + \mu_e^2 \\ &= \alpha^2 E(X_{t-1}^2) + \alpha\mu_e + \frac{2\alpha\mu_e^2}{1 - \alpha} + \sigma_e^2 + \mu_e^2. \end{aligned}$$

Pelas mesmas razões que em a), temos que $E(X_t^2)$ existe e

$$E(X_t^2) = \frac{\alpha\mu_e + \sigma_e^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\mu_e^2}{(1 - \alpha)^2},$$

independente de t .

- c) Analisemos agora a existência de processos admitindo a representação

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t.$$

¹ $E(X_t)$ existe e é independente de t .

Usando as propriedades 2.2.4. e 2.2.11. temos em distribuição

$$\begin{aligned}
 X_t &= \alpha \circ X_{t-1} + e_t \\
 &= \alpha \circ (\alpha \circ X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\
 &= \dots \\
 &= \alpha^{j+1} \circ X_{t-j-1} + e_t + \alpha \circ e_{t-1} + \dots + \alpha^j \circ e_{t-j} \\
 &= \sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j} + \alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1}, \text{ para qualquer } J.
 \end{aligned}$$

Provemos agora que esta representação em distribuição de X_t verifica a igualdade em L^2 presente no enunciado.

Comecemos por provar que

$$\sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j} \xrightarrow{L^2} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}, J \rightarrow \infty.$$

De facto, sendo $J < J'$, sem perda de generalidade

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j} - \sum_{j=0}^{J'} \alpha^j \circ e_{t-j} \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=J+1}^{J'} \alpha^j \circ e_{t-j} \right\|^2 \\
 &\leq \sum_{j=J+1}^{J'} \|\alpha^j \circ e_{t-j}\|^2 \\
 &= \sum_{j=J+1}^{J'} E[(\alpha^j \circ e_{t-j})^2] \\
 &= \sum_{j=J+1}^{J'} [\alpha^{2j} E(e_t^2) + \alpha^j (1 - \alpha^j) E(e_t)],
 \end{aligned}$$

tendo em conta a propriedade 2.2.6.. Como $\alpha < 1$ este somatório tende para zero quando $J, J' \rightarrow \infty$ pois é o resto (de ordem $J + 1$) de uma soma de séries convergentes. Concluimos assim que $\sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j}$ converge em L^2 , quando

$J \rightarrow \infty$, para $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}$ porque é uma sucessão de Cauchy em L^2 e L^2 é um espaço completo.

Mostremos agora que

$$\alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1} \xrightarrow{L^2} 0, J \rightarrow \infty.$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \|\alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1}\|^2 &= E[(\alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1})^2] \\
 &= \alpha^{2(J+1)} E(X_{t-J-1}^2) + \alpha^{J+1} (1 - \alpha^{J+1}) E(X_{t-J-1}),
 \end{aligned}$$

de novo pela propriedade 2.2.6.. Ora, $\|\alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1}\|^2$ tende para zero, quando $J \rightarrow \infty$, pois X_t é limitado em L^2 e $\alpha < 1$.

Então

$$\begin{aligned} \left\| X_t - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j} \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j} + \alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=J+1}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j} \right\| + \|\alpha^{J+1} \circ X_{t-J-1}\| \xrightarrow{J \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Pela unicidade do limite, obtemos

$$X_t \stackrel{L^2}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}.$$

□

Daqui em diante consideramos esta representação de (X_t) . Esta propriedade permite-nos concluir que, sendo X_t uma função mensurável de variáveis aleatórias reais i.i.d., então, as componentes de X são identicamente distribuídas.

Uma vez que $\alpha \circ X_{t-1}$ é independente de e_t , podemos determinar a função geradora de probabilidades de $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, a partir de

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) &= p_{\alpha \circ X_{t-1} + e_t}(s) \\ &= p_{\alpha \circ X_{t-1}}(s) p_{e_t}(s), \end{aligned}$$

com

$$p_{\alpha \circ X_{t-1}}(s) = p_{X_{t-1}}(p_Y(s)),$$

onde Y segue a lei $\beta(\alpha)$. Então

$$p_{X_t}(s) = p_{X_{t-1}}(1 - \alpha + \alpha s) p_{e_t}(s)$$

ou ainda,

$$p_{X_t}(s) = p_{X_t}(1 - \alpha + \alpha s) p_{e_t}(s).$$

Concluimos que a função geradora de probabilidades do processo INAR(1) satisfaz a definição de função auto-decomponível discreta, pelo que as distribuições marginais do processo são auto-decomponíveis discretas.

Antes de concluir a estacionaridade estrita do processo vejamos que é uma cadeia de Markov homogénea. Relembremos tal conceito.

Definição 3.1.2. Seja E um conjunto finito ou infinito numerável. Dizemos que o processo estocástico $(X_n, n \in \mathbb{Z})$, com espaço de estados E é uma cadeia de Markov se $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i_0, i_1, \dots, i_{n+1}) \in E^{n+2} : P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

A cadeia $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ diz-se homogênea se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in E : P(X_n = i) > 0, P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}.$$

Propriedade 3.1.2. Se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo INAR(1) então é uma cadeia de Markov homogênea.

Prova. Usando a definição de probabilidade condicionada, temos $\forall (x_0, \dots, x_{n+1}) \in S_{X_t}^{n+2}$ tal que $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \\ &= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(\alpha \circ X_n + e_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha \circ X_n, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{X_n} Y_{j,n}, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\right)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{x_n} Y_{j,n}, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\right)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{x_n} Y_{j,n}\right)P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}, \end{aligned}$$

uma vez que e_{n+1} é independente de X_n e de (X_0, \dots, X_{n-1}) . Assim,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{x_n} Y_{j,n}\right).$$

Seguindo o raciocínio anterior, temos também

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) &= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(\alpha \circ X_n + e_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= \frac{P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{x_n} Y_{j,n}\right)P(X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= P\left(e_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{x_n} Y_{j,n}\right). \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que o modelo INAR(1) é uma cadeia de Markov. A cadeia é homogénea na medida em que as probabilidades de transição $P(X_j = x_j | X_i = x_i)$ só dependem dos estados da cadeia, atendendo a que as variáveis aleatórias (e_t) são identicamente distribuídas.

□

Estamos agora em condições de concluir que o modelo INAR(1) é fortemente estacionário.

Propriedade 3.1.3. $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo estocástico estritamente estacionário.

Prova. A prova decorre do facto de (X_t) ser uma cadeia de Markov homogénea de componentes identicamente distribuídas.

De facto, vejamos que $\forall n, h \in \mathbb{N}$, (X_1, \dots, X_n) e $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$ têm a mesma lei. Designando por S_{X_t} o suporte de X_t tem-se para todo $(x_1, \dots, x_n) \in S_{X_t}^n$ tal que $P(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$ então

$$\begin{aligned} & P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P(X_1 = x_1)p_{x_1 x_2} \dots p_{x_{n-1} x_n}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & P(X_{1+h} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_n) \\ &= P(X_{1+h} = x_1)P(X_{2+h} = x_2 | X_{1+h} = x_1) \dots P(X_{n+h} = x_n | X_{1+h} = x_1, \dots, X_{n-1+h} = x_{n-1}) \\ &= P(X_{1+h} = x_1)P(X_{2+h} = x_2 | X_{1+h} = x_1) \dots P(X_{n+h} = x_n | X_{n-1+h} = x_{n-1}) \\ &= P(X_{1+h} = x_1)p_{x_1 x_2} \dots p_{x_{n-1} x_n}. \end{aligned}$$

Como o processo estocástico (X_t) é de componentes identicamente distribuídas então $P(X_1 = x_1) = P(X_{1+h} = x_1)$. Logo, é estritamente estacionário.

□

Por conseguinte, o processo estocástico (X_t) é fortemente estacionário e está em L^2 . Então o processo é estacionario no sentido fraco. Calculemos os momentos de ordens 1 e 2.

Propriedade 3.1.4. Tem-se

$$E(X_t) = \mu_e \frac{1}{1 - \alpha}$$

e

$$V(X_t) = \frac{\alpha\mu_e + \sigma_e^2}{1 - \alpha^2}.$$

Prova. Da propriedade 3.1.1. é imediato que (X_t) está em L^2 e que

$$E(X_t) = \frac{\mu_e}{1 - \alpha}.$$

Usando a fórmula de Köenig, a alínea b) da propriedade 3.1.1. e a expressão da $E(X_t)$ é também imediato que

$$V(X_t) = \frac{\alpha\mu_e + \sigma_e^2}{1 - \alpha^2}.$$

□

Para obter a função de autocorrelação, comecemos por determinar a função de autocovariância, $\gamma(k) = C(X_t, X_{t+k}), k \in \mathbb{Z}$. Recordemos que $\gamma(k) = \gamma(-k), \forall k \in \mathbb{Z}$.

Propriedade 3.1.5. Sendo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo INAR(1) tem-se

$$\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0), k \in \mathbb{Z}^+.$$

Prova. O processo (X_t) verifica $X_t = \alpha^t \circ X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j \circ e_{t-j}$. Assim, pela estacionaridade do processo, podemos calcular de imediato

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= Cov(X_k, X_0) \\ &= Cov\left(\alpha^k \circ X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ e_{k-j}, X_0\right) \\ &= Cov(\alpha^k \circ X_0, X_0) + Cov\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ e_{k-j}, X_0\right) \\ &= \alpha^k V(X_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j Cov(e_{k-j}, X_0) \\ &= \alpha^k V(X_0) + 0, \end{aligned}$$

uma vez que sendo e_t independente de $(X_s)_{s < t}$ então e_t é independente de X_0 . Assim,

$$\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0).$$

□

Da propriedade anterior e da definição de autocorrelação decorre de imediato

$$\rho(k) = \alpha^k, k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

De modo a ilustrar alguns dos estudos anteriores, vamos, em seguida, considerar alguns exemplos de aplicação do modelo INAR(1).

Exemplo 1: Modelo INAR(1) de Poisson

Se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1) com (e_t) um processo estocástico com margens i.i.d. com uma lei de Poisson de parâmetro $\lambda \in]0, +\infty[$, a função geradora de probabilidades de e_t é dada por

$$p_{e_t}(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}, s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, temos $\mu_X = \sigma_X^2 = \frac{\lambda}{1-\alpha}$. Se a função geradora de probabilidades de (X_t) que verifica a equação funcional referida anteriormente, é $p_{X_t}(s) = e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s-1)}$ então designamos (X_t) por modelo INAR(1) de Poisson. Visto que a função geradora de probabilidades caracteriza a lei tem-se que a lei marginal do processo é a lei de Poisson de parâmetro $\frac{\lambda}{1-\alpha}$.

De modo a ilustrar o modelo INAR(1) de Poisson, apresentamos na Figura 3.1, uma trajectória de um processo estocástico (X_t) que admite a seguinte representação

$$X_t = 0.5 \circ X_{t-1} + e_t,$$

e onde (e_t) segue uma lei de Poisson de parâmetro 2. Começamos por gerar 300 observações mas apresentamos a trajectória para $t \in \{0, \dots, 250\}$ de forma a minimizar o erro relacionado com o valor inicial atribuído, $X_0 = 4$.

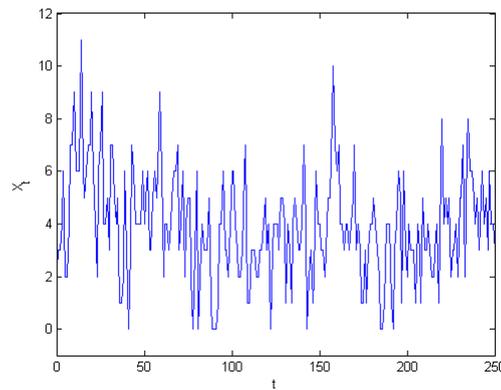


Figura 3.1: Trajectória de um modelo INAR(1) de Poisson(2) com $\alpha = 0.5$.

Os valores empíricos da média e da variância da trajectória gerada são $\bar{x} = 3.9442$ e $s_X^2 = 4.0849$, o que se pode considerar aceitável em termos de aproximação dos valores teóricos correspondentes a este modelo, respectivamente $\mu_X = \sigma_X^2 = 4$.

△

Exemplo 2: Processo INAR(1) Geométrico

De modo semelhante, seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo INAR(1) com (e_t) um processo estocástico de suporte \mathbb{N}_0 com margens i.i.d. a seguir uma lei Geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$. Então $\mu_e = \frac{1-p}{p}$, $\sigma_e^2 = \frac{1-p}{p^2}$ e $\forall k \in \mathbb{N}_0, P(e_t = k) = p(1-p)^k$. A função geradora de probabilidades de e_t é dada por

$$p_{e_t} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s^k p(1-p)^k = p \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (s(1-p))^k = \frac{p}{1-(1-p)s}.$$

Pela propriedade 3.1.4. tem-se

$$\mu_X = \frac{1-p}{p} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1-p}{p-\alpha p}$$

e

$$\sigma_X^2 = \frac{\alpha \frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p^2}}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha p - \alpha p^2 + 1-p}{p^2(1-\alpha^2)}.$$

Se (X_t) está nestas condições designamo-lo por modelo INAR(1) Geométrico.

Analogamente ao exemplo anterior, apresentamos na Figura 3.2 uma trajetória do modelo INAR(1) Geométrico, onde (X_t) admite a seguinte representação

$$X_t = 0.5 \circ X_{t-1} + e_t$$

e onde (e_t) segue uma lei Geométrica de parâmetro 0.2. A trajetória é apresentada para $t \in \{0, \dots, 250\}$ e com valor inicial $X_0 = 8$.

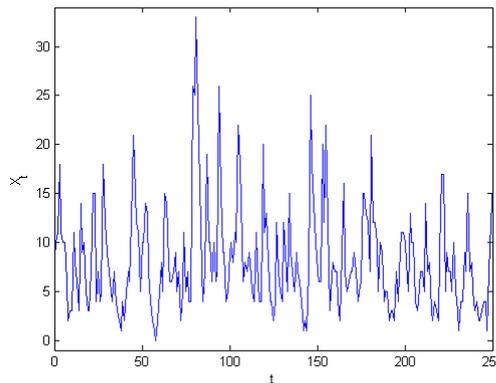


Figura 3.2: Trajetória de um modelo INAR(1) Geométrico(0.2) com $\alpha = 0.5$.

Assim, $\mu_X = 8$ e $\sigma_X^2 = 28.6$. Novamente, verificamos que existe uma aproximação dos valores teóricos e empíricos, tendo-se $\bar{x} = 8.1952$ e $s_X^2 = 28.5577$.

△

Em seguida, estudamos algumas propriedades da lei condicional do processo INAR(1), terminando com uma propriedade particular para o modelo INAR(1) de Poisson.

Propriedade 3.1.6. Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo seguindo um modelo INAR(1). A distribuição condicional de X_{t+1} dado X_t é dada por

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} P(e_t = j-k), j, i \in S_{X_t}.$$

Prova. Como e_{t+1} é independente de X_t e de $\alpha \circ X_t$ e atendendo à definição de probabilidade condicionada, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = j | X_t = i) &= P(\alpha \circ X_t + e_{t+1} = j | X_t = i) \\ &= P\left(\sum_{m=1}^i Y_m + e_{t+1} = j | X_t = i\right) \\ &= P\left(\sum_{m=1}^i Y_m + e_{t+1} = j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\sum_{m=1}^i Y_m = k, e_{t+1} = j-k\right), \text{ porque } k \leq i, k \leq j \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\sum_{m=1}^i Y_m = k\right) P\left(e_{t+1} = j-k \mid \sum_{m=1}^i Y_m = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\sum_{m=1}^i Y_m = k\right) P(e_{t+1} = j-k). \end{aligned}$$

Como Y_m segue uma lei de Bernoulli de parâmetro α então $\sum_{m=1}^i Y_m$ segue uma lei binomial de parâmetros (i, α) e, sabendo que $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ é de componentes identicamente distribuídas, podemos escrever

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} P(e_t = j-k).$$

□

Na propriedade seguinte, analisamos a esperança condicional e a variância condicional do processo e apresentamos as suas expressões.

Propriedade 3.1.7. Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo INAR(1). Então

$$E(X_t | X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + \mu_e$$

e

$$V(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \sigma_e^2.$$

Prova. Para obter a esperança condicional do processo seguimos um raciocínio idêntico ao da propriedade 2.2.5.. Deste modo temos

$$\begin{aligned}
 E(X_t|X_{t-1}) &= E(\alpha \circ X_{t-1} + e_t|X_{t-1}) \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^{X_{t-1}} Y_j|X_{t-1}\right) + E(e_t|X_{t-1}) \\
 &= \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j|X_{t-1}) + E(e_t) \\
 &= \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j) + E(e_t) \\
 &= \alpha X_{t-1} + \mu_e.
 \end{aligned}$$

Quanto à variância condicional, usando a fórmula de Koenig e a primeira parte desta propriedade temos

$$\begin{aligned}
 V(X_t|X_{t-1}) &= E(X_t^2|X_{t-1}) - [E(X_t|X_{t-1})]^2 \\
 &= E((\alpha \circ X_{t-1} + e_t)^2|X_{t-1}) - (\alpha^2 X_{t-1}^2 + 2\alpha X_{t-1}\mu_e + \mu_e^2).
 \end{aligned}$$

Seguindo um raciocínio análogo ao da propriedade 2.2.6., pela independência entre $\alpha \circ X_{t-1}$ e e_t e como $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X_{t-1} , obtêm-se

$$\begin{aligned}
 E((\alpha \circ X_{t-1} + e_t)^2|X_{t-1}) &= \\
 &= E((\alpha \circ X_{t-1})^2|X_{t-1}) + 2E((\alpha \circ X_{t-1})e_t|X_{t-1}) + E(e_t^2|X_{t-1}) \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^{X_{t-1}} Y_j^2 + \sum_{j=1}^{X_{t-1}} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{X_{t-1}} Y_j Y_i|X_{t-1}\right) + 2E(\alpha \circ X_{t-1}|X_{t-1})E(e_t) + \sigma_e^2 + \mu_e^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j^2|X_{t-1}) + \sum_{j=1}^{X_{t-1}} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{X_{t-1}} E(Y_j Y_i|X_{t-1}) + 2 \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j|X_{t-1})\mu_e + \sigma_e^2 + \mu_e^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j^2) + \sum_{j=1}^{X_{t-1}} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{X_{t-1}} E(Y_j)E(Y_i) + 2 \sum_{j=1}^{X_{t-1}} E(Y_j)\mu_e + \sigma_e^2 + \mu_e^2 \\
 &= \alpha X_{t-1} + \alpha^2 X_{t-1}^2 - \alpha^2 X_{t-1} + 2\alpha X_{t-1}\mu_e + \sigma_e^2 + \mu_e^2.
 \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
 V(X_t|X_{t-1}) &= \alpha X_{t-1} + \alpha^2 X_{t-1}^2 - \alpha^2 X_{t-1} + 2\alpha X_{t-1}\mu_e + \sigma_e^2 + \\
 &\quad + \mu_e^2 - \alpha^2 X_{t-1}^2 - 2\alpha X_{t-1}\mu_e - \mu_e^2 \\
 &= \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \sigma_e^2.
 \end{aligned}$$

□

Estudemos agora a distribuição de $(X_t, X_{t-k}), k \geq 1$, calculando a sua função geradora de probabilidades.

Propriedade 3.1.8. Mediante as correspondentes condições de existência das funções geradoras de probabilidades envolvidas, temos

$$p_{(X_t, X_{t-k})}(s, r) = p_{X_t}(r(1 - \alpha^k + \alpha^k s)) \prod_{j=0}^{k-1} p_{e_t}(1 - \alpha^j + \alpha^j s).$$

Prova. Provaremos esta propriedade por recorrência. Deste modo, comecemos por verificar que para $k = 1$ a propriedade é verdadeira. Não esquecendo que os processos (X_t) e (e_t) são de componentes identicamente distribuídas, consideremos $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + e_t$, com $\alpha \circ X_{t-1}$ independente de e_t . Aplicando a definição de esperança condicionada temos

$$\begin{aligned} p_{(X_t, X_{t-1})}(s, r) &= E(s^{X_t} r^{X_{t-1}}) \\ &= E(s^{\alpha \circ X_{t-1} + e_t} r^{X_{t-1}}) \\ &= E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} s^{e_t} r^{X_{t-1}}) \\ &= E[E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} s^{e_t} r^{X_{t-1}} | X_{t-1})] \\ &= E(s^{e_t}) E[r^{X_{t-1}} E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} | X_{t-1})], \end{aligned}$$

uma vez que, pela definição, e_t é independente de $(X_s)_{s < t}$.

Sabendo que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X_{t-1} , vemos que

$$\begin{aligned} E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} | X_{t-1}) &= E\left(s^{\sum_{j=1}^{X_{t-1}} Y_j} \mid X_{t-1}\right) \\ &= E\left(\prod_{j=1}^{X_{t-1}} s^{Y_j} \mid X_{t-1}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{X_{t-1}} E(s^{Y_j} | X_{t-1}) \\ &= [E(s^{Y_1})]^{X_{t-1}} \\ &= (1 - \alpha + \alpha s)^{X_{t-1}}. \end{aligned}$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned} p_{(X_t, X_{t-1})}(s, r) &= p_{e_t}(s) E[(1 - \alpha + \alpha s)^{X_{t-1}} r^{X_{t-1}}] \\ &= p_{e_t}(s) p_{X_t}(r(1 - \alpha + \alpha s)). \end{aligned}$$

Assumindo que a propriedade é verdadeira para k , temos

$$p_{(X_t, X_{t-k})}(s, r) = p_{X_t}(r(1 - \alpha^k + \alpha^k s)) \prod_{j=0}^{k-1} p_{e_t}(1 - \alpha^j + \alpha^j s).$$

Mostremos então que o mesmo se tem para $k + 1$, isto é,

$$p_{(X_t, X_{t-(k+1)})}(s, r) = p_{X_t}(r(1 - \alpha^{k+1} + \alpha^{k+1} s)) \prod_{j=0}^k p_{e_t}(1 - \alpha^j + \alpha^j s).$$

Seguindo o raciocínio anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} p_{(X_t, X_{t-(k+1)})}(s, r) &= E(s^{X_t} r^{X_{t-(k+1)}}) \\ &= E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} s^{e_t} r^{X_{t-(k+1)}}) \\ &= E(E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} s^{e_t} r^{X_{t-(k+1)}} | X_{t-1}, \dots, X_{t-(k+1)})) \\ &= E(s^{e_t}) E(r^{X_{t-(k+1)}} E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} | X_{t-1}, \dots, X_{t-(k+1)})), \end{aligned}$$

uma vez que e_t é independente de $(X_s)_{s < t}$.

Sabendo que $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com Y a seguir a lei $\beta(\alpha)$ e independentes de X_{t-j} , $j = 1, \dots, k + 1$, vemos que

$$E(s^{\alpha \circ X_{t-1}} | X_{t-1}, \dots, X_{t-(k+1)}) = (1 - \alpha + \alpha s)^{X_{t-1}},$$

pelo que

$$\begin{aligned} p_{(X_t, X_{t-(k+1)})}(s, r) &= p_{e_t}(s) E(r^{X_{t-(k+1)}} (1 - \alpha + \alpha s)^{X_{t-1}}) \\ &= p_{e_t}(s) p_{(X_{t-1}, X_{t-(k+1)})}(1 - \alpha + \alpha s, r). \end{aligned}$$

Como podemos observar, a hipótese de indução é independente do instante t , isto é, só depende da diferença entre os índices X_t e X_{t-k} . Deste modo, estamos nas condições da hipótese e aplicando-a temos

$$\begin{aligned} p_{(X_t, X_{t-(k+1)})}(s, r) &= p_{e_t}(s) p_{X_t}(r(1 - \alpha^k + \alpha^k (1 - \alpha + \alpha s))) \prod_{j=0}^{k-1} p_{e_t}(1 - \alpha^{j+1} + \alpha^{j+1} s) \\ &= p_{X_t}(r(1 - \alpha^{k+1} + \alpha^{k+1} s)) \prod_{j=0}^k p_{e_t}(1 - \alpha^j + \alpha^j s). \end{aligned}$$

□

Esta propriedade permite-nos obter a distribuição bidimensional do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, isto é, a lei de (X_{t_1}, X_{t_2}) , $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$.

Em seguida, ilustramos estas últimas propriedades com o modelo INAR(1) de Poisson.

Exemplo 1: Processo INAR(1) de Poisson

A distribuição bidimensional de um processo INAR(1) de Poisson pode ser obtida através da propriedade 3.1.8.. Relembrando que $p_{e_t}(s) = e^{\lambda(s-1)}$ e $p_{X_t}(s) = e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s-1)}$ temos

$$\begin{aligned}
 p_{(X_t, X_{t-k})}(s_0, s_k) &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k(1-\alpha^k + \alpha^k s_0) - 1)} \prod_{j=0}^{k-1} e^{\lambda(1-\alpha^j + \alpha^j s_0 - 1)} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k - \alpha^k s_k + \alpha^k s_0 s_k - 1)} \prod_{j=0}^{k-1} e^{\lambda(\alpha^j s_0 - \alpha^j)} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k - \alpha^k s_k + \alpha^k s_0 s_k - 1)} e^{\lambda(s_0 - 1)} e^{\lambda(\alpha s_0 - \alpha)} \dots e^{\lambda(\alpha^{k-1} s_0 - \alpha^{k-1})} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k - \alpha^k s_k + \alpha^k s_0 s_k - 1)} e^{\lambda(s_0 - 1 + \alpha s_0 - \alpha \dots + \alpha^{k-1} s_0 - \alpha^{k-1})} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k - \alpha^k s_k + \alpha^k s_0 s_k - 1)} e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_0 - 1 + \alpha s_0 - \alpha \dots + \alpha^{k-1} s_0 - \alpha^{k-1})(1-\alpha)} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_k - \alpha^k s_k + \alpha^k s_0 s_k - 1)} e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s_0 - 1 - \alpha^k s_0 + \alpha^k)} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}((s_0 - 1) + (s_k - 1) + \alpha^k(s_0 - 1)(s_k - 1))}.
 \end{aligned}$$

Para este processo, podemos calcular também a esperança condicional e a variância condicional. Relembrando ainda que $\mu_e = \sigma_e^2 = \lambda$, segundo a propriedade 3.1.7. tem-se

$$E(X_t | X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + \lambda$$

e

$$V(X_t | X_{t-1}) = \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \lambda.$$

Ainda, relativamente ao modelo INAR(1) de Poisson podemos estabelecer a seguinte propriedade:

Propriedade 3.1.9. Se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1) de Poisson então, $\forall n \in S_{X_t}$,

$$E(X_t | X_{t-k} = n) = \frac{\lambda}{1 - \alpha}(1 - \alpha^k) + \alpha^k n$$

e

$$V(X_t | X_{t-k} = n) = (1 - \alpha^k) \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha} + \alpha^k n \right).$$

Prova. Começemos por ver que

$$\frac{\partial}{\partial s_0} p_{(X_t, X_{t-k})}(s_0, s_1) = p_{(X_t, X_{t-k})}(s_0, s_1) \frac{\lambda}{1 - \alpha} (1 - \alpha^k + \alpha^k s_1)$$

o que implicará

$$\left. \frac{\partial}{\partial s_0} p_{(X_t, X_{t-k})}(s_0, s) \right|_{s_0=1^-} = p_{X_t}(s) \frac{\lambda}{1 - \alpha} (1 - \alpha^k + \alpha^k s).$$

Usando o lema 2.1.1. temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(X_t | X_{t-k} = n) P(X_{t-k} = n) s^n = \frac{\lambda}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n) (1 - \alpha^k + \alpha^k s).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n) (1 - \alpha^k + \alpha^k s) &= \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n) (1 - \alpha^k) + \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} P(X_t = n) \alpha^k \right) \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n) (1 - \alpha^k) + \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(X_t = n-1) \alpha^k \right) \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n) (1 - \alpha^k) + \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n-1) \alpha^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda}{1-\alpha} (P(X_t = n) (1 - \alpha^k) + P(X_t = n-1) \alpha^k), \end{aligned}$$

uma vez que $S_{X_t} \subseteq \mathbb{N}_0$, isto é, $P(X_t = k) = 0, \forall k < 0$.

Temos então, da igualdade das séries de potências no domínio de convergência que, $\forall n \geq 0$

$$E(X_t | X_{t-k} = n) P(X_{t-k} = n) = \frac{\lambda}{1-\alpha} (P(X_t = n) (1 - \alpha^k) + P(X_t = n-1) \alpha^k)$$

$$\Leftrightarrow E(X_t | X_{t-k} = n) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \left(\frac{\alpha^k P(X_t = n-1)}{P(X_{t-k} = n)} + 1 - \alpha^k \right).$$

Como as margens de (X_t) seguem uma lei de Poisson de parâmetro $\frac{\lambda}{1-\alpha}$ temos

$$\frac{P(X_t = n-1)}{P(X_{t-k} = n)} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{1-\alpha}} \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{n-1}}{(n-1)!}}{e^{-\frac{\lambda}{1-\alpha}} \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^n}{n!}} = \frac{1-\alpha}{\lambda} n, \forall n \geq 1,$$

mantendo-se a igualdade quando $n = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} E(X_t | X_{t-k} = n) &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\lambda} \alpha^k n + 1 - \alpha^k \right) \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} (1 - \alpha^k) + \alpha^k n. \end{aligned}$$

Analisemos agora $V(X_t | X_{t-k} = n)$.

De modo análogo à prova anterior temos

$$\frac{\partial^2}{\partial s_0^2} p(X_t, X_{t-k})(s_0, s) \Big|_{s_0=1^-} = p_{X_t}(s) \left(\frac{\lambda}{1-\alpha} (1 - \alpha^k + \alpha^k s) \right)^2.$$

Novamente pelo lema 2.1.1. do capítulo anterior vem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (E(X_t^2|X_{t-k} = n) - E(X_t|X_{t-k} = n))P(X_{t-k} = n)s^n &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n)(1 - \alpha^k + \alpha^k s)^2 \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n)(1 - \alpha^k + \alpha^k s)^2 \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n)(\alpha^{2k} s^2 + 2(\alpha^k - \alpha^{2k})s + (-2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1)) \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+2} P(X_t = n)\alpha^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} P(X_t = n)2(\alpha^k - \alpha^{2k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n)(-2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1) \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} s^n P(X_t = n - 2)\alpha^{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(X_t = n - 1)2(\alpha^k - \alpha^{2k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_t = n)(-2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \left(P(X_t = n - 2)\alpha^{2k} + P(X_t = n - 1)2(\alpha^k - \alpha^{2k}) \right. \\ &\quad \left. + P(X_t = n)(-2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1) \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} (E(X_t^2|X_{t-k} = n) - E(X_t|X_{t-k} = n))P(X_{t-k} = n) &= \\ &= \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 (P(X_t = n - 2)\alpha^{2k} + P(X_t = n - 1)2(\alpha^k - \alpha^{2k}) + P(X_t = n)(-2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(X_t^2|X_{t-k} = n) - E(X_t|X_{t-k} = n) = \\ &= \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \left(\alpha^{2k} \frac{P(X_t = n - 2)}{P(X_{t-k} = n)} + 2(\alpha^k - \alpha^{2k}) \frac{P(X_t = n - 1)}{P(X_{t-k} = n)} - 2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 \left(\alpha^{2k} n(n - 1) \left(\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right)^2 + 2(\alpha^k - \alpha^{2k}) n \frac{1 - \alpha}{\lambda} - 2\alpha^k + \alpha^{2k} + 1 \right) \\ &= \alpha^{2k} n(n - 1) + \frac{\lambda}{1 - \alpha} 2(\alpha^k - \alpha^{2k}) n + \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 (1 - \alpha^k)^2 \\ &\Leftrightarrow E(X_t^2|X_{t-k} = n) = \alpha^{2k} n(n - 1) + \frac{\lambda}{1 - \alpha} 2(\alpha^k - \alpha^{2k}) n + \left(\frac{\lambda}{1 - \alpha}\right)^2 (1 - \alpha^k)^2 + E(X_t|X_{t-k} = n). \end{aligned}$$

Após conhecidos os valores de $E(X_t|X_{t-k} = n)$ e $E(X_t^2|X_{t-k} = n)$ temos

$$\begin{aligned}
 V(X_t|X_{t-k} = n) &= E(X_t^2|X_{t-k} = n) - (E(X_t|X_{t-k} = n))^2 \\
 &= \alpha^{2k}(n(n-1) - n^2) + \frac{\lambda}{1-\alpha} 2\alpha^k(1-\alpha^k)n + \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^2 (1-\alpha^k)^2 + \\
 &+ \frac{\lambda}{1-\alpha}(1-\alpha^k) + \alpha^k n - \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^2 (1-\alpha^k)^2 - \frac{\lambda}{1-\alpha} 2\alpha^k(1-\alpha^k)n \\
 &= -\alpha^{2k}n + \frac{\lambda}{1-\alpha}(1-\alpha^k) + \alpha^k n.
 \end{aligned}$$

Obtemos assim o resultado pretendido. □

3.2. Modelo INAR(1) de Poisson Inflacionado em Zero

A descrição probabilista de muitos sistemas estocásticos, designadamente ligados a controlo de qualidade e à contagem do número de falhas ou defeitos, fazem surgir variáveis aleatórias cuja distribuição é necessariamente mista e incluindo um peso adicional à probabilidade de ocorrência de zeros.

Um dos modelos estocásticos introduzidos para incorporar esta característica é o modelo INAR(1) inflacionado em zero, denotado ZINAR(1), cuja lei marginal do processo de inovação é uma mistura de uma lei discreta não degenerada com uma lei degenerada no ponto zero.

Nesta secção vamos estudar o modelo ZINAR(1) com inovações de Poisson inflacionadas no ponto zero introduzido por Jazi, Jones e Lai (2012)[8].

3.2.1. Distribuição de Poisson Inflacionada em Zero

Neyman(1939) [11] e Feller(1943) [4] foram os primeiros probabilistas a introduzir o conceito inflacionado em zero para estudar o problema de ocorrência de excesso de zeros em certas características aleatórias. Embora tal conceito possa surgir associado a qualquer lei de probabilidade, iremos centrarmo-nos na lei de Poisson.

Definição 3.2.1.1. Uma variável aleatória Z segue uma distribuição de Poisson inflacionada em zero com parâmetros ρ e λ , denotada $ZIP(\rho, \lambda)$, se a sua função de probabilidades é dada por

$$P(Z = k) = \begin{cases} \rho + (1-\rho)e^{-\lambda} & \text{se } k = 0 \\ (1-\rho)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{se } k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

onde $\rho \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$. De modo equivalente,

$$P(Z = k) = \rho I_0(k) + (1 - \rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

$$\text{com } I_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

Nestas condições, ρ representa a proporção de zeros que é adicionada à proporção de zeros da distribuição de Poisson de parâmetro λ .

Propriedade 3.2.1.1. Seja Z uma variável a seguir uma distribuição ZIP(ρ, λ) então

$$E(Z) = \lambda(1 - \rho)$$

e

$$V(Z) = E(Z)(1 + \rho\lambda).$$

Prova. Supondo Z uma distribuição ZIP(ρ, λ) com suporte \mathbb{N}_0 , tem-se

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k P(Z = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k (1 - \rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= (1 - \rho) \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda(1 - \rho). \end{aligned}$$

Quanto à variância, tem-se

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k^2 P(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - \rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) + k}{k!} \lambda^k \\ &= (1 - \rho) e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda(1 - \rho) + (1 - \rho) e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &= \lambda(1 - \rho) + (1 - \rho) \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda(1 - \rho) + (1 - \rho) \lambda^2. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Koenig temos

$$\begin{aligned} V(Z) &= \lambda(1-\rho) + (1-\rho)\lambda^2 - [\lambda(1-\rho)]^2 \\ &= \lambda(1-\rho)(1+\lambda\rho). \end{aligned}$$

□

A função geradora de probabilidades de Z admite a seguinte representação

$$\begin{aligned} p_Z(s) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s^k P(Z = k) \\ &= \rho + (1-\rho)e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \rho + (1-\rho)e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \\ &= \rho + (1-\rho)e^{\lambda(s-1)}, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.2.2. Modelo ZINAR(1) de Poisson

O modelo ZINAR(1) é o modelo INAR(1) estudado, com inovações inflacionadas em zero. Analisemos algumas características probabilísticas deste modelo quando as inovações são leis de Poisson inflacionadas em zero.

Definição 3.2.2.1. Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo a seguir o modelo INAR(1), definido em 3.1. com $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ seguindo uma distribuição ZIP(ρ, λ). Dizemos que (X_t) segue um modelo ZINAR(1) de Poisson.

Observamos facilmente que todas as propriedades gerais válidas para o modelo INAR(1) são também verdadeiras para o ZINAR(1). Em particular, como provado, o processo (X_t) tem uma solução estritamente estacionária, de segunda ordem para qualquer distribuição de (e_t) , nas condições da definição 3.1.1.. Calculemos então a esperança matemática e a variância do processo no caso agora em estudo.

Propriedade 3.2.2.1. Se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um processo ZINAR(1) de Poisson então

$$E(X_t) = \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\alpha}$$

e

$$V(X_t) = \frac{\lambda(1-\rho)(1+\alpha+\rho\lambda)}{1-\alpha^2}.$$

Prova. Esta demonstração vem facilmente das propriedades 3.1.4. e 3.2.1.1.. A

expressão da esperança matemática é imediata e

$$\begin{aligned} V(X_t) &= \frac{\alpha\mu_e + \mu_e(1 + \rho\lambda)}{1 - \alpha^2} \\ &= \frac{\mu_e(1 + \alpha + \rho\lambda)}{1 - \alpha^2} \\ &= \frac{\lambda(1 - \rho)(1 + \alpha + \rho\lambda)}{1 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

□

Ilustramos o modelo ZINAR(1) de Poisson considerando a trajectória presente na Figura 3.3, obtida através da geração de 300 valores de um processo $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que

$$X_t = 0.5 \circ X_{t-1} + e_t,$$

onde $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ segue uma distribuição ZIP(0.5,1). Aos valores gerados retiramos os 50 primeiros de modo a minimizar o erro relacionado com o valor inicial introduzido, $X_0 = 1$. Assim, a trajectória é apresentada para $t \in \{0, \dots, 250\}$.

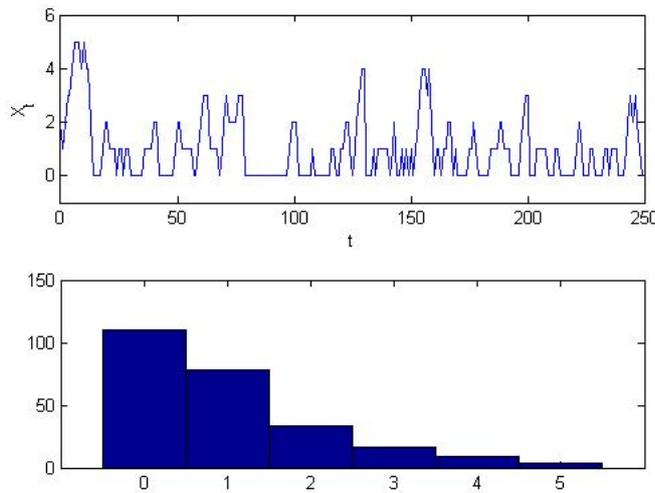


Figura 3.3: Trajectória de um modelo ZINAR(1) de Poisson com $\alpha = 0.5$, $\rho = 0.5$, $\lambda = 1$ e respectivo histograma.

Temos para este processo, $\mu_X = 1$ e $\sigma_X^2 = 1.333(3)$. Note-se que os valores empíricos associados a esta amostra são $\bar{x} = 0.9960$ e $s_X^2 = 1.4120$, o que se pode considerar uma boa aproximação dos valores teóricos.

Outra característica que tem sido observada nos sistemas estocásticos descritos por este tipo de modelos é a sobredispersão, isto é, a razão entre a variância e a média é

superior a um. Assim, diremos que um processo estocástico $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ seguindo um modelo INAR(1) é sobredisperso se $\frac{V(X_t)}{E(X_t)} > 1$.

Observamos no caso do modelo ZINAR(1) de Poisson que se tem

$$\begin{aligned} \frac{V(X_t)}{E(X_t)} &= \frac{\frac{\mu_e(1+\alpha+\rho\lambda)}{1-\alpha^2}}{\frac{\mu_e}{1-\alpha}} \\ &= \frac{(1+\alpha+\rho\lambda)(1-\alpha)}{1-\alpha^2} \\ &= \frac{1+\alpha+\rho\lambda}{1+\alpha} \\ &= 1 + \frac{\rho\lambda}{1+\alpha}, \end{aligned}$$

pelo que o processo ZINAR(1) de Poisson é um modelo para séries temporais de valores inteiros sobredispersos, enquanto que o modelo INAR(1) de Poisson é equidisperso.

Vamos agora obter a função geradora da lei marginal do modelo ZINAR(1) de Poisson. Da propriedade 3.1.1. temos que $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ admite a seguinte representação em L^2

$$X_t \stackrel{L^2}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}$$

e, conseqüentemente também em lei. Assim, quando $J \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j} \xrightarrow{L} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ e_{t-j}.$$

A convergência em lei implica a convergência das funções geradoras de probabilidades e como as operações *thinning* binomial são executadas independentemente umas das outras e pela proposição 2.1.2., podemos escrever,

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) &= \lim_{J \rightarrow \infty} p_{\sum_{j=0}^J \alpha^j \circ e_{t-j}}(s) \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^J p_{\alpha^j \circ e_{t-j}}(s) \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^J p_{e_{t-j}}(1 - \alpha^j + \alpha^j s) \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^J (\rho + (1 - \rho)e^{\alpha^j \lambda (s-1)}). \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade do limite,

$$p_{X_t}(s) = \prod_{j=0}^{\infty} (\rho + (1 - \rho)e^{\alpha^j \lambda (s-1)}).$$

A presença de excesso de zeros numa série de contagem motivou a introdução do modelo ZINAR(1). Deste modo, será interessante estudar probabilisticamente a evolução dos zeros no processo.

O comprimento de uma sequência de zeros no processo é definido como o número de zeros entre dois valores não nulos. Ora, como vimos, o processo X_t é uma cadeia de Markov homogênea, pelo que as probabilidades de transição do processo podem ser calculadas, reescrevendo a proposição 3.1.6., do seguinte modo:

$$\begin{aligned} p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} P(e_t = j-k) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} \left(\rho I_0(j-k) + (1-\rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-k}}{(j-k)!} \right). \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de transição de um valor não zero, i , para um zero é dada por

$$\begin{aligned} p_{i0} &= \sum_{k=0}^0 \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} \left(\rho I_0(0-k) + (1-\rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{0-k}}{(0-k)!} \right) \\ &= \binom{i}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^i \left(\rho I_0(0) + (1-\rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \right) \\ &= (1-\alpha)^i (\rho + (1-\rho)e^{-\lambda}), \end{aligned}$$

a probabilidade de transição de zero para zero é

$$p_{00} = \rho + (1-\rho)e^{-\lambda}$$

e de um zero para um valor não-zero, j ,

$$\begin{aligned} p_{0j} &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{0-k} \left(\rho I_0(j-k) + (1-\rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-k}}{(j-k)!} \right) \\ &= \binom{0}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^0 \left(\rho I_0(j) + (1-\rho) \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right) \\ &= (1-\rho) e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de transição de um zero para qualquer valor não nulo é

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j} &= (1-\rho) e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= (1-\rho) e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1) \\ &= (1-\rho)(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

Posto isto, para estudar o comprimento de uma sequência de zeros entre dois estados não nulos consideremos o acontecimento

$A \equiv$ "ocorrer zero após um estado não nulo"

e Z a v.a.r. "número de zeros consecutivos que se sucedem a um zero".

Estudar a distribuição do comprimento de zeros é equivalente a estudar a lei da v.a.r. Z dado o acontecimento A , onde $S_{Z/A} = \mathbb{N}_0$.

Comecemos por ver

$$\begin{aligned}
 P(Z = 0/A) &= \frac{P(Z = 0, A)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_t = i, X_{t+1} = 0, X_{t+2} = j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i, X_{t+1} = 0)} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0} p_{0j}}{\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0}} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_{0j} \left(\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0} \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0}} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j} = (1 - \rho)(1 - e^{-\lambda}).
 \end{aligned}$$

De modo análogo, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 P(Z = k/A) &= \frac{P(Z = k, A)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0} p_{00}^k p_{0j}}{\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0}} \\
 &= \frac{p_{00}^k \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j} \left(\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0} \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(X_t = i) p_{i0}} \\
 &= p_{00}^k (1 - \rho)(1 - e^{-\lambda}).
 \end{aligned}$$

O comprimento médio de zeros é $E(Z/A) + 1$ e,

$$\begin{aligned}
 E(Z/A) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{00}^k (1 - \rho)(1 - e^{-\lambda}) k \\
 &= (1 - \rho)(1 - e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} k p_{00}^k \\
 &= (1 - \rho)(1 - e^{-\lambda}) p_{00} \frac{1}{(1 - p_{00})^2} \\
 &= \frac{p_{00}}{1 - p_{00}}.
 \end{aligned}$$

Assim, o comprimento médio de uma sequência de zeros entre dois valores não nulos

é então

$$\frac{p_{00}}{1-p_{00}} + 1 = \frac{p_{00} + 1 - p_{00}}{1-p_{00}} = \frac{1}{1-p_{00}} = \frac{1}{(1-\rho)(1-e^{-\lambda})}.$$

Verificamos que

$$\mu = \frac{1}{(1-\rho)(1-e^{-\lambda})}$$

é independente de α , sendo $\frac{1}{1-\rho}$ vezes maior que o comprimento médio de zeros para o modelo INAR(1) de Poisson, uma vez que para este se tem $p_{00} = e^{-\lambda}$ vindo, de forma análoga,

$$\mu = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

De modo a obter a proporção de zeros do modelo, podemos escrever pela definição de função geradora de probabilidades,

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) = E(s^{X_t}) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X_t = k) \\ &= P(X_t = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} s^k P(X_t = k). \end{aligned}$$

Assim, a proporção de zeros no modelo ZINAR(1) de Poisson é

$$P(X_t = 0) = p_{X_t}(0) = \prod_{j=0}^{\infty} (\rho + (1-\rho)e^{-\alpha^j \lambda}).$$

Em contrapartida, para o modelo INAR(1) de Poisson temos

$$P(X_t = 0) = e^{-\frac{\lambda}{1-\alpha}}.$$

Como podemos observar, a proporção de zeros no modelo INAR(1) de Poisson é $P(X_t = 0) = e^{-E(X_t)}$. Contudo, para o processo ZINAR(1) de Poisson não existe relação com a esperança marginal, sendo $P(X_t = 0) > e^{-E(X_t)}$.

Capítulo 4

Modelo INMA(q)

Como referido, o modelo INAR(1) estudado foi inspirado nos AR(1). De igual modo, o modelo INMA(q) foi inspirado nos modelos MA(q) e introduzido por Al-Osh e Alzaid (1988)[2] e Mckenzie (1988) [10].

4.1. Definição e Propriedades do Modelo INMA(q)

Ao longo desta secção, vamos introduzir o modelo INMA(q) e apresentar algumas das suas propriedades. De modo semelhante ao capítulo anterior, vamos ilustrando tais propriedades através do modelo INMA(q) de Poisson, isto é, quando o processo $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ segue uma lei de Poisson, e do modelo INMA(q) Geométrico, onde o processo inovação segue uma lei Geométrica.

Definição 4.1.1. Seja $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo de componentes i.i.d. de suporte contido em \mathbb{N}_0 , com média μ_e e variância σ_e^2 . Sejam $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q \in [0, 1], \beta_q \neq 0$. Dizemos que um processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INMA(q) se é definido por

$$X_t = \beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}.$$

Note-se que as operações *thinning* binomial são executadas independentemente umas das outras e são independentes de $(e_t, t \in \mathbb{Z})$, porque as variáveis aleatórias envolvidas em cada operação *thinning* podem ser, sem perda de generalidade, consideradas todas independentes.

Em contraste com o modelo INAR(1), neste caso em cada instante t são executadas $q+1$ operações *thinning* diferentes e cada e_t está envolvido em $q+1 > 1$ operações *thinning*, em $q+1$ tempos diferentes $(t, \dots, t+q)$.

Seja S um sistema que evolui em determinado período de tempo.

Uma interpretação possível para o modelo é: seja t o t -ésimo instante de tempo. No instante t entram, no sistema S , e_t elementos, $E_{t,1}, E_{t,2}, \dots, E_{t,e_t}$, que formam a geração t , e cada elemento pode estar "activo" ou "inactivo". No instante t , cada elemento da geração $t-i$, $0 \leq i \leq q$, tem a probabilidade β_i de estar activo, independentemente dos outros. Assim, $\beta_i \circ e_{t-i}$ representa o número de elementos da geração

$t - i$ que estão activos no instante t e X_t o número total de elementos activos no instante t presentes no sistema S .

Os elementos da geração t têm expectativa de vida finita, $q + 1$, ou seja, podem estar activos apenas em $t, \dots, t + q$; depois permanecem inactivos.

Comecemos por analisar a estacionaridade estrita do processo estocástico INMA(q).

Propriedade 4.1.1. O processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é de componentes identicamente distribuídas e admite a seguinte função geradora de probabilidades marginal

$$p_{X_t}(s) = \prod_{j=0}^q p_{e_t}(1 - \beta_j + \beta_j s).$$

Prova. Como para todo $j = 0, \dots, q$, $\beta_j \circ e_{t-j}$ são independentes estamos nas condições da proposição 2.1.2. e tendo em conta que (e_t) é de componentes i.i.d. vem

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) &= p_{\beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}}(s) \\ &= p_{\beta_0 \circ e_t}(s) p_{\beta_1 \circ e_{t-1}}(s) \dots p_{\beta_q \circ e_{t-q}}(s) \\ &= p_{e_t}(1 - \beta_0 + \beta_0 s) p_{e_{t-1}}(1 - \beta_1 + \beta_1 s) \dots p_{e_{t-q}}(1 - \beta_q + \beta_q s) \\ &= \prod_{j=0}^q p_{e_t}(1 - \beta_j + \beta_j s). \end{aligned}$$

Como a função geradora de probabilidades de X_t não depende de t , concluímos que as margens do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ são identicamente distribuídas.

□

Na propriedade seguinte vamos estabelecer a igualdade das leis dos vectores bidimensionais usando a função geradora de probabilidades.

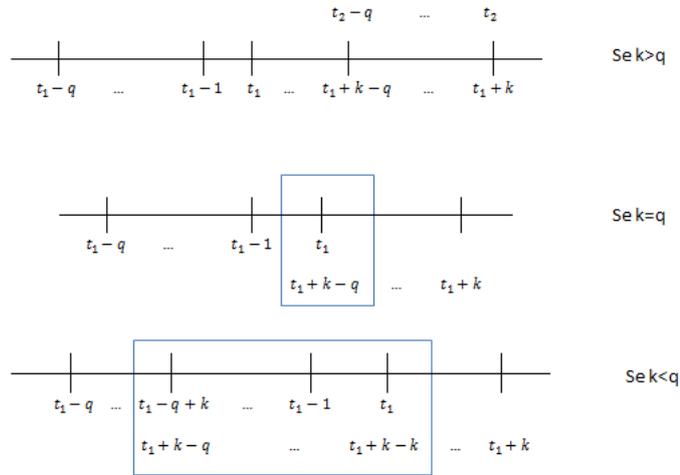
Propriedade 4.1.2. Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um modelo INMA(q). A lei de (X_{t_1}, X_{t_2}) coincide com a lei de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}), \forall t_1, t_2, h \in \mathbb{Z}$.

Prova. A função geradora de probabilidades caracteriza a lei, assim sendo, mostremos que

$$E(s_0^{X_{t_1}} s_1^{X_{t_2}}) = E(s_0^{X_{t_1+h}} s_1^{X_{t_2+h}}).$$

Consideremos sem perda de generalidade $t_2 \geq t_1$. Façamos $t_2 - t_1 = k \geq 0$.

Na Figura 4.1 apresentamos um esquema que ilustra os instantes comuns nas expressões das componentes X_{t_1} e X_{t_2} . Observamos que para $k > q$ não existem gerações comuns, enquanto para $k < q$ existem $q - k + 1$.


 Figura 4.1: Instantes presentes nas componentes X_{t_1} e X_{t_1+k} .

Começemos por ver que

$$\begin{aligned}
 E(s_0^{X_{t_1}} s_1^{X_{t_1+k}}) &= E(s_0^{\beta_0 \circ e_{t_1} + \dots + \beta_q \circ e_{t_1-q}} s_1^{\beta_0 \circ e_{t_1+k} + \dots + \beta_q \circ e_{t_1+k-q}}) \\
 &= \begin{cases} E(s_0^{\beta_0 \circ e_{t_1}}) \dots E(s_0^{\beta_q \circ e_{t_1-q}}) E(s_1^{\beta_0 \circ e_{t_1+k}}) \dots E(s_1^{\beta_q \circ e_{t_1+k-q}}) & \text{se } k > q \\ E(s_0^{\beta_q \circ e_{t_1-q}}) \dots E(s_0^{\beta_{q-k+1} \circ e_{t_1-q+k-1}}) E(s_0^{\beta_0 \circ e_{t_1}} s_1^{\beta_k \circ e_{t_1}}) \times \\ \times \dots E(s_0^{\beta_{q-k} \circ e_{t_1-q+k}} s_1^{\beta_q \circ e_{t_1+k-q}}) E(s_1^{\beta_0 \circ e_{t_1+k}}) \dots E(s_1^{\beta_{k-1} \circ e_{t_1+1}}) & \text{se } k \leq q \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \prod_{j=0}^q E(s_0^{\beta_j \circ e_{t_1-j}}) E(s_1^{\beta_j \circ e_{t_1+k-j}}) & \text{se } k > q \\ \prod_{j=0}^{k-1} E(s_0^{\beta_{q-j} \circ e_{t_1-q+j}}) \prod_{j=k}^q E(s_0^{\beta_{j-k} \circ e_{t_1+k-j}} s_1^{\beta_j \circ e_{t_1+k-j}}) \prod_{j=0}^{k-1} E(s_1^{\beta_j \circ e_{t_1+k-j}}) & \text{se } k \leq q \end{cases}
 \end{aligned}$$

Como o processo (e_t) é de componentes identicamente distribuídas temos para qualquer $j = 0, \dots, q$,

$$E(s_0^{\beta_j \circ e_{t_1-j}}) = p_{e_t} (1 - \beta_j + \beta_j s_0)$$

e

$$E(s_1^{\beta_j \circ e_{t_1+k-j}}) = p_{e_t} (1 - \beta_j + \beta_j s_1).$$

Calculemos agora

$$\begin{aligned}
 E(s_0^{\beta_{j-k} \circ e_{t_1+k-j}} s_1^{\beta_j \circ e_{t_1+k-j}}) &= E\left(E\left(s_0^{\sum_{i=0}^{e_{t_1+k-j}} Y_i} s_1^{\sum_{l=0}^{e_{t_1+k-j}} Z_l} \middle| e_{t_1+k-j}\right)\right) \\
 &= E\left(E\left(\prod_{i=0}^{e_{t_1+k-j}} s_0^{Y_i} s_1^{Z_i} \middle| e_{t_1+k-j}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left(\prod_{i=0}^{e_{t_1+k-j}} E(s_0^{Y_i} s_1^{Z_i})\right) \\
 &= E(E(s_0^{Y_1})^{e_{t_1+k-j}} E(s_1^{Z_1})^{e_{t_1+k-j}}) \\
 &= E((1 - \beta_{j-k} + \beta_{j-k}s_0)(1 - \beta_j + \beta_j s_1)^{e_{t_1+k-j}}) \\
 &= p_{e_t}((1 - \beta_{j-k} + \beta_{j-k}s_0)(1 - \beta_j + \beta_j s_1)),
 \end{aligned}$$

pois $\{Y_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d com Y a seguir uma lei $\beta(\beta_{j-k})$ e $\{Z_j\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d com Z a seguir uma lei $\beta(\beta_j)$, ambas independentes de e_{t_2-j} e , porque sem perda de generalidade, podemos assumir $\{Y_j\}$ independentes de $\{Z_j\}$.

Então,

$$E(s_0^{X_{t_1}} s_1^{X_{t_1+k}}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^1 \prod_{j=0}^q p_{e_t} (1 - \beta_j + \beta_j s_i) & \text{se } k > q \\ \prod_{j=0}^{k-1} p_{e_t} (1 - \beta_{q-j} + \beta_{q-j} s_0) \prod_{j=k}^q p_{e_t} ((1 - \beta_{j-k} + \beta_{j-k} s_0) \times \\ \times (1 - \beta_j + \beta_j s_1)) \prod_{j=0}^{k-1} p_{e_t} (1 - \beta_j + \beta_j s_1) & \text{se } k \leq q. \end{cases}$$

Os valores obtidos são independentes de t_1 , dependendo apenas da diferença k entre t_2 e t_1 . Logo, $E(s_0^{X_{t_1}} s_1^{X_{t_1+k}}) = E(s_0^{X_{t_1+h}} s_1^{X_{t_1+k+h}})$ coincide com a expressão acima obtida.

□

A propriedade anterior caracteriza as leis de dimensão dois do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$.

Um raciocínio análogo, mas envolvendo uma maior complexidade, permite obter $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}$

$$E(s_0^{X_{t_1}} \dots s_n^{X_{t_n}}) = E(s_0^{X_{t_1+h}} \dots s_n^{X_{t_n+h}}),$$

o que nos leva a concluir que um processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ seguindo um modelo INMA(q) é estritamente estacionário.

Vejamos agora que o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é de segunda ordem.

Propriedade 4.1.3. O processo (X_t) seguindo um modelo INMA(q) é de segunda ordem.

Prova. Tendo em consideração que (e_t) é um processo de componentes identicamente distribuídas e usando as propriedades 2.2.5. e 2.2.6. tem-se

$$\begin{aligned}
 E(X_t^2) &= E((\beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q})^2) \\
 &= E\left(\sum_{j=0}^q (\beta_j \circ e_{t-j})^2 + \sum_{j=0}^q \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^q (\beta_j \circ e_{t-j})(\beta_i \circ e_{t-i})\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^q E((\beta_j \circ e_{t-j})^2) + \sum_{j=0}^q \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^q E(\beta_j \circ e_{t-j})E(\beta_i \circ e_{t-i}) \\
 &= \sum_{j=0}^q \beta_j^2 E(e_{t-j}^2) + \beta_j(1 - \beta_j)E(e_{t-j}) + \sum_{j=0}^q \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^q \beta_j \beta_i E(e_{t-j})E(e_{t-i}) \\
 &= \sum_{j=0}^q \beta_j^2 (\sigma_e^2 + \mu_e^2) + \beta_j(1 - \beta_j)E(e_{t-j}) + \sum_{j=0}^q \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^q \beta_j \beta_i \mu_e^2 \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

uma vez que o processo (e_t) admite variância.

□

Propriedade 4.1.4. Se (X_t) segue um modelo INMA(q) tem-se

$$E(X_t) = \mu_e \sum_{j=0}^q \beta_j$$

e

$$V(X_t) = \mu_e \sum_{j=0}^q \beta_j + (\sigma_e^2 - \mu_e) \sum_{j=0}^q \beta_j^2.$$

Prova. Para obter a esperança matemática do processo usamos o facto das componentes de (e_t) serem identicamente distribuídas e a propriedade 2.2.5..

$$\begin{aligned}
 E(X_t) &= E(\beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}) \\
 &= E(\beta_0 \circ e_t) + E(\beta_1 \circ e_{t-1}) + \dots + E(\beta_q \circ e_{t-q}) \\
 &= \beta_0 E(e_t) + \beta_1 E(e_{t-1}) + \dots + \beta_q E(e_{t-q}) \\
 &= \mu_e \sum_{j=0}^q \beta_j.
 \end{aligned}$$

Quanto à variância, como $\beta_j \circ e_{t-j}, j = 0, \dots, q$, são mutuamente independentes, o processo (e_t) é de componentes identicamente distribuídas e pela propriedade 2.2.7. temos

$$\begin{aligned}
 V(X_t) &= V(\beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}) \\
 &= \sum_{j=0}^q V(\beta_j \circ e_{t-j}) \\
 &= \sum_{j=0}^q \beta_j^2 V(e_{t-j}) + \beta_j(1 - \beta_j)E(e_{t-j}) \\
 &= \mu_e \sum_{j=0}^q \beta_j + (\sigma_e^2 - \mu_e) \sum_{j=0}^q \beta_j^2.
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 1: Modelo INMA(q) de Poisson

Se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INMA(q) com (e_t) um processo de componentes i.i.d. com uma lei de Poisson de parâmetro λ , então $\mu_e = \sigma_e^2 = \lambda$ e $p_{e_t}(s) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}$.

Pela propriedade 4.1.4. temos

$$\mu_X = \sigma_X^2 = \lambda \sum_{j=0}^q \beta_j$$

e a função geradora de probabilidades de X_t é

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) &= \prod_{j=0}^q e^{\lambda(1-\beta_j+\beta_j s-1)} \\ &= \prod_{j=0}^q e^{\lambda(\beta_j(s-1))} \\ &= e^{\lambda(s-1) \sum_{j=0}^q \beta_j}. \end{aligned}$$

Neste caso o modelo INMA(q) é designado modelo INMA(q) de Poisson. Como a função geradora de probabilidades determina a lei verifica-se que a lei de cada margem X_t é uma lei de Poisson de parâmetro $\lambda \sum_{j=0}^q \beta_j$.

De modo a ilustrar o modelo INMA(q) de Poisson, apresentamos na Figura 4.2 uma trajectória do processo admitindo a seguinte representação

$$X_t = 0.2 \circ e_t + 0.9 \circ e_{t-1} + 0.1 \circ e_{t-2},$$

onde (e_t) segue uma lei de Poisson de parâmetro 5. Geramos 300 observações, apresentando a trajectória para $t \in \{0, \dots, 300\}$.

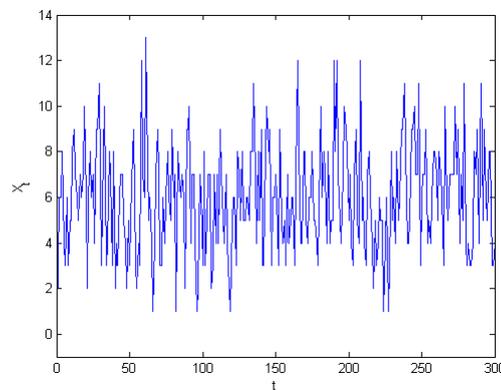


Figura 4.2: Trajectória de um modelo INMA(2) de Poisson(5) com $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = 0.9$ e $\beta_2 = 0.1$.

Sabemos que $\mu_X = \sigma_X^2 = 6$ e da simulação obtemos os seguintes valores empíricos da média e variância $\bar{x} = 5.9867$ e $s_X^2 = 5.9198$. Como era de esperar, verificamos uma proximidade entre os valores teóricos e empíricos.

△

Exemplo 2: Processo INMA(q) Geométrico

Consideremos agora que $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INMA(q) com $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo de componentes i.i.d. com uma lei Geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$. Nestas condições, designamos (X_t) por modelo INMA(q) Geométrico. Do capítulo 3, relembramos que $\mu_e = \frac{1-p}{p}$, $\sigma_e^2 = \frac{1-p}{p^2}$ e $p_{e_t}(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$. A função geradora de probabilidades de X_t , é pela propriedade 4.1.1., dada por

$$\begin{aligned} p_{X_t}(s) &= \prod_{j=0}^q \frac{p}{1 - (1-p)(1 - \beta_j + \beta_j s)} \\ &= \prod_{j=0}^q \frac{p}{\beta_j - \beta_j s + p - \beta_j p + \beta_j p s} \\ &= \prod_{j=0}^q \frac{p}{\beta_j(1 - s - p + ps) + p} \end{aligned}$$

e, da propriedade 4.1.4.

$$\mu_X = \frac{1-p}{p} \sum_{j=0}^q \beta_j$$

e

$$\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p} \sum_{j=0}^q \beta_j + \left(\frac{1-p}{p^2} - \frac{1-p}{p} \right) \sum_{j=0}^q \beta_j^2 = \frac{1-p}{p} \sum_{j=0}^q \beta_j + \left(\frac{(1-p)^2}{p^2} \right) \sum_{j=0}^q \beta_j^2.$$

Na Figura 4.3, apresentamos uma trajectória do processo admitindo a seguinte representação

$$X_t = 0.2 \circ e_t + 0.9 \circ e_{t-1} + 0.1 \circ e_{t-2},$$

e (e_t) seguindo a lei Geométrica de parâmetro 0.5.

Uma vez mais, geramos 300 observações e os valores empíricos obtidos para a média e a variância são $\bar{x} = 1.1229$ e $s_X^2 = 2.0682$, sendo bastante próximos dos correspondentes valores teóricos $\mu_X = 1.2$ e $\sigma_X^2 = 2.06$.

△

De modo a obter a função de autocorrelação do processo INMA(q), começemos por estudar a sua função de autocovariância.

Propriedade 4.1.5. Sendo (X_t) um processo INMA(q) tem-se

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma_e^2 \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k} & \text{se } |k| \in \{0, \dots, q\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

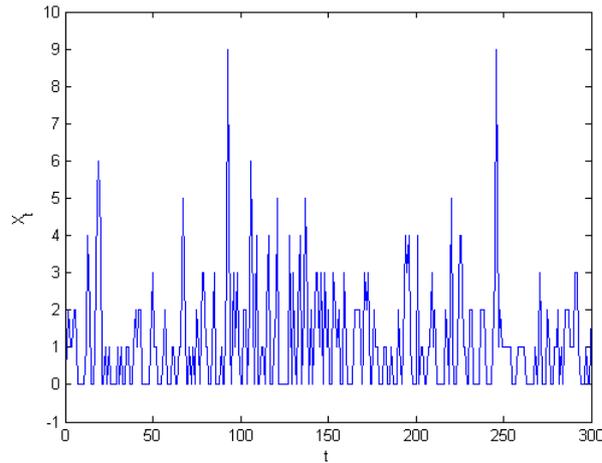


Figura 4.3: Trajetória de um modelo INMA(2) Geométrica(0.5) com $\beta_0 = 0.2$,

$$\beta_1 = 0.6 \text{ e } \beta_2 = 0.1.$$

Prova. Começemos por ver que para $k \in \{0, \dots, q\}$

$$Cov(X_t, X_{t-k}) =$$

$$\begin{aligned} &= Cov(\beta_0 \circ e_t + \beta_1 \circ e_{t-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-q}, \beta_0 \circ e_{t-k} + \beta_1 \circ e_{t-k-1} + \dots + \beta_q \circ e_{t-k-q}) \\ &= Cov\left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \circ e_{t-j} + \sum_{j=k}^q \beta_j \circ e_{t-j}, \sum_{r=0}^{q-k} \beta_r \circ e_{t-k-r} + \sum_{r=q-k+1}^q \beta_r \circ e_{t-k-r}\right) \\ &= Cov\left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \circ e_{t-j}, \sum_{r=0}^{q-k} \beta_r \circ e_{t-k-r}\right) + Cov\left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \circ e_{t-j}, \sum_{r=q-k+1}^q \beta_r \circ e_{t-k-r}\right) + \\ &+ Cov\left(\sum_{j=k}^q \beta_j \circ e_{t-j}, \sum_{r=0}^{q-k} \beta_r \circ e_{t-k-r}\right) + Cov\left(\sum_{j=k}^q \beta_j \circ e_{t-j}, \sum_{r=q-k+1}^q \beta_r \circ e_{t-k-r}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{q-k} Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=q-k+1}^q Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}) + \\ &+ \sum_{j=k}^q \sum_{r=0}^{q-k} Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}) + \sum_{j=k}^q \sum_{r=q-k+1}^q Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}). \end{aligned}$$

Pela propriedade 2.2.10. temos

$$\begin{aligned} Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}) &= \beta_j \beta_r Cov(e_{t-j}, e_{t-k-r}) \\ &= 0, \forall j \neq k+r \end{aligned}$$

sabendo que (e_t) é um processo de componentes independentes.

Quando $0 \leq r \leq q+k$ só existem componentes comuns se $k \leq j \leq q$ e, para $q-k+1 \leq r \leq q$ só existem componentes comuns se $q+1 \leq j \leq q+k$. Assim, temos

apenas

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-k}) &= \sum_{j=k}^q \sum_{r=0}^{q-k} Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_r \circ e_{t-k-r}) \\
&= \sum_{j=k}^q Cov(\beta_j \circ e_{t-j}, \beta_{j-k} \circ e_{t-j}) \\
&= \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k} V(e_{t-j}).
\end{aligned}$$

Quando $k \in \{q+1, \dots\}$ temos $\gamma(k) = 0$ uma vez que X_t e X_{t-k} não têm componentes comuns.

□

Uma vez que o processo (X_t) é de segunda ordem e como $E(X_t)$ é constante e $Cov(X_t, X_{t-k})$ é apenas função de k , podemos concluir que o processo INMA(q) é estacionário no sentido fraco.

Tendo em conta a definição da função de autocorrelação, estamos nas condições de a calcular, para os diversos exemplos.

Exemplo 1: Modelo INMA(q) de Poisson

A função de autocorrelação deste modelo pode ser obtida tendo em conta a propriedade 4.1.5. Nota-se que para $|k| \in \{0, \dots, q\}$ temos

$$\gamma(k) = \lambda \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}, 0 < |k| \leq q \text{ e } \gamma(0) = V(X_t) = \lambda \sum_{j=0}^q \beta_j.$$

A função de autocorrelação é então dada por

$$\rho(k) = \frac{\lambda \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}}{\lambda \sum_{j=0}^q \beta_j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^q \beta_j} \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}.$$

△

Exemplo 2: Modelo INMA(q) Geométrico

Uma vez mais, para $|k| \in \{0, \dots, q\}$, da propriedade 4.1.5. temos

$$\gamma(k) = \frac{1-p}{p^2} \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}$$

pelo que

$$\rho(k) = \frac{\frac{1-p}{p^2} \sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}}{\frac{1-p}{p} \sum_{j=0}^q \beta_j + \frac{(1-p)^2}{p^2} \sum_{j=0}^q \beta_j^2} = \frac{\sum_{j=k}^q \beta_j \beta_{j-k}}{p \sum_{j=0}^q (\beta_j + (1-p)\beta_j^2)}.$$

△

Apêndice A

Ficheiros em Matlab

Apresentamos os ficheiros utilizados para a simulação de trajectórias dos modelos INAR(1), ZINAR(1) e INMA(q). Foi usada a versão 7.12.0(R2011a).

A.1 Modelo INAR(1)

O ficheiro simula um modelo INAR(1) onde o valor inicial é representado por x_0 , o instante final por T , o valor α por a e por fim λ ou p por l quando e_t segue uma distribuição de Poisson ou Geométrica, respectivamente.

```
function [] = inar(x0, T, a, l)
%calculo das T observações
Obs=[];
Obs(1)=x0;
for i=1:T
    soma=0;
    for j=1:Obs(i)
        soma=soma+binornd(1,a);
    end
    %Obs(i+1)=soma+poissrnd(1); %caso e_t segue uma lei Poisson. EXEMPLO 1
    Obs(i+1)=soma+geornd(1); %caso e_t segue uma lei Geométrica. EXEMPLO 2
end
%retirar as primeiras 50 observações, devido à presença de x0
X=[];
Tempos=[];
for j=1:(T-49)
    X(j)=Obs(j+50);
    Tempos(j)=j-1;
end
media=mean(X)
variancia=var(X)
M=max(X);
%grafico
plot(Tempos,X)
```

```
xlabel('t')
ylabel('X_t')
xlim([0,T-50])
ylim([-1,M+1])
end
```

A.2 Modelo ZINAR(1)

O ficheiro simula um modelo ZINAR(1) onde representamos por x_0 o valor inicial, T o instante final, $a = \alpha$, $l = \lambda$ e $ro = \rho$.

```
function [] = zinar(x0, T, a, l,ro)
%calculo das probabilidades P(e=k),k=0,1,...
S=0;
m=1;
p=[];
while S<(1-0.001)
    if m==1
        p(m)=ro+(1-ro)*exp(-l);
        S=p(m);
        m=m+1;
    else
        p(m)=(1-ro)*((exp(-l)*(l^(m-1)))/factorial(m-1));
        S=S+p(m);
        m=m+1;
    end
end
n=m-1; %suporte de e_t aproximado por {0,...,n}
%calculo das T observações
Obs=[];
Obs(1)=x0;
tempo(1)=0;
for i=1:T
    soma=0;
    for j=1:Obs(i)
        soma=soma+binornd(1,a);
    end
    tempo(i+1)=i;
    %Metodo da transformacao inversa
    F=p(1);
    k=0;
```

```

a=rand(1);
while(a>=F && k<n)
    k=k+1;
    F=F+p(k);
end
valor=k;
%X_t
Obs(i+1)=soma+valor;
end
%retirar as primeiras 50 observações, devido à presença de x0
X=[];
Tempos=[];
for j=1:(T-49)
    X(j)=Obs(j+50);
    Tempos(j)=tempo(j);
end
media=mean(X)
variancia=var(X)
%gráficos
M=max(X);
subplot(2,1,1)
plot(Tempos,X)
xlabel('t')
ylabel('X_t')
xlim([0,T-50])
ylim([-1,M+1])
subplot(2,1,2)
xbins1=0:M;
hist(X,xbins1)
end

```

A.3 Modelo INMA(q)

Nesta secção, representamos, por T o instante final, por q a dimensão do processo, por B o vector dos valores de β e uma vez mais, por l os parâmetros λ ou p casos estejamos a simular um modelo INMA(q) de Poisson ou Geométrico, respectivamente.

```

function [] = inma(T,q,B, l)
%gerar primeiros (q+1) e_t's
for i=1:(q+1)

```

Apêndice A Ficheiros em Matlab

```
e(i)=poissrnd(1); %caso e_t segue uma lei Poisson. EXEMPLO 1
e(i)=geornd(1); %caso e_t segue uma lei Geométrica. EXEMPLO 2
end
%gerar observacoes
X=[];
tempos=[];
for k=1:T
    soma=0;
    for i=1:(q+1)
        for j=1:e(i)
            soma=soma+binornd(1,B(i));
        end
    end
    tempos(k+1)=k;
    X(k+1)=soma;
    %alterar vector dos e_t's
    E=e;
    e(1)=poissrnd(1); %caso e_t segue uma lei Poisson. EXEMPLO 1
    e(1)=geornd(1); %caso e_t segue uma lei Geométrica. EXEMPLO 2
    for i=2:(q+1)
        e(i)=E(i-1);
    end
end
media=mean(X)
variancia=var(X)
m=min(X);
M=max(X);
%grafico
plot(tempos,X)
xlabel('t')
ylabel('X_t')
xlim([0,T])
ylim([m-1,M+1])
end
```

Bibliografia

- [1] Al-Osh, M. A., Alzaid, A. A. (1987) *First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process*, J. Time Ser. Anal. 8, 3, 261-275
- [2] Al-Osh, M. A., Alzaid, A. A. (1988) *Integer-valued moving average (INMA) process*, Statist. Papers 29, 281-300
- [3] Da Silva I. M. M. (2005) *Contributions to the analysis of discrete-valued time series*, PhD thesis, University of Porto
- [4] Feller, W. (1943) *On a general class of contagious distributions*, Annals of Mathematical Statistics 16,319-329
- [5] Foata, D., Fuchs, A., (2005) *Calcul des Probabilités*, 2^a Edição, Dunod
- [6] Gonçalves, E., N. Mendes Lopes (2000) *Probabilidades - Princípios Teóricos*, Escolar Editora, Lisboa
- [7] Gonçalves, E., N. Mendes Lopes (2008) *Séries Temporais. Modelações lineares e não lineares*, Sociedade Portuguesa de Estatística, 2^a edição
- [8] Jazi, M. A., Jones, G., Lai, C. (2012) *First-order integer valued AR processes with zero inflated Poisson innovations*, J. Time Ser. Anal. 33 954-963
- [9] Mckenzie, E. (1985) *Some simple models for discrete variate time series*, Water Resour. Bull. 21(4), 645-650
- [10] Mckenzie, E. (1988) *Some ARMA models for dependent sequences of Poisson counts*, ADV. Appl. Probab. 20, 822-835
- [11] Neyman, J. (1939) *On a new class of contagious distributions applicable in entomology and bacteriology*, Annals of Mathematical Statistics 10, 35-57
- [12] Pestana, Dinis D., Velosa, Sílvia F. (2006) *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Volume I, 2^a Edição, Fundação Calouste Gulbenkian

- [13] Rosa, A. Cristina M. (2014) *Apontamentos da cadeira de Processos e Cálculo Estocástico*, Departamento de Matemática U.C.
- [14] Steutel, F. W., van Harn, K. (1979) *Discrete analogues of self-decomposability and stability*, Ann. Prob.7(5), 893-899
- [15] Urbano, José Miguel (2012) *Análise Matemática II -Notas de Curso*, Departamento de Matemática UC.
- [16] Weiss, C. H. (2008a) *Thinning operations for modeling time series of counts - a survey*, Advances in Statistical Analysis, 92,3,319-341.
- [17] Weiss, C. H. (2008b) *Serial dependence and regression of Poisson INARMA models*, Journal of Statistical Planning and Inference, 138,2975-2990.