



Modelação Matemática do Preço de Opções sobre Activos no Sector da Energia Eléctrica

Xavier da Silva Fernandes

Dissertação para a obtenção do Grau de

Mestre em Métodos Quantitativos em Finanças

Júri

Presidente: Professor José Augusto Ferreira

Orientador: Professor Luís Nunes Vicente

Vogal: Professor Helder Sebastião

Data: Setembro de 2013

Resumo

A electricidade possui aspectos singulares, como o seu carácter não armazenável, que a diferenciam de outras mercadorias do sector energético e que afectam os seus preços nesses mesmos mercados. Tais características influenciam a organização do mercado de electricidade e a composição de produtos derivados.

Nesta dissertação estudamos a electricidade enquanto activo transaccionado em mercados grossistas e uma classe de produtos derivados da electricidade (opções *spark spread*) que exploram os atributos da mesma enquanto activo subjacente.

Este estudo incide sobre as diferenças entre as hipóteses tradicionalmente supostas para activos financeiros enquanto subjacentes a derivados clássicos e as hipóteses supostas para a electricidade subjacente à nova classe de derivados. Revisitaremos a modelação do preço destes derivados financeiros, procurando compreender matematicamente o respectivo processo e o ilustrar numericamente.

Palavras Chave: electricidade, instrumentos derivados, avaliação de opções, opções *spark spread*

Abstract

Electricity exhibits unique features such as non-storability that differentiate it from other commodities in the energy sector, and that affect its prices in those markets. Those features have an influence on the organization of the electricity market and on the composition of derivative products.

In this thesis, we study the electricity as an asset traded in the wholesale markets as well as a class of electricity derivative products (spark spread options) which explore its features as an underlying asset.

This study focuses on the differences between the assumptions traditionally assumed for financial assets as underlying of classic derivatives and the assumptions assumed for electricity as underlying of the new class of derivatives. We will revisit the pricing model of these financial derivatives, trying to understand the corresponding mathematical process and to numerically illustrate it.

Keywords: electricity, derivative instruments, option pricing, spark spread options

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com apoios e incentivos cruciais, sem os quais não teria sido possível. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que me auxiliaram ao longo do processo de realização deste trabalho.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, o Professor Luís Nunes Vicente, pela orientação, apoio, disponibilidade, pelas opiniões e críticas, colaboração no solucionar de problemas e esclarecimento de dúvidas e pelo saber que transmitiu.

Aos meus pais, irmã, namorada e amigos pelo apoio incondicional, incentivo, paciência e ajuda na superação dos obstáculos que ao longo deste trabalho foram surgindo.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	A electricidade enquanto activo	3
2.1	Mercados da electricidade	3
2.1.1	Funcionamento e organização dos mercados	4
2.1.2	Categorização da energia eléctrica	6
2.2	Aspectos fundamentais da electricidade e dos seus preços	6
2.2.1	Carácter não armazenável	6
2.2.2	Volatilidade	7
2.2.3	Reversão à média	8
2.2.4	Sazonalidade	8
2.2.5	Picos na evolução dos preços	9
2.2.6	Preços negativos	10
2.3	Derivados financeiros da electricidade	12
2.3.1	Contratos forward e de futuros	12
2.3.2	Opções	14
2.3.3	Swaps	19
2.3.4	Transacções estruturadas	20
2.3.5	Outros	20
3	Modelação de Black-Scholes	21
3.1	Opções europeias clássicas	21
3.1.1	Hipóteses	21
3.1.2	Dedução da equação com derivadas parciais	22
3.1.3	Fórmula fechada	23
3.2	Opções europeias sobre futuros	24
3.2.1	Equação com derivadas parciais	24
3.2.2	Fórmula fechada	24
3.3	Testes numéricos para opções sobre electricidade	25
3.3.1	Estimação da volatilidade	26
3.3.2	Teste à normalidade dos retornos	29
3.3.3	Comparação entre preços estimados e empíricos	30
3.3.4	Análise dos resultados	32
4	Modelação de opções spark spread	33
4.1	Hipóteses	33
4.1.1	Consequências dos aspectos fundamentais da electricidade	33
4.2	Modelação com base em movimentos geométricos Brownianos	37
4.2.1	Dedução da EDP	37
4.2.2	Utilização de contratos futuros	40
4.2.3	Fórmula fechada	41

4.2.4	Paridade put-call	44
4.3	Testes numéricos para opções spark spread	44
4.3.1	Estimação das volatilidades e do coeficiente de correlação	45
4.3.2	Estimação do valor das opções	46
4.3.3	Limitações do modelo	49
5	Conclusão	51
	Bibliografia	53

Capítulo 1

Introdução

Os recursos energéticos estão no centro da actividade económica e social, sobretudo nos países desenvolvidos. Têm grande impacto na qualidade de vida dos cidadãos, proporcionando conforto, aumentando a produtividade e possibilitando um maior desenvolvimento no plano tecnológico. A importância do sector energético torna-se ainda mais evidente quando se consideram as preocupações ambientais actuais e a relação entre estas e a produção e a utilização destes mesmos recursos energéticos.

Idênticas considerações podem ser tecidas em relação à electricidade, ainda para mais atendendo à importância actual das energias renováveis e à tentativa de redução do consumo de combustíveis fósseis, através, por exemplo, da utilização de transportes eléctricos. Em termos económicos, à semelhança, por exemplo, do café, do ouro ou do petróleo, a electricidade é uma *commodity*, ou seja, é uma mercadoria ou matéria-prima que pode ser comprada, vendida e comercializada. Assim, após o petróleo e o gás natural terem começado a ser transaccionados em mercados organizados, surgiram também os mercados da electricidade. Estes últimos são, tipicamente, mercados grossistas, isto é, mercados onde são transaccionados grandes volumes. A quantidade mínima adquirível é, em geral, 1 MWh, que abasteceria, no máximo, algumas centenas de casas. Desta forma, os mercados da electricidade não são a retalho, e logo não são passíveis de ser utilizados por consumidores finais de pequena ou média escala.

Os mercados da electricidade cresceram muito rapidamente após o seu aparecimento, em parte pela procura de contratos que permitissem às empresas diminuir a sua exposição ao risco de ocorrência de elevadas variações no preço da electricidade. Esse crescimento sofreu, ao longo dos tempos, algum abrandamento, entretanto superado pela introdução de novos contratos e pelo aparecimento de novas plataformas com maior regulamentação sobre as negociações de energia eléctrica.

O que distingue a electricidade das restantes mercadorias e recursos energéticos são alguns aspectos específicos como o carácter não armazenável (uma vez que a ener-

gia produzida tem de ser consumida de imediato), as oscilações extremas de preço e a imprevisibilidade e frequência das mesmas, entre outros factores. Estes aspectos introduzem uma maior complexidade na modelação dos preços da electricidade, bem como na modelação dos preços de contratos que se baseiam no preço da mesma (ou seja, em derivados financeiros). Em particular, a não verificação de algumas das hipóteses geralmente utilizadas para tratar outros mercados cria dificuldades, quer na avaliação do preço da electricidade quer na avaliação do preço dos derivados financeiros sobre a mesma. De facto, certos comportamentos e hipóteses utilizadas, por exemplo, nos mercados accionistas não se verificam no contexto da energia eléctrica.

Neste trabalho tentaremos fazer uma síntese sobre as características específicas do mercado da electricidade e sobre a forma como estes influenciam e limitam a modelação matemática do preço da electricidade enquanto activo subjacente a determinados derivados. Começaremos por expor, no Capítulo 2, de uma forma geral, a estrutura e organização dos mercados onde a electricidade é transaccionada. Depois disso, abordaremos alguns dos aspectos singulares (como a não armazenabilidade) e características mais relevantes da electricidade e dos seus preços nos mercados energéticos. Basicamente, procuraremos explicar o interesse associado ao mercado da electricidade por parte de investidores e produtores de energia. Apresentaremos vários instrumentos financeiros derivados sobre a electricidade, sendo dada uma maior relevância às opções (Um estudo do preço de derivados financeiros noutros sectores energéticos estava originalmente nos nossos planos, mas limitar-nos-emos ao sector da energia eléctrica por falta de tempo e de espaço.).

No capítulo seguinte, descreveremos, de forma sucinta, a dedução dos modelos tradicionais para atribuir preço a opções europeias clássicas sobre activos financeiros. Faremos também, um estudo empírico dos preços da electricidade e a aplicação destes modelos a dados reais de preços de opções europeias clássicas sobre energia eléctrica.

O Capítulo 4 contém a modelação das opções mais apropriadas à electricidade, conhecidas por opções *spark spread*. Para tal, começaremos por analisar a validade, sobre a electricidade, de algumas das hipóteses utilizadas nos modelos tradicionais para opções europeias clássicas, introduzindo depois as técnicas de modelação mais adequadas para assim avaliar correctamente as novas opções. No final, apresentaremos os resultados de alguns testes numéricos para ilustrar a sensibilidade das fórmulas fechadas para as opções *spark spread* relativamente a alguns dos parâmetros mais importantes.

Capítulo 2

A electricidade enquanto activo

2.1. Mercados da electricidade

Existindo regulamentação acerca dos preços da electricidade, estes deveriam reflectir os custos de produção, transmissão e distribuição. Contudo, após uma liberalização dos mercados da electricidade, os preços são, usualmente, determinados de acordo com a regra económica da oferta e da procura. Nesse sentido, muitos países estabeleceram plataformas de negociação para a electricidade, onde as ofertas de vendedores de energia eléctrica são combinadas com as ordens de compra dos restantes intervenientes no mercado [23].

Ora, sob um ponto de vista geral, os mercados energéticos, que abarcam os mercados da electricidade, são ainda relativamente recentes e permanecem distantes dos chamados mercados financeiros, algo observável em alguns aspectos importantes, tal como é ilustrado na Tabela 2.1.

	Mercados Financeiros	Mercados Energéticos
Maturidade dos mercados	Várias décadas	Relativamente recente
Factores fundamentais dos preços	Poucos e simples	Muitos e complexos
Impacto de ciclos económicos	Elevado	Reduzido
Frequência de eventos	Baixa	Alta
Impacto do armazenamento e entrega	Inexistente	Significativo
Sazonalidade	Inexistente	Significativo para o gás natural e electricidade
Liquidez	Alta	Mais baixa
Regulamentação	Pouca	Variável
Tipo de mercado	Centralizado	Descentralizado
Complexidade dos contratos de derivados	Maioria é relativamente simples	Maioria é relativamente complexa

Tabela 2.1: Comparação dos mercados financeiros e dos mercados energéticos. Adaptação de [24], p.19.

Sucintamente, os mercados de electricidade podem ser definidos como conjuntos

de transacções sobre produtos directa ou indirectamente ligados à electricidade, transacções essas que são resultantes da participação e negociação por parte de agentes individuais ou entidades colectivas. Na próxima subsecção procuraremos explicar algumas das características do funcionamento de mesmo mercado.

2.1.1. Funcionamento e organização dos mercados

A necessidade de equilibrar, em tempo real, a oferta e a procura, por vezes até a um nível local, distingue os mercados que negociam electricidade dos restantes. Esta exigência decorre das características tecnológicas do seu fornecimento e distribuição. Uma vez que a electricidade não pode ser armazenada (assunto explorado mais à frente), a oferta e a procura instantâneas devem estar sempre em equilíbrio, sob a pena de pôr em risco a integridade de todo o sistema [12].

Em termos de organização e estruturação dos mercados, pode-se dizer que tipicamente, no mercado à vista ou *spot* são negociados activos para entrega imediata, enquanto que no designado mercado a prazo se negociam activos para entrega futura. No sector da electricidade, o mercado à vista engloba o mercado organizado diário, intradiário e em tempo real de compra e venda de energia eléctrica com entrega física até ao dia seguinte.

Mercado diário

No mercado *day-ahead* (ou diário) é negociada electricidade através de leilões cujo período de entrega é o dia seguinte, podendo ser visto como um mercado a muito curto prazo. É nestes mercados que se realizam a maioria das transacções sobre electricidade.

O seu aparecimento está relacionado com o facto da maioria das grandes empresas geradoras de energia eléctrica requererem aviso prévio para iniciar a produção. As entidades responsáveis pela gestão do mercado da electricidade (também denominadas por bolsas de electricidade), que operam num mercado diário com compromissos financeiros, permitem aos produtores de energia (por vezes também designados por geradores) receber antecipadamente calendarizações de funcionamento e fornecem um incentivo financeiro para que os geradores possam fazê-lo de acordo com o previsto.

Mercado intradiário

O mercado *hour-ahead* ou intradiário funciona, usualmente, de forma contínua (ao longo de todo o dia) e possibilita transacções para a geração e consumo de energia para a próxima hora, fornecendo elevada flexibilidade, especialmente quando o fornecimento de energia se aproxima e as previsões de geração se tornam mais precisas.

Mercado em tempo real

Após o término das negociações no mercado diário (ou mesmo no intradiário), podem surgir alterações ou desvios na carga prevista, na capacidade disponível para geração de energia, ou mesmo ocorrências que afectem as infraestruturas do sistema de distribuição de energia. Por isso mesmo, as plataformas e entidades reguladoras operam também num mercado em tempo real para equilibrar de forma eficiente e económica essas mesmas alterações. Assim, é compreensível que os preços *hour-ahead* e os preços em tempo real, divirjam por vezes, em particular quando se verifica uma escassez não prevista na geração de energia.

Mercado a prazo

Tal como noutros sectores, os mercados a prazo da electricidade são mercados em que os contratos são celebrados entre as partes para a entrega de energia no futuro. Estes assumem essencialmente três formas básicas: *over-the-counter* (OTC) em que a negociação pode envolver contacto directo entre as duas partes ou contacto mediado por um corrector; baseada num conceito de *market maker*, ou seja, a negociação está centrada em torno de um formador de mercado que assume posições em ambos os lados (de compra e venda) e está por trás de cada transacção; ou negociação em bolsa onde se realiza a correspondência entre as ordens de compra e de venda, sem que haja uma tomada de posição por parte da entidade que supervisiona as operações [12].

Participantes

Uma grande parte dos participantes do mercado são as empresas que possuem activos de geração e têm acesso à rede de transmissão (uma vez que, tradicionalmente, os produtos nos mercados da electricidade são liquidados fisicamente e não financeiramente). Por isso mesmo, as suas decisões e necessidades são influenciadas não apenas por situações de mercado mas também pela sua própria carteira de produção.

No entanto, cada vez mais, novos intervenientes (por exemplo, simples investidores ou consumidores de energia, individuais ou colectivos, de grande escala), que

não possuem centrais eléctricas ou redes de fornecimento, entram com sucesso nos mercados da electricidade. Assim, os investidores nos mercados de energia eléctrica constituem um grupo de participantes consideravelmente heterogéneo [34].

2.1.2. Categorização da energia eléctrica

O período de entrega da energia ao longo do dia é também um critério diferenciador. Neste contexto, pode falar-se na existência de dois mercados diurnos de electricidade distintos correspondentes à chamada electricidade *on-peak*, que se refere ao período tipicamente de maior consumo de energia (por exemplo, das 6 às 22 horas), e à electricidade *off-peak* (associada às restantes horas do dia). Esta separação teve a sua origem nos diferentes padrões de consumo de energia eléctrica observados ao longo do dia. Cada um destes mercados tem as suas próprias características no que à volatilidade (conceito exposto na secção seguinte) diz respeito [1]. Quando o período de entrega abrange todo o dia é utilizada a denominação *around-the-clock* ou simplesmente *base*.

Muitos dos instrumentos derivados (que são instrumentos cujo valor deriva de outros instrumentos ou activos subjacentes) da electricidade apresentados na Subsecção 2.3 são também categorizados de acordo com esta classificação, algo que contribui para uma ainda maior diversidade de produtos transaccionados nestes mercados e torna o seu estudo mais complexo.

2.2. Aspectos fundamentais da electricidade e dos seus preços

A própria electricidade e os seus preços apresentam características únicas que criam novos desafios, sobretudo directamente ligados à gestão do risco e modelação dos derivados presentes nos respectivos mercados. Algumas delas, claramente específicas da electricidade e cuja exposição será feita de seguida, contribuem para uma maior complexidade das modelações e para a invalidação de algumas das hipóteses subjacentes a essas modelações.

2.2.1. Carácter não armazenável

Uma das características mais importantes e mais singulares da electricidade prende-se com o facto de não ser armazenável¹. Isto significa que ela tem de ser produzida,

¹As reservas de água representam uma forma potencial de armazenar electricidade para as centrais hidroeléctricas. Contudo, actualmente, em termos mundiais, a respectiva percentagem de produção de electricidade ainda é reduzida.

virtualmente, no mesmo instante em que é consumida. Deste modo, problemas na produção ou transmissão podem resultar em mudanças súbitas nos preços correntes da electricidade. Uma vez mais, isto é algo que contrasta claramente com as realidades de mercados de outros bens e produtos energéticos, em que a mercadoria subjacente pode ser armazenada e entregue ao longo do tempo para compensar eventuais variações na oferta e na procura e assim suavizar as flutuações de preço [1].

Assim sendo, torna-se perceptível que este problema de armazenamento seja uma das causas para a grande volatilidade exibida pelos preços da electricidade. Para além disso, esta especificidade constitui a maior dificuldade na atribuição e modelação do preço de opções sobre electricidade (ver definição na Subsecção 2.3.2), algo evidente nas secções seguintes deste trabalho.

2.2.2. Volatilidade

Num sentido geral, a volatilidade dos preços pode ser vista como uma medida da aleatoriedade nas mudanças de preço e definida através do desvio padrão ou da variância dos retornos associados a esses preços. Ora, uma das especificidades que torna único o processo de evolução dos preços da electricidade é a volatilidade extraordinariamente alta.

A electricidade exhibe um risco de preço excepcionalmente grande, risco esse decorrente da possibilidade do valor, neste caso, da energia eléctrica, poder diminuir. Este é significativamente maior que o de outros produtos ou mercadorias, como, por exemplo, divisas, obrigações de tesouro ou metais [11]. Essa disparidade em termos de volatilidade é evidente mesmo em relação a outros recursos energéticos como o gás natural (ver Figura 2.1) e o petróleo. De acordo com Pilipovic [24], a volatilidade a curto prazo dos preços à vista ou preços *spot* (ou seja, das cotações de um activo para compra imediata) da electricidade pode mesmo, por vezes, ultrapassar os 1000%.

Existem inúmeras causas para este fenómeno, sendo uma delas as limitações de armazenamento (aspecto explorado no tópico seguinte) que originam uma necessidade contínua e instantânea de correspondência entre a oferta e a procura. O consumo energético constitui também um factor influente, mais concretamente os volumes de energia consumidos e os seus perfis (que indicam as variações na procura entre períodos de tempo). Grandes variações na procura de electricidade surgem, muitas vezes, devido a condições meteorológicas extremas, sendo por isso outro aspecto a ter em conta. Por último, deve realçar-se o impacto das alterações dos preços dos

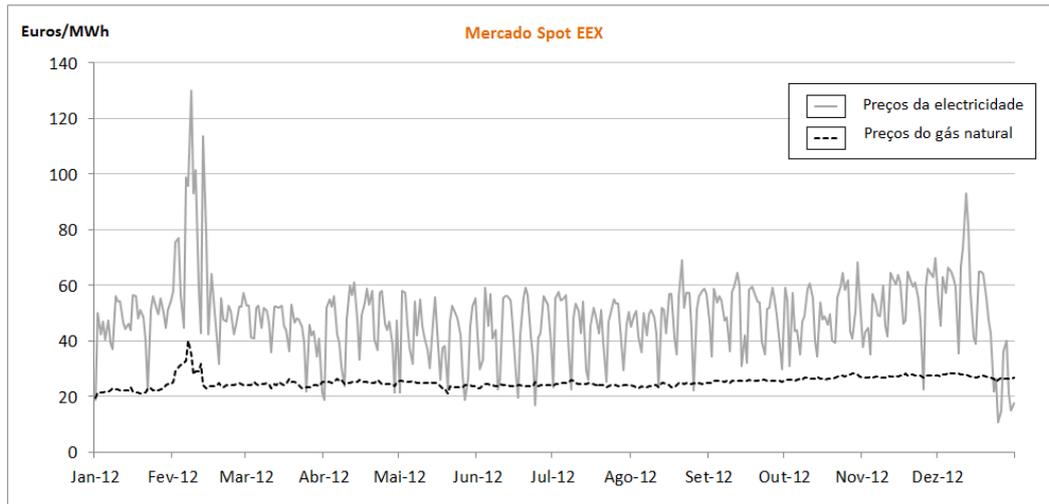


Figura 2.1: Comparação dos preços da electricidade *on-peak* Physical Electricity Index (Phelix) e do gás natural NetConnect Germany referentes ao ano de 2012.

combustíveis utilizados na produção de energia (como o carvão e o gás natural) e das interrupções, previstas ou não, no funcionamento das centrais eléctricas.

Contudo, apesar da volatilidade inerente aos preços dos activos criar geralmente um ambiente de mercado de alto risco atractivo para os especuladores, o carácter extremo da electricidade torna-se difícil de gerir e pode originar preços proibitivos para os instrumentos derivados associados [1].

2.2.3. Reversão à média

O processo de um mercado regressar ao seu nível de equilíbrio é designado por reversão à média [24]. Ora, os preços à vista das energias são, em geral, considerados como possuidores de forte reversão à média [27]. De acordo com Hsu [19], tanto os preços da electricidade como os do gás natural não são caracterizados por distribuições lognormais mas sim por processos com reversão à média e picos discretos.

No entanto, na literatura, o carácter significativo da reversão à média nos preços da electricidade não é consensual. Segundo Eydeland e Geman [12], a reversão à média é apenas um reflexo da natureza associada aos picos dos preços da electricidade (Subsecção 2.2.5), defendendo estes autores a ideia de que tal reversão, a médio prazo, não é significativa.

2.2.4. Sazonalidade

Existem também variações sazonais e variações relacionadas com as condições meteorológicas na oferta e procura de electricidade, observáveis nos dados históricos dos

seus preços à vista e a prazo. No lado da procura, devem considerar-se os efeitos sazonais significativos criados pela agregação dos consumos residenciais. Assim, as flutuações surgem devido a mudanças climáticas, como a temperatura e o número de horas de luz natural por dia. Um exemplo disso, dado por Pilipovic [24], é o dos aparelhos do ar condicionado cuja utilização é obviamente maior nos meses de Verão. No lado da oferta, podem existir variações nos níveis de produção de energia. Por exemplo, as centrais hidroeléctricas estão dependentes da precipitação e do degelo da neves [32].

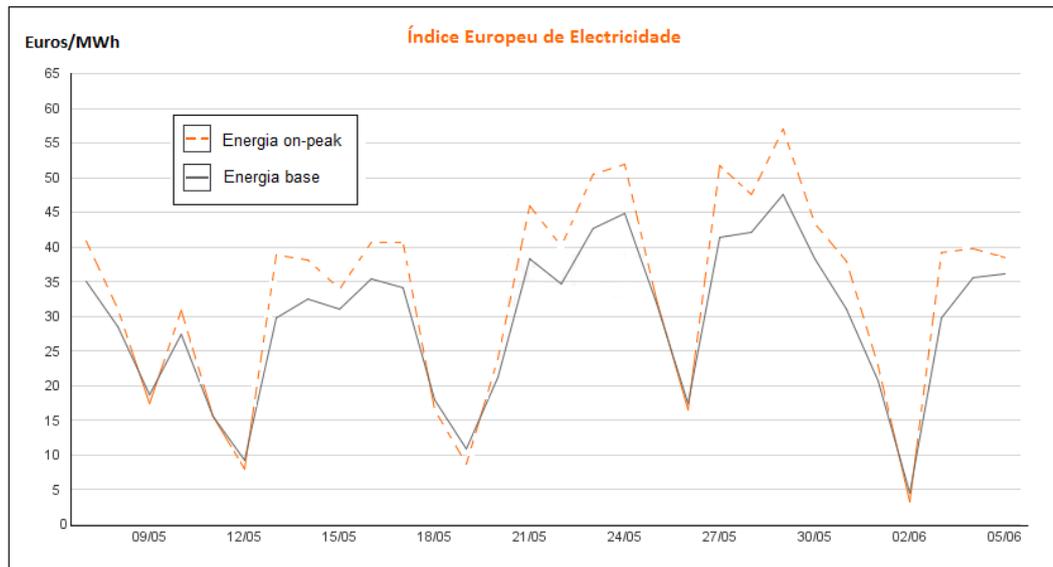


Figura 2.2: Cotações do Índice Europeu de Electricidade (ELIX) durante o período de um mês (referentes ao ano de 2013).

Para além da sazonalidade associada às estações do ano, os preços à vista da electricidade apresentam ciclos a outras escalas temporais, nomeadamente em períodos de tempo de uma semana, com os preços mínimos a serem usualmente atingidos no fim-de-semana (ver Figura 2.2), o que é, fundamentalmente, o resultado da diminuição sistemática do consumo de energia eléctrica durante esses dias.

2.2.5. Picos na evolução dos preços

Tal como é dito por Weron *et al.* [33], para além das características de reversão à média e forte sazonalidade, os preços à vista da electricidade exibem grandes picos nos preços, ou seja, subidas muito acentuadas dos preços logo seguidas por quedas da mesma amplitude (aspecto evidente na Figura 2.3).

Estes fenómenos são causados usualmente por condições meteorológicas extremas

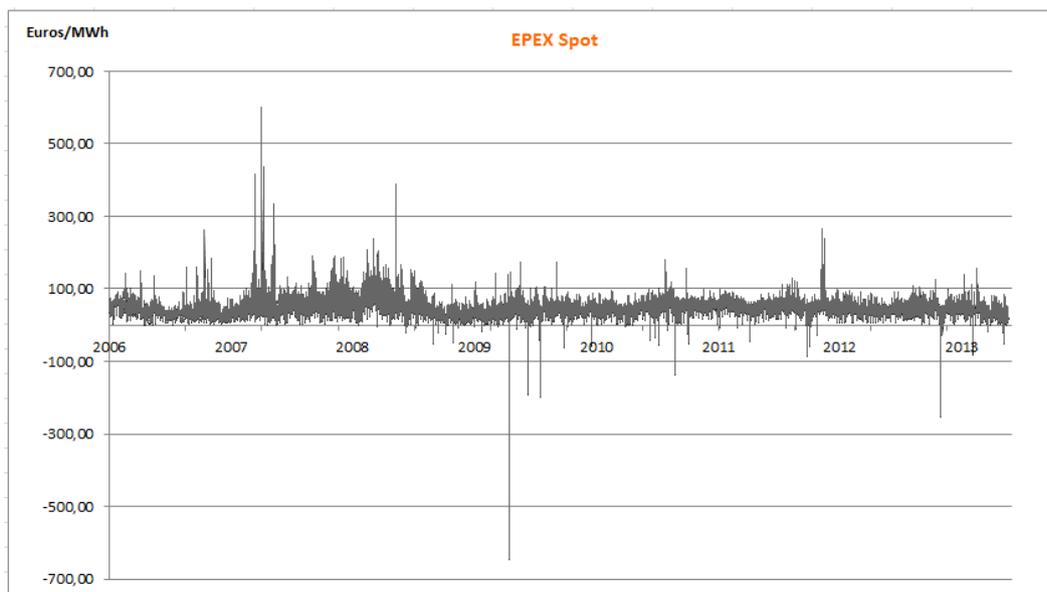


Figura 2.3: Preços intradiários da electricidade (EPEX Spot) no European Energy Exchange (EEX).

(como ondas de calor), por problemas no fornecimento ou produção de energia, ou por uma combinação de vários destes factores. A frequência destes picos nos preços à vista da electricidade é relativamente baixa, ainda que muito superior à observada nos preços de outros activos. Geralmente, após o desaparecimento do elemento perturbador, o preço da energia eléctrica decresce, regressando a um nível de preço próximo daquele que apresentava antes da ocorrência de instabilidade nos mercados do sector.

2.2.6. Preços negativos

Nalguns mercados de electricidade, surpreendentemente, são permitidos preços negativos. Nessas situações, são os produtores da energia que pagam aos consumidores para utilizarem a electricidade, algo que parece altamente contra-intuitivo.

Basicamente, as ocorrências de preços negativos aparecem em períodos de baixa procura e elevados níveis de produção. Logo, quando não é possível às centrais geradoras acompanhar de imediato as quedas na procura de energia eléctrica (algo frequente na produção de energia eólica), a sua produção é vendida a preços de desconto ou, até mesmo, a preços negativos [26]. Potencialmente, para um dono de uma central eléctrica, pode ser mais barato pagar para vender a energia do que desligar e, mais tarde, reiniciar a produção na central. Assim sendo, os preços negativos em mercados grossistas de electricidade indicam inflexibilidades de abastecimento.

2.3 Derivados financeiros da electricidade

Actualmente, os preços negativos são permitidos em vários mercados da electricidade, de que são exemplos, o mercado alemão European Energy Exchange (EEX) (onde os preços chegaram a atingir valores inferiores a -500 €/MWh), o escandinavo Nord Pool ou Nordic Power Exchange (exemplo desse fenómeno é exposto na Figura 2.4) e o Electric Reliability Council of Texas (ERCOT) nos EUA.

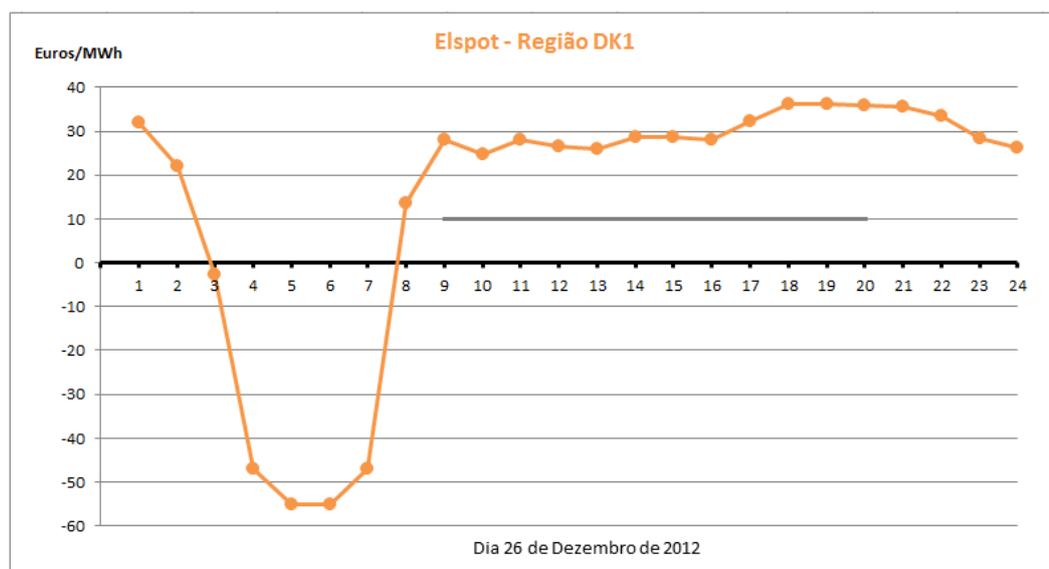


Figura 2.4: Preços intradiários Elspot da electricidade no mercado Nord Pool referentes à região DK1 da Dinamarca.

No entanto, parece ser prática recorrente esses mercados estabelecerem patamares mínimos para os preços negativos da electricidade, assim como tectos máximos (ver Tabela 2.2), aspecto importante quando há ocorrência de picos nos preços como foi referido na subsecção anterior.

Tipo de mercado	EEX		Nord Pool	ERCOT
	Diário (€/MWh)	Intradiário (€/MWh)	Diário (€/MWh)	Tempo real (\$/MWh)
Preço mínimo	-3000	-9999	-200	-251
Preço máximo	3000	9999	2000	5000

Tabela 2.2: Valores mínimos e máximos de preço para a electricidade nalguns mercados de electricidade internacionais.

2.3. Derivados financeiros da electricidade

Decorrente do surgimento e desenvolvimento dos mercados de negociação da electricidade em vários países à volta do globo, começaram a ser transaccionados também instrumentos financeiros derivados da energia eléctrica. Assim, nesta secção, serão descritos alguns desses mesmos derivados, e tecidas considerações sobre o seu aparecimento e contextualização.

2.3.1. Contratos forward e de futuros

Usualmente, os mercados de derivados iniciam a sua actividade com a negociação de contratos de futuros (conceito exposto mais à frente). Ora, nos mercados energéticos, onde se incluem os mercados da electricidade e seus derivados, procedeu-se de forma semelhante. Por exemplo, os futuros sobre gás natural e instrumentos negociados OTC foram iniciados em 1990. Poucos anos depois, surgiram os contratos de futuros de electricidade no mercado escandinavo Nord Pool e, em 1996, o mesmo aconteceu na Austrália e nos EUA, no New York Mercantile Exchange (NYMEX), com o surgimento de contratos futuros sobre electricidade para entrega na fronteira de Califórnia-Oregon ou Palo Verde [31]. Mais tarde, após a expansão do conceito no continente americano, foram criadas as entidades International Petroleum Exchange (IPE) em Londres e EEX em Frankfurt.

Contudo, a evolução, até então, rápida dos mercados da electricidade, sofreu um claro abrandamento. O colapso da multinacional ENRON, que era um participante importante em diversos mercados de derivados, em particular no sector energético, originou grandes perdas para empresas que negociavam directamente com a mesma através dos mercados OTC². O resultado foi uma reacção em cadeia que, sobretudo no território americano, afastou os investidores dos mercados OTC e dos próprios instrumentos derivados sobre a electricidade. Este acontecimento, aliado às abruptas e imprevisíveis flutuações dos preços da electricidade, originou uma perda de interesse e, conseqüentemente, uma diminuição no volume de transacções deste tipo de instrumentos. Um sinal evidente disso foi a eliminação, em 2002, dos futuros de electricidade das listas dos mercados NYMEX, CBOT e IPE [12].

²Nos mercados *over-the-counter* não é exigida a criação dos chamados depósitos de margem que visam diminuir o risco de incumprimento das partes envolvidas.

Contratos forward

Os contratos *forward* sobre electricidade representam a obrigação de comprar ou vender uma quantidade fixa de electricidade a um valor contractual pré-definido numa determinada data de expiração. Assim sendo, são contratos de entrega diferida, transaccionados OTC e personalizados às necessidades do comprador. O pagamento é feito no acto da entrega ou após esta ter ocorrido. O ganho ou *payoff* na maturidade T do contrato que prevê a entrega de uma unidade de electricidade a um preço F é dado por

$$S_T - F$$

onde S_T representa o preço à vista da electricidade na data de maturidade.

Este tipo de contratos sobre electricidade apresenta uma característica diferente da dos restantes contratos *forward*. O preço final de liquidação S_T (preço utilizado para determinar, na maturidade, o ganho ou perda associados ao contrato) é, geralmente, calculado com base no preço médio da electricidade durante o período de entrega até à maturidade T (ver [8]). Consideremos, por exemplo, os contratos de futuros mensais (os quais apresentam igual ganho na maturidade ao dos contratos *forward* mensais), transaccionados no mercado EEX. Neste tipo de futuros, o preço de liquidação do contrato referente a um determinado mês é definido no último dia do mês (sendo esse mesmo mês o período de entrega da energia). Este preço é determinado calculando a média dos preços à vista da electricidade. Para esse efeito, são utilizados os preços observados diariamente ao longo do mês estabelecido para entrega da electricidade.

Os contratos *forward* são classificados consoante o tempo de entrega durante o dia (por exemplo, electricidade *on-peak* ou *off-peak*) e de acordo com a liquidação (física ou simplesmente financeira). Por vezes, é incluída nos contratos a cláusula “force majeure” que permite aos fornecedores, em circunstâncias extremas, como uma crise política, uma guerra ou greves que perturbem a produção, renunciar à sua obrigação de fornecer electricidade [15].

Devido à natureza de produto não armazenável associada à electricidade, estes contratos constituem o veículo mais natural para fazer a sua comercialização e um dos principais instrumentos utilizados na gestão do risco de preço da electricidade. Também por isso, depois da explosão inicial de actividade dos participantes nos mercados da electricidade e seus derivados, os contratos *forward* começaram a ganhar maior relevância. Presentemente, os contratos *forward* sobre electricidade são nego-

ciados OTC em mercados como o Italian Power Exchange (IPEX), o Nord Pool e o PolPX na Polónia [13].

Contratos de futuros

Os contratos de futuros (ou simplesmente futuros) sobre electricidade, tal como nou-
tros contextos e como foi anteriormente referido, têm a mesma estrutura de *payoff* que
os contratos *forward* mas são contratos estandardizados e transaccionados em mer-
cados organizados, onde existem mecanismos para regulação e supervisionamento.
Desta forma, para além das diferenças usuais, a disparidade mais relevante reside no
facto das quantidades de electricidade a serem entregues, serem, em geral, inferiores
no caso dos futuros.

Tal como afirmam Deng e Oren [8], as vantagens dos futuros sobre energia eléc-
trica estão na transparência de preços, liquidez de negociação (que traduz a rapidez
ou facilidade com que um activo é convertido em dinheiro), e redução de custos de
transacção e monitorização, aspectos comuns a contratos de futuros associados a
outros sectores. Já as limitações estão principalmente associadas à rigidez na espe-
cificação dos futuros.

Actualmente, após alguma evolução, as circunstâncias mudaram e os futuros
sobre electricidade são negociados em mercados como o Intercontinental Exchange
(ICE) no Reino Unido, Australian Securities Exchange (ASX) e Powernext na França
[13], sendo o EEX e o Nord Pool os mercados que apresentam maior liquidez. Em
território português e espanhol, existe a bolsa ibérica de electricidade OMIP, onde,
para além do mercado à vista, são transaccionados contratos *forward* e futuros, sendo
que o seu volume anual de transacções tem vindo gradualmente a aumentar, tal como
é visível na Figura 2.5.

2.3.2. Opções

Por definição, não existe muita diferença entre as opções de compra (*call*) e de venda
(*put*) no sector da energia e as opções nos outros mercados. O que as distingue, em
especial no caso da electricidade, é a enorme variedade de opções trasaccionadas.

Segundo Eydeland [12], estas opções são baseadas não só nos preços do activo
subjacente e de exercício, mas também em atributos como o volume, especificações
da entrega (tempo, local e condições referentes ao tipo de energia) e, por vezes, o tipo
de combustível (algo evidente em opções *spark spread* apresentadas mais à frente).

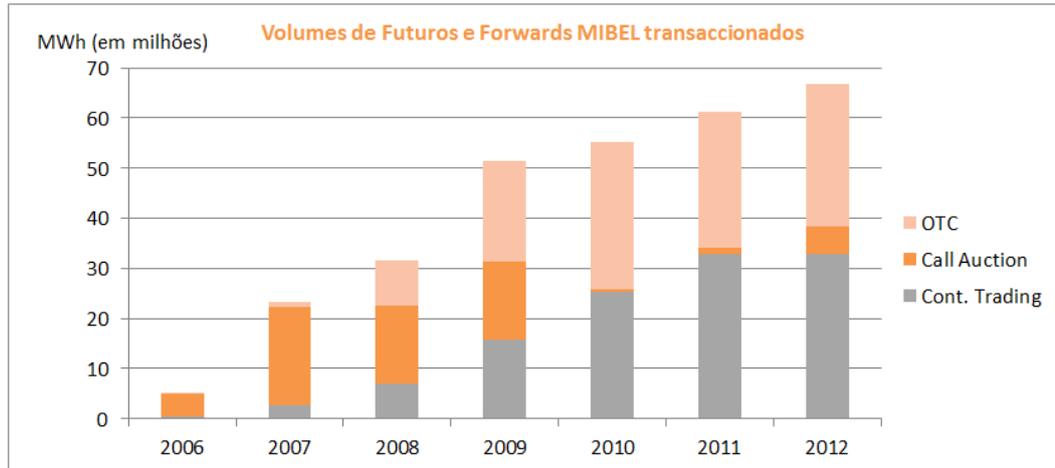


Figura 2.5: Volumes anuais de transacção de contratos *forward* e de futuros MIBEL no mercado OMIP.

As primeiras opções sobre electricidade foram introduzidas pelo mercado NY-MEX em 1996 e, três anos depois, foram negociadas as primeiras opções exóticas sobre futuros de electricidade [31]. Após um rápido crescimento em termos de popularidade nos mercados internacionais, as opções sobre os preços da electricidade ou sobre futuros de electricidade praticamente desapareceram do mercado americano.

Contudo, nos últimos anos, esta tendência tem vindo a inverter-se. Na Europa, vários mercados como Nord Pool, EEX e ICE transaccionam opções sobre electricidade com alguma liquidez, sobretudo opções sobre futuros. Outro exemplo disso é a bolsa australiana ASX. Ainda assim, muitos dos contratos de opções disponíveis são negociados no mercado OTC, aspecto que justifica a dificuldade no acesso a dados históricos.

Opções clássicas

As opções *call* e *put plain vanilla* oferecem aos seus detentores o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender uma quantidade fixa de electricidade subjacente ao contrato a um preço de exercício pré-definido na respectiva data de expiração. O *payoff* de uma opção *call* sobre electricidade é dado por

$$C(T, S) = \max(S_T - K, 0)$$

onde S_T é o preço à vista da energia eléctrica na data de expiração T e K o preço de exercício.

No caso das opções *plain vanilla*, o activo subjacente é a própria energia mas existem também opções sobre futuros de electricidade. Nestes dois tipos (que vamos

designar por opções clássicas), a liquidação pode ser apenas financeira ou física (em que há entrega do activo). Na maioria dos casos, as opções sobre o preço à vista da electricidade que são liquidadas fisicamente utilizam médias aritméticas que suavizam os saltos de preço, com vista a tornar o risco do vendedor mais aceitável [15]. O interesse destas opções clássicas reside na sua eficiência enquanto instrumento de cobertura do risco de preço da electricidade, sobretudo para comerciantes destes mercados e produtores de energia. Como é sabido, tais operações de cobertura ou *hedging* são processos de redução do risco associado aos movimentos do preço de um activo através da tomada de posições opostas em instrumentos ou derivados financeiros relacionados com esse mesmo activo.

Num contexto histórico, o já mencionado quase desaparecimento das opções (sobre os preços à vista e sobre futuros de electricidade) dos mercados americanos foi consequência das falências de várias empresas que detinham posições curtas não cobertas em opções. Por exemplo, para opções de compra, as posições não cobertas significavam que as empresas tinham a obrigação de, na maturidade, vender a electricidade por um determinado preço fixo. Ou seja, caso não tivessem capacidade suficiente para produzir essa mesma energia ou não se tratassem sequer de empresas produtoras, teriam, em última instância, de recorrer ao mercado para comprar electricidade e a entregar à contraparte, o que criaria uma grande vulnerabilidade às subidas de preço. Constatou-se, assim, que essas falências se seguiram precisamente ao pico no preço da electricidade no mercado ECAR em 1998 (aumento, em poucos dias, de 40\$/MWh para cerca de 2000\$/MWh) e ao escândalo da ENRON, já mencionado anteriormente.

Opções spark spread

O conceito de *spread* é definido como o diferencial de preço entre dois produtos ou mercadorias ou entre os preços de um mesmo activo em datas ou localizações distintas [12]. Uma das suas classes mais importantes de *spreads*, é a dos *spreads intercommodity/cross-commodity*, definidos sobre o diferencial entre os preços de mercadorias diferentes mas relacionadas. Fazem parte desta classe os *spark spreads* sobre os preços da electricidade e de combustíveis geradores, os *crack spreads* relativos ao diferencial de preços do petróleo e seus produtos refinados e os *dark spreads* referentes à diferença entre os preços da electricidade e do carvão.

Nos mercados da electricidade, os conceitos de *spread* que apresentam maior

relevância são os *spark spreads* e as opções sobre estes. Por isso mesmo, é feita, de seguida, uma exposição mais aprofundada sobre estes conceitos. No Capítulo 4 mostraremos como modelar opções *spark spread*.

O *spark spread* serve de instrumento para avaliar centrais eléctricas, permitindo replicar financeiramente a realidade física destas, o que, aliás, justifica a denominação ocasional de “paper plant” [12]. Associada a cada central eléctrica está uma medida de eficiência da conversão de energia conhecida por *heat rate*. A *heat rate* é um rácio definido como o número de unidades térmicas britânicas (ou simplesmente Btu) de combustível necessárias para gerar uma unidade de electricidade. Logo, quanto menor for a *heat rate* maior será a eficiência operacional. Por exemplo, uma *heat rate* igual a 8 mmBtu/MWh (ou, de forma equivalente, 8000 Btu/kWh, uma vez que 1 mmBtu é igual a 10^6 Btu) significa que a central de produção eléctrica necessita de 8 mmBtu de energia térmica (resultante da combustão do combustível utilizado) para produzir 1MWh de electricidade.

Deste modo, o *spark spread* associado a uma determinada *heat rate* k é definido como sendo o preço à vista da electricidade S_E menos o produto da *heat rate* com o preço à vista S_G do combustível gerador (que usualmente é o gás natural), ou seja por

$$S_E - kS_G. \quad (2.1)$$

Assim, consoante as oscilações dos preços S_E e S_G , o *spark spread* pode assumir valores negativos, positivos ou nulos (ver Figura 2.6). No entanto, tendo em conta a expressão (2.1), é expectável que os operadores apenas produzam energia se isso for rentável, o que acontece quando as receitas são superiores aos custos de produção, ou seja, quando o *spark spread* associado assumir um valor positivo.

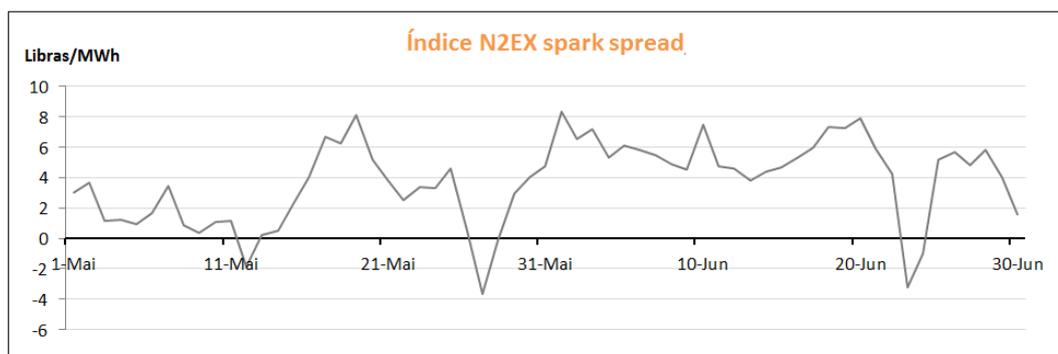


Figura 2.6: Índice *spark spread* sobre os preços da electricidade e do gás natural transaccionados na plataforma N2EX (meses de Maio e Junho de 2013).

Surtem, deste modo, as definições de opções europeias *spark spread call* e *put*.

Definição 2.3.1. Uma opção europeia *spark spread call* associada a um combustível G e uma *heat rate* fixa k , dá, ao seu detentor, o direito mas não a obrigação de pagar k vezes o preço unitário de G na maturidade T e receber o preço de uma unidade de electricidade. O seu ganho ou *payoff* na maturidade T é, assim, dado por

$$C_{SS}(T, S_E^T, S_G^T, k) = \max(S_E^T - kS_G^T, 0)$$

onde S_E^T e S_G^T são, respectivamente, os preços à vista por unidade de electricidade e de combustível na data T e $C_{SS}(t, S_E^t, S_G^t, k)$ denota o valor da opção no instante t .

Definição 2.3.2. Uma opção europeia *spark spread put* associada a um combustível G e uma *heat rate* fixa k , dá, ao seu detentor, o direito mas não a obrigação de pagar o preço de uma unidade de electricidade e receber k vezes o preço unitário de G na maturidade T . O seu ganho ou *payoff* na maturidade T é, assim, dado por

$$P_{SS}(T, S_E^T, S_G^T, k) = \max(kS_G^T - S_E^T, 0)$$

onde $P_{SS}(t, S_E^t, S_G^t, k)$ denota o valor da opção no instante t .

Ainda em relação a estas opções, deve salientar-se a sua popularidade, em particular na Europa, enquanto instrumentos financeiros transaccionados OTC. Um dos factores que para isso contribui é o facto destas opções permitirem a combinação conveniente dos movimentos de preços da electricidade e do gás natural, o que possibilita aos produtores da energia eléctrica cobrir as suas posições em ambos os activos e aos mercados energéticos obter maiores níveis de liquidez através de especulação dos produtores de gás natural e de outros participantes do mercado [19].

Para terminar esta parte da exposição deve também mencionar-se a existência de *clean spark spreads*. Estes *spreads* consistem na diferença entre o *spark spread* usual (já definido) e o custo das emissões de CO_2 produzidas pelas centrais eléctricas a gás, isto é

$$S_E - kS_G - cS_C,$$

onde S_C representa o preço do carbono (por tonelada) e c é um factor de intensidade de emissão de gases em tCO_2/MWh . Desta forma, este diferencial representa a receita líquida das vendas de energia após os custos do combustível e os custos

relacionados com as emissões. O seu aparecimento foi motivado pelo facto de, recentemente, os operadores de instalações que produzem poluentes, para evitar multas indesejadas, terem de escolher uma de duas possibilidades: reduzir as emissões através da produção com tecnologias mais amigas do ambiente ou comprar os chamados *allowances* que são contratos que permitem às empresas emitir uma determinada quantidade de carbono para a atmosfera [4].

Opções swing

As opções de balanço ou opções *swing* são contratos usados por investidores nos mercados energéticos que permitem ao detentor da opção comprar uma quantidade pré-determinada de energia a um preço de exercício também ele pré-determinado, possibilitando, ainda assim, ter alguma flexibilidade na quantidade de energia comprada e no preço total pago. O contrato associado à opção de balanço define os limites mínimo e máximo de electricidade que o seu detentor pode comprar diariamente e durante determinados períodos de tempos mais abrangentes (por exemplo, durante uma semana ou um mês). Este estabelece também quantas vezes o detentor da opção pode fazer variar a quantidade diária de electricidade comprada (ou *swing*) durante o tempo de vida da mesma, sendo que cabe ao comprador da energia definir quando ocorrerão essas variações. Este tipo de opções é utilizado para a compra de electricidade e também de gás natural e petróleo. Devido à imprevisibilidade das taxas de consumo destas *commodities*, sobretudo no que à electricidade diz respeito, estes derivados têm grande interesse para as empresas fornecedoras de energia, uma vez que permitem fazer uma melhor gestão da correspondência entre os seus níveis de oferta e de procura [5].

2.3.3. Swaps

Um contrato de *swap* (ou apenas *swap*) é um acordo bilateral para trocar sequências de *cash flows* (fluxos de determinados montantes de dinheiro) durante um período de tempo previamente estipulado. Geralmente, no momento em que o contrato é iniciado, pelo menos uma dessas sequências é definida através de uma determinada variável aleatória ou incerta. Alguns dos exemplos mais comuns são os *swaps* de taxas de juro e os *swaps* sobre divisas.

Os *swaps* sobre electricidade são contratos financeiros que possibilitam aos seus detentores pagar um preço previamente fixado pela electricidade subjacente, independentemente das flutuações reais do seu preço, durante um período de tempo pre-

viamente estipulado. O detentor pode também optar por pagar um preço variável e receber, da contraparte, um preço fixo.

De acordo com Deng e Oren [8], os chamados *locational basis swaps* são usualmente utilizados com o objectivo de fixar um preço não variável numa localização geográfica distinta do ponto de entrega de um contrato *forward*. Por isso mesmo, constituem bons instrumentos para cobrir o risco associado à diferença de preço da electricidade entre dois locais.

Em mercados como o NYMEX, este tipo de instrumentos sobre recursos ou produtos energéticos tem bastante expressão. Em particular, são transaccionados, actualmente, vários contratos *swap* sobre electricidade associados à Pennsylvania–New Jersey–Maryland Interconnection (PJM).

2.3.4. Transacções estruturadas

Transacções estruturadas possibilitam aos participantes nos mercados da energia gerir várias componentes de risco associadas à electricidade. Existem vários tipos de derivados que se inserem nesse contexto mas, neste trabalho, apenas destacaremos os *tolling agreements*.

Tolling agreements

Os *tolling agreements* são semelhantes a contratos vulgares de fornecimento de energia entre um determinado comprador e um proprietário de uma central eléctrica. Contudo, o comprador paga um prémio à contraparte que lhe dá o direito de operar ou controlar a calendarização da central ou simplesmente ficar com a electricidade produzida durante períodos de tempo pré-definidos [8]. Deste modo, este instrumento derivado constitui uma forma adequada de cobrir posições curtas em opções sobre electricidade.

2.3.5. Outros

Existem ainda muitos outros instrumentos derivados nos mercados da electricidade em que se incluem opções exóticas como as asiáticas, compostas ou *lookback*. Para além disso, nos EUA, são transaccionados alguns derivados financeiros sobre a capacidade de transmissão de electricidade. Esse facto deve-se ao carácter crítico que as redes de transmissão de energia apresentam e que, por isso mesmo, afecta os mercados da electricidade.

Capítulo 3

Modelação de Black-Scholes

Antes de se proceder à modelação de opções sobre electricidade (mais concretamente de opções *spark spread*), vamos apresentar, de forma sucinta, a dedução do modelo de Black-Scholes [3]. Este modelo funcionará como ponto de partida e meio de comparação para, no Capítulo 4, melhor se identificarem as repercussões e limitações na modelação das opções *spark spread*, causadas pelas especificidades e particularidades da electricidade enquanto activo subjacente. Tendo em conta este objectivo, faremos, também aqui, uma revisão da modelação de opções sobre futuros.

3.1. Opções europeias clássicas

Começamos por considerar opções europeias clássicas ou *plain vanilla* sobre um determinado activo genérico S .

3.1.1. Hipóteses

A obtenção da equação diferencial, a partir da qual se obtém a fórmula fechada para o preço das opções, assenta, antes de mais, na hipótese de que o valor do activo financeiro subjacente a uma opção europeia é modelável por um processo estocástico de Itô $\{S_t\}_{t \geq 0}$, solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t, \quad (3.1)$$

onde μ representa a deriva (parâmetro associado à taxa média de crescimento do activo) e σ a volatilidade, ambos considerados constantes. Por outras palavras, esta hipótese implica a suposição de que os preços do activo S seguem uma distribuição lognormal, ou equivalentemente, que os seus retornos seguem uma distribuição Gaussiana.

Existem ainda outras hipóteses utilizadas explícita ou implicitamente na modelação. Uma delas, com grande relevância, é a ausência de arbitragem, ou seja, um estado de equilíbrio onde não existem oportunidades de arbitragem (definidas como estratégias de transacção que não envolvem *cash-flow* inicial, não têm risco de perdas

e têm uma probabilidade positiva de gerar ganhos). Associada à ausência de arbitragem está a possibilidade de se efectuar vendas a descoberto, ou seja, a venda de um activo que não se possui.

Supõe-se também a possibilidade de se recorrer a uma taxa de juro r (com capitalização contínua) sem qualquer risco durante o tempo de vida da opção e a inexistência de custos de transacção associados à venda ou compra de opções ou dos seus activos subjacentes. Para a constituição e gestão da carteira (apresentadas mais à frente), é necessário que o derivado e o activo subjacente possam ser transaccionados, isto é, que o mercado seja completo.

Por último, é ainda suposto que o activo financeiro seja divisível, que se transaccione em tempo contínuo e que não dê quaisquer dividendos durante o tempo de vida da opção.

3.1.2. Dedução da equação com derivadas parciais

Seja $V(t, S)$ a função que representa o preço de uma opção europeia e suponha-se que esta é duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

De seguida vamos proceder à constituição de uma carteira constituída por uma posição curta numa opção e uma posição longa numa quantidade do respectivo activo subjacente. Deste modo, o valor da carteira é dado por:

$$\Pi(t, S) = \Delta S - V(t, S). \quad (3.2)$$

Como $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Itô (definido pela equação integral estocástica (3.1)) e Π é uma função do tempo e do activo S , duplamente continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$, estão satisfeitas as condições para aplicar o Lema de Itô. Deste modo, obtém-se a seguinte equação diferencial estocástica:

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t) dX_t. \quad (3.3)$$

Substituindo $\Pi(t, S)$ pela sua definição (3.2) na equação (3.3), vem que

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \left[-\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \Delta \right] - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt \\ & + \sigma S_t \left[-\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \Delta \right] dX_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Analisando a equação anterior, verifica-se que a componente estocástica associada a dX_t é eliminada se se escolher Δ como:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t). \quad (3.5)$$

Note-se que isto acontece porque as componentes estocásticas dos processos de Itô $\{S_t\}_{t \geq 0}$ e $\{V_t\}_{t \geq 0}$ são proporcionais, um aspecto evidente após a aplicação do Lema de Itô à função $V(t, S)$. Substituindo então Δ em (3.4) pela expressão em (3.5) obtém-se simplesmente:

$$d\Pi_t = \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt. \quad (3.6)$$

Com esta escolha para Δ estamos a realizar uma operação de *hedging* ou de cobertura de risco, visto que teoricamente se elimina o risco inerente à componente aleatória.

Partindo da equação diferencial estocástica (3.6) para $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$, formula-se a seguinte equação diferencial com derivadas parciais (determinística):

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, S) = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S). \quad (3.7)$$

Antes de se obter a equação com derivadas parciais (EDP) final, é preciso recorrer ao pressuposto de ausência de arbitragem. Sob essa hipótese, a carteira sem risco criada deve apresentar um rendimento igual ao do activo sem risco, uma vez que, caso contrário, seria possível realizar um ganho imediato sem custos e sem qualquer probabilidade de perda. Esta argumentação traduz-se na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, S) = r\Pi(t, S). \quad (3.8)$$

Conjugando as equações (3.7) e (3.8) chega-se à **Equação de Black-Scholes**, dada pela seguinte EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0. \quad (3.9)$$

3.1.3. Fórmula fechada

Considere-se agora que estamos perante opções europeias *call* e faça-se $C(t, S) = V(t, S)$. A equação de Black-Scholes (3.9) passa a ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - rC(t, S) = 0, \quad t \geq 0 \text{ e } S > 0 \quad (3.10)$$

com a condição final $C(T, S) = \max\{S - K, 0\}$ e com condições fronteira dadas por

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0, \quad t \geq 0.$$

A solução única da equação de Black-Scholes sob esta condição final é conhecida por **Fórmula de Black-Scholes** para opções europeias *call* e apresenta a forma

$$C(t, S) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \quad (3.11)$$

em que

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

em que $S > 0$ e em que se considera $t \in [0, T)$ e $C(T, S) = \max\{S - K, 0\}$. A fórmula de Black-Scholes verifica as condições de fronteira mas estas não são utilizadas na sua dedução.

A fórmula fechada para opções europeias *put* é dada por

$$P(t, S) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - SN(-d_1) \quad (3.12)$$

em que se considera $P(T, S) = \max\{K - S, 0\}$. A fórmula (3.12) pode ser deduzida de forma análoga à das opções europeias *call* (3.11) ou recorrendo à chamada relação de paridade *put-call* (ver, por exemplo, [30]).

3.2. Opções europeias sobre futuros

Devido a algumas características dos contratos de futuros já mencionadas na Subsecção 2.3.1, estes instrumentos financeiros apresentam frequentemente elevados níveis de liquidez, algo que justifica o interesse e a relevância das opções sobre o preço de contratos de futuros.

3.2.1. Equação com derivadas parciais

O preço de uma opção europeia sobre futuros, seja ela *call* ou *put*, é função de duas variáveis independentes, o instante temporal t e o preço F do contrato de futuros subjacente.

Assim, e partindo do mesmo conjunto de hipóteses já referido (incluindo agora os futuros nessas hipóteses), basta fazer uma mudança de variável na equação de Black-Scholes (3.10), recorrendo à relação entre os preços do contrato de futuros e do activo subjacente dada por $F = Se^{r(T-t)}$ (e que pode ser facilmente justificada por um argumento de ausência de arbitragem). Fazendo também uma mudança de variável dependente para $\hat{V}(t, F)$ obtém-se a seguinte EDP:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(t, F) + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F^2}(t, F) - r\hat{V}(t, F) = 0.$$

3.2.2. Fórmula fechada

Considerando agora que $\hat{C}(t, F) = \hat{V}(t, F)$ e fazendo, uma vez mais, as mudanças de variável adequadas (ver, por exemplo, [30]), obtém-se a fórmula fechada para o

preço das opções europeias *call* sobre futuros dada por

$$\hat{C}(t, F) = e^{-r(T-t)}(FN(\bar{d}_1) - KN(\bar{d}_2)) \quad (3.13)$$

em que

$$\bar{d}_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\bar{d}_2 = \bar{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

em que $F > 0$ e $t \in [0, T]$ e em que se considera $\hat{C}(T, F) = \max\{F - K, 0\}$. A fórmula (3.13) é vulgarmente designada por fórmula de Black (ver [2]). Para opções europeias *put* sobre futuros, o preço é dado por

$$\hat{P}(t, F) = e^{-r(T-t)}(KN(-\bar{d}_2) - FN(-\bar{d}_1)) \quad (3.14)$$

em que se considera $\hat{P}(T, F) = \max\{K - F, 0\}$. A expressão (3.14) pode ser deduzida de forma análoga à das opções europeias *call* sobre futuros.

É importante referir que, no caso do activo subjacente às opções ou aos futuros (eles próprios também subjacentes às opções) ser uma mercadoria, é prática considerar a existência da chamada *convenience yield*. Esta consiste na diferença entre duas quantidades, o possível ganho associado à vantagem de possuir a mercadoria para entrega e o custo de armazenamento. No fundo, a *convenience yield* pode ser interpretada como um pagamento contínuo de dividendos feito ao proprietário da mercadoria.

A inclusão da *convenience yield* nas hipóteses dos modelos de Black-Scholes e de Black levaria a alterações nas suas equações ou fórmulas (no caso do modelo de Black-Scholes, resultaria na fórmula de Merton [22] adaptada para o preço de opções sobre *commodities*). Por motivos que explicaremos mais à frente, excluimos a *convenience yield* dos testes numéricos onde aplicámos (3.13) e (3.14) às opções sobre a electricidade.

3.3. Testes numéricos para opções sobre electricidade

O objectivo desta secção é procurar ilustrar as consequências das especificidades da energia eléctrica enquanto activo subjacente a opções. Por outras palavras, pretende-se verificar a existência ou não de grandes disparidades entre os preços teóricos de acordo com a fórmula de Black (ver [2]) e os preços reais das opções negociadas nos mercados da electricidade.

Para esse efeito foram utilizados os dados referentes às opções Phelix transaccionadas no mercado alemão EEX. Estas opções têm como activo subjacente contratos de futuros denominados Phelix Base Futures e dizem respeito a energia eléctrica distribuída no território alemão e austríaco. De uma forma geral, utilizámos dados relativos a electricidade *base* (cujo período de entrega abrange todo o dia). Apenas na Subsecção 3.3.1, com o intuito de melhor conhecer a volatilidade correspondente aos seus preços à vista, recorreu-se também a dados sobre electricidade *on-peak*, a qual apresenta um período de entrega restrito ao intervalo das 9 às 20 horas de cada dia. A taxa de juro utilizada foi a taxa anual $r = 0.069\%$ associada aos bilhetes de tesouro alemães a 1 ano (dados retirados de <http://www.bundesbank.de> no dia 14/08/2013).

3.3.1. Estimação da volatilidade

Nas fórmulas fechadas de Black para o preço de opções europeias, todos os parâmetros são observáveis à excepção da volatilidade σ . Desta forma, para atribuir um preço às opções de acordo com esse modelo, a volatilidade tem de ser estimada. De seguida, apresentamos duas formas para fazer essa estimação, as quais são primeiro aplicadas aos preços à vista com o simples objectivo de ilustrar numericamente a ordem de grandeza da volatilidade no mercado *spot* da energia eléctrica.

Preços à vista

Consideremos $n+1$ observações diárias do preço da electricidade S_E . Os seus retornos podem ser calculados através de

$$u_i = \ln \left(\frac{S_{E,i}}{S_{E,i-1}} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Utilizando a média dos retornos $\bar{u} = (u_1 + \dots + u_n)/n$, a estimativa do desvio padrão dos mesmos é dada por

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}.$$

Para obter uma estimativa para a volatilidade, basta fazer-se uma anualização da estimativa do desvio padrão, o que consiste em tomar, neste caso, $\hat{\sigma} = \bar{s}\sqrt{365}$ (caso contrário teríamos uma estimativa para a volatilidade a uma escala diária).

Contudo, retornos calculados de forma logarítmica, como em (3.15), não possibilitam a inclusão de preços negativos (fenómeno que pode acontecer, como já

mencionámos anteriormente, nalgumas bolsas de electricidade). Uma forma de contornar este problema pode passar por excluir as observações em que $S_E \leq 0$, algo que pode conduzir a valores inferiores aos da volatilidade real, uma vez que se estão a desprezar as oscilações de preço em níveis negativos. Para evitar a exclusão de preços negativos, outra alternativa passa por calcular os retornos através de

$$u_i = \frac{S_{E,i} - S_{E,i-1}}{|S_{E,i-1}|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

sendo que o valor absoluto em denominador visa dar uma interpretação aos retornos quando ocorrem preços negativos. Veja-se que, se tivéssemos $S_{E,1} = 30\text{€/MWh}$ e $S_{E,2} = -15\text{€/MWh}$ e não tomássemos o valor absoluto em denominador, então o respectivo retorno seria erradamente positivo.

Os resultados relativos à volatilidade, utilizando os dados históricos da electricidade Phelix, são apresentados de seguida para o caso em que se utiliza (3.15) e se excluem os preços negativos e para o caso em que se recorre a (3.16). Como se pode ver pelas Figuras 3.1 e 3.2, as estimativas para a volatilidade anual associada aos preços à vista da energia eléctrica diferem bastante consoante a expressão usada para definir os retornos (algo que se deve ao modo como valores extremos se reflectem nas fórmulas (3.15) e (3.16) e, conseqüentemente, nos respectivos retornos). Ainda assim, independentemente do método aplicado na estimação, constata-se que os valores obtidos são extremamente elevados, sendo quase todas as estimativas muito acima dos 400%. A estimação da volatilidade assume, assim, uma importância maior na caracterização dos mercados de energia eléctrica.

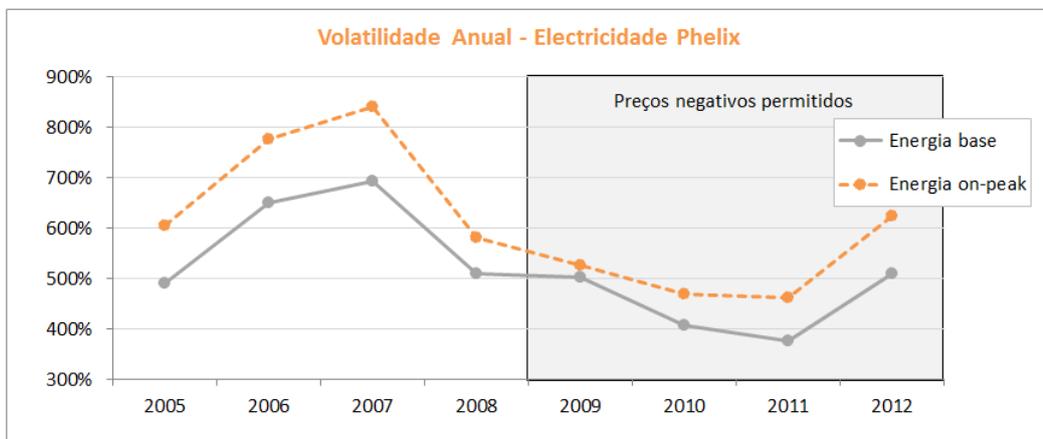


Figura 3.1: Estimativas para a volatilidade anual associada aos preços da electricidade Phelix (utilizando a expressão (3.15) e excluindo observações não positivas).

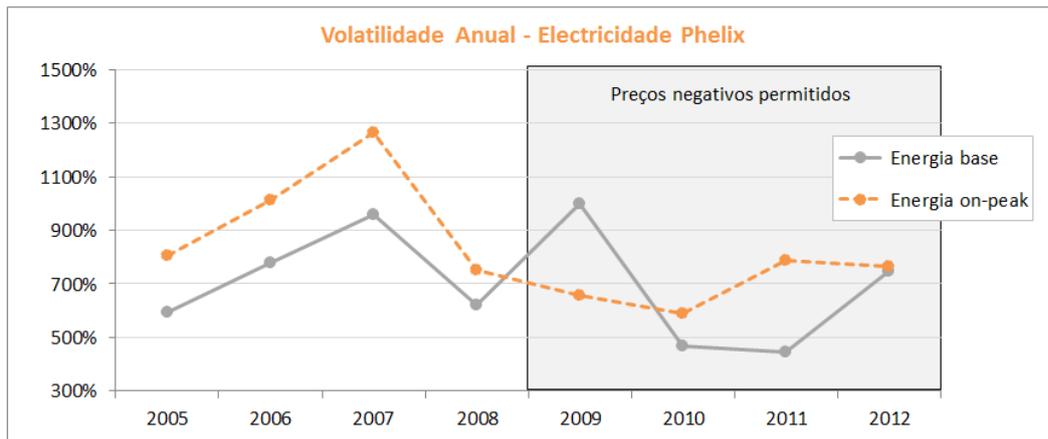


Figura 3.2: Estimativas para a volatilidade anual associada aos preços da electricidade Phelix (utilizando a expressão (3.16)).

Vejamos o que se passa com outros activos do sector energético para que se tenha um termo de comparação em relação aos valores apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2. Por exemplo, as volatilidades anuais associadas aos preços por barril do petróleo Brent e aos preços à vista do gás natural Henry Hub Gulf Coast, referentes ao ano de 2012, foram estimadas em cerca de 23% e 50%, respectivamente (para as duas alternativas de estimação definidas).

Ainda em relação às duas figuras anteriores, verifica-se que, em geral, os preços da electricidade *on-peak* apresentam uma maior volatilidade que os mesmos para electricidade *base*. A explicação para essa diferença advém do facto da energia *on-peak* corresponder ao período do dia em que existe maior procura e consumo de electricidade.

Preços a prazo

No caso dos preços a prazo, é comum, na prática, utilizar-se o chamado esquema de *front future*, em que se recorre à série de preços dos futuros com data de entrega mais próxima. Aqui, para implementação desse esquema, decidimos utilizar futuros mensais e, visto que estes não podem assumir preços negativos, já é possível utilizar a expressão (3.15) para depois estimar a respectiva volatilidade sem ter a necessidade de excluir observações (tal como será feito nos restantes testes numéricos apresentados daqui em diante, à excepção da subsecção seguinte). Com base no que acabámos de dizer e nas cotações observadas durante o mês de Junho obteve-se o valor $\hat{\sigma} = 24.54\%$. Este valor está muito abaixo de qualquer uma das estimativas exibidas nas duas figuras anteriores, ainda que não sejam directamente comparáveis

visto terem utilizado observações de períodos distintos.

3.3.2. Teste à normalidade dos retornos

Uma das hipóteses subjacentes a ambos os modelos mencionados neste capítulo é precisamente a de que os preços do activo seguem uma distribuição lognormal ou, visto de outra forma, que os retornos associados a esses preços seguem uma distribuição Gaussiana.

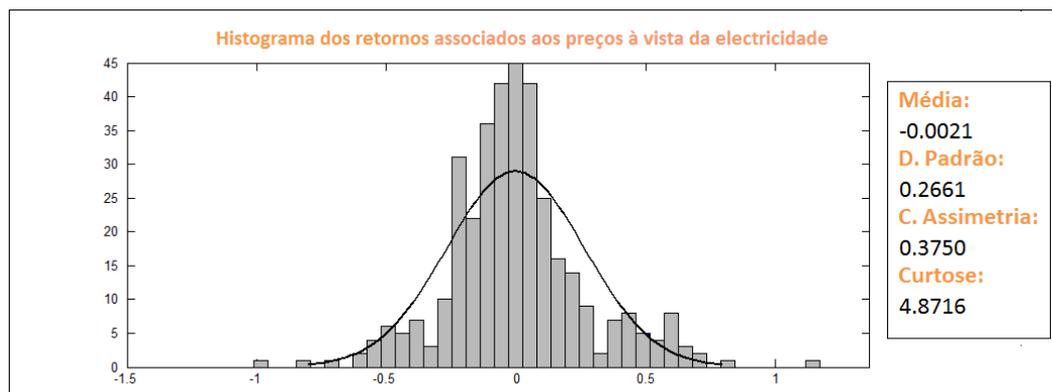


Figura 3.3: Histograma e função densidade da lei Gaussiana estimada para os retornos dos preços à vista da electricidade (utilizando as cotações do ano de 2012 e a expressão (3.15)).

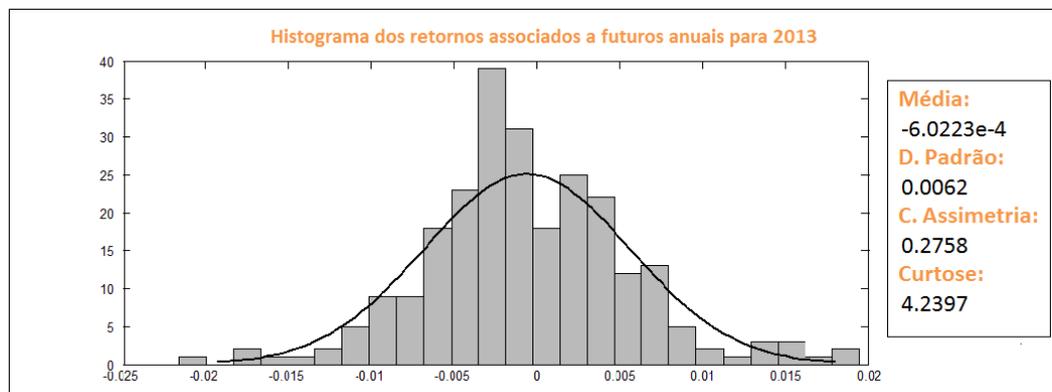


Figura 3.4: Histograma e função densidade da lei Gaussiana estimada para os retornos dos preços dos futuros anuais sobre electricidade com entrega em 2013 (utilizando as cotações do ano de 2012 e a expressão (3.15)).

Da observação das Figuras 3.3 e 3.4, que apresentam os histogramas dos retornos, verifica-se que os retornos associados aos preços a prazo apresentam uma distribuição mais próxima de uma lei Gaussiana que os outros retornos dos preços à vista. Ainda que os valores do coeficiente de assimetria sejam próximos, os retornos dos

preços à vista apresentam um desvio padrão muito maior. Em relação à curtose, o valor associado à primeira série de retornos é superior, ou seja, mais distante do valor de referência (igual a 3) da lei normal. Contudo, esse valor não reflecte a realidade porque está claramente subestimado. Relembre-se que, para a obtenção desses resultados, foram excluídas as observações negativas. Caso contrário, a distância à normalidade dessa série de preços seria muito maior. Veja-se que, utilizando (3.16), a curtose destes retornos mencionados seria $51.2107 \gg 4.8716$.

3.3.3. Comparação entre preços estimados e empíricos

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 são apresentados resultados numéricos referentes à estimação do valor das opções europeias sobre futuros de electricidade através das fórmulas de Black (3.13) e (3.14). Analisando os dados nessas tabelas, observa-se que os valores estimados são próximos dos reais, tanto para opções de compra como para opções de venda. Isto quer dizer que, apesar das disparidades existentes entre a electricidade e a grande maioria dos activos transaccionados em mercados organizados, na prática, aplicar o modelo de Black às opções sobre futuros no sector da energia eléctrica representar uma alternativa válida.

Opções europeias call sobre futuros								
$F_E=33.33 \text{ €/MWh}$ Período de entrega: Mês de Agosto								
Preço de exercício	27	29	31	33	35	37	39	41
Preços EEX	6.331	4.356	2.527	1.132	0.373	0.097	0.022	0.005
Preços estimados	6.330	4.341	2.464	1.025	0.282	0.049	0.006	0.000

Tabela 3.1: Comparação dos preços (em €/MWh) das opções *call* mensais Phelix com maturidade em Agosto de 2013 (utilizando as cotações do dia 1/7/2013).

Opções europeias put sobre futuros								
$F_E=33.33 \text{ €/MWh}$ Período de entrega: Mês de Agosto								
Preço de exercício	27	29	31	33	35	37	39	41
Preços EEX	0.002	0.026	0.197	0.802	2.043	3.766	5.691	7.674
Preços estimados	0.000	0.011	0.134	0.695	1.952	3.719	5.676	7.670

Tabela 3.2: Comparação dos preços (em €/MWh) das opções *put* mensais Phelix com maturidade em Agosto de 2013 (utilizando as cotações do dia 1/7/2013).

Sorriso de volatilidade

Através dos preços observados no mercado para um conjunto de opções europeias, sobre um mesmo activo, mas com diferentes preços de exercício, é possível obter várias estimativas para a volatilidade do activo designadas por volatilidades implícitas. Cada uma delas é calculada igualando o preço teórico das opções (que, uma vez conhecidos todos os outros parâmetros, fica apenas dependente da volatilidade) ao respectivo preço empírico. A sua representação gráfica em função do preço de exercício tem o aspecto de um sorriso, conhecido como o sorriso da volatilidade.

Em opções sobre acções ou índices accionistas, o sorriso da volatilidade toma geralmente uma forma decrescente e convexa, algo que reflecte o receio de quedas abruptas dos preços da parte dos investidores. Para opções sobre mercadorias, os sorrisos costumam ser também convexos, decrescendo primeiro para depois crescer até ao nível inicial.

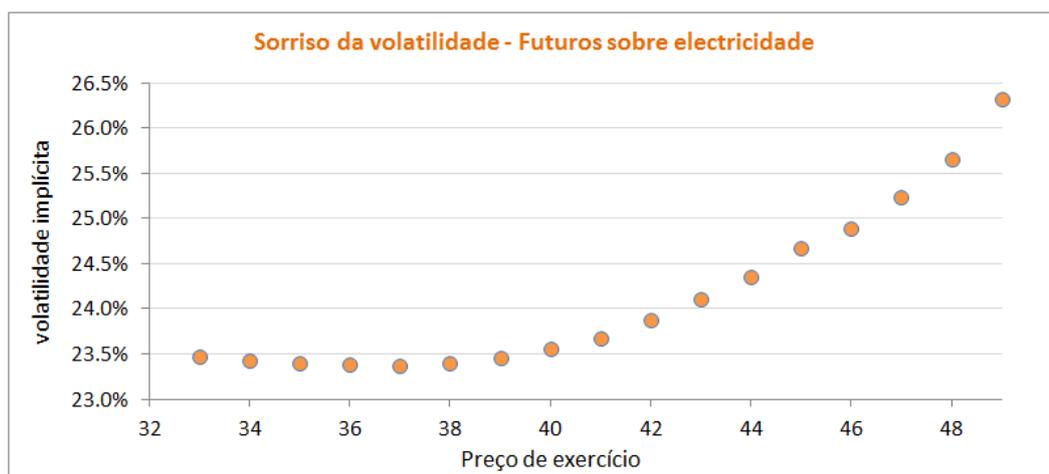


Figura 3.5: Representação gráfica das volatilidades implícitas em opções sobre futuros mensais Phelix (com maturidade em Outubro de 2013 e utilizando as cotações do dia 1/8/2013).

Nos mercados da electricidade, como se pode ver pela Figura 3.5, o sorriso da volatilidade é distinto daqueles que caracterizam as opções sobre outras *commodities*, pois apresenta uma curva a que se atribui a designação de *forward skew*. As volatilidades implícitas diminuem primeiro, mas aumentam de forma mais acentuada para preços de exercício mais elevados. Isso reflecte a preocupação dos investidores e consumidores face à possibilidade de ocorrência de picos no preço, o que leva a procurar e valorizar opções com maiores preços de exercício.

3.3.4. Análise dos resultados

Apesar das estimativas para o valor das opções serem próximas dos preços empíricos, existe uma diferença e esta pode estar relacionada com vários factores. Tendo em conta a importância do parâmetro σ nas fórmulas do modelo de Black, o processo e o período utilizados para a sua estimação têm grande influência nos preços obtidos. Assim sendo, para contratos de futuros que permaneçam transaccionáveis durante pouco tempo, pode ser adequado utilizar uma série de preços mais alargada recorrendo a outros contratos de futuros (como é o caso no esquema *front future*).

Outro motivo pode estar relacionado com o facto de, aquando da dedução teórica das fórmulas fechadas usadas nesta subsecção, supormos que os retornos associados aos futuros apresentam uma distribuição Gaussiana. Na realidade e num contexto geral, o comportamento do activo subjacente difere muitas vezes da log-normalidade. Por exemplo, por vezes, séries históricas de retornos de activos subjacentes têm caudas mais pesadas que as apresentadas por uma variável aleatória Gaussiana (ou seja, os retornos são caracterizados por uma função de probabilidade leptocúrtica), indicando que os movimentos bruscos do preço ocorrem com maior frequência do que seria previsto por uma distribuição normal. Ainda assim, deve salientar-se que os retornos dos preços a prazo, ao contrário daquilo que se verifica no mercado à vista da electricidade, têm uma volatilidade limitada, uma menor probabilidade de registar valores atípicos e apresentam, em geral, curtose e coeficiente de assimetria amostrais com valores próximos de 3 e 0, respectivamente (valores de referência de uma distribuição normal). Estes atributos exibem indícios de um comportamento, quando comparado com retornos dos preços associados ao mercado *spot* da electricidade, mais próximo daquele que seria de esperar em variáveis normais (resultados semelhantes aos apresentados por Haug em [16]).

Para além disso, as operações de cobertura podem ser realizadas através da compra e venda de contratos futuros mas não podem ser realizadas recorrendo ao próprio activo. Logo, tal como defendem os autores Sewalt e De Jong [28], a ideia de aplicar a fórmula de Black para avaliar opções europeias *call* e *put* sobre futuros de electricidade tem algum fundamento. Uma grande parte dos negociantes que participam nas sessões dos mercados de electricidade utilizam as fórmulas de Black [9], principalmente porque, apesar de não fornecerem preços exactos, de um ponto de vista prático, fornecem boas estimativas. Segundo Hjalmarsson em [17], pode até tornar-se difícil encontrar outras alternativas que forneçam melhores resultados.

Capítulo 4

Modelação de opções spark spread

Tal como já foi dito, o conceito de *spark spread* assume uma grande importância no sector das energias, algo que justifica também o interesse nas opções sobre esses diferenciais. Neste capítulo, o foco será sobretudo orientado para o estudo e a modelação desses derivados tão particulares, tendo como base, em parte, a investigação desenvolvida por Deng [7, 6]. A ligação ao Capítulo 3 é estabelecida tendo em conta as hipóteses inerentes ao modelo de Black-Scholes e os mecanismos utilizados na sua dedução.

4.1. Hipóteses

Tal como acontece no modelo de Black-Scholes, a modelação de opções *spark spread* exposta neste trabalho também pressupõe um determinado conjunto de hipóteses. No fundo, as hipóteses coincidem com as já mencionadas no capítulo anterior, com a particularidade de agora serem referentes aos futuros da electricidade e aos futuros do combustível gerador e não em relação às próprias *commodities*. Em particular, supõe-se que o mercado é completo (opções e futuros subjacentes negociáveis em simultâneo) e que os futuros enquanto activos subjacentes são transaccionáveis em tempo real. Contudo, antes de prosseguir, serão discutidos alguns aspectos pertinentes associados às hipóteses usuais em modelação de opções.

4.1.1. Consequências dos aspectos fundamentais da electricidade

Ao longo do Capítulo 2, defendeu-se a ideia de que a energia eléctrica apresenta algumas características que a separam das restantes matérias-primas, mercadorias ou mesmo de outros tipos de energias. É natural que alguns desses traços tenham implicações nas hipóteses e métodos utilizados para a atribuição de preços de opções sobre electricidade.

Posições curtas sobre o activo

A metodologia utilizada na dedução das fórmulas de Black-Scholes baseia-se, implicitamente, no facto de ser possível tomar posições curtas sobre o activo subjacente. Porém, como a electricidade não é um bem armazenável, torna-se impossível, na prática, realizar operações de venda a descoberto sobre ela mesma, visto que, uma vez produzida, a energia é imediatamente consumida. Este aspecto impede também a compra e posterior posse de um tal tipo de activo subjacente durante um determinado período de tempo. Desta forma, a operação de cobertura que se realiza sobre a carteira constituída, em que se elimina (teoricamente) o risco tomando posições contrárias na opção e no activo subjacente para posterior obtenção da EDP, não pode ser utilizada na determinação do preço de opções sobre o preço à vista da electricidade. Isto significa também que a hipótese de mercado completo, subjacente à modelação de Black-Scholes, para derivados escritos sobre preços à vista da electricidade, não é cumprida.

Convenience yield

A já mencionada *convenience yield* existe porque os proprietários de determinada mercadoria podem obter um benefício resultante de a possuírem fisicamente como inventário até à maturidade. Esses benefícios incluem a capacidade de lucrar com a escassez temporária e a possibilidade de escolha entre o consumo presente ou o investimento no futuro [23].

Sob a hipótese de não arbitragem, a relação entre os preços a prazo e os preços à vista, nos mercados de activos financeiros, é dada por

$$F = Se^{r(T-t)}, \quad (4.1)$$

enquanto que nos mercados das mercadorias e matérias-primas armazenáveis a mesma relação é dada por

$$F = Se^{(r-y)(T-t)} \quad (4.2)$$

sendo que y representa a correspondente *convenience yield*.

No entanto, torna-se difícil considerar (4.2) no contexto da energia eléctrica, devido à impossibilidade de ela ser armazenada, algo que impede que as duas componentes constituintes da *convenience yield* (o benefício inerente à posse da mercadoria e o seu custo de armazenamento) sejam especificadas.

Relação entre preços a prazo e preços à vista

Por exemplo, nos mercados accionistas, de divisas ou mercados a prazo sobre outras *commodities*, os preços a prazo convergem para o preço à vista do activo subjacente na maturidade dos contratos *forward* ou de futuros, como se pode ver pelas expressões (4.1) e (4.2) anteriores. Mais uma vez, por causa do seu carácter não armazenável, mas também devido a possíveis congestionamentos na transmissão da energia e devido à estrutura e organização dos mercados à vista (diário, intradiário e em tempo real), a relação entre os preços futuros de energia eléctrica e os preços à vista, antes da maturidade, não é clara. Muitos autores como é o caso de Vehvilainen em [29], afirmam mesmo não existir uma relação directa entre estes antes da data de expiração do contrato *forward* ou de futuros em questão.

Note-se que nos mercados onde a relação *cash and carry* (4.1) se verifica, esta é justificada pela existência de oportunidades de arbitragem caso se tenha $F < Se^{r(T-t)}$ ou $F > Se^{r(T-t)}$. Ora, o argumento de não arbitragem é inválido neste contexto, uma vez que isso requereria numa das desigualdades vender electricidade a descoberto e na outra comprá-la em t e mantê-la até à data de expiração do contrato de futuros (que, tal como já foi referido, são duas estratégias impossíveis de concretizar).

Vários autores, como Vehvilainen [29], defendem a ideia de que estas quantidades devem diferir pois os contratos *forward* e de futuros são liquidados em relação à média dos preços à vista durante o período de entrega. Esse desfasamento fica ainda mais evidente em períodos de picos no preço à vista da electricidade [15].

A não validade da relação referida torna-se mais evidente quando observamos as disparidades entre a volatilidade associada aos mercados à vista e a prazo da electricidade, fenómeno realçado numericamente na Subsecção 3.3.1 para a electricidade Phelix e, mais à frente neste trabalho, na Subsecção 4.3.1 para a electricidade PJM. Excluindo mais uma vez a *convenience yield* destas considerações, a única fonte de aleatoriedade da relação anterior (4.1) tem origem em S_E e, por isso, as volatilidades associadas às duas séries deveriam coincidir. Teoricamente, supondo que tanto os preços à vista como os preços a prazo seguem movimentos geométricos Brownianos e aplicando o Lema de Itô a (4.37), pode provar-se a igualdade das respectivas volatilidades. Na prática, as taxas de juro podem ser estocásticas e a liquidez dos dois mercados (à vista e a prazo) pode diferir resultando em volatilidades distintas. Porém, ainda assim, é de esperar que sejam valores relativamente próximos.

Preços negativos e a hipótese de lognormalidade

Uma das hipóteses de Black-Scholes requer que o processo estocástico $\{S_t\}_{t \geq 0}$ associado ao activo subjacente seja modelado com base no movimento geométrico Browniano, o que significa que S_t segue uma distribuição lognormal. Ora, no sector da energia eléctrica, considerando a possibilidade de ocorrência de preços à vista negativos (algo que não se verifica em todos os mercados de electricidade), a aplicação directa do mesmo raciocínio aos preços à vista, sem excluir observações negativas, não é válida, uma vez que o suporte de uma distribuição lognormal é, obviamente, o conjunto $(0, +\infty)$.

Sem entrar em pormenores, uma forma de resolver a questão poderia passar por possibilitar a ocorrência de preços negativos através da definição de um limite inferior nos preços, aproveitando o facto das bolsas (onde este fenómeno é passível de ocorrer) estabelecerem valores mínimos para os preços. No entanto, dadas as nossas restrições de tempo e espaço, esta questão não será mais aprofundada neste trabalho.

Utilização de modelos sobre a evolução do preços dos futuros

Se a modelação for realizada tendo como base os preços a prazo em vez dos preços à vista, algumas destas questões deixam de se colocar. Desde logo, as posições curtas e as operações de cobertura na constituição das carteiras passam a ser operações válidas. A própria hipótese de o mercado ser completo deixa de ser descabida, bastando para isso supor a existência de um mercado de futuros líquido em que, para cada $\tau \in [0, T]$, existe um contrato de futuros com maturidade $T - \tau$. Esta argumentação justifica, assim, a utilização teórica de contratos de futuros como activo subjacente nas modelações das opções *spark spread* apresentadas.

Para além disso, como vimos na Subsecção 3.3, os preços à vista e os preços a prazo da electricidade não exibem necessariamente o mesmo comportamento. Os movimentos de preço são mais suaves nos últimos, sendo que uma explicação importante para este fenómeno é que a de que o período de tempo antes da entrega da energia nos contratos a prazo permite que o processo de produção se ajuste a choques de oferta e procura.

4.2. Modelação com base em movimentos geométricos Brownianos

Vamos, finalmente, proceder à modelação do preço das opções *spark spread* cujos ganhos na maturidade T são dados por

$$\max(S_E^T - kS_G^T, 0) \quad \text{ou} \quad \max(kS_G^T - S_E^T, 0)$$

para as opções *call* e *put*, respectivamente.

Devido a todos os problemas que surgem quando se procede à modelação utilizando os preços à vista da electricidade (mencionados na subsecção anterior), esta atribuição de preço será feita com base nos preços de contratos de futuros. No entanto, como artifício, utilizaremos os preços à vista para deduzir a EDP, a partir da qual chegaremos à EDP associada a opções *spark spread* sobre futuros¹. Daí, no início do capítulo se mencionarem as hipóteses supostas sobre os futuros. Uma parte da apresentação seguirá o trabalho de Deng *et al.* em [7].

Começemos por considerar os activos electricidade e um determinado combustível gerador cujos preços são dados por S_E e S_G . Consideremos ainda que estes preços seguem movimentos geométricos Brownianos descritos por

$$\begin{aligned} dS_E &= \mu_E S_E dt + \sigma_E S_E dX^1, \\ dS_G &= \mu_G S_G dt + \sigma_G S_G dX^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que X^1 e X^2 são processos de Wiener e μ_E , μ_G , σ_E e σ_G são constantes positivas. Os dois processos de Wiener apresentam correlação ρ , ou seja, para além das regras algébricas usuais

$$dt \cdot dt = dt \cdot dX^i = dX^i \cdot dt = 0 \quad \text{e} \quad dX^i \cdot dX^i = dt, \quad i = 1, 2,$$

considera-se ainda que $dX^1 \cdot dX^2 = dX^2 \cdot dX^1 = \rho dt$.

4.2.1. Dedução da EDP

A modelação do preço das opções *spark spread* reduz-se, essencialmente, ao caso da modelação da avaliação das opções de troca (ou *exchange*), que dão ao detentor do contrato o direito de trocar um activo por outro. Representemos por $V(t, x, y)$ o

¹A dedução da EDP pode ser feita directamente a partir de uma carteira constituída por futuros e opções. No entanto, optou-se por esta via para, de alguma forma, seguir um raciocínio análogo ao exposto no Capítulo 3.

preço de uma opção de troca do activo x por y . Na maturidade T , estas opções apresentam um ganho de $V(T, x, y) = \max(0, x - y)$.

A atribuição do preço das opções *spark spread* basear-se-á no que foi feito por Margrabe [21] para opções de troca. Veja-se que o ganho na maturidade de uma opção *spark spread*, referido no início desta secção, corresponde a ter $\max(0, x - ky)$. Desta forma, uma opção *spark spread* pode ser vista como uma opção de troca, bastando para isso tomar $k = 1$. Para evitar introduzir notação adicional, a função $V(t, x, y)$ irá também representar o preço de uma opção *spark spread* cujo ganho na maturidade T é dado por

$$V(T, x, y) = \max(0, x - ky). \quad (4.4)$$

Assim, prosseguiremos com a utilização da notação (x, y) no lugar de (S_E, S_G) .

Constituição da carteira

Consideremos uma carteira constituída por uma posição curta na opção *spark spread* e posições longas em Δ_1 unidades de x e Δ_2 unidades de y , sendo os preços dos activos modelados por (4.3). Deste modo, o valor da carteira é dado por

$$\Pi(t, x, y) = \Delta_1 x + \Delta_2 y - V(t, x, y). \quad (4.5)$$

É de salientar que a função $V(t, x, y)$ é uma função homogénea de grau 1, isto é que

$$V(t, \lambda x, \lambda y) = \lambda V(t, x, y), \quad \forall \lambda > 0$$

(ver demonstração em [21, página 215]). Esta propriedade é facilmente verificável na condição final (4.4), algo que não acontecia no capítulo anterior aquando da dedução do modelo de Black-Scholes.

Supondo que V é continuamente diferenciável em x e y , pelo Teorema de Euler [25] para funções homogéneas, tem-se que

$$V(t, x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y)x + \frac{\partial V}{\partial y}(t, x, y)y. \quad (4.6)$$

Desta equação, constata-se que se se escolher $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y)$ e $\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial y}(t, x, y)$, o valor da carteira é sempre nulo, ou seja, $\Pi(t, x, y) = 0$ (tal como faremos, mais adiante, para obter uma carteira teoricamente sem risco após a aplicação do Lema de Itô). Por outro lado, por um argumento de ausência de arbitragem, o retorno de uma carteira deve ser proporcional ao seu valor. Resulta então destes factos que

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, x, y) = 0. \quad (4.7)$$

Há, portanto, aqui uma diferença significativa em relação à dedução do modelo de Black-Scholes, em que o valor da carteira coberta era não nulo.

Aplicação do Lema de Itô

Os processos estocásticos associados a x e y são processos de Itô. Portanto, a função Π que é duas vezes diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, satisfaz as condições necessárias à aplicação do Lema de Itô. Logo, aplicando o Lema de Itô bidimensional (ver, por exemplo, [18]) à função $\Pi(t, x, y)$, resulta

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, x, y) + \mu_x x \frac{\partial \Pi}{\partial x}(t, x, y) + \mu_y y \frac{\partial \Pi}{\partial y}(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(t, x, y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}(t, x, y) + \rho \sigma_x \sigma_y xy \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}(t, x, y) \right) dt + \sigma_x x \frac{\partial \Pi}{\partial x}(t, x, y) dX_t^1 \\ & + \sigma_y y \frac{\partial \Pi}{\partial y}(t, x, y) dX_t^2 \end{aligned}$$

(considerando, nos argumentos das funções, os processos estocásticos $x = (S_E)_t$ e $y = (S_G)_t$). Utilizando a definição de $\Pi(t, x, y)$ (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x, y) + \mu_x x \left[\Delta_1 - \frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y) \right] + \mu_y y \left[\Delta_2 - \frac{\partial V}{\partial y}(t, x, y) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, x, y) - \rho \sigma_x \sigma_y xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(t, x, y) \right) dt \quad (4.8) \\ & + \sigma_x x \left[\Delta_1 - \frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y) \right] dX_t^1 + \sigma_y y \left[\Delta_2 - \frac{\partial V}{\partial y}(t, x, y) \right] dX_t^2 \end{aligned}$$

Analisando esta equação, observa-se que as componentes estocásticas associadas a dX_t^1 e dX_t^2 são eliminadas se se escolher Δ_1 e Δ_2 como:

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x, y), \quad \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial y}(t, x, y) \quad (4.9)$$

(em que também aqui $x = (S_E)_t$ e $y = (S_G)_t$). Note-se que este resultado justifica a interpretação da eliminação do risco e vai ao encontro da escolha que é implicitamente sugerida pela equação (4.6). Substituindo Δ_1 e Δ_2 em (4.8) pelas suas expressões dadas em (4.9), tem-se

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, x, y) \right. \\ & \left. - \rho \sigma_x \sigma_y xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(t, x, y) \right) dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) motiva então, deixando de considerar x e y como processos estocásticos, a seguinte EDP

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt}(t, x, y) = & -\frac{\partial V}{\partial t}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, x, y) \\ & - \rho \sigma_x \sigma_y xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(t, x, y). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Igualando (4.7) e (4.11) chegamos à EDP pretendida:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x, y) + \frac{1}{2}\sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x, y) + \frac{1}{2}\sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, x, y) + \rho\sigma_x\sigma_y xy \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}(t, x, y) = 0. \quad (4.12)$$

4.2.2. Utilização de contratos futuros

Para fazer a passagem a contratos de futuros subjacentes às opções, vamos considerar, à semelhança do que é feito na fórmula de Black, que $F_E = S_E e^{r(T-t)}$ e $F_G = S_G e^{r(T-t)}$, o que significa que estamos a supor que existe convergência entre os preços à vista e a prazo, quer para a electricidade quer para o combustível gerador.

Considerando $V(t, x, y) = \hat{V}(t, F_E, F_G)$, recordando que se utilizou, neste capítulo, a notação $x = S_E$ e $y = S_G$ e omitindo os argumentos, as derivadas parciais de primeira ordem de \hat{V} são dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - rxe^{r(T-t)} \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_E} - rye^{r(T-t)} \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_G}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_E} e^{r(T-t)}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_G} e^{r(T-t)}. \quad (4.15)$$

Substituindo $\frac{\partial V}{\partial x}$ e $\frac{\partial V}{\partial y}$ em (4.6) por, respectivamente, (4.14) e (4.15), obtém-se

$$V(t, x, y) = \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_E} e^{r(T-t)} x + \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_G} e^{r(T-t)} y. \quad (4.16)$$

Utilizando as relações $F_E = xe^{r(T-t)}$ e $F_G = ye^{r(T-t)}$, vem que a equação (4.16) é equivalente a

$$\hat{V}(t, F_E, F_G) = \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_E}(t, F_E, F_G) F_E + \frac{\partial \hat{V}}{\partial F_G}(t, F_E, F_G) F_G. \quad (4.17)$$

Assim, podemos simplificar a expressão de (4.13) através de (4.17), obtendo-se

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - r\hat{V}. \quad (4.18)$$

Voltando agora à EDP (4.12) e substituindo (4.18) e as derivadas parciais de segunda ordem de V , temos a nova EDP

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(t, F_E, F_G) - r\hat{V}(t, F_E, F_G) + \frac{1}{2}\sigma_x^2 F_E^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F_E^2}(t, F_E, F_G) \\ & + \frac{1}{2}\sigma_y^2 F_G^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F_G^2}(t, F_E, F_G) + \rho\sigma_x\sigma_y F_E F_G \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F_E \partial F_G}(t, F_E, F_G). \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.2.3. Fórmula fechada

Consideremos que estamos perante opções *call spark spread*, ou seja, $C_{SS}(t, F_E, F_G) = \hat{V}(t, F_E, F_G)$. Assim, a EDP (4.19) passa a ser escrita na seguinte forma:

$$0 = \frac{\partial C_{SS}}{\partial t}(t, F_E, F_G) - rC_{SS}(t, F_E, F_G) + \frac{1}{2}\sigma_x^2 F_E^2 \frac{\partial^2 C_{SS}}{\partial F_E^2}(t, F_E, F_G) + \frac{1}{2}\sigma_y^2 F_G^2 \frac{\partial^2 C_{SS}}{\partial F_G^2}(t, F_E, F_G) + \rho\sigma_x\sigma_y F_E F_G \frac{\partial^2 C_{SS}}{\partial F_E \partial F_G}(t, F_E, F_G), \quad (4.20)$$

à qual se associa a condição final

$$C_{SS}(T, F_E, F_G) = \max\{F_E - kF_G, 0\}. \quad (4.21)$$

Para resolver este problema de valor final (4.20)–(4.21) começa-se por converter a equação (4.20) numa equação com coeficientes constantes. Para isso, são feitas as seguintes mudanças de variável:

$$t = T - \tau, \quad F_E = ke^w, \quad F_G = e^z \quad \text{e} \quad C_{SS}(t, F_E, F_G) = kv(\tau, w, z). \quad (4.22)$$

Note-se que com estas mudanças de variável, F_E e F_G tomam valores positivos. Ora, como já foi referido, uma das vantagens de utilizar os contratos futuros enquanto activos subjacentes reside precisamente no facto destes não assumirem valores nulos ou negativos.

Após as mudanças de variável, obtemos a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, w, z) + rv(\tau, w, z) &= \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(\tau, w, z) + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\tau, w, z) + \rho\sigma_x\sigma_y \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z}(\tau, w, z) \\ &\quad - \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial v}{\partial w}(\tau, w, z) - \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial v}{\partial z}(\tau, w, z). \end{aligned} \quad (4.23)$$

A condição final passa a ser condição inicial (uma vez que $t = T$ corresponde a $\tau = 0$)

$$v(0, w, z) = \max\{e^w - e^z, 0\}.$$

Para converter esta equação na forma canónica associada às equações diferenciais com derivadas parciais de segunda ordem lineares, faz-se mais uma mudança de variável, desta vez apenas na variável dependente v , dada por

$$v(\tau, w, z) = e^{\alpha w + \beta z + \gamma \tau} u(\tau, w, z). \quad (4.24)$$

Fazendo a substituição adequada em cada um dos termos da equação (4.23), verifica-se que os termos $\frac{\partial u}{\partial w}(\tau, w, z)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(\tau, w, z)$ e $u(\tau, w, z)$ se anulam escolhendo α , β e γ a satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \gamma + r = -\frac{\sigma_x^2}{2}\alpha - \frac{\sigma_y^2}{2}\beta + \rho\sigma_x\sigma_y\alpha\beta + \frac{\sigma_x^2}{2}\alpha^2 + \frac{\sigma_y^2}{2}\beta^2, \\ 0 = -\frac{\sigma_x^2}{2} + \rho\sigma_x\sigma_y\beta + \sigma_x^2\alpha, \\ 0 = -\frac{\sigma_y^2}{2} + \rho\sigma_x\sigma_y\alpha + \sigma_y^2\beta, \end{cases}$$

cuja solução única é

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 - \rho^2}, \\ \beta = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{1 - \rho^2}, \\ \gamma = -\frac{\sigma^2}{8(1 - \rho^2)} - r. \end{cases} \quad (4.25)$$

onde $\sigma^2 = \sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$. Desta forma, a equação (4.23) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, w, z) = \frac{1}{2}\sigma_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}(\tau, w, z) + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\tau, w, z) + \rho\sigma_x\sigma_y \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial z}(\tau, w, z). \quad (4.26)$$

Observando a equação anterior e supondo que $|\rho| < 1$, ou seja, supondo que não existe correlação perfeita entre os dois processos de Wiener, verificamos que se trata de uma equação diferencial com derivadas parciais linear de segunda ordem e elíptica, uma vez que o seu discriminante é negativo

$$\frac{1}{4}\sigma_x^2\sigma_y^2(\rho^2 - 1) < 0.$$

Finalmente, para converter a equação (4.26) na sua forma canónica, são necessários dois conjuntos de mudanças de variável para o par (w, z) . Essas mudanças de variável encontram-se já estudadas e tabeladas na literatura (ver, por exemplo, [14] ou [20]). Começa-se por fazer as substituições

$$\begin{cases} \delta = z - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2}i)w, \\ \varepsilon = z - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2}i)w, \end{cases} \quad (4.27)$$

e, depois, para manter a transformação real, aplicam-se ainda as substituições

$$\begin{cases} \xi = \delta + \varepsilon = 2z - 2\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}w, \\ \eta = i(\delta - \varepsilon) = 2\sqrt{1 - \rho^2} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}w. \end{cases} \quad (4.28)$$

passando assim de (w, z) para (δ, ε) e depois para (ξ, η) . Efectuando as mudanças de variável (4.27) e (4.28) e ainda a mudança de τ para λ dada por

$$\lambda = 2\sigma_y^2(1 - \rho^2)\tau, \quad (4.29)$$

chega-se à EDP na forma canónica:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}(\lambda, \xi, \eta) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\lambda, \xi, \eta) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\lambda, \xi, \eta), \quad \lambda \geq 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

A condição inicial passa a ser dada por

$$u(0, \xi, \eta) = \max \left\{ e^{-\frac{\beta}{2}\xi + \frac{(1-\alpha)\frac{\sigma_x}{\sigma_y} - 2\rho\beta}{2\sqrt{1-\rho^2}}\eta} - e^{\frac{1-\beta}{2}\xi + \frac{2\rho(1-\beta) - \alpha}{2\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\eta}, 0 \right\}. \quad (4.31)$$

Refira-se que a equação (4.30) é a equação do calor para uma determinada função $u(\lambda, \xi, \eta)$ de duas variáveis espaciais e uma temporal. A fórmula de Black-Scholes também se pode deduzir da solução da equação do calor mas apenas para uma variável espacial.

Da teoria das equações diferenciais [10], sabe-se que qualquer problema de valor inicial em \mathbb{R}^n da forma

$$\begin{cases} u_t(t, x) - k\Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

em que k é um escalar e $\Delta u(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t, x)$, tem solução geral dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4kt}} u_0(s) ds.$$

Visto que $u(0, \xi, \eta)$ satisfaz as condições que garantem a unicidade da solução (ver [10]), vem que a solução única do problema de valor inicial associado a (4.30) e (4.31) é dada por

$$\begin{aligned} u(\lambda, \xi, \eta) = & \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left\{ e^{-\frac{\beta}{2}r + \frac{(1-\alpha)\frac{\sigma_x}{\sigma_y} - 2\rho\beta}{2\sqrt{1-\rho^2}}s} - e^{\frac{1-\beta}{2}r + \frac{2\rho(1-\beta) - \alpha}{2\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}s}, 0 \right\} \\ & \times e^{-\frac{(\xi-r)^2 + (\eta-s)^2}{4\lambda}} dr ds. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Calculando este integral duplo (4.32) e regressando às variáveis independentes iniciais (t, F_E, F_G) , através das mudanças de variáveis (4.29), (4.28), (4.24) e (4.22) obtém-se uma fórmula fechada para o valor das opções *call spark spread* C_{SS} . Essa fórmula é dada por

$$C_{SS}(t, F_E^{t,T}, F_G^{t,T}, k) = e^{-r(T-t)} \left(F_E^{t,T} N(d_1^*) - k F_G^{t,T} N(d_2^*) \right), \quad (4.33)$$

em que

$$d_1^* = \frac{\ln(F_E^{t,T}/kF_G^{t,T}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2^* = d_1^* - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\sigma^2 = \sigma_E^2 - 2\sigma_E\sigma_G\rho + \sigma_G^2.$$

A prova pode ser feita mostrando que (4.33) satisfaz a EDP (4.20), a condição final (4.21) e as respectivas condições de fronteira. Tal como foi mencionado na modelação de Black-Scholes, também aqui as condições de fronteira não foram utilizadas na dedução da fórmula, daí não terem sido apresentadas neste trabalho².

Para o caso das opções *put*, a fórmula fechada para o seu preço P_{SS} pode deduzir-se de forma análoga ao das opções *call* ou utilizando a relação de paridade *put-call* apresentada na subsecção seguinte. O preço das opções *spark spread put* é, então, dado por

$$P_{SS}(t, F_E^{t,T}, F_G^{t,T}, k) = e^{-r(T-t)} \left(kF_G^{t,T} N(-d_2^*) - F_E^{t,T} N(-d_1^*) \right). \quad (4.34)$$

4.2.4. Paridade put-call

A relação de paridade *put-call*, já mencionada, para opções europeias *spark spread* é, omitindo os argumentos das funções, dada por

$$C_{SS} = P_{SS} + e^{-r(T-t)}(F_E - kF_G), \quad (4.35)$$

cuja prova (ver [7]) utiliza, obviamente, as mesmas hipóteses que foram utilizadas para fazer a modelação das opções neste capítulo (entre elas, por exemplo, supõe-se a convergência dos preços a prazo para os preços à vista).

4.3. Testes numéricos para opções spark spread

Uma vez que as opções *spark spread* são transaccionadas apenas OTC, o acesso a qualquer tipo de dados históricos associado a estas opções é extremamente restrito, não tendo sido possível utilizar dados empíricos relativos aos preços das opções para os testes numéricos deste capítulo. Ainda assim, são apresentados alguns resultados ligados à estimação de parâmetros e análise de sensibilidade.

Para os testes numéricos apresentados nesta subsecção relativos a opções *spark spread*, foram utilizados os contratos de futuros mensais PJM sobre electricidade *on-*

²As condições fronteira para opções *spark spread* são discutidas em [7].

peak (cotados em \$/MWh)³. Definimos o gás natural como o combustível gerador associado a estas opções e utilizámos os contratos de futuros mensais sobre gás natural Henry Hub (cotados em \$/mmBtu). Ambos os tipos de contratos de futuros são transaccionados nos mercados energéticos americanos. A taxa de juro utilizada foi a taxa anual $r = 0.12\%$ associada aos bilhetes de tesouro americanos a 1 ano (dados retirados de <http://www.federalreserve.gov> em 13/08/2013).

4.3.1. Estimação das volatilidades e do coeficiente de correlação

Recorrendo à função logarítmica, de forma análoga à utilizada na Secção 3.3, estimámos a volatilidade inerente ao preço da electricidade e do gás natural associada a estes contratos (ver Tabela 4.1).

	Volatilidade anual $\hat{\sigma}$	
	Preços à vista	Preços a prazo
PJM	507.41%	33.00%
Henry Hub	26.30%	33.31%

Tabela 4.1: Estimativas da volatilidade anual para os preços (à vista e a prazo) da electricidade e do gás natural utilizando as cotações observadas durante o mês de Julho de 2013.

Constata-se que as volatilidades estimadas são bastante distintas nos dois mercados da electricidade (à vista e a prazo), o que vai ao encontro do que foi observado nas estimações da Subsecção 3.3.1). Tal disparidade não se verifica no caso dos preços do gás natural. Uma vez que a modelação deduzida anteriormente atribui preço às opções através dos preços dos contactos futuros, usaremos, daqui em diante, $\hat{\sigma}_E = 33\%$ para caracterizar os futuros sobre a energia eléctrica PJM e $\hat{\sigma}_G = 33.31\%$ para os contratos sobre o gás natural.

Outro parâmetro necessário para atribuir o preço às opções *spark spread* é o coeficiente de correlação ρ . Este pode ser estimado recorrendo à expressão dada por

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}}, \quad (4.36)$$

em que u e v representam os vectores dos retornos associados a cada uma das séries de preço e \bar{u} e \bar{v} as suas médias aritméticas.

³Refira-se que o preço da energia eléctrica PJM (à vista) subjacente a esses contratos não toma valores negativos.

Utilizando, uma vez mais, as observações do mês de Julho de 2013 para os preços dos futuros sobre as duas *commodities*, os seus retornos e a fórmula (4.36), obtivemos uma estimativa do coeficiente de correlação dada por $\hat{\rho} = 0.4886$. Este valor indica a existência de uma relação positiva entre os movimentos de preço nas duas mercadorias.

4.3.2. Estimação do valor das opções

De seguida, são apresentados os valores dos preços para as opções *spark spread* utilizando as fórmulas (4.33) e (4.34), as estimativas $\hat{\sigma}_E$, $\hat{\sigma}_G$ e $\hat{\rho}$, e fazendo variar alguns dos parâmetros mais relevantes destas fórmulas.

Maturidade das opções

O comportamento evidenciado na Figura 4.1 em que se varia a maturidade das opções, vai ao encontro daquele que se verifica no preço das opções *plain vanilla* sobre um activo genérico. Nessas opções, tal como é referido em [30], a sua derivada parcial em ordem a t (conhecida por teta) é geralmente negativa. Ou seja, à medida que o tempo de vida de uma opção se aproxima da sua data de exercício, a opção tende a ficar cada vez menos valiosa.

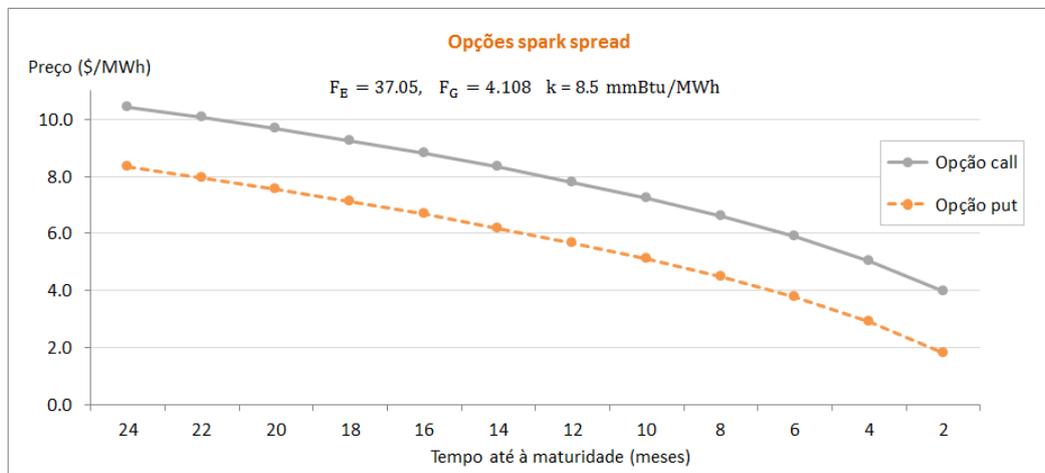


Figura 4.1: Representação gráfica dos preços das opções *spark spread, call* e *put*, em função do tempo até à maturidade.

Correlação dos preços

Procuramos também observar qual o impacto da correlação ρ entre as séries dos retornos das séries de futuros das duas *commodities* nos preços das opções *spark spread*. A Figura 4.2 mostra que o preço, tanto de opções *call* como *put*, decresce

4.3 Testes numéricos para opções spark spread

quando ρ aumenta. Para além disso, uma das curvas é precisamente uma translação vertical da outra, o que está de acordo com o facto de se ter $\frac{\partial C_{SS}}{\partial \rho} = \frac{\partial P_{SS}}{\partial \rho}$, algo que se pode provar recorrendo à relação de paridade *put-call* para opções *spark spread* (4.35).

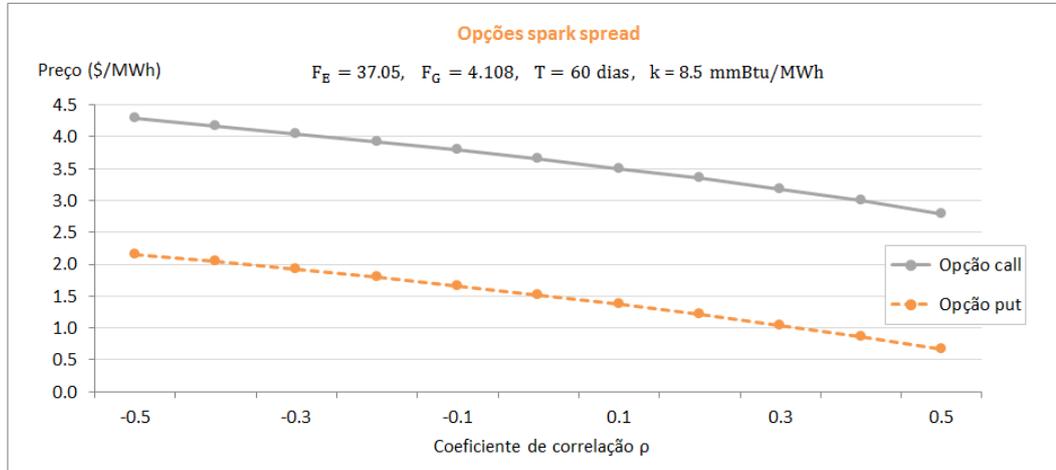


Figura 4.2: Alteração dos preços das opções *spark spread call* e *put* para diferentes valores de correlação ρ .

Heat rate

Os valores da *heat rate* dependem não só do combustível gerador utilizado como também do tipo de central eléctrica que gera a energia. No caso de centrais eléctricas que funcionam a gás natural, os valores podem variar entre 7 mmBtu/MWh (para as centrais de produção mais recentes e eficientes) e um máximo de cerca de 15 mmBtu/MWh (ver Figura 4.3).

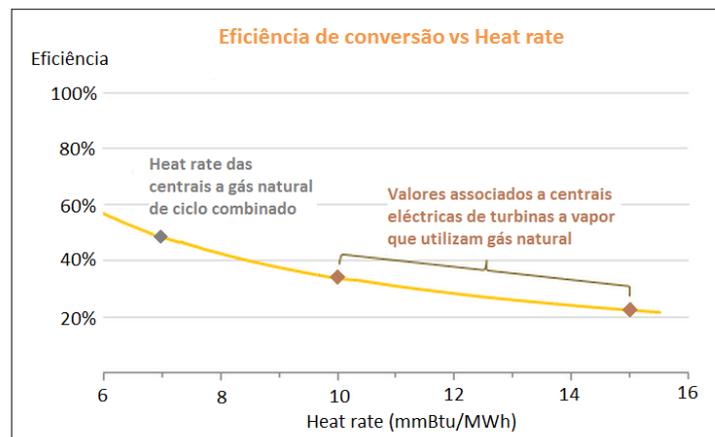


Figura 4.3: Gama de valores da *heat rate* associados às centrais de produção eléctrica a gás natural (adaptação de gráfico retirado de <http://www.eia.gov> em 14/8/2013).

Analisando a Figura 4.4, verifica-se que o valor das opções *call* diminui com o aumento da *heat rate*, o que é intuitivo, uma vez que, se a eficiência com que a energia eléctrica é produzida diminuir, os custos de produção serão maiores e o valor do *spark spread* associado será menor.

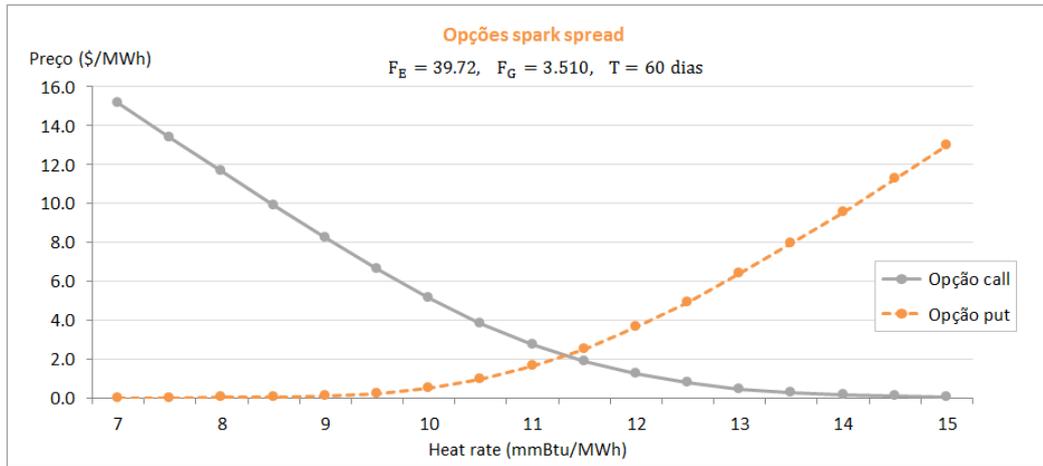


Figura 4.4: Alteração dos preços das opções *spark spread*, *call* e *put*, com a variação da *heat rate*.

Repare-se que a tendência anterior é causada pelo facto da derivada parcial em ordem à *heat rate* k , dada por

$$\frac{\partial C_{SS}}{\partial k}(t, F_E, F_G, k) = -e^{-r(T-t)} F_G N(d_2^*),$$

ser não positiva (ou, no caso das *puts*, ser não negativa).

Volatilidade

Por último, verifica-se que, o valor das opções *spark spread call*, cresce com o aumento da volatilidade de qualquer um dos contratos de futuros subjacentes (ver Figura 4.5), sendo que o mesmo acontece para as opções *put*.

Este comportamento deve-se à combinação de dois factores. O primeiro reside no facto do detentor de uma opção *call* ou *put* limitar as suas perdas ao valor pago pela opção. Tal acontece porque, tendo o investidor uma posição longa sobre a opção, o seu ganho na maturidade nunca é negativo. O segundo factor está relacionado com a maior probabilidade de ocorrência de grandes oscilações no preço resultantes de uma maior volatilidade. Portanto, em suma, uma maior volatilidade traduz-se numa possibilidade de obter maiores ganhos (na maturidade) e consequentemente, o valor da opção deve reflectir essa tendência.

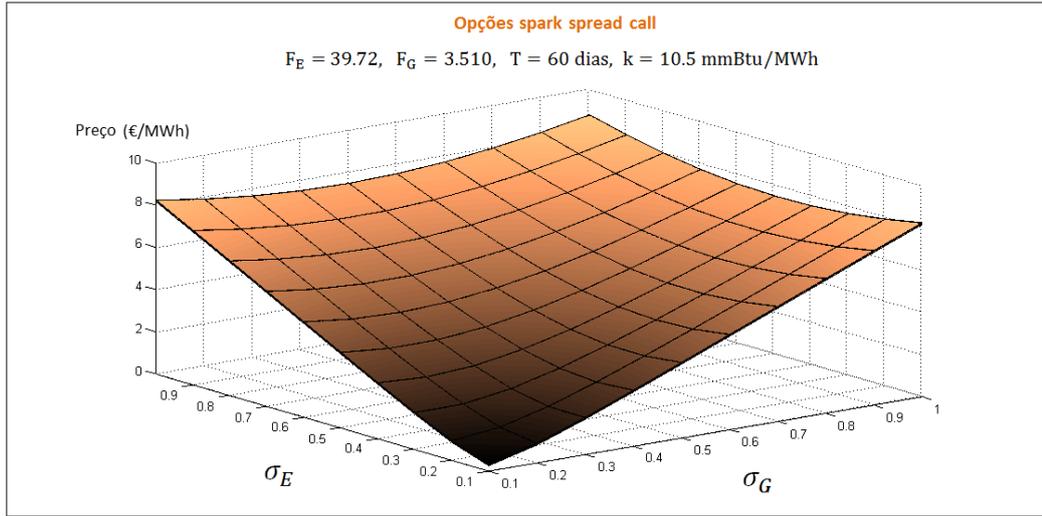


Figura 4.5: Alteração dos preços das opções *spark spread call* com a variação das volatilidades associadas aos futuros sobre electricidade e sobre gás natural.

Comportamento idêntico se verifica para o valor das opções *spark spread* dado pelas fórmulas (4.33) ou (4.34). Por outras palavras, se a volatilidade σ aumentar, os preços C_{SS} e P_{SS} deverão também aumentar. Matematicamente, a justificação para este comportamento reside na não negatividade da derivada parcial em ordem σ dada por

$$\frac{\partial C_{SS}}{\partial \sigma}(t, F_E, F_G, k) = \frac{\partial P_{SS}}{\partial \sigma}(t, F_E, F_G, k) = e^{-r(T-t)} n(d_1^*) F_E \sqrt{T-t},$$

em que $n(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$.

Note-se que esta análise não significa que, aumentando apenas σ_E ou σ_G , o valor das opções suba, uma vez que a expressão para σ é dada por $\sqrt{\sigma_E^2 - 2\sigma_E\sigma_G\rho + \sigma_G^2}$.

4.3.3. Limitações do modelo

Para a modelação do preço de opções *spark spread*, a hipótese que talvez tenha mais relevância e que, na prática, não se verifica é a existência da relação de equilíbrio

$$F_E = S_E e^{r(T-t)} \quad (4.37)$$

entre os preços à vista e a prazo no sector da electricidade. Veja-se que, na dedução das fórmulas fechadas para o preço das opções *spark spread*, esta relação foi usada de forma explícita apenas como instrumento para fazer a passagem da electricidade como subjacente aos respectivos futuros. Esta afirmação poderia conduzir à ideia errada de que, deduzindo a modelação apresentada neste capítulo directamente a

partir dos contratos futuros (algo que, tal como no modelo de Black, é possível de fazer), essa passagem não seria necessária e, por isso, não seria exigida a satisfação de (4.37).

Outra perspectiva relevante sobre as limitações do modelo prende-se o facto de, utilizando movimentos geométricos Brownianos para descrever os processos estocásticos dos preços à vista e a prazo da electricidade, não serem captados alguns dos traços que caracterizam os preços da electricidade nos mercados energéticos, como os picos de preço ou a reversão à média. Todavia, nos mercados da electricidade, esta é uma observação que faz mais sentido quando tecida acerca dos preços à vista. Pois, tal como já foi referido na Subsecção 3.3.4, as séries de preços a prazo apresentam comportamentos diferentes em relação aos preços *spot*, sendo que algumas das características mencionadas não se observam ou são menos evidentes.

A reversão à média dos preços mencionada no parágrafo anterior poderia ser incluída na modelação de opções *spark spread* através da suposição de que os preços dos futuros seguem processos estocásticos com reversão à média (em vez de se supor seguirem movimentos geométricos Brownianos da forma (4.3)), ou seja, de que

$$\begin{aligned} dF_E &= \kappa_E \left(\mu_E(t) - \ln(F_E) \right) F_E dt + \sigma_E(t) F_E dX^1, \\ dF_G &= \kappa_G \left(\mu_G(t) - \ln(F_G) \right) F_G dt + \sigma_G(t) F_G dX^2, \end{aligned} \tag{4.38}$$

em que $\sigma_E(t)$ e $\sigma_G(t)$ são funções do tempo t , $\mu_E(t)$ e $\mu_G(t)$ são médias de longo prazo, κ_E e κ_G são os coeficientes de reversão à média e X^1 e X^2 são dois processos de Wiener com correlação ρ . Como é mostrado por Deng *et al.* em [8], a diferença em relação às expressões para o preço de opções *call* e *put* obtidas na Secção 4.2 reside na expressão para σ^2 que, assim, passaria também a ser função do tempo t .

Por fim, deve apenas referir-se que esta análise (das limitações ou lacunas do modelo exposto no trabalho) foi feita apenas em relação à electricidade, a qual constitui apenas um dos dois activos subjacentes às opções *spark spread*. Sobre o outro activo subjacente, a análise está obviamente dependente de qual for o combustível gerador utilizado, pelo que exigiria um estudo mais aprofundado em relação a essa mesma *commodity* e aos seus preços. No entanto, se considerarmos o gás natural como o combustível gerador, à excepção da sazonalidade e da reversão à média nos preços [19], nenhuma das outras especificidades ou problemas aqui mencionados parece colocar-se.

Capítulo 5

Conclusão

O simples facto da electricidade não ser um bem armazenável — muito provavelmente a sua característica mais marcante — aumenta a complexidade associada a qualquer modelação de preços que se pretenda fazer no contexto dos mercados energéticos. Tal característica causa a quebra de relações de equilíbrio verificadas noutros mercados e invalida muitas das metodologias, como operações de cobertura e argumentos de não arbitragem, utilizadas na avaliação de derivados financeiros.

Para além disso, a não armazenabilidade está também, directa ou indirectamente, relacionada com uma grande parte dos outros atributos da electricidade e dos seus preços (expostos no Capítulo 2), de que são exemplos a volatilidade extrema e os (contra-intuitivos) preços negativos. Caso existisse uma forma eficiente e viável de aplicação em larga escala para armazenar energia eléctrica, a ocorrência de preços negativos, provavelmente, deixaria de se verificar, uma vez que não existiria necessidade de fazer um ajuste quase instantâneo entre a oferta e a procura de electricidade. Por exemplo, no futuro, um crescimento acentuado do número e capacidade das centrais hidroeléctricas poderia tornar exequível o armazenamento real de energia eléctrica (mesmo que indirectamente). Algo desta natureza alteraria o perfil dos produtores de energia e as características dos mercados de electricidade.

Do estudo realizado ao longo deste trabalho, tornou-se também evidente que os preços da electricidade são influenciados por vários factores distintos, entre os quais os meteorológicos, sazonais, relacionados com a rede física de distribuição de energia, ou associados aos preços dos combustíveis.

Em termos de derivados financeiros, os mercados da electricidade apresentam um vasto leque de alternativas, não só em termos do tipo de contratos (*forwards*, futuros, opções, *swaps* e outros) mas também nas suas especificações em relação, principalmente, a volumes ou prazos de entrega. Desses contratos, aqueles que parecem apresentar maior popularidade junto de investidores e produtores de energia são os futuros sobre electricidade. No que às opções diz respeito, à semelhança de

outros sectores, existem opções sobre a electricidade e sobre contratos de futuros sobre ela mesma, sendo que uma grande parte das opções sobre electricidade são transaccionadas apenas no mercado OTC.

Na modelação propriamente dita, através de resultados numéricos sobre dados empíricos, concluiu-se que a aplicação das fórmulas de Black para opções europeias sobre futuros de electricidade não é tão descabida como à primeira vista poderia parecer. A sua utilização por parte de negociantes deste sector é prática frequente, principalmente devido à sua simplicidade de cálculo e interpretação e ao facto de determinar estimativas para o valor das opções relativamente próximas dos seus valores reais nos mercados. Esta observação é interessante, sobretudo, se tivermos em consideração todas as condicionantes na avaliação de derivados sobre energia eléctrica. Porém, isso deve-se, essencialmente, à disparidade de comportamentos que se observam entre os preços à vista da electricidade e os preços dos contratos futuros sobre a mesma.

De certa forma, na modelação do preço das opções *spark spread* procurou-se explorar este aspecto através do recurso aos contratos de futuros, neste caso sobre a electricidade e sobre o combustível gerador, para assim obter fórmulas fechadas para as opções de compra e de venda. Mas, como se referiu na Subsecção 4.3.3, a utilização de contratos de futuros como subjacente às opções acarreta a suposição de algumas hipóteses que na realidade não se verificam. Em particular, a suposição de convergência (com o aproximar da maturidade) entre os preços à vista e a prazo não é satisfeita.

A modelação aqui apresentada está ainda muito longe de conseguir assimilar e replicar o comportamento e especificidades associados aos mercados da electricidade, apesar de se ter deduzido as fórmulas para o preço das opções *spark spread* através de um análise intensiva a cada uma das hipóteses utilizadas e respectivas consequências nos métodos aplicados. Após vários anos de pesquisa e investigação por parte de muitos autores que estudam os mercados energéticos, ainda persiste a necessidade de encontrar modelos realistas para a dinâmica dos preços que abranjam as características únicas da electricidade e de desenvolver técnicas adequadas para a avaliação dos correspondentes derivados.

Bibliografia

- [1] E. I. Administration. *Derivatives and Risk Management in the Petroleum, Natural Gas, and Electricity Industries*. U.S. Department of Energy, Washington, 2002.
- [2] F. Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3:167–179, 1976.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, pages 637–654, 1976.
- [4] R. Carmona, M. Fehr, J. Hinz, and A. Porchet. Market design for emission trading schemes. *Siam Review*, 52:403–452, 2010.
- [5] R. Carmona and M. Ludkovski. Swing options. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 2009.
- [6] S. J. Deng. *Stochastic Models of Energy Commodity Prices and their Applications: Mean-Reversion with Jumps and Spikes*. University of California Energy Institute, California, 2000.
- [7] S. J. Deng, B. Johnson, and A. Sogomonian. Exotic electricity options and the valuation of electricity generation and transmission assets. *Decision Support Systems*, 30:383–392, 2001.
- [8] S. J. Deng and S. S. Oren. Electricity derivatives and risk management. *Energy*, 31:940–953, 2006.
- [9] P. Deyna and M. Hultstrom. Pricing options on the nordic power exchange nord pool. Master’s thesis, Stockholm School of Economics, Sweden, 2007.
- [10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 2002.

- [11] A. Eydeland and H. Geman. Fundamentals of electricity derivatives. *Energy Modelling and the Management of Uncertainty*, pages 35–43, 1999.
- [12] A. Eydeland and K. Wolyniec. *Energy and Power Risk Management: New Developments in Modeling, Pricing, and Hedging*. Wiley, New Jersey, 2003.
- [13] P. Falbo, M. Fattore, and S. Stefani. A new index for electricity spot markets. *Energy Policy*, 38:2739–2750, 2010.
- [14] P. R. Garabedian. *Partial Differential Equations*. Wiley, New York, 1964.
- [15] H. Geman. *Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*. Wiley, West Sussex, 2005.
- [16] E. P. Haug. Practical valuation of power derivatives. *Wilmott Magazine*, 2003.
- [17] E. Hjalmarrsson. Does the black-scholes formula work for electricity markets? a nonparametric approach. *Working Papers in Economics*, 2003.
- [18] M. Hosseini. *Stochastic Modeling of Oil Futures Prices*. Department of Mathematics of Uppsala University, Uppsala, 2007.
- [19] M. Hsu. Spark spread options are hot! *The Electricity Journal*, 11:28–39, 1998.
- [20] E. Kersalé. *Analytic Solutions of Partial Differential Equations*. University of Leeds, Leeds, 2004.
- [21] W. Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33:177–186, 1978.
- [22] R. C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, pages 141–183, 1973.
- [23] P. Pavlatka. Option derivatives in electricity hedging. *Acta Polytechnica*, 50, 2010.
- [24] D. Pilipovic. *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*. McGraw-Hill, 2007.
- [25] B. Ram. *Engineering Mathematics*. Pearson Education, India, 2009.
- [26] S. Schneider. Power spot price models with negative prices. *The Journal of Energy Markets*, 4:77–102, 2012.

- [27] S. E. Schwartz. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52:923–973, 1997.
- [28] M. Sewalt and C. De Jong. Negative prices in electricity markets. *Commodities Now*, 7:74–77, 2003.
- [29] I. Vehvilainen. Basics of electricity derivative pricing in competitive markets. *Applied Mathematical Finance*, 9:45–60, 2002.
- [30] L. N. Vicente. *Introdução à Matemática Financeira*. Departamento de Matemática da F.C.T.U.C., Coimbra, 2012.
- [31] R. Weron. Energy price risk management. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 285:127–134, 2000.
- [32] R. Weron. Market price of risk implied by asian-style electricity options. *Energy Economics*, 2005.
- [33] R. Weron, M. Bierbrauer, and S. Trück. Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336:39–48, 2004.
- [34] M. Wilhelm. *Modeling, pricing and risk management of power derivatives*. PhD thesis, ETH Zurich, Switzerland, 2007.