

**Modelação e simulação de fluidos
incompressíveis em domínios móveis**

Joana Filipa dos Santos Silva Fernandes



Modelação e simulação de fluidos incompressíveis em domínios móveis

Joana Filipa dos Santos Silva Fernandes

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**
Área de Especialização em **Análise Aplicada e Matemática Computacional**

Júri

Presidente: Doutor Adérito Araújo
Orientador: Doutor Gonçalo Pena
Vogal: Doutora Sílvia Barbeiro

Data: Julho de 2014

Resumo

Nesta dissertação, o objetivo principal é a modelação e simulação numérica das equações de Navier-Stokes para descrever fluidos incompressíveis em domínios móveis.

O trabalho divide-se em três etapas principais: a derivação das equações, a metodologia numérica e a sua simulação num exemplo prático.

Na primeira fase, fazemos a dedução das equações que assenta em dois princípios base - as leis da conservação da massa e da conservação do momento linear - e no teorema de transporte de Reynolds.

A segunda fase inicia-se com uma introdução nos espaços de funções que irão ser utilizados ao longo do texto. De seguida, obtemos a formulação fraca do problema derivado da primeira fase do trabalho. Fazemos, ainda, uma apresentação do método dos elementos finitos que é útil para a discretização numérica do problema. Nesta etapa, distinguimos dois casos possíveis para a resolução numérica das equações de Navier-Stokes: o caso de um domínio não móvel e o caso de um domínio móvel. Para cada um dos casos, apresentamos a discretização no tempo e no espaço.

Por fim, desenvolvemos um caso prático, recorrendo ao software FreeFem++, conjugando os sub-problemas desenvolvidos ao longo do texto - a discretização da função ALE, do tempo e do espaço.

Palavras Chave: Equações de Navier-Stokes, fluidos incompressíveis, domínios móveis, método dos elementos finitos, diferenças finitas, FreeFem++.

Abstract

In this thesis, the main subject is to model and numerically simulate the incompressible Navier-Stokes equations in moving domains.

This work is divided in three parts: the derivation of the equations, the numerical methodology and its simulation on a practical situation.

First, we deduce the Navier-Stokes equations using the mass conservation law, the conservation of linear momentum and the Reynolds transport theorem.

Second, we initiate with an introduction in functional spaces which will be used throughout the text. Then we obtain a weak formulation of the problem derived in the first phase of this work. In addition, we present the finite element method which is used later for the numerical discretization of the problem. Two possible cases for the numerical solution of the Navier-Stokes equations are considered: a fixed domain and a moving domain case. We present temporal and spatial discretization for both cases using finite differences for the temporal discretization and finite elements for the space discretization.

Finally, we simulate a practical case, using the FreeFem++ software.

Keywords: Navier-Stokes equations, incompressible flows, moving domains, finite element method, finite differences, FreeFem++.

Agradecimentos

A realização deste trabalho, que envolve empenho e dedicação, não seria possível sem a presença de algumas pessoas durante este projeto pela sua ajuda, apoio e conforto.

Ao Professor Gonçalo Pena que aceitou o desafio de estudar este assunto. Sem ele não teria conseguido chegar ao fim desta etapa. A confiança, o incentivo e as suas sugestões foram cruciais durante este caminho percorrido.

Ao Professor José Augusto Ferreira que me permitiu aprofundar conhecimentos nesta área e por ter acreditado na sua realização.

À Professora Sílvia Barbeiro e à Professora Ercília Sousa pelos conhecimentos adquiridos em disciplinas cruciais para este trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra por ter tornado possível este trabalho pelas condições prestadas.

Um grande agradecimento aos meus pais, irmã e avó, pelo amor incondicional e apoio nas alturas de frustração.

Ao João, amor que esteve sempre presente durante esta longa etapa e que acreditou e apoiou sempre.

À Inês, Rita, Solange, Cátia e ao Miguel pela amizade e apoio.

Ao Miguel e Cláudio pela ajuda disponibilizada.

E à Zarah pelo companheirismo e amor.

Conteúdo

Nomenclatura	viii
Introdução	ix
1 Equações de Navier-Stokes num domínio móvel	1
1.1 Sistema de coordenadas	1
1.1.1 Sistema de coordenadas euleriano e lagrangeano	1
1.1.2 Sistema de coordenadas ALE	3
1.2 Quantidades associadas ao fluido	4
1.2.1 Campo vetorial da velocidade	5
1.2.2 A derivada material	5
1.2.3 Campo vetorial da aceleração	7
1.2.4 O gradiente de deformação	7
1.3 Teorema de Transporte de Reynolds	7
1.4 Equação da Conservação da Massa	10
1.5 Equação do Momento	11
1.6 Equações de Navier-Stokes	13
2 Metodologia numérica	17
2.1 Espaços de funções	17
2.1.1 Espaços de funções contínuas	18
2.1.2 Espaços de funções integráveis	18
2.1.3 Espaços de Sobolev	19
2.2 Formulação fraca do problema contínuo	20
2.3 Espaços de elementos finitos	22
2.4 Discretização numérica	23
2.4.1 Domínio fixo	24
2.4.2 Domínio móvel	29
3 Simulação Numérica	37
Conclusão	38
Bibliografia	44

Nomenclatura

$n = 2, 3$	dimensão do domínio
$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$	base canónica de \mathbb{R}^n
$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	campo das funções escalares
$\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$	campo das funções vectoriais
$\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$	campo das funções tensoriais
$T = [T_{ij}]_{i,j=1}^n$	componente da linha i e coluna j da matriz T , com $i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{e}_i$	vetor em \mathbb{R}^n
f_i	i -ésima componente de \mathbf{f}
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	domínio aberto e limitado
ν	vetor normal unitário exterior à fronteira
$[f]$	unidade de medida de f .

Introdução

Entende-se por *fluido* uma substância que se deforma continuamente ao longo do tempo quando lhe é aplicada uma força.

Sendo mecânica de fluidos [17] uma área de difícil estudo, a Matemática envolvida não é, por vezes, de fácil manipulação. Assim sendo, os modelos matemáticos são um tanto desafiadores.

De entre os modelos matemáticos existentes, as equações de Navier-Stokes são dos mais conhecidos. Estas foram derivadas no século XIX (cerca de 1840) por Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes que desenvolveram equações diferenciais que descrevem o movimento de substâncias fluidas como líquidos ou gases, permitindo calcular a sua velocidade e pressão. Estas foram derivadas com base em leis de conservação e aproximações de primeira ordem. O leitor mais interessado poderá consultar [2] e [3].

Hoje em dia, estas equações modelam inúmeros fenómenos físicos presentes no nosso dia-a-dia, entre os quais distinguem-se a modelação do clima, das correntes oceânicas, de fluxos de água em oceanos, rios ou lagos, do movimento das estrelas, do fluxo do ar dos automóveis ou aviões, entre outros e, por isso, surge o interesse pelas equações de Navier-Stokes.

Para situações mais complexas, as soluções destes modelos são aproximadas através da ajuda de software apropriado, campo denominado *Dinâmica de Fluidos Computacional*.

A derivação das equações de Navier-Stokes e os métodos numéricos envolvidos para simulação envolvem conhecimentos vastos da área da Análise. Assim, podem encontrar-se em [12], [13], [14], [15], [16] e [18] resultados necessários para todo este procedimento.

Equações de Navier-Stokes num domínio móvel

As equações de Navier-Stokes podem ser estudadas num domínio fixo Ω , onde podemos considerar os sistemas de coordenadas euleriano e lagrangeano, ou num domínio Ω_t que se pode alterar em cada instante de tempo t , onde consideramos o sistema de coordenadas euleriano-lagrangeano. No primeiro capítulo são, então, apresentados os três sistemas de coordenadas, onde são incluídas as vantagens e desvantagens de cada um deles. Note-se que o estudo realizado num domínio fixo é válido também para um domínio móvel, uma vez que em cada instante de tempo t temos um domínio (que pode ou não ser diferente do anterior). Neste caso, existe a necessidade de calcular as transformações efetuadas no domínio e, deste modo, a função ALE desempenha este papel. Podemos encontrar mais informações sobre estas abordagens em [1] e [5].

Como ponto de partida para derivar as equações de Navier-Stokes estão dois princípios base - as leis da conservação da massa e da conservação do momento linear. Adicionalmente o Teorema de transporte de Reynolds também é fulcral para a sua derivação. Estes aspetos são abordados no primeiro capítulo deste texto.

A existência e unicidade de solução das equações de Navier-Stokes é um aspeto que ainda hoje é discutido. O caso bidimensional já foi provado, mas o tridimensional ainda se encontra em aberto, ver [4] e [5].

Metodologia e simulação numérica

Derivadas as equações de Navier-Stokes, surge a necessidade de aplicar métodos numéricos aos dois casos de estudo - o caso de um domínio fixo e o caso de um domínio móvel - que permitam simular ambos.

O processo de discretização numérica é idêntico em ambos os casos. Destacam-se as diferenças finitas e o método dos elementos finitos para a resolução dos sub-problemas existentes para cada um dos casos - discretização temporal e espacial (ver [9], [10] e [11]). Este estudo é realizado no segundo capítulo, no qual é introduzido primeiramente espaços de funções necessários para a resolução das equações de Navier-Stokes na versão contínua: L^2 e H^1 . De seguida, para a versão discreta são escolhidos os espaços \mathbb{P}_2 e \mathbb{P}_1 para a velocidade e pressão, respetivamente. Esta escolha é baseada nos elementos de Taylor-Hood ($\mathbb{P}_k - \mathbb{P}_{k-1}$), ver [4].

No entanto, no caso em que o domínio é móvel, é necessário controlar as deformações do domínio. Para isso, necessitamos de calcular a função que faz este papel - a

função ALE. Esta é construída usando a técnica da extensão harmónica. Outras alternativas podem ser consultadas em [1] e [5].

No segundo capítulo podemos, ainda, encontrar simulações numéricas relativas aos sub-problemas resolvidos: o caso de um domínio fixo, o caso de um domínio móvel e a construção da função ALE. Estes resultados numéricos são efetuados recorrendo ao software FreeFem++ [19].

Finalmente, apresentamos, no terceiro capítulo, um exemplo de aplicação das equações de Navier-Stokes num domínio que sofre deformações, uma vez que pretendemos estudar as implicações que o movimento da cauda de um ser unicelular provoca na água. De modo a resolvermos este problema, com a ajuda, mais uma vez, do software FreeFem++, é necessário resolver o problema discretizado no capítulo dois. Outras aplicações podem ser encontradas em [2] e [6].

Capítulo 1

Equações de Navier-Stokes num domínio móvel

Neste capítulo, apresentamos a dedução das equações de Navier-Stokes para modelar o comportamento de um fluido num domínio móvel.

Na primeira parte do capítulo estudamos três sistemas de coordenadas que vamos considerar: o sistema de coordenadas euleriano, o lagrangeano e o euleriano-lagrangeano. Na segunda parte, estudamos a cinemática do meio contínuo, isto é, as propriedades do movimento num determinado domínio. A terceira parte incide na derivação das equações de Navier-Stokes que assenta em dois princípios base: as leis de conservação da massa e conservação do momento linear. O Teorema de Transporte de Reynolds também é um foco importante na derivação das equações em estudo.

1.1. Sistema de coordenadas

O movimento do fluido pode ser descrito por três tipos de sistemas de coordenadas: o *euleriano*, o *lagrangeano* e o *euleriano-lagrangeano* (de abreviação *ALE*).

1.1.1. Sistema de coordenadas euleriano e lagrangeano

O sistema de coordenadas *euleriano* devolve a posição de uma partícula de fluido (t, \mathbf{x}) , para $t \in I = [t_0, T]$, num domínio $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com o referencial fixo. Para facilitar a notação, vamos denotar Ω_{t_0} por Ω_0 .

Por outro lado, a abordagem *lagrangeana* descreve as deformações do domínio ocupado pelo fluido, analisando a sua evolução no tempo. Assim, dada uma partícula de fluido no instante inicial, o sistema de coordenadas descreve a trajetória desta mesma partícula no instante atual.

Para este sistema de coordenadas, vamos usar a família de funções \mathcal{L}_t que associa a cada posição \mathbf{x} de uma partícula de fluido num instante temporal $t \in I$ a um ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega_0$, onde Ω_0 é o domínio ocupado pelo fluido no instante inicial t_0 (denominado

por *configuração de referência*). Assim, vamos indicar pela aplicação

$$\mathcal{L}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t, \quad \hat{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}_t(\hat{\mathbf{x}})$$

a função lagrangeana \mathcal{L}_t no instante de tempo t , onde Ω_t é a porção de espaço ocupada pelo fluido no instante de tempo t (denominado por *configuração corrente*). A função \mathcal{L}_t deve ser contínua, bijetiva e invertível em $\overline{\Omega_0}$, sendo que a sua inversa \mathcal{L}_t^{-1} também deve ser contínua e bijetiva.

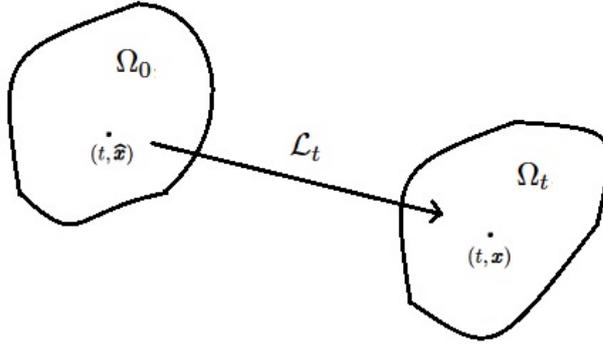


Figura 1.1: Trajetória de uma partícula de fluido no sistema de coordenadas lagrangeano.

Nota 1.1. Quando estamos a usar (t, \mathbf{x}) como variáveis independentes, estamos a referir-nos à partícula de fluido localizada em $\mathbf{x} \in \Omega_t$, ou seja, queremos analisar o que acontece num dado ponto $\mathbf{x} \in \Omega_t$ fixo no espaço (para um dado t).

Quando estamos a usar $(t, \hat{\mathbf{x}})$ como variáveis independentes, estamos a referir-nos à partícula de fluido que estava localizada na posição $\hat{\mathbf{x}}$, no instante t em questão. Assim, estamos interessados na trajetória $T_{\hat{\mathbf{x}}}$ desta partícula de fluido $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega_0$ definida por

$$T_{\hat{\mathbf{x}}} = \{(t, \mathbf{x}(t, \hat{\mathbf{x}})), t \in I\},$$

ou seja, queremos estudar a evolução (no tempo e no espaço) desta partícula de fluido.

Uma quantidade associada ao fluido pode ser descrita em função das variáveis eulerianas ou variáveis lagrangeanas. Quando for necessário fazer distinção, uma quantidade expressa em função das variáveis lagrangeanas é denotada com o símbolo “ $\hat{}$ ”, ou seja, se $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, então tem-se a igualdade $\hat{f}(t, \hat{\mathbf{x}}) = f(t, \mathbf{x})$, com $\mathbf{x} = \mathcal{L}_t(\hat{\mathbf{x}})$ e

$$I \times \Omega_t = \{(t, \mathbf{x}) : t \in I, \mathbf{x} \in \Omega_t\}.$$

Em alternativa, usamos $\hat{f} = f \circ \mathcal{L}_t$ ou $f = \hat{f} \circ \mathcal{L}_t^{-1}$, notando que a composição de funções apenas é aplicada às variáveis do espaço.

O símbolo ∇ é usado para denotar o gradiente relativamente à variável do espaço \mathbf{x} , enquanto que $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ denota o gradiente relativamente à variável lagrangeana $\hat{\mathbf{x}}$, ou seja,

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} \mathbf{e}_i.$$

Em certas situações, o sistema de coordenadas euleriano pode não ser praticável, uma vez que, fazendo variar o domínio Ω_t no instante t (por exemplo, deformando a fronteira do domínio), as coordenadas da partícula de fluido poderão nem pertencer ao domínio, ver Figura 1.2.

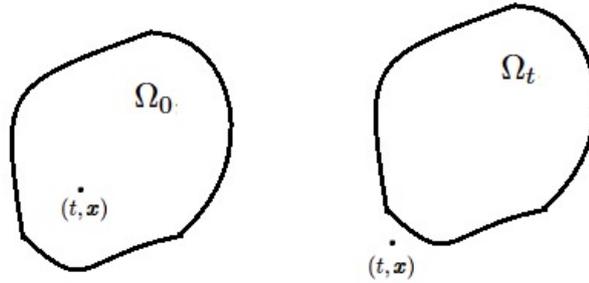


Figura 1.2: Coordenadas de uma partícula de fluido para $t = t_0$ (esquerda) e t qualquer (direita) no sistema de coordenadas euleriano.

Por outro lado, o sistema de coordenadas lagrangeano também poderá não ser adequado, em alguns casos, como o exemplo da Figura 1.3. Considerando o exemplo de uma artéria em que há entrada de fluxo na parte lateral esquerda da fronteira, a função lagrangeana poderá provocar deformações nessa parte da fronteira e na lateral direita. Por vezes, não pretendemos deformações nessas porções da fronteira. Surge, então, a necessidade de considerar um outro sistema de coordenadas - o euleriano-lagrangeano - que combine os sistemas de coordenadas anteriores.

1.1.2. Sistema de coordenadas ALE

O sistema de coordenadas ALE permite conjugar as duas ideias anteriores num sistema de coordenadas mais flexível.

Deste modo, para descrever o movimento do fluido num domínio móvel, vamos usar a família de funções \mathcal{A}_t que associa cada posição \mathbf{x} de uma partícula de fluido num instante temporal $t \in I$ a um ponto $\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega_0$. Assim, a função \mathcal{A}_t no instante de

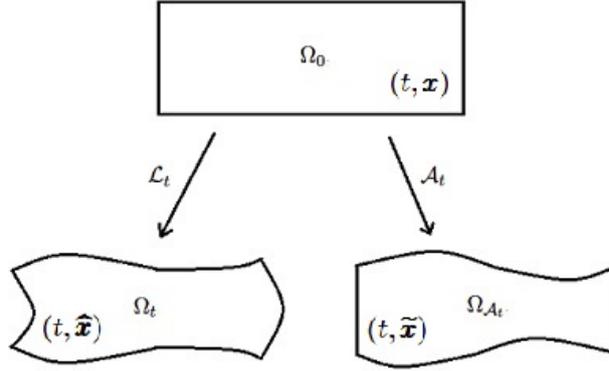


Figura 1.3: Comparação das duas abordagens: a lagrangeana (esquerda) e a ALE (direita).

tempo t será indicada pela aplicação

$$\mathcal{A}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}_t}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}_t(\tilde{\mathbf{x}}),$$

que dá as coordenadas eulerianas (t, \mathbf{x}) em função das coordenadas ALE $(t, \tilde{\mathbf{x}})$ e onde $\Omega_{\mathcal{A}_t} \equiv \mathcal{A}_t(\Omega_0) = \Omega_t$.

A função \mathcal{A}_t deve também ser contínua, bijetiva e invertível em $\overline{\Omega_0}$, sendo que a sua inversa \mathcal{A}_t^{-1} também deve ser contínua e bijetiva.

Quando necessária distinção, uma quantidade expressa em função das variáveis ALE será denotada com o símbolo “ $\tilde{}$ ”, ou seja, se $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, então tem-se a igualdade $\tilde{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}) = f(t, \mathbf{x})$, com $\mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\tilde{\mathbf{x}})$.

Em conclusão, o sistema de coordenadas ALE devolve as coordenadas de uma partícula de fluido num domínio que pode ser móvel, relativamente a um referencial fixo. Esta família de funções pode ser mais vantajosa, pelo facto de existir maior controlo na deformação da fronteira.

1.2. Quantidades associadas ao fluido

A dedução das equações de Navier-Stokes é feita usando o sistema de coordenadas lagrangeano e ALE. Para tal, vamos introduzir as quantidades cinemáticas no sistema de coordenadas lagrangeano. No entanto, algumas quantidades específicas (como, por exemplo, a velocidade do domínio) são introduzidas no sistema de coordenadas ALE.

1.2.1. Campo vetorial da velocidade

O campo vetorial da velocidade é a quantidade cinemática principal do nosso problema. Representamos o campo da velocidade do fluido por

$$\widehat{\mathbf{u}}(t, \widehat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \widehat{\mathbf{x}}). \quad (1.1)$$

nas coordenadas lagrangeanas. No sistema de coordenadas eulerianas, temos

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{u}}(t, \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{x})), \quad (1.2)$$

onde $\widehat{\mathbf{u}}$ representa o campo vetorial da velocidade do fluido, definindo a derivada no tempo ao longo da trajetória $T_{\widehat{\mathbf{x}}}$ da partícula de fluido localizada em $\widehat{\mathbf{x}}$.

Observação 1.1. *Seja $\widehat{\mathbf{u}}$ uma função vetorial contínua em I . Então, o movimento das partículas de fluido pode ser obtido resolvendo o seguinte problema de Cauchy:*

Para cada $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega_0$, queremos encontrar $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \widehat{\mathbf{x}})$ que satisfaça

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \widehat{\mathbf{x}}) = \widehat{\mathbf{u}}(t, \widehat{\mathbf{x}}), & t \in (t_0, T] \\ \mathbf{x}(t_0, \widehat{\mathbf{x}}) = \widehat{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Observação 1.2. *No sistema de coordenadas ALE, introduzimos um conceito análogo. O campo vetorial da velocidade do domínio que é representado por*

$$\widetilde{\mathbf{w}}(t, \widetilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \widetilde{\mathbf{x}}). \quad (1.3)$$

No sistema de coordenadas eulerianas, temos

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{w}}(t, \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})), \quad (1.4)$$

onde $\widetilde{\mathbf{w}}$ representa o campo vetorial da velocidade do domínio e, por isso, define a derivada no tempo ao longo da trajetória $T_{\widetilde{\mathbf{x}}}$ da partícula de fluido localizada em $\widetilde{\mathbf{x}}$.

1.2.2. A derivada material

Seja $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função vetorial com derivada contínua relativamente ao espaço e ao tempo. A sua derivada material em ordem ao tempo, que é denotada por $\frac{Df}{Dt}$, é definida pela derivada da função f em ordem ao tempo no sistema de

coordenadas lagrangeano, ou seja,

$$\frac{Df}{Dt} : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{Df}{Dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Uma vez que $\hat{f} = f \circ \mathcal{L}_t = f(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{x} = \mathcal{L}_t(\hat{\mathbf{x}})$, para $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega_0$ fixo, tem-se que

$$\frac{Df}{Dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}(t, \hat{\mathbf{x}})).$$

A derivada material representa a taxa de variação de f ao longo da trajetória $T_{\hat{\mathbf{x}}}$. Da definição anterior, prova-se o seguinte resultado.

Lema 1.1. *Sejam $\mathbf{u} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável a respeito de \mathbf{x} e t . Então,*

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (1.6)$$

Demonstração. De facto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (f \circ \mathcal{L}_t) \right] \circ \mathcal{L}_t^{-1} = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x}) \right] \circ \mathcal{L}_t^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \circ \mathcal{L}_t^{-1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \circ \mathcal{L}_t^{-1} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \end{aligned}$$

□

Observação 1.3. *O movimento para o qual se tem $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ é dito movimento estacionário.*

Observação 1.4. *Definimos, ainda, a derivada material no sistema de coordenadas ALE da seguinte forma*

$$\frac{D^A f}{Dt} : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{D^A f}{Dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Utilizando (1.3) e procedendo de modo análogo, obtemos uma expressão equivalente a (1.6), no sistema de coordenadas ALE, para a velocidade do domínio do fluido \mathbf{w} ,

$$\frac{D^A f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f. \quad (1.8)$$

1.2.3. Campo vetorial da aceleração

No sistema de coordenadas lagrangeano, a aceleração é o campo vetorial $\widehat{\mathbf{a}}$: $I \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\widehat{\mathbf{a}} = \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

No sistema de coordenadas eulerianas, temos

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (1.10)$$

onde $\widehat{\mathbf{a}}$ representa o campo vetorial da aceleração e, por isso, define a segunda derivada no tempo ao longo da trajetória $T_{\widehat{\mathbf{x}}}$ da partícula de fluido localizada em $\widehat{\mathbf{x}}$.

1.2.4. O gradiente de deformação

Suponhamos que \mathcal{L}_t é continuamente diferenciável. O *gradiente de deformação* $\widehat{\mathbf{F}}_t : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é definido por

$$\widehat{\mathbf{F}}_t = \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \mathcal{L}_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \widehat{\mathbf{x}}}. \quad (1.11)$$

Em particular, o seu determinante é dado por

$$\widehat{J}_t = \det \widehat{\mathbf{F}}_t = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \widehat{\mathbf{x}}} \right) \quad (1.12)$$

e é chamado de *jacobiano* da função \mathcal{L}_t . No sistema de coordenadas eulerianas, é denotado por J_t . No que se segue, assumimos que $\widehat{J}_t > 0$, $\forall t \in I$.

1.3. Teorema de Transporte de Reynolds

Comecemos por ver uma das propriedades do jacobiano.

Lema 1.2 (Fórmula de Expansão de Euler). *Seja J_t o jacobiano definido por (1.12) no sistema de coordenadas euleriano. Então,*

$$\frac{DJ_t}{Dt} = J_t \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.13)$$

Demonstração. Por aplicação da regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \widehat{\mathbf{u}}(t, \widehat{\mathbf{x}}) &= \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} [\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \circ \mathcal{L}_t(\widehat{\mathbf{x}})] = \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) (\mathcal{L}_t(\widehat{\mathbf{x}})) \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \mathcal{L}_t(\widehat{\mathbf{x}}) \\ &= \widehat{\nabla} \mathbf{u}(t, \widehat{\mathbf{x}}) \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \mathcal{L}_t(\widehat{\mathbf{x}}) = \widehat{\nabla} \mathbf{u}(t, \widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{F}}_t(t, \widehat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por outro lado, usando a definição da velocidade, temos

$$\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}}\widehat{\mathbf{u}} = \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}}\mathbf{x} = \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_t}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Assim, usando (1.14) e (1.15), obtemos

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t+\epsilon} = \widehat{\mathbf{F}}_t + \epsilon \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_t}{\partial t} + o(\epsilon) = \widehat{\mathbf{F}}_t + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}} \widehat{\mathbf{F}}_t + o(\epsilon) = (\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{\mathbf{F}}_t + o(\epsilon),$$

de onde a primeira igualdade surge da expansão de Taylor e $o(\epsilon)$ é tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$.

Uma vez que $\det[A + o(\epsilon)] = \det(A) + o(\epsilon)$, concluímos

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{t+\epsilon} &= \det(\widehat{\mathbf{F}}_{t+\epsilon}) = \det\left[(\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{\mathbf{F}}_t + o(\epsilon)\right] \\ &= \det\left[(\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{\mathbf{F}}_t\right] + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Atendendo à propriedade $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, para A e B matrizes $n \times n$ quaisquer, segue-se que

$$\det\left[(\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{\mathbf{F}}_t\right] + o(\epsilon) = \det(\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \cdot \det(\widehat{\mathbf{F}}_t) + o(\epsilon).$$

Por outro lado, como

$$\det \begin{bmatrix} 1 + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = 1 + \epsilon \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u} + o(\epsilon),$$

então

$$\det(\mathbf{I} + \epsilon \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \cdot \det(\widehat{\mathbf{F}}_t) + o(\epsilon) = (1 + \epsilon \operatorname{tr} \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{J}_t + o(\epsilon).$$

Deste modo, podemos escrever

$$\widehat{J}_{t+\epsilon} = \det(\widehat{\mathbf{F}}_{t+\epsilon}) = (1 + \epsilon \operatorname{tr} \widehat{\nabla \mathbf{u}}) \widehat{J}_t + o(\epsilon) = (1 + \epsilon \operatorname{div} \widehat{\mathbf{u}}) \widehat{J}_t + o(\epsilon).$$

Por fim, aplicando a definição de derivada material e uma vez que \mathcal{L}_t é contínua, temos

$$\begin{aligned} \frac{DJ_t}{Dt} &= \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{J}_{t+\epsilon} - \widehat{J}_t}{\epsilon} \right) \circ \mathcal{L}_t^{-1} = \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1 + \epsilon \operatorname{div} \widehat{\mathbf{u}} - 1}{\epsilon} \right) \widehat{J}_t + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right] \right) \circ \mathcal{L}_t^{-1} \\ &= (\operatorname{div} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{J}_t) \circ \mathcal{L}_t^{-1} = \operatorname{div} \mathbf{u} J_t. \end{aligned}$$

□

Recordemos o seguinte teorema elementar do Cálculo.

Teorema 1.1. *Seja $V_t \subset \Omega_t$ e considere-se a função $f : I \times V_t \rightarrow \mathbb{R}$. Então, f é integrável em V_t se e só se $(f \circ \mathcal{L}_t)J_t$ é integrável em $V_0 = \mathcal{L}_t^{-1}(V_t)$ e*

$$\int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{V_0} \widehat{f}(t, \widehat{\mathbf{x}}) \widehat{J}_t(t, \widehat{\mathbf{x}}) \, d\widehat{\mathbf{x}}.$$

Para simplificar a notação, iremos omitir, no que se segue, a dependência das variáveis nos integrais, sendo que as funções dependem de t e da variável a integrar.

Estamos finalmente em condições de introduzir o Teorema de Transporte de Reynolds.

Teorema 1.2 (Teorema de Transporte de Reynolds). *Seja $V_0 \subset \Omega_0$, $V_t \subset \Omega_t$ tal que $V_t = \mathcal{L}_t(V_0)$ e $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável a respeito de \mathbf{x} e t . Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f\mathbf{u}) \right) \, d\mathbf{x}. \quad (1.16)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.1 e pela regra de derivação da multiplicação, segue-se

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \widehat{f} \widehat{J}_t \, d\widehat{\mathbf{x}} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\widehat{f} \widehat{J}_t) \, d\widehat{\mathbf{x}} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} \widehat{J}_t + \widehat{f} \frac{\partial \widehat{J}_t}{\partial t} \right) \, d\widehat{\mathbf{x}}. \quad (1.17)$$

Aplicando a relação (1.5) e o Teorema 1.1, podemos escrever

$$\int_{V_0} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} \widehat{J}_t \, d\widehat{\mathbf{x}} = \int_{V_t} \frac{Df}{Dt} \, d\mathbf{x}. \quad (1.18)$$

Usando ainda (1.5), podemos reescrever (1.13)

$$\frac{\partial \widehat{J}_t}{\partial t} = \widehat{J}_t \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.19)$$

Consequentemente, por (1.17) vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, d\mathbf{x} &= \int_{V_0} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} \widehat{J}_t \, d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{V_0} \widehat{f} \frac{\partial \widehat{J}_t}{\partial t} \, d\widehat{\mathbf{x}} = \int_{V_t} \frac{Df}{Dt} \, d\mathbf{x} + \int_{V_0} \widehat{f} \widehat{J}_t \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\widehat{\mathbf{x}} \\ &= \int_{V_t} \frac{Df}{Dt} \, d\mathbf{x} + \int_{V_t} f \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade surge de (1.18) - (1.19) e a terceira igualdade surge do Teorema 1.1.

A segunda igualdade da relação (1.16) obtém-se usando o Lema 1.1 e da identidade

$$\operatorname{div} f \mathbf{u} = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

□

No sistema de coordenadas ALE, o Teorema de Transporte de Reynolds é formulado da seguinte forma:

Teorema 1.3 (Teorema de Transporte de Reynolds ALE). *Seja $V_0 \subset \Omega_0$, $V^{\mathcal{A}_t} \subset \Omega_t$ tal que $V^{\mathcal{A}_t} = \mathcal{A}_t(V_0)$ e $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável a respeito de \mathbf{x} e t . Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{\mathcal{A}_t}} f \, d\mathbf{x} = \int_{V^{\mathcal{A}_t}} \left(\frac{D^{\mathcal{A}} f}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{w} \right) d\mathbf{x} = \int_{V^{\mathcal{A}_t}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f \mathbf{w}) \right) d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Demonstração. A sua prova é omitida, uma vez que segue uma demonstração análoga à do Teorema 1.2. □

1.4. Equação da Conservação da Massa

Estamos, agora, em condições de transcrever os princípios da conservação da mecânica de fluidos para equações que envolvam as quantidades introduzidas anteriormente.

Tomemos $V_t \subset \Omega_t$ como sendo o volume total ocupado pelo fluido no instante t tal que $V_t = \mathcal{L}_t(V_0)$. Sejam $\mathbf{u} : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial diferenciável e $\rho : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e diferenciável, com $\rho > 0$, chamada *densidade*, $[\rho] = \text{kg}/\text{m}^3$, tal que

$$m(V_t) = \int_{V_t} \rho \, d\mathbf{x},$$

onde $m(V_t)$ é a massa do material contida em V_t .

O *Princípio da Conservação da Massa* traduz-se em

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{para todo o volume } V_t.$$

Aplicando o Teorema 1.2, obtemos

$$\int_{V_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = 0. \quad (1.22)$$

Assumindo que os termos do integral são contínuos e utilizando (1.21), a arbitrariedade de V_t permite-nos escrever a *equação da conservação da massa* na forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0. \quad (1.23)$$

Assumindo que ρ é constante, a igualdade (1.23) reduz-se a

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.24)$$

ou seja, a *equação da conservação da massa* no caso de um fluido de densidade constante consiste em exigir que o campo das velocidades tenha divergência nula.

1.5. Equação do Momento

A segunda equação do sistema de equações de Navier-Stokes é obtida através do *Princípio da Conservação do Momento Linear*. Este pode ser enunciado na forma integral da seguinte forma:

Para qualquer $t \in I$, em qualquer subconjunto $V_t \subsetneq \Omega_t$, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = F_c + F_s, \quad (1.25)$$

onde F_c denota a resultante das forças corporais e F_s a resultante das forças de superfície. Vejamos com maior detalhe estes dois tipos de forças neste contexto:

1. *Forças corporais*: são proporcionais à massa e são representadas pelo vetor $\mathbf{f}^b : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tem-se $[\mathbf{f}^b] = N/kg = m/s^2$. Uma força corporal exercida num objeto em V_t é dada por $\int_{V_t} \rho \mathbf{f}^b \, d\mathbf{x}$, cuja dimensão é N , como é o exemplo da força gravitacional.
2. *Forças exercidas em superfícies*: representam as forças que são aplicadas no meio através das superfícies. São representadas pelo vetor $\mathbf{t}^e : I \times \Gamma_t^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamado *tensão aplicada*, e $[\mathbf{t}^e] = N/m^2$. A força resultante que atua através da superfície é dada por $\int_{\Gamma_t^n} \mathbf{t}^e \, ds$. Por exemplo, a fricção do ar com a superfície da água de um lago é um exemplo de uma força exercida em superfícies.

Existe, ainda, um terceiro tipo de forças a considerar: as *forças internas*. Estas forças resultam da interação entre as partículas do fluido.

De seguida, apresentamos o *Princípio de Cauchy* que permite estabelecer uma ligação entre as forças exercidas em superfícies e o tensor de tensão de Cauchy.

Princípio de Cauchy. *Existe um vetor \mathbf{t} , chamado tensão de Cauchy, $\mathbf{t} : I \times \Omega_t \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $D_1 = \{\nu \in \mathbb{R}^n : |\nu| = 1\}$, tal que o seu integral na superfície de cada domínio $V_t \subset \Omega_t$, dado por $\int_{\partial V_t} \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \nu) ds$, é equivalente à resultante das forças contínuas a atuar em V_t . Mais ainda, temos que $\mathbf{t} = \mathbf{t}^e$ em $\partial V_t \cap \Gamma_t^n$.*

Conjugando o Princípio de Cauchy com (1.25), obtemos que para qualquer $t \in I$, em qualquer subconjunto $V_t \subsetneq \Omega_t$, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{V_t} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}^b(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{F_c} + \underbrace{\int_{\partial V_t} \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \nu) ds}_{F_s}. \quad (1.26)$$

A ação das forças internas é introduzida e caracterizada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.4 (Teorema do tensor de tensão de Cauchy). *Suponhamos que, para todo o $t \in I$, as forças corporais \mathbf{f}^b , a densidade ρ e $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ são funções limitadas em Ω_t e o vetor de tensão de Cauchy \mathbf{t} é continuamente diferenciável em relação a \mathbf{x} , para cada $\nu \in D_1$, e contínuo em relação a ν . Então existe um campo tensorial continuamente diferenciável e simétrico, chamado tensor de tensão de Cauchy, $\mathbf{T} : I \times \overline{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $[\mathbf{T}] = N/m^2$, tal que $\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \nu) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \nu$, $\forall t \in I$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega_t$, $\forall \nu \in D_1$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [18]. \square

Conjugando o teorema anterior com o *Princípio de Cauchy*, temos que

$$\mathbf{T} \cdot \nu = \mathbf{t}^e, \text{ em } \partial V_t \cap \Gamma_t^n, \quad (1.27)$$

onde a resultante das forças internas em ∂V_t é expressa por $\int_{\partial V_t} \mathbf{T} \cdot \nu ds$. Assim, para qualquer $t \in I$, em qualquer subconjunto $V_t \subsetneq \Omega_t$, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{V_t} \rho \mathbf{f}^b d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \mathbf{T} \cdot \nu ds. \quad (1.28)$$

Atendendo a (1.24) e admitindo ρ constante, do Teorema 1.2, segue-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathbf{x}.$$

Usando o Teorema da Divergência¹ e assumindo que $\text{div } \mathbf{T}$ é integrável, (1.28) é equivalente a

$$\int_{V_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \text{div } \mathbf{T} - \rho \mathbf{f}^b \right] d\mathbf{x} = 0.$$

Assumindo que os termos no integral são contínuos em V_t , temos

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \text{div } \mathbf{T} = \rho \mathbf{f}^b \quad \text{em } \Omega_t. \quad (1.29)$$

De modo a facilitar a notação, iremos omitir a letra b para indicar a força corporal aplicada ao fluido, que será indicada simplesmente por \mathbf{f} .

Usando a relação (1.10), podemos escrever (1.29) como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \text{div } \mathbf{T} = \rho \mathbf{f}. \quad (1.30)$$

O termo não linear $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ é denominado *termo convectivo*.

1.6. Equações de Navier-Stokes

Da dedução feita até agora, constituímos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \text{div } \mathbf{T} = \rho \mathbf{f} & \text{em } I \times \Omega_t \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{em } I \times \Omega_t. \end{cases}$$

Vejamos, agora, como podemos relacionar o tensor de tensão de Cauchy e o sistema anterior através de uma *lei constitutiva* que fornecerá uma caracterização do comportamento mecânico do fluxo.

Assumimos que o fluido assume o comportamento de um *fluido newtoniano*, ou seja, o tensor de tensão de Cauchy pode ser escrito como $\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \sigma(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$, onde P denota uma função escalar chamada *pressão*, $[P] = N/m^2$, \mathbf{I} a matriz identidade e σ a *viscosidade* do fluido ($\sigma > 0$), $[\sigma] = kg/ms$.

Definindo o tensor $D(\mathbf{u}) = \frac{(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)}{2}$ (chamado de *tensor da taxa de deformação*), podemos escrever

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\sigma D(\mathbf{u}). \quad (1.31)$$

¹**Teorema da Divergência:** Sejam E uma região sólida simples e S a superfície fronteira de E orientada pela normal exterior ν . Seja F um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas numa região aberta $V \supset E$. Então

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_E \text{div } F \, dV.$$

O termo $2\sigma D(\mathbf{u})$ é, por vezes, referido como sendo a componente de *tensão viscosa* do tensor de tensão.

A viscosidade pode variar relativamente ao espaço e ao tempo, dependendo, por exemplo, da temperatura do fluido. No entanto, neste trabalho vamos admitir que σ é constante.

Nota 1.2. *Um fluido não-newtoniano é um fluido cuja viscosidade varia proporcionalmente à energia cinética que lhe é impressa, o qual responde de forma instantânea. Um exemplo é o caso do amido de milho com água: se o movimento impresso na mistura for rápido, esta reage como um sólido, caso contrário, reage como um líquido. Neste caso, σ depende das quantidades cinemáticas.*

Usando a relação (1.31), a equação do momento (1.30) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{f} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \operatorname{div}(P\mathbf{I} - 2\sigma D(\mathbf{u})) \\ &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P - 2 \operatorname{div}(\sigma D(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Uma vez que ρ é constante e positivo, podemos dividir a relação anterior por ρ , obtendo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad (1.32)$$

onde $\mu = \sigma/\rho$ é uma viscosidade cinemática, com $[\mu] = 1/sm^2$, e $p = P/\rho$ é uma pressão escalar, com $[p] = m^2/s^2$.

Observação 1.5. *Sabendo que $\operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$, então temos que $\operatorname{div} \nabla \mathbf{u}^T = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0$ (por (1.24)), a equação do momento para um fluido incompressível newtoniano é dada por*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1.33)$$

Obtemos, assim, as *equações de Navier-Stokes* para fluidos incompressíveis:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } I \times \Omega_t. \end{cases} \quad (1.34)$$

Além destas equações, necessitamos de uma condição inicial para a velocidade e condições de fronteira apropriadas que permitam determinar a velocidade e a pressão em todo o domínio $I \times \Omega_t$.

Como condição inicial, vamos considerar, para $t = t_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{x} \in \Omega_0$. Como condições de fronteira, iremos considerar

$$\begin{cases} (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, & \text{em } I \times \Gamma_t^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, & \text{em } I \times \Gamma_t^D, \end{cases} \quad (1.35)$$

em que \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 são funções dadas e estão associadas, respetivamente, às condições de fronteira de Neumann (definida em Γ_t^N) e Dirichlet (definida em Γ_t^D), onde $\partial\Omega_t = \Gamma_t^N \cup \Gamma_t^D$ e $\Gamma_t^D \cap \Gamma_t^N = \emptyset$.

Deste modo, o problema diferencial completo para as equações de Navier-Stokes é o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega_0 \\ (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, & \text{em } I \times \Gamma_t^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, & \text{em } I \times \Gamma_t^D. \end{cases} \quad (1.36)$$

Utilizando o lema (1.8) para o campo da velocidade do domínio, o sistema (1.36) pode ser reescrito usando a derivada material no sistema de coordenadas ALE da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega_0 \\ (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, & \text{em } I \times \Gamma_t^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, & \text{em } I \times \Gamma_t^D. \end{cases} \quad (1.37)$$

Observação 1.6. *A existência e unicidade de solução do problema (1.36) são resultados que poderão ser encontrados em [4] e [5]. De salientar que o caso bidimensional já foi provado, mas o tridimensional ainda se encontra em aberto.*

Capítulo 2

Metodologia numérica

Neste capítulo, vamos apresentar métodos numéricos a fim de podermos simular as equações de Navier-Stokes.

Na primeira parte do capítulo enunciamos alguns espaços de Sobolev que vão ser necessários para o trabalho. A segunda parte incide sobre a derivação da formulação fraca do problema contínuo enunciado no capítulo anterior.

Na terceira parte apresentamos o método dos elementos finitos que é a técnica usada para aproximar, relativamente às variáveis espaciais, a solução das equações de Navier-Stokes. Nesta fase do trabalho distinguimos dois casos possíveis para as equações de Navier-Stokes - o caso em que o domínio é fixo e o caso em que o domínio é móvel (ou seja, a configuração do domínio pode variar com o tempo). Apresentamos uma discretização temporal e espacial para ambos, utilizando diferenças finitas para discretizar o termo da derivada no tempo e o método dos elementos finitos para discretizar as equações no espaço. Adicionalmente, no caso em que o domínio é móvel, apresentamos uma forma de calcular a função ALE a fim de descrever as deformações do domínio pretendidas. Por fim, ilustramos cada um dos casos com um exemplo de aplicação (utilizando o software FreeFem++).

2.1. Espaços de funções

Uma das propriedades mais importante para a construção e análise de métodos numéricos é a suavidade da solução que procuramos, a qual depende da suavidade dos dados com que trabalhamos. Deste modo, necessitamos de assumir certas características sobre a solução em questão, considerando classes de funções com propriedades específicas de diferenciabilidade e integrabilidade - os espaços de funções.

Nesta secção, vamos expor algumas definições e resultados sobre a teoria de espaços de funções que vão ser necessários ao longo deste texto, dando especial atenção ao espaços de funções contínuas, espaços de funções integráveis e espaços de Sobolev.

2.1.1. Espaços de funções contínuas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ o domínio a utilizar nos próximos resultados, o qual é um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz contínua.

Denotamos por $C^0(\Omega)$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em Ω e $C^0(\bar{\Omega})$ o conjunto das funções u tais que u admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$. Podemos munir $C(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|.$$

Adicionalmente, $C^1(\Omega)$ denota o conjunto de todas as funções u definidas em Ω tais que ∇u é contínua e $C^1(\bar{\Omega})$ o conjunto das funções u tais que ∇u admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$. Podemos munir $C^1(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^n \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|.$$

Definição 2.1. *O suporte, $\text{supp } u$, de uma função contínua u definida em Ω é definido como o fecho do conjunto $\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}$.*

Denotamos por $C_0^k(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $u \in C^k(\Omega)$, $k = 0, 1$ tais que $\text{supp } u \subset \Omega$ e $\text{supp } u$ é limitado.

2.1.2. Espaços de funções integráveis

Denotamos por $L^2(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

Duas funções que coincidem em Ω exceto num conjunto de medida nula identificam-se em $L^2(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ está munido da norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

e do produto interno

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Por sua vez, iremos indicar por $\mathbf{L}^2(\Omega)$, o espaço de funções vetoriais $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

cujas componentes pertencem a $L^2(\Omega)$, sendo que a sua norma é definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Também iremos indicar por $\mathbf{L}^2(\Omega)$, o espaço de tensores $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ cujas componentes estão em $L^2(\Omega)$. Neste caso, temos a norma

$$\|\mathbf{T}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|T_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

e o seguinte produto interno

$$(\mathbf{T}, \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{T}, \mathbf{R})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{R} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} T_{ij} R_{ij} \, d\mathbf{x}.$$

2.1.3. Espaços de Sobolev

Denotamos

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

como sendo o **espaço de Sobolev** de ordem 0. Está munido da norma e do produto interno introduzidos anteriormente.

Adicionalmente, definimos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\}$$

como sendo o **espaço de Sobolev** de ordem 1. Está munido da norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

e do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := (u, v)_{\Omega} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega}.$$

Por fim, introduzimos também

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega \} \text{ e}$$

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0 \text{ em } \Gamma\},$$

onde $\Gamma \subset \partial\Omega$ é um conjunto de medida não nula.

Note-se que $H_0^1(\Omega)$ e $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ estão munidos da mesma norma e produto interno que $H^1(\Omega)$.

Por fim, iremos indicar por $\mathbf{H}^k(\Omega)$, $k = 0, 1$, o espaço de funções vetoriais $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujas componentes estão em $H^k(\Omega)$, $k = 0, 1$, sendo que a sua norma é definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1.$$

Introduzimos, agora, a fórmula de integração de Green.

Teorema 2.1 (Fórmula de integração de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira Lipschitz contínua e seja ν a normal exterior unitária na fronteira $\partial\Omega$. Dadas $u, v \in H^1(\Omega)$, o integral*

$$\int_{\partial\Omega} uv \nu_i ds$$

existe e é finito para cada ν_i . Temos ainda

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Esta fórmula também é conhecida por *fórmula de integração por partes*.

2.2. Formulação fraca do problema contínuo

Consideremos o sistema (1.37). Seja (\mathbf{u}, p) uma solução clássica deste problema e sejam $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ e $q \in Q$ as funções teste, com \mathbf{V}_0 e Q espaços a definir posteriormente. Multiplicando \mathbf{v} pela primeira equação e q pela segunda e integrando em Ω_t , obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right)_{\Omega_t} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u}, \mathbf{v} \Big|_{\Omega_t} + (\nabla p, \mathbf{v})_{\Omega_t} - (2\text{div}(\mu D(\mathbf{u})), \mathbf{v})_{\Omega_t} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_t} \\ (\text{div } \mathbf{u}, q)_{\Omega_t} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Aplicando a fórmula de integração por partes e pela Observação 1.5, são válidas as igualdades

$$\int_{\Omega_t} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_t} p \cdot \mathbf{v} \cdot \nu ds - \int_{\Omega_t} p \cdot \text{div } \mathbf{v} d\mathbf{x},$$

$$2 \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 2 \int_{\Omega_t} \mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

Assim, (2.2) é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right)_{\Omega_t} - ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} - (p, \operatorname{div} \mathbf{v})_{\Omega_t} \\ + 2 \int_{\Omega_t} \mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_t} (2\mu D(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_t} \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}, q)_{\Omega_t} = 0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Os espaços naturais para procurar a solução (\mathbf{u}, p) são \mathbf{V} e Q definidos por

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \circ \mathcal{A}_t^{-1}, \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0) \right\},$$

$$Q = \left\{ q : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R} : q = \tilde{q} \circ \mathcal{A}_t^{-1}, \tilde{q} \in \mathbf{L}^2(\Omega_0) \right\}.$$

Atendendo à formulação (2.3), escolhemos \mathbf{V}_0 tal que:

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \mathbf{v} : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \circ \mathcal{A}_t^{-1}, \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_{\Gamma_0^D}^1(\Omega_0) \right\}.$$

Assim, obtemos a seguinte formulação fraca do problema (1.37):

Determinar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ e $p \in Q$ tal que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}_2(t)$ em Γ_t^D e

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right)_{\Omega_t} - c(\mathbf{u} - \mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} - b(\mathbf{v}, p)_{\Omega_t} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} \\ = \int_{\Gamma_t^N} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_t}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(\mathbf{u}, q)_{\Omega_t} = 0, \quad \forall q \in Q, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} = 2 \int_{\Omega_t} \mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{v}, p)_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

$$c(\mathbf{u} - \mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Nota 2.1. As funções \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 devem possuir a regularidade necessária para que os integrais em (2.4) façam sentido, isto é, para $t \in I$, $\mathbf{g}_1(t) \in \mathbf{L}^2(\Gamma_t^N)$ e $\mathbf{g}_2(t) \in \mathbf{L}^2(\Gamma_t^D)$.

Observação 2.1. Quando o problema que estamos a estudar apenas tem condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, então o espaço a considerar para a sua reso-

lução é $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, quando o problema tem condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, existe a necessidade de declarar o espaço $H_1^1(\Omega)$ para indicar o conjunto pretendido em que a função u é nula.

2.3. Espaços de elementos finitos

Nesta secção, vamos introduzir os espaços de elementos finitos necessários para obter uma aproximação de elementos finitos no processo da metodologia numérica. Vamos apenas considerar o caso bidimensional. Mais informação poderá ser encontrada em [4], [9] e [10].

Consideremos um domínio Ω_h e tal que

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

onde

- (1) K é um triângulo tal que $K \neq \emptyset$, para todo $K \in \mathcal{T}_h$;
- (2) $K_i \cap K_j = \emptyset$, para cada $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$, $i \neq j$;
- (3) se $F = K_i \cap K_j \neq \emptyset$, com K_i, K_j elementos distintos de \mathcal{T}_h , então F é uma aresta ou um vértice.
- (4) $\text{diam}(K) \leq h$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$.

\mathcal{T}_h é denominada a triangulação de $\bar{\Omega}_h$. Note-se que, de modo a obtermos uma triangulação que cumpra os requisitos (1)-(4), \mathcal{T}_h tem de ter uma configuração admissível (ver Figura 2.1).

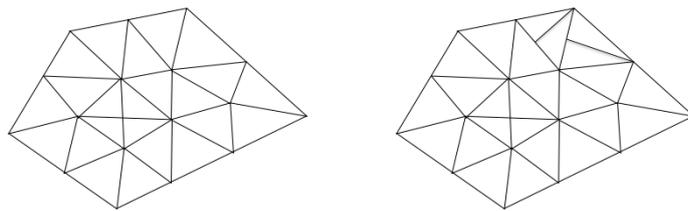


Figura 2.1: Triangulações admissível (esquerda) e não admissível (direita).

Os polinómios lineares contínuos segmentados são denotados por $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$. Estas funções são definidas por $p(\mathbf{x}) = a + bx + cy$, em cada triângulo $K \in \mathcal{T}_h$.

Seja $\phi_i \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$ tal que

$$\phi_i(\beta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde β_j , $j = 1, \dots, N_h$ é o conjunto de nós de \mathcal{T}_h . Então $\{\phi_1, \dots, \phi_{N_h}\}$ define

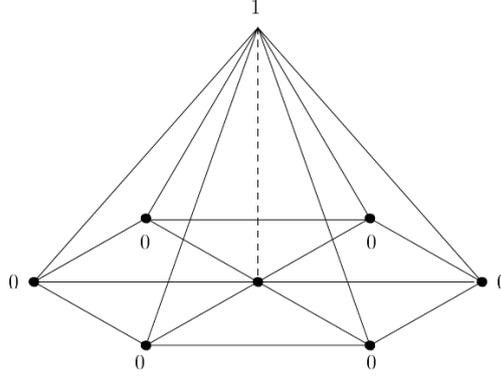


Figura 2.2: Exemplo de representação de uma função base ϕ_i .

uma base de $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$, onde N_h é a dimensão deste espaço e $u \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$ pode ser escrita como combinação linear das funções base $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h}$ e dos respectivos coeficientes $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_h}$, com $\alpha_i = u(\beta_j)$, $i = 1, \dots, N_h$ os valores dos nós de u , da seguinte forma

$$u = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi_i.$$

Consideremos, ainda, o espaço de funções quadráticas contínuas segmentadas, o qual é denominado $\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)$. Estas funções são definidas por $p(\mathbf{x}) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$, em cada triângulo $K \in \mathcal{T}_h$, com \mathcal{T}_h um polígono do domínio $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$. Para determinar os parâmetros $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, procedemos da mesma forma que no caso do espaço $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$, adicionando três nós a cada $K \in \mathcal{T}_h$, como se pode verificar na Figura 2.3.

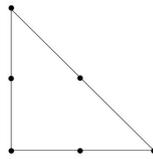


Figura 2.3: Nós de um triângulo no espaço de funções $\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)$.

2.4. Discretização numérica

Relembremos que Ω_0 é o domínio ocupado pelo fluido no instante inicial t_0 , denominado por configuração de referência, e Ω_t a porção de espaço ocupada pelo fluido no instante de tempo t , denominado por configuração corrente.

Analisemos os dois casos possíveis para a aproximação das equações de Navier-

Stokes: o caso em que o domínio é fixo, ou seja, não existe deformação da malha do domínio (secção 2.4.1) e o caso em que o domínio é móvel, em que o mapa ALE induz alterações na malha (secção 2.4.2).

Os exemplos numéricos apresentados durante o texto foram realizados com a ajuda do software FreeFem++.

2.4.1. Domínio fixo

Não existindo deformação do domínio Ω_t , o sistema (1.36) pode escrever-se como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - 2\operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad \text{em } I \times \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } I \times \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \text{em } \Omega \\ (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, \quad \text{em } I \times \Gamma^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, \quad \text{em } I \times \Gamma^D \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde $\Omega = \Omega_t = \Omega_0$, $\Gamma_t^N = \Gamma^N$, $\Gamma_t^D = \Gamma^D$, $\forall t \in I$.

De modo a aproximar a solução deste problema, recorreremos a alguns métodos já conhecidos: o método das diferenças finitas para discretizar o problema no tempo e o método dos elementos finitos para discretizar o problema no espaço.

Seja \mathcal{T}_h uma triangulação do domínio Ω e consideremos uma partição em (t_0, T) , $I_k = (t_k, t_{k+1})$, com $k = 0, \dots, N$, onde $t_{k+1} - t_k = \Delta t$.

Vamos supor que a solução é conhecida em $t = t_k$ e pretendemos determinar a solução no instante $t = t_{k+1}$. Indicamos a solução aproximada no instante t_k por \mathbf{u}_k , ou seja, $\mathbf{u}_k \approx \mathbf{u}(t_k)$. No instante $t = t_0$, a solução é conhecida e é dada por \mathbf{u}_0 .

Como vimos na secção 2.2, a formulação fraca deste problema é:

Determinar, para $t \in I$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{u}|_{\Gamma^D}(t) = \mathbf{g}_2(t)$ e $p(t) \in Q$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right)_\Omega + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - (p, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega + 2 \int_\Omega \mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \\ \quad \quad \quad = \int_{\Gamma^N} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{v} \cdot \nu \, ds + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}, q)_\Omega = 0, \quad \forall q \in Q, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathbf{V}^0 = \mathbf{H}_{\Gamma^D}^1(\Omega), \quad Q = L^2(\Omega).$$

Discretização no tempo

Para obter uma discretização no tempo, vamos aplicar diferenças regressivas de primeira ordem à derivada $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_{k+1}) = \frac{\mathbf{u}(t_{k+1}) - \mathbf{u}(t_k)}{\Delta t} + O(\Delta t),$$

onde $O(\Delta t)$ é tal que $O(\Delta t) \leq M\Delta t$, para uma constante M .

Atendendo às características do problema diferencial, iremos considerar um método semi-implícito.

Deste modo, reformulamos o problema (2.7):

Determinar $\mathbf{u}_{k+1} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u}_{k+1}|_{\Gamma^D} = \mathbf{g}_{2,k+1}$ e $p_{k+1} \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1}}{\Delta t}, \mathbf{v} \right)_\Omega + ((\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v})_\Omega + (p_{k+1}, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega + 2 \int_\Omega \mu D(\mathbf{u}_{k+1}) : D(\mathbf{v}) \\ = \left(\frac{\mathbf{u}_k}{\Delta t}, \mathbf{v} \right)_\Omega + \int_{\Gamma^N} \mathbf{g}_{1,k+1} \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds + (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\Gamma^D}^1(\Omega) \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{k+1}, q)_\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{g}_{i,k+1} = \mathbf{g}_i(t_{k+1})$, $i = 1, 2$, e $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1})$.

Discretização no espaço

Sejam $Q_h = \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$ e $\mathbf{V}_h = [\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)]^n$.

Nota 2.2. Para a pressão, é suficiente considerar o espaço das funções $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$. No entanto, não podemos considerar os mesmos espaços para a velocidade e pressão, uma vez que a velocidade necessita de um espaço de dimensão superior do que o das funções contínuas lineares segmentadas; caso contrário, o problema numérico não terá uma única solução. As escolhas anteriores garantem que tal não acontece e são conhecidas como elementos de Taylor-Hood. Mais informação sobre este assunto pode ser encontrada em [4].

A solução numérica pode ser obtida em $t = t_{k+1}$ da seguinte forma:

Determinar $\mathbf{u}_{k+1,h} \in \mathbf{V}_h$ tal que $\mathbf{u}_{k+1,h} = \mathbf{g}_2(t_{k+1})$ em Γ^D e $p_{k+1,h} \in Q_h$ tal que

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1,h}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right)_\Omega + c(\mathbf{u}_{k,h}, \mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_\Omega + b(\mathbf{v}_h, p_{k+1,h})_\Omega \\ + a(\mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_\Omega = \left(\frac{\mathbf{u}_{k,h}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right)_\Omega + \int_{\Gamma^N} \mathbf{g}_{1,k+1} \cdot \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds \\ + (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \cap \mathbf{H}_{\Gamma^D}^1(\Omega), \\ b(\mathbf{u}_{k+1,h}, q_h)_\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

$\mathbf{u}_{0,h}$ projeção $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de \mathbf{u}_0 ,

$$a(\mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_\Omega = 2 \int_\Omega \mu D(\mathbf{u}_{k+1,h}) : D(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{v}_{k+1,h}, p_h)_\Omega = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1,h} p_h \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}_h, p_{k+1,h})_\Omega = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_h p_{k+1,h} \, d\mathbf{x},$$

$$c(\mathbf{u}_{k,h}, \mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_\Omega = \int_\Omega (\mathbf{u}_{k,h} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{k+1,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x},$$

de modo a obtermos uma linearização do termo convectivo.

Admitindo que $\mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$, consideremos $\mathbf{V}_h^0 = \mathbf{V} \cap \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega_0) = \operatorname{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{N_v}$ e $Q_h = \operatorname{span}\{\psi_j\}_{j=1}^{N_q}$. Então, o problema (2.9) é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} & B_{k+1} \\ -B_{k+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{U}_{k+1} e P_{k+1} representam \mathbf{u}_{k+1} na base \mathbf{V}_h e p_{k+1} na base Q_h , respetivamente; F_{k+1} contém os termos do lado direito da primeira equação do problema; $B_{k+1} = [-b(\phi_i, \psi_j)]_{i,j}$; A_{k+1} é a matriz que envolve contribuições da matriz de massa (relativa ao primeiro termo), do termo convectivo (relativa a c) e do termo difusivo (relativa a a).

Nota 2.3. Para calcular os integrais em (2.9), é necessário aproximá-los por uma regra de quadratura com suficiente grau de precisão. Mais informação sobre este assunto pode ser encontrada em [9].

Observação 2.2. Caso o problema inicial (1.36) tenha condições de fronteira de Dirichlet não homogéneas, podemos transformá-lo noutro com condições de Dirichlet homogéneas, como discutido na secção 2.2.

No entanto, do ponto de vista numérico, existe uma abordagem alternativa e mais simples de implementar. Esta abordagem consiste em discretizar (2.7) no espaço usando $\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)$ como espaço de elementos finitos para a velocidade e efetuar as seguintes alterações nas submatrizes A , B e F resultantes:

- (1) as entradas da linha i das submatrizes A e B correspondente aos nós que estão no suporte da função ϕ_i (graus de liberdade) são substituídas por zeros e colocamos o valor um na diagonal (ou seja, a coluna $j = i$ da submatriz A passa a ter o valor um);

(2) no vetor F , substituímos F_i pelo valor da condição de fronteira.

Por fim, para a discretização no tempo esperamos obter uma ordem de convergência um, ao passo que para a discretização no espaço esperamos obter uma ordem dois. Podemos encontrar mais informação em [4] e [8].

Simulação numérica e validação

Consideremos o problema (1.36) onde $\Omega_0 = (-1, 1) \times (-1, 1)$, $\Gamma_t^N = [-1, 1] \times \{0\}$, $\Gamma_t^D = \partial\Omega \setminus \Gamma_t^N$ e $I = [0, 1]$ e sejam $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ calculados por forma a que $\mu = 0.01$,

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \sin(x_2 + t) \\ \cos(x_1) \cos(x_2 + t) \end{bmatrix}, \quad p(t, \mathbf{x}) = \cos(x_1) \sin(x_2 + t)$$

sejam solução do sistema (1.36). Aplicando o método (2.9), obtemos a solução numérica da Figura 2.4 e respetiva evolução temporal do erro numérico na Figura 2.5. O erro numérico é calculado através das seguintes expressões:

$$e_{\mathbf{u}} = \left(\Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \|\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_{t_k})}^2 \right)^{1/2}, \quad e_p = \left(\Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \|p(t_k) - p_k\|_{L^2(\Omega_{t_k})}^2 \right)^{1/2},$$

onde $\mathbf{u}(t_k)$ e $p(t_k)$ denotam, respetivamente, a solução numérica da velocidade e da pressão no instante t_k e \mathbf{u}_k e p_k denotam, respetivamente, a solução exata da velocidade e da pressão no instante t_k .

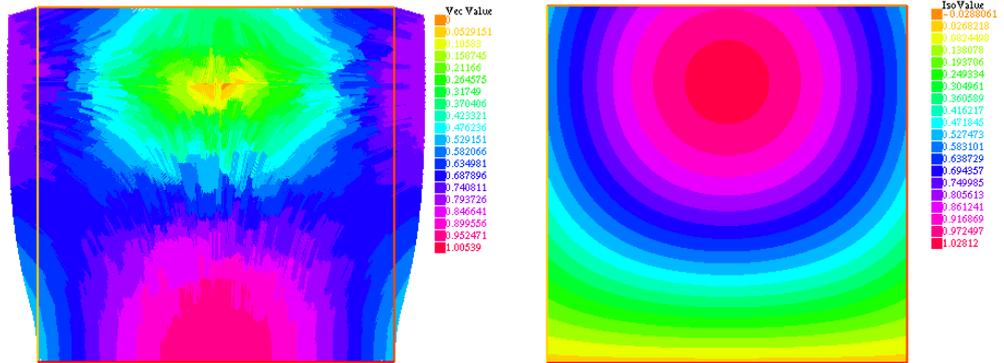


Figura 2.4: Gráfico da magnitude da velocidade (esquerda) e da pressão (direita) no instante $T = 1$ para $\Delta t = 10^{-3}$ e $h = 0.041756$.

Recorrendo aos valores da velocidade e da pressão da Tabela 2.1, uma aproximação numérica da ordem de convergência para a discretização no tempo é dado pela expressão

$$\frac{\log(e_k/e_{k+1})}{\log(t_k/t_{k+1})},$$

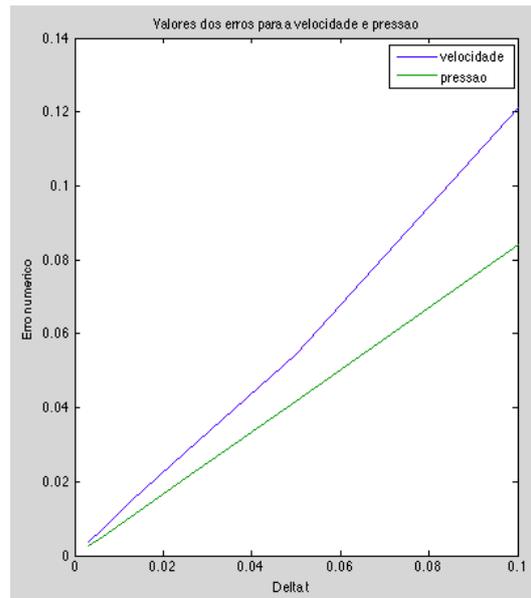


Figura 2.5: Evolução do erro para a velocidade e pressão num domínio fixo com $h = 0.041756$.

Δt	e_u	e_p
0.1	0.121145	0.083948
0.05	0.054617	0.041673
0.025	0.028184	0.020941
0.0125	0.014623	0.010506
0.00625	0.007313	0.005235
0.003125	0.003671	0.002597

Tabela 2.1: Tabela dos erros numéricos com $h = 0.041756$.

em que e_k denota o erro da pressão ou da velocidade obtido no instante t_k . No caso da pressão, denotamos a ordem de convergência por p_{ord} e no caso da velocidade denotamos por u_{ord} .

k	p_{ord}	u_{ord}
1	1.010383	1.149313
2	0.992783	0.954474
3	0.995117	0.946637
4	1.004952	0.999704
5	1.011344	0.994290

Tabela 2.2: Tabela da ordem de convergência do tempo num domínio fixo com $h = 0.041756$.

Como podemos constatar pelos valores observados na Tabela 2.2, a ordem de convergência tende para uma ordem de convergência um no tempo, tanto para o caso da velocidade como da pressão.

2.4.2. Domínio móvel

Consideremos o sistema de equações (1.37):

$$\begin{cases} \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } I \times \Omega_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega_0 \\ (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, & \text{em } I \times \Gamma_t^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, & \text{em } I \times \Gamma_t^D. \end{cases} \quad (2.11)$$

Queremos obter uma forma de calcular a função ALE e discretizar o problema no tempo e no espaço. Com base nos resultados expostos na secção anterior, vamos denotar por $\mathcal{T}_{0,h}$ a triangulação na configuração de referência $(\Omega_{0,h})$ e $\mathcal{T}_{t,h}$ a triangulação na configuração corrente $(\Omega_{t,h})$. Seja também $I_k = (t_k, t_{k+1})$, com $k = 0, \dots, N$ como anteriormente.

Relembremos que a solução aproximada no instante t_k é indicada por \mathbf{u}_k , ou seja, $\mathbf{u}_k \approx \mathbf{u}(t_k)$.

A discretização no tempo e espaço deste sistema segue as linhas gerais do que foi feito no sistema (1.36). No entanto, os termos \mathbf{w} e $\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}$ necessitam de um cuidado especial, assim como o facto do domínio Ω_t depender de t . Uma leitura mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em [5] e [7].

Cálculo da transformação ALE

A formulação ALE induz uma forma natural de discretizar o problema (2.11). Começemos por gerar uma triangulação na configuração de referência $\mathcal{T}_{0,h}$ e admitir que conhecemos uma função $\mathbf{g}_h : \partial\Omega_{0,h} \rightarrow \partial\Omega_t$ que descreve o movimento da fronteira. Estendendo a função \mathbf{g}_h ao interior de $\Omega_{0,h}$, obtemos uma escolha possível para o mapa ALE, $\mathcal{A}_{t,h}$. Desta forma, teremos $\Omega_{t,h} = \mathcal{A}_{t,h}(\Omega_{0,h})$.

Suponhamos que conhecemos no instante $t = t_{k+1}$ a posição da fronteira do domínio $\partial\Omega_{t_{k+1},h}$. A questão que se coloca é como construir $\mathcal{A}_{t_{k+1},h}$ tal que $\mathcal{A}_{t_{k+1},h}(\mathcal{T}_{0,h})$ define uma triangulação válida (ver Figura 2.6).

Nota 2.4. *Por vezes, a malha obtida pode não ser válida, uma vez que os triângulos gerados podem estar sobrepostos.*

Para calcular a função $\mathcal{A}_{t_{k+1}}$, uma técnica usual é a extensão harmónica que consiste em resolver o problema:

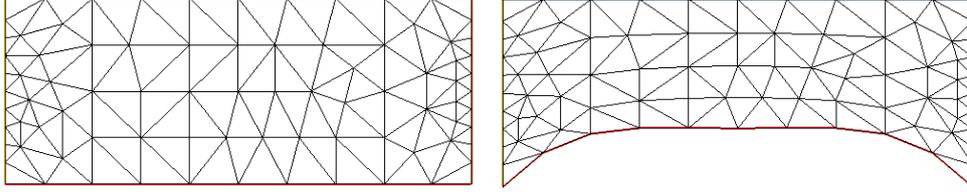


Figura 2.6: Exemplo de uma triangulação do domínio de referência (esquerda) e do domínio corrente (direita).

Determinar $\mathcal{A}_{t_{k+1}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)$ tal que $\mathcal{A}_{t_{k+1}} = \mathbf{g}_h$ em $\partial\Omega_0$ e

$$-\Delta \mathcal{A}_{t_{k+1}} = 0, \quad \text{em } \Omega_0. \quad (2.12)$$

A solução numérica de (2.12) pode obter-se com o método dos elementos finitos como foi feito na secção anterior para as equações de Navier-Stokes.

Com efeito, temos o seguinte problema:

Determinar $\mathcal{A}_{t_{k+1}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)$ tal que $\mathcal{A}_{t_{k+1}} = \mathbf{g}_h$ em $\partial\Omega_0$ e

$$\int_{\Omega_0} \nabla \mathcal{A}_{t_{k+1}} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\tilde{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0). \quad (2.13)$$

Seja D_h subespaço de $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_{0,h})$ das funções que coincidem com \mathbf{g}_h nos vértices da triangulação $\mathcal{T}_{0,h}$ em $\partial\Omega_{0,h}$. A aproximação de elementos finitos do problema é a seguinte:

Determinar $\mathcal{A}_{t_{k+1},h} \in D_h$ tal que

$$\int_{\Omega_0} \nabla \mathcal{A}_{t_{k+1},h} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{v}_h \, d\tilde{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in D_h \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega_0), \quad (2.14)$$

Seja $D_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{N_h}\}$, em que $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$ são as funções base mencionadas na secção anterior. Podemos escrever

$$\mathcal{A}_{t_{k+1},h}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N_h} G_i \phi_i(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Deste modo, a aproximação de elementos finitos pode ser reescrita da seguinte forma:

Determinar $G = (G_1, \dots, G_{N_h})^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N_h} G_i \left[\int_{\Omega_0} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, d\tilde{\mathbf{x}} \right] = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \phi_j \, d\tilde{\mathbf{x}}, \quad j = 1, \dots, N_h. \quad (2.15)$$

Em notação matricial,

$$AG = F$$

onde

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N_h} = (a_{ji})_{i,j=1}^{N_h} = \int_{\Omega_0} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, d\tilde{\mathbf{x}},$$

$$G = (G_1, \dots, G_{N_h})^T \quad \text{e} \quad F_j = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \phi_j \, d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Observação 2.3. De modo a incluirmos a condição de fronteira do problema (2.12), é necessário efetuar transformações a nível da matriz A e do vetor F como referido anteriormente na Observação 2.2.

Resolvendo o problema (2.12) onde $\mathbf{g}_h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + d(t, \mathbf{x})$ é tal que

$$d(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02((x - 2.5)^2 + 5)x(5 - x)j(t)((\mathbf{1}_{t \geq 1} + \mathbf{1}_{t \leq 3}) + \mathbf{1}_{t > 3}) \end{bmatrix},$$

$$j(t) = -0.15625t^7 + 2.1875t^6 - 12.46875t^5 + 37.1875t^4 - 62.34375t^3 + 59.0625t^2 - 29.53125t + 6.0625,$$

onde $\mathbf{1} : [t_0, T] \rightarrow 0, 1$ é a função característica, obtemos a solução numérica da Figura 2.7.

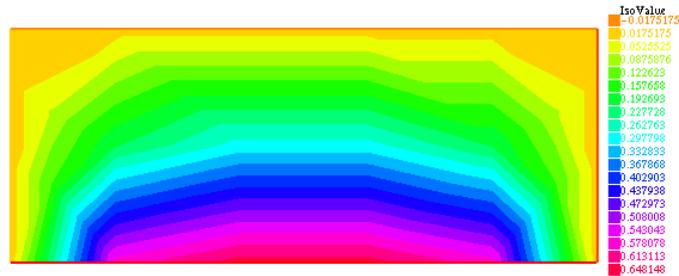


Figura 2.7: Gráfico da segunda componente da função \mathcal{A}_t , para $T = 5$, $\Delta = 0.1$ e $h = 1.47607$.

Após obtermos a função $\mathcal{A}_{t_{k+1}, h}$, podemos calcular uma aproximação para a velocidade do domínio \mathbf{w} que é dada por \mathbf{w}_h onde

$$\mathbf{w}_h(t_{k+1}) = \frac{\mathcal{A}_{t_{k+1}, h} - \mathcal{A}_{t_k, h}}{\Delta t} \circ \mathcal{A}_{t_{k+1}}^{-1}.$$

Nota 2.5. Na prática, \mathbf{w}_h é calculado primeiramente na configuração de referência, sendo posteriormente “transportado” para a configuração corrente.

Discretização no tempo

Nesta secção, queremos obter uma discretização no tempo, como referido anteriormente. Para isso, comecemos por obter uma discretização da derivada material.

Usando (1.7), temos que

$$\int_{\Omega_{t_{k+1}}} \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}(t_{k+1}, \mathbf{x}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{v}} J_{\mathcal{A}_{t_{k+1}}} \, d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Recorrendo à fórmula de expansão de Taylor, segue-se que

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{v}} J_{\mathcal{A}_{t_{k+1}}} \, d\tilde{\mathbf{x}} \approx \int_{\Omega_0} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_k}{\Delta t} \tilde{\mathbf{v}} J_{\mathcal{A}_{t_{k+1}}} \, d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Fazendo a mudança de variável $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_{t_{k+1}}^{-1}(\mathbf{x})$, concluímos que

$$\int_{\Omega_0} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_k}{\Delta t} \tilde{\mathbf{v}} J_{\mathcal{A}_{t_{k+1}}} \, d\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_{t_{k+1}}} \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_{t_{k+1}}} \bar{\mathbf{u}}_k \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_k$ está definido em $\Omega_{t_{k+1}}$, uma vez que

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k \circ \mathcal{A}_{t_k} \circ \mathcal{A}_{t_{k+1}}^{-1},$$

ou seja, $\bar{\mathbf{u}}_k$ surge do cálculo de \mathbf{u}_k na configuração de referência, sendo posteriormente transportado para a configuração corrente.

Discretização no espaço

Consideremos a triangulação habitual definida anteriormente: $\mathcal{T}_{0,h}$ do domínio de referência e $\mathcal{T}_{t_{k+1},h}$ do domínio corrente.

Sejam $\tilde{\mathcal{Q}}_h = \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_{0,h})$ e $\tilde{\mathbf{V}}_h = [\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_{0,h})]^n$.

Os correspondentes espaços na configuração corrente são dados por

$$\mathcal{Q}_{t_{k+1},h} = \{q_{t_{k+1},h} : q_{t_{k+1},h} \circ \mathcal{A}_{t_{k+1},h} \in \tilde{\mathcal{Q}}_h\},$$

$$\mathbf{V}_{t_{k+1},h} = \{\mathbf{v}_{t_{k+1},h} : \mathbf{v}_{t_{k+1},h} \circ \mathcal{A}_{t_{k+1},h} \in \tilde{\mathbf{V}}_h\}.$$

A solução numérica pode ser obtida em $t = t_{k+1}$ da seguinte forma:

Determinar $\mathbf{u}_{k+1,h} \in \mathbf{V}_{t_{k+1},h}$ tal que $\mathbf{u}_{k+1,h} = \mathbf{g}_2(t_{k+1})$ em $\Gamma_{t_{k+1}}^D$ e $p_{k+1,h} \in$

$Q_{t_{k+1},h}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1,h}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right)_{\Omega_{t_{k+1}}} + c(\mathbf{u}_{k,h} - \mathbf{w}_{k,h}; \mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} + b(\mathbf{v}_h, p_{k+1,h})_{\Omega_{t_{k+1}}} \\ + a(\mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} = \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}_{k,h}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right)_{\Omega_{t_{k+1}}} + \int_{\Gamma_{t_{k+1}}^N} \mathbf{g}_{1,k+1} \cdot \mathbf{v}_h \cdot \nu \, ds \\ + (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_{t_{k+1}}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{t_{k+1},h} \cap \mathbf{H}_{\Gamma_t^D}^1(\Omega_t), \\ b(\mathbf{u}_{k+1,h}, q_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} = 0, \quad \forall q_h \in Q_{t_{k+1},h}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,h} & \text{projecção } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ de } \mathbf{u}_0 \text{ e } \mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1}), \\ b(\mathbf{v}_h, p_{k+1,h})_{\Omega_{t_{k+1}}} & = \int_{\Omega_{t_{k+1}}} \operatorname{div} \mathbf{v}_h p_{k+1,h} \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v}_{k+1,h}, p_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} & = \int_{\Omega_{t_{k+1}}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1,h} p_h \, d\mathbf{x}, \\ a(\mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} & = 2 \int_{\Omega_{t_{k+1}}} \mu D(\mathbf{u}_{k+1,h}) : D(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}, \\ c(\mathbf{u}_{k,h} - \mathbf{w}_{k,h}; \mathbf{u}_{k+1,h}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_{t_{k+1}}} & = \int_{\Omega_{t_{k+1}}} ((\mathbf{u}_{k,h} - \mathbf{w}_{k,h}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{k+1,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Simulação numérica e validação

Consideremos o problema (1.37) onde $\Omega_0 = (0, 5) \times (-1, 1)$, $\Gamma_t^N = \{5\} \times [-1, 1]$, $\Gamma_t^D = \partial\Omega \setminus \Gamma_t^N$ e $I = [0, 5]$ e seja $\mathbf{g}_h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + d(t, \mathbf{x})$ tal que

$$d(t, \mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0.02((x - 2.5)^2 + 5)x(5 - x)j(t)((\mathbf{1}_{t \geq 1} + \mathbf{1}_{t \leq 3}) + \mathbf{1}_{t > 3}) \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} j(t) & = -0.15625t^7 + 2.1875t^6 - 12.46875t^5 + 37.1875t^4 - 62.34375t^3 + 59.0625t^2 \\ & \quad - 29.53125t + 6.0625, \end{aligned}$$

e sejam $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\mu = 1$ e $\mathbf{u}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ calculados tais que

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} 1 - y^2 \\ 0 \end{array} \right], \quad p(t, \mathbf{x}) = -2\mu(x - 5)$$

sejam solução do sistema (1.37). Aplicando o método (2.16), obtemos a solução numérica da Figura 2.8 e respetiva evolução temporal do erro numérico na Figura

2.9. O erro numérico é calculado através das seguintes expressões:

$$e_u = \left(\Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \|\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_{t_k})}^2 \right)^{1/2}, \quad e_p = \left(\Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \|p(t_k) - p_k\|_{L^2(\Omega_{t_k})}^2 \right)^{1/2},$$

onde $\mathbf{u}(t_k)$ e $p(t_k)$ denotam, respetivamente, a solução numérica da velocidade e da pressão no instante t_k e \mathbf{u}_k e p_k denotam, respetivamente, a solução exata da velocidade e da pressão no instante t_k .

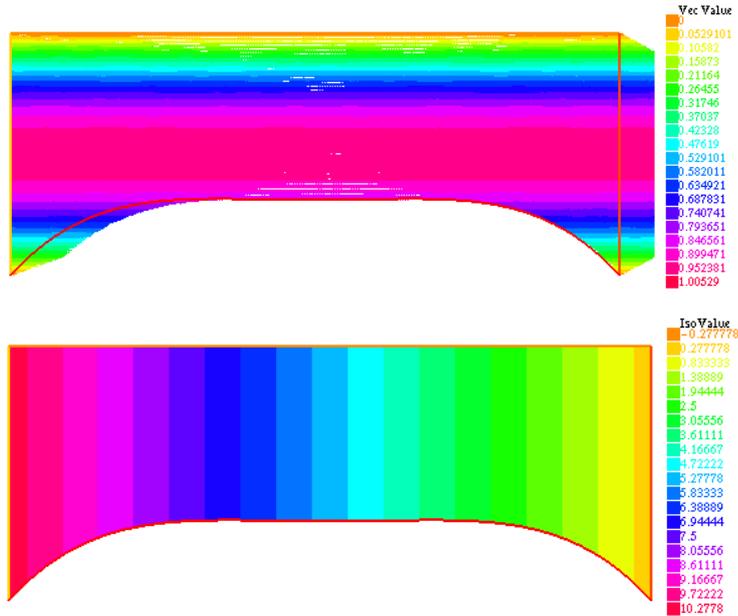


Figura 2.8: Gráfico da magnitude da velocidade (cima) e da pressão (baixo) no instante $T = 5$ para $\Delta t = 0.1$ e $h = 0.041756$.

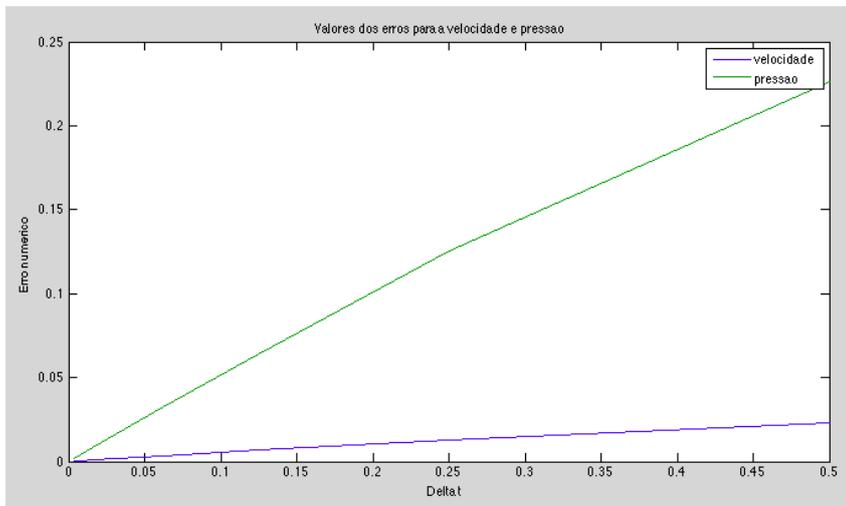


Figura 2.9: Evolução do erro para a velocidade e pressão num domínio móvel.

Para calcular a ordem de convergência para a discretização no tempo, procedemos

Δt	e_u	e_p
0.5	0.023366	0.22607
0.25	0.012885	0.125169
0.125	0.006726	0.064008
0.0625	0.003434	0.032209
0.03125	0.001735	0.016136
0.015625	0.000872	0.008074
0.0078125	0.000437	0.004038
0.00390625	0.000219	0.002019

Tabela 2.3: Tabela dos erros numéricos com $h = 0.168934$.

de modo análogo ao exemplo da secção 2.4.1. Pelos valores da Tabela 2.4, temos novamente uma ordem de convergência um.

\bar{k}	u_{ord}	p_{ord}
1	0.858718	0.852892
2	0.937871	0.967553
3	0.969859	0.990788
4	0.984954	0.997181
5	0.992536	0.998927
6	0.996695	0.999643
7	0.996702	1

Tabela 2.4: Tabela da ordem de convergência do tempo num domínio móvel com $h = 0.168934$.

Capítulo 3

Simulação Numérica

Neste capítulo, vamos apresentar um exemplo de aplicação das equações de Navier-Stokes.

Euglena é um género de alga unicelular que vive normalmente em águas continentais calmas.

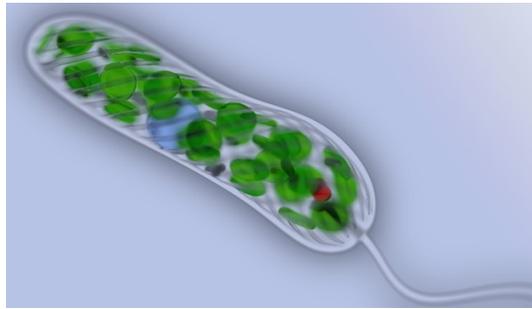


Figura 3.1: Uma espécie do género *Euglena*.

Suponhamos que o ser unicelular ocupa o domínio da Figura 3.2 ocupado com água, em que o referencial considerado se situa no início da sua cauda.

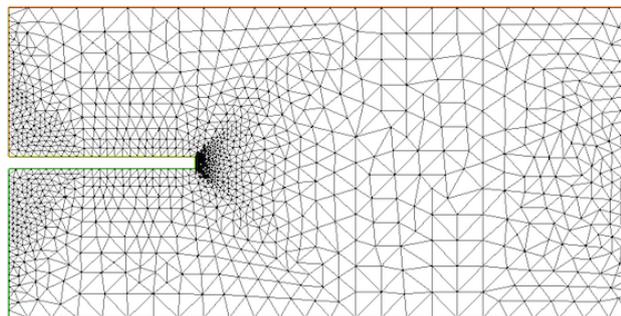


Figura 3.2: Domínio ocupado pelo ser unicelular.

Queremos estudar o efeito que o movimento da cauda provoca na água, ou seja, queremos calcular a velocidade e pressão da água quando o ser unicelular desloca a cauda na água. Para simular este problema, o sistema de equações a resolver é o sistema (1.37):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu D(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad \text{em } I \times \Omega_t \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } I \times \Omega_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \text{em } \Omega_0 \\ (2\mu D(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \nu = \mathbf{g}_1, \quad \text{em } I \times \Gamma_t^N \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, \quad \text{em } I \times \Gamma_t^D. \end{array} \right.$$

onde $\mathbf{g}_h(t\mathbf{x}) = \mathbf{x} + d(t, \mathbf{x})$ é tal que

$$d(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha x^2 \sin(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \mu = 0.01, \quad \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \text{ e}$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in [0, 10] \times 0 \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in [0, 10] \times 5 \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in 0 \times [0, 2.4] \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in 0 \times [2.6, 5] \\ [\beta y(5 - y)t \ 0]^T, & \mathbf{x} \in [0, L] \times 2.6 \\ [\beta y(5 - y)t \ 0]^T, & \mathbf{x} \in [0, L] \times 2.4 \\ [\beta y(5 - y)t \ 0]^T, & \mathbf{x} \in L \times [2.4, 2.6] \end{cases}$$

onde $\beta = 0.03$. Note-se que o valor de α tem de ser ajustado consoante o comprimento da cauda L do ser unicelular. Isto acontece de modo a gerar uma malha válida. Neste caso, vamos considerar para todos os testes $\alpha = 0.01$. Vejamos que implicações tem nos valores da velocidade e pressão o facto de se alterar o comprimento da cauda, para vários instantes de tempo, $t = 2.5$, $t = 7.5$ e $T = 10$.

Pelas Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, podemos então concluir que o facto de L aumentar provoca também um aumento da velocidade e pressão. Este acontecimento seria de esperar, uma vez que a cauda tem maior área de contacto com a água.

Note-se ainda que na área à volta da cauda são geradas zonas de refluxo, pelo facto da cauda provocar ondas quando em movimento.

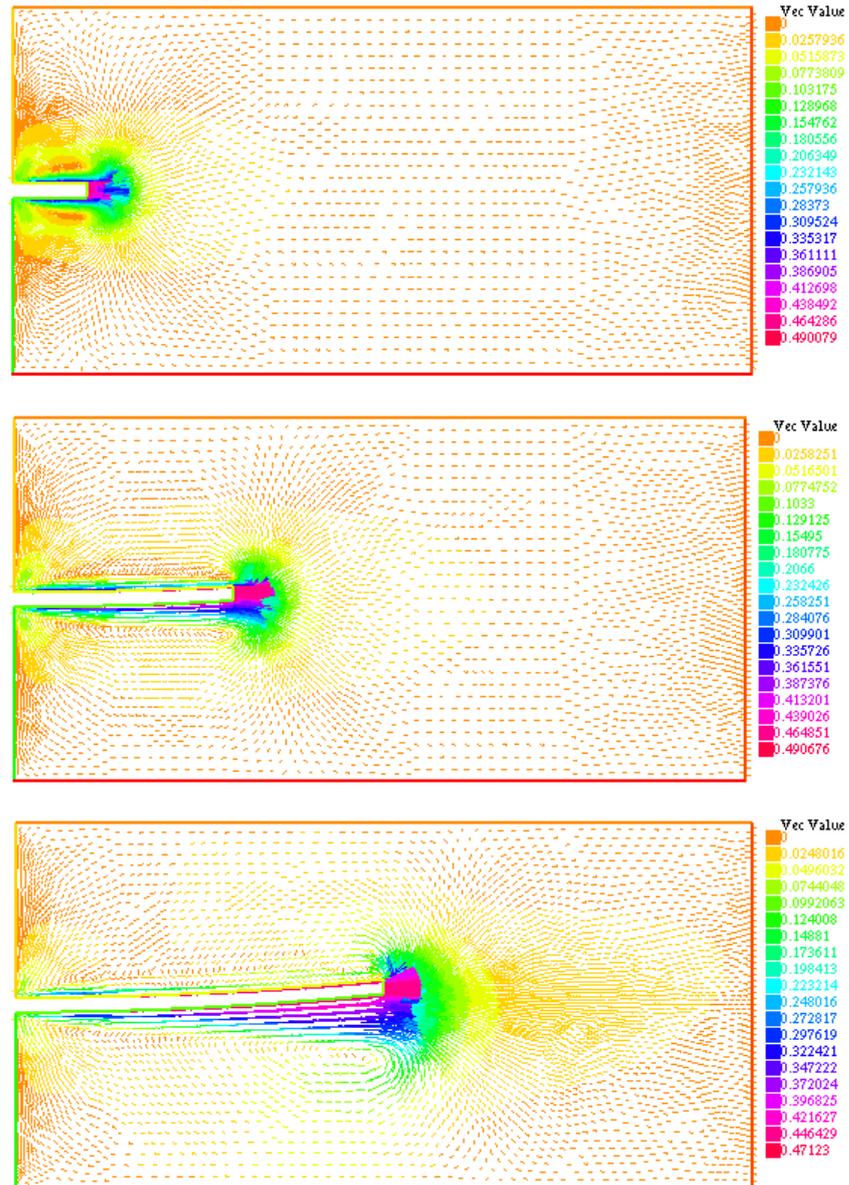


Figura 3.3: Evolução da magnitude da velocidade para $L = 1$, $L = 3$ e $L = 5$ para $t = 2.5$, $\Delta t = 0.1$ e $h = 0.714509$.

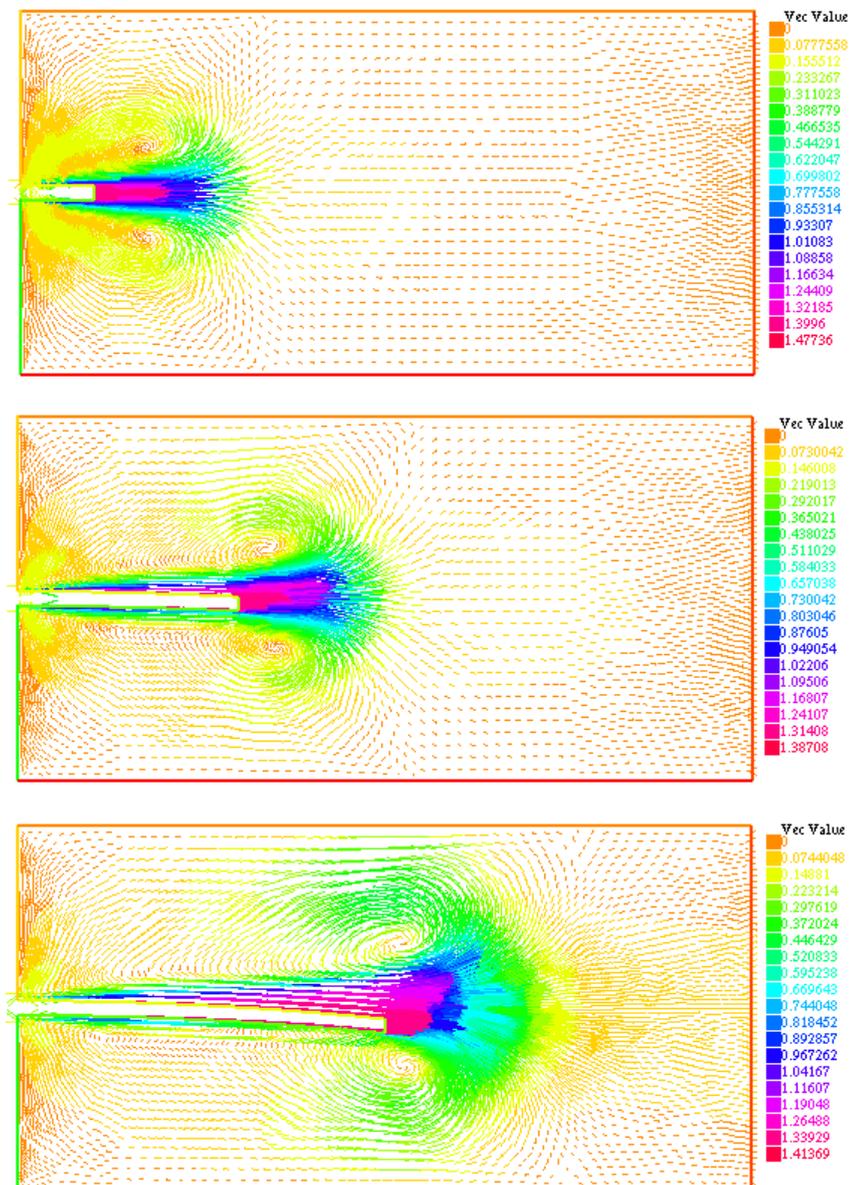


Figura 3.4: Evolução da magnitude da velocidade para $L = 1$, $L = 3$ e $L = 5$ para $t = 7.5$, $\Delta t = 0.1$ e $h = 0.714509$.

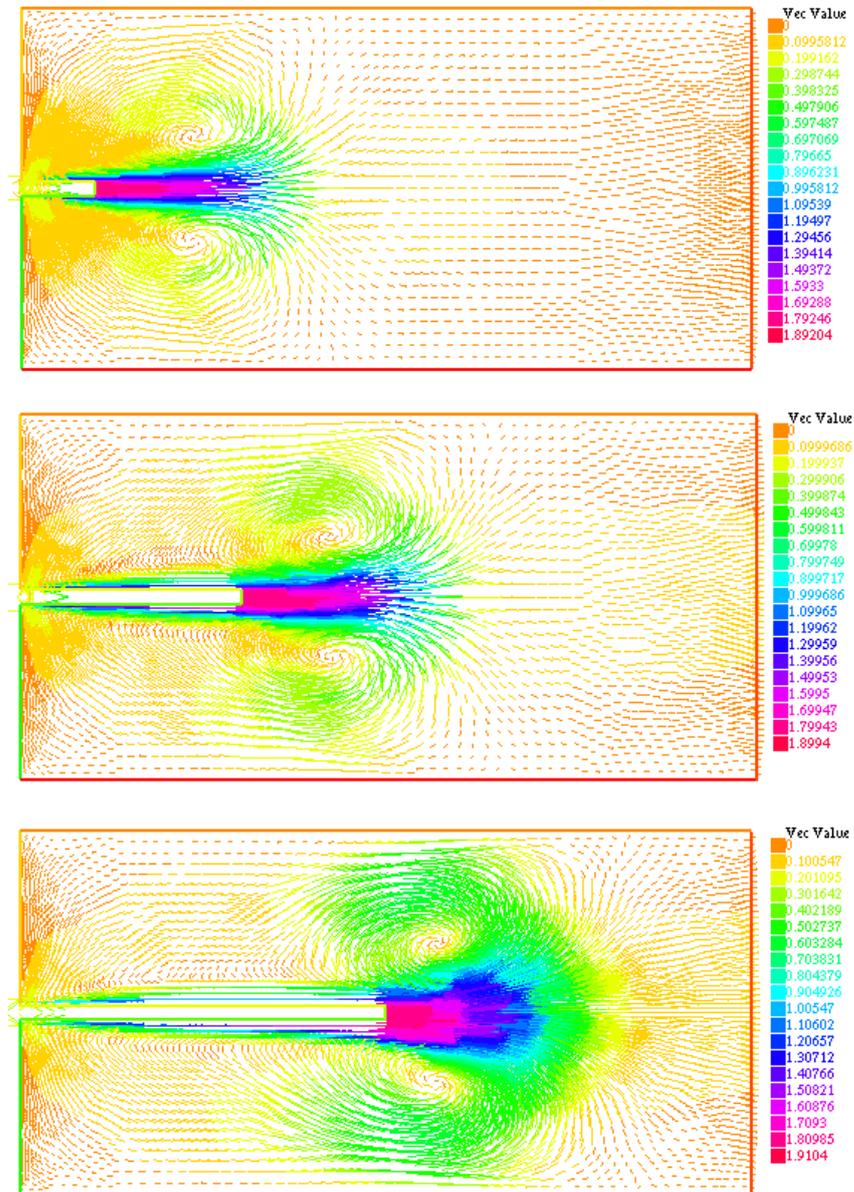


Figura 3.5: Evolução da magnitude da velocidade para $L = 1$, $L = 3$ e $L = 5$ para $T = 10$, $\Delta t = 0.1$ e $h = 0.714509$.

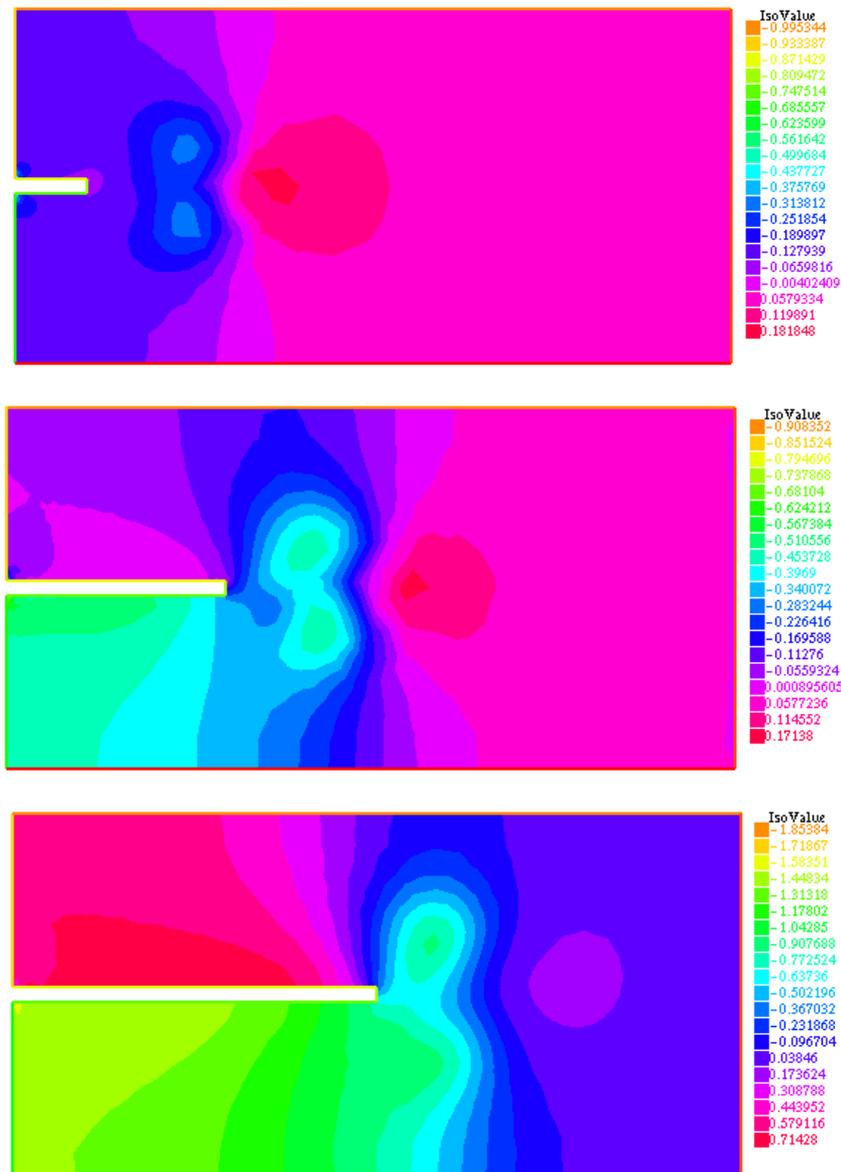


Figura 3.6: Evolução da pressão para $L = 1$, $L = 3$ e $L = 5$ para $\Delta t = 0.1$ e $h = 0.714509$.

Conclusão

Neste texto, o foco principal foi a modelação e simulação numérica das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em domínios móveis.

Na fase inicial, para a derivação das equações de Navier-Stokes, foram apresentados três sistemas de coordenadas usados ao longo do texto - o sistema de coordenadas euleriano, o lagrangeano e o euleriano-lagrangeano. De seguida, apresentámos algumas quantidades cinemáticas associadas ao fluido, como a velocidade, aceleração e derivada material. Para atingir o objetivo principal desta fase, baseámos-nos nas leis de conservação da massa e do momento linear. Adicionalmente, o Teorema de transporte de Reynolds é também relevante para a derivação das equações de Navier-Stokes.

Na segunda fase deste trabalho, começámos por introduzir espaços de funções necessários para o texto - L^2 e H^1 . Estes são importantes na resolução do problema contínuo, ou seja, na formulação fraca do problema contínuo. De modo a resolver as equações de Navier-Stokes, foi necessário discretizar o problema no espaço e no tempo. Desta forma, os métodos numéricos usados foram as diferenças finitas para o tempo e o método dos elementos finitos para o espaço.

A discretização numérica das equações de Navier-Stokes foi realizado em dois casos distintos: o caso em que o domínio é fixo e o caso em que é móvel, em que o processo é idêntico em ambos. No entanto, no caso em que o domínio é móvel, existe uma função que permite controlar as deformações no domínio - a função ALE. O cálculo desta função foi, de igual modo, feito usando o método dos elementos finitos, usando a técnica da extensão harmónica.

Por fim, aplicámos os conhecimentos desenvolvidos num caso prático, simulando o movimento da cauda de um ser unicelular na água. Deste modo, foi possível analisar o efeito deste acontecimento na velocidade e pressão da água.

Devido às inúmeras aplicações das equações de Navier-Stokes, muitos dos problemas do dia-a-dia podem ser modelados por estas equações. Distinguem-se as

áreas da hemodinâmica, engenharia aeroespacial, engenharia aeronáutica, entre outras. Em particular, a modelação de problemas na área da hemodinâmica usando as equações de Navier-Stokes é muito frequente, uma vez que o sangue se encontra nas condições do fluido referido durante este texto.

De entre os problemas simulados na área da hemodinâmica, destacam-se os problemas de fluido-estrutura que simulam o fluxo de sangue numa artéria. Estes problemas são de difícil simulação, uma vez que os dois sub-problemas existentes - o problema do fluido e o da estrutura - são difíceis de desassociar.

Bibliografia

- [1] Gonçalo Pena. *Spectral Element Approximation of the Incompressible Navier-Stokes Equations in a Moving Domain and Applications*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.
- [2] Alfio Quarteroni e Luca Formaggia. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System*. Politecnico di Milano e  cole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.
- [3] Alfio Quarteroni, Luca Formaggia e Alessandro Veneziani. *Cardiovascular Mathematics. Modelling and Simulation of the Circulatory System*. Springer-Verlag Italia, Milano 2009.
- [4] Alfio Quarteroni e Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 2nd edition, 1997.
- [5] Fabio Nobile. *Numerical Approximation of Fluid-Structure Interaction Problems with Application to Haemodynamics*.  cole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [6] Daniele Lamponi. *One Dimensional and Multiscale Models for Blood Flow Circulation*.  cole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- [7] Luca Formaggia e Fabio Nobile. *A Stability Analysis for the Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation with Finite Elements*.  cole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999.
- [8] Franco Brezzi e Jim Douglas, Jr. *Stabilized Mixed Methods for the Stokes Problem*. University of Minnesota, 1987.
- [9] Mark S. Gockenbach. *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. SIAM, Michigan Technological University Houghton, 2006.

- [10] Mats G. Larson e Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer, 2013.
- [11] Endre Süli. *An Introduction to the Numerical Analysis of Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2005.
- [12] Qing Han. *A Basic Course in Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2011.
- [13] James Stewart. *Cálculo - Volume 2*. Pioneira, 5^a edição, 2006.
- [14] Fabio Louallen-Nironi. *Taylor Series and Polynomials*. Columbia University, 2011.
- [15] Ana Paula Santana e João Queiró. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Universidade de Coimbra, 2009.
- [16] Maria do Carmo Coimbra. *Integrais de Linha e de Superfície*. Universidade do Porto, 2008.
- [17] Victor L. Streeter. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Book, 7th edition, 1979.
- [18] Rutherford Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice Hall, 1962.
- [19] Frédéric Hecht. *FreeFem++*. 3rd edition, Université Pierre et Marie Curie.