Boletim da SPM - nº11
Dezembro de 1988

A. N. KOLMOGOROV (1903-1987)
ou
A MATEMATICA E O SENSO COMUM

Carlos Fiolhais
Departamento de Física – Universidade de Coimbra

Os matemáticos são frequentemente divididos em "puros" e "aplicados". Os primeiros tratam de assuntos completamente desligados da realidade, enquanto os segundos tratam de assuntos com algo, ainda que infinitesimal, a ver com a realidade.

É controversa a distinção entre matemáticos "puros" e "aplicados" até porque começa por ser controversa a própria noção de realidade (muitos filósofos, para não dizer todos, discutiram essa noção).

A controvérsia sobre o que é "o real" pode ser ilustrada por uma passagem de um romance recente, "Deus e o Computador", de um engenheiro italiano, Roberto Vacca, onde se ficciona sobre os escritos da lógica do único papa português, João XXI. Uma matemática, Marta de seu nome, crê ter encontrado num pergaminho desse papa a solução para um problema informático moderno. A senhora acaba por se suicidar e o chefe dela, Vittorio, na busca das razões de tal acto, tem o seguinte diálogo com a psicanalista de Marta, Barbara:

– Barbara: " O trabalho que (Marta) fazia era matemático, abstracto, e por isso não necessariamente preso à realidade".

– Vittorio: "Porque diz isso? É claro que o trabalho matemático se prende com a realidade. Se fizermos um cálculo e nos enganarmos, apercebemo-nos logo ao efectuar as verificações. Se um programa de computador não faz as coisas com exactidão, o programador dá-se muito bem conta disso".

Se aceitarmos uma definição qualquer da realidade e, por convenção, a referida classificação de matemáticos em "puros" e "aplicados", Andrei Nikolaevitch Kolmogorov (1903-1987), um dos grandes matemáticos deste século, tem de ser designado por "aplicado". Mas deve logo acrescentar-se que poucos matemáticos "aplicados" foram tão "puros". Isto porque procurou sempre relacionar a descrição de factos empíricos com os fundamentos conceptuais da matemática.

A revista "Time" na meia-dúzia de linhas que dedicou à sua morte em Novembro de 1987, considera, muito justamente, Kolmogorov como o criador da moderna teoria das probabilidades e refere os seus trabalhos em lógica, cibernética e hidrodinâmica. Cita ainda a seguinte frase de Kolmogorov:

" A matemática começa onde o senso comum acaba".

Esta afirmação é certamente discutível, pois há quem pense que a ciência é apenas senso comum numa ou noutra forma. Para T. Huxley, "a ciência não é mais do que senso comum treinado e organizado, diferindo deste apenas como um veterano de guerra difere de um recruta bruto", enquanto W. Thompson (Lord Kelvin) advertiu peremptório: "Não pensem que a matemática é difícil e compreensível, repulsiva ao senso comum. É apenas a etearização do senso comum". A afirmação kolmogoroviana contém porém um fundo de verdade. O senso comum cartesiano é a "mais bem distribuída das coisas do mundo", ao passo que a intuição e o génio matemático são das coisas mais raras e mal distribuídas.

Kolmogorov foi uma dessas aves raras a quem coube voar alto por cima do senso comum. Propomo-nos aqui fornecer um breve bosquejo sobre a sua vida e obra, explicando o alcance e o significado de alguns desses voos.

Se se pretende resumir a sua obra, tarefa de resto difícil, tão vasta e prolixa foi a produção do matemático soviético, tem de se falar necessariamente da axiomatização da teoria das probabilidades e explicitar em que medida foi além do senso comum na definição do conceito de probabilidade. A palavra "medida" é aqui a palavra-chave, pois Kolmogorov recorreu à chamada medida de Lebesgue, do nome do matemático francês Henri Lebesgue.

A noção de probabilidade é uma das que mais tem atrapalhado os matemáticos, pelo menos os "puros". Quanto mais não seja pela sua origem pouco "pura". Foi no século XVIII, quando a distinção entre "puros" e "aplicados" ainda era espúria, que Laplace, Bernoulli e outros criaram o cálculo das probabilidades. Tratava-se de propor uma linguagem e um tratamento mais ou menos matemático dos chamados "jogos de azar", jogos que têm a ver com a realidade, pelo menos para quem perde e para quem ganha. Conceitos como acontecimento, probabilidade, variável aleatória, média surgiram assim à margem da matemática tradicional (análise, álgebra, geometria) e permaneceram durante muito tempo imprecisas, por ausência de uma formalização rigorosa. Assentavam em verdades simples como, por exemplo, o facto de, se alguém lançar repetidamente uma moeda (não viciada) ao ar, aproximadamente metade das vezes sair cara e na outra metade sair coroa. E a aproximação melhora quantas mais vezes se lança a moeda. Esta é uma verdade da qual toda a gente se julga detentora e daí a asserção de Laplace: "A teoria das probabilidades é senso comum reduzido a fórmulas".

A. N. Kolmogorov, nos anos trinta do nosso século, veio mostrar que não era necessário sujar as mãos, lançando moedas ao ar, para se ter uma teoria consistente da probabilidade. Bastava que as noções empíricas do acontecimento, probabilidade, variável aleatória e média fossem associadas às noções precisas de conjunto, medida, função e integral de medida.

Esse dicionário garantiu uma respeitabilidade ao cálculo das probabilidades, que este anteriormente não tinha. E, como é uso e costume nestas coisas de ciência, o novo patamar de abstracção permitiu alcançar algumas extensões relevantes e fornecer respostas a questões que até aí pareciam indecidíveis. A medida de um dado conjunto era um conceito que no início deste século já estava suficientemente amadurecido, com os trabalhos de Peano, Borel e Lebesgue. Tem a ver com a "pavimentação" do conjunto em subconjuntos, procedimento que remonta mesmo aos tempos de Euclides e Arquimedes, quando se pretendia obter a área ou o volume de certas figuras geométricas por meio da sua divisão em partes de área ou volume conhecido. Assim, sempre que se pudesse decompor um acontecimento em acontecimentos elementares, era possível também "medir" esse acontecimento, i.e. indicar qual a respectiva probabilidade. A média de uma variável passou a ser representada por um integral de medida de Lebesgue, uma generalização do vulgar integral de Riemann. Cada valor da variável é multiplicado por uma certa medida infinitesimal e todos os valores são depois somados.

A teoria das probabilidades ficou portanto ligada à análise (mais propriamente à análise funcional) e é aí que ainda hoje permanece. Não é pois de estranhar que Kolmogorov tenha fornecido alguns atributos importantes à análise funcional. Um livro seu, escrito de colaboração com S. Fomin e felizmente traduzido em português, constitui uma referência preciosa para os estudantes desse domínio ("Elementos da teoria das funções e da análise funcional", Mir, Moscovo, 1986).

O trabalho de Kolmogorov, "Teoria geral da medida e teoria da probabilidade", foi publicado em 1929, quando o autor tinha vinte e seis anos, portanto em plena pujança intelectual. Quatro anos depois, publicou os "Fundamentos da teoria da probabilidade", no qual se reúnem as suas ideias principais sobre a axiomatização da teoria da probabilidade.

Voltemos porém atrás para uma exposição sucinta do currículo de Kolmogorov. O seu nascimento em Tambov, na Rússia, ocorreu em 1903, numa data que para os portugueses é fácil de fixar — 25 de Abril. O nascimento do futuro matemático foi infausto para a mãe, que morreu do parto.

Em 1921 (portanto aos dezoito anos) Kolmogorov publicou o seu primeiro trabalho científico. Tratava-se de um estudo da teoria das séries trigonométricas (sérias de Fourier). A teoria das funções reais faz parte aliás dos temas mais cultivados da matemática soviética deste século, pelo que se pode dizer que Kolmogorov desde o início da sua carreira se revelou um lídimo representante dessa escola, por vezes tão mal conhecida e avaliada no exterior (a recente publicação em inglês da "Enciclopédia Soviética da Matemática" pode talvez contribuir para modificar esse estado de coisas).

Em 1925 terminou a sua licenciatura em Física e Matemática na Universidade Estatal de Moscovo. Nos anos seguintes, como já se referiu, dedicou-se ao estudo de problemas da teoria das probabilidades, relacionando-a com a teoria das funções.

Foi nomeado em 1931 professor da Universidade de Moscovo, em 1933 director do Instituto de Matemática dessa instituição e em 1939 membro da prestigiosa Academia das Ciências da URSS.

Durante a segunda guerra, trabalhou na teoria dos processos estocásticos, que tem a ver com modificações temporais de probabilidade. Um matemático russo, A. Markov, tinha estudado processos que são hoje conhecidos por "processos de Markov" . Esses processos caracterizam-se por na evolução dinâmica de variáveis aleatórias haver "apagamento da memória" (i.e. o valor futuro de uma variável depende apenas do seu valor presente e não dos seus valores anteriores). A equação de Kolmogorov-Chapman foi proposta no quadro das sequências de Markov e logo se revelou de utilidade. Os estudos da dinâmica estocástica empreendidos por Kolmogorov foram aplicados durante a guerra no desenvolvimento de sistemas de controle da aterragem de aeronaves em porta-aviões. Ao mesmo tempo, mas do outro lado do mar, uma pleiade de físicos e matemáticos (J. von Neumann, S. Ulam e muitos outros) trabalhava no planeamento da bomba atómica, a qual viria a mostrar em definitivo que nem a física nem a matemática são inocentes.

Os interesses de Kolmogorov dentro do vasto mundo da matemática percorrem, como que por um corte transversal, os mais variados campos. Assim, para além da teoria das probabilidades e da análise funcional, publicou trabalhos sobre teoria de conjuntos, topologia, sistemas dinâmicos, teoria da informação e vários problemas de física (turbulência em fluidos, movimento browniano, difusão). Nos Estados Unidos, outros grandes físico-matemáticos deste século (von Neumann, N. Wiener, M. Kac, etc.) estudavam ao mesmo tempo problemas relacionados ou mesmo idênticos.

Logo em 1938 a integração de Kolmogorov no sistema político-cultural soviético foi corroborada pela publicação de um artigo sobre história da matemática para a "Grande Enciclopédia Soviética", onde o autor procurava enquadrar a matemática na cosmovisão do materialismo dialéctico. Em 1954, como representante do país anfitrião, proferiu uma palestra notável (onde anunciava uma violação da ergodicidade em alguns sistemas dinâmicos) no Congresso Internacional de Matemática realizado em Moscovo. Em 1965, Kolmogorov recebeu, em conjunto com V. Arnold, o prêmio Lenine, a mais alta condecoração que o estado soviético concede.

Por estranho que pareça, a Kolmogorov nunca foi outorgada a medalha Fields, de algum modo o correspondente ao prémio Nobel no domínio da matemática. Só há de resto até hoje um total de dois medalhados Fields soviéticos. Esse facto prende-se provavelmente com razões políticas e com um certo isolamento da matemática soviética, embora de primeira água, do mundo ocidental (o próprio sistema cultiva — ou cultivou, já que agora está em curso a "Perestroika" — esse isolamento, exigindo quase a publicação em russo e colocando dificuldades administrativas ao intercâmbio com o exterior). Matemáticos como I. Gelfand, V. Arnold (discípulo de Kolmogorov, a quem bastante marcou o estilo de mestre) e vários outros são porém internacionalmente reconhecidos. No vizinho domínio das ciências físicas, passa-se algo semelhante. A física soviética, embora também de primeira apanha, só obteve até hoje 7 prémios Nobel, em contraste com cerca de 50 norte-americanos a até 3 suecos. A atribuição de prémios científicos internacionais não é decerto um processo estocástico...

A fim de ilustrar o tipo de descobertas científicas devidas a Kolmogorov e prevenindo desde já o leitor que se limita a referência a problemas relacionados com a física (em casa de ferreiro, espeto de ferro), vamos descrever em linhas gerais alguns dos enunciados e definições aos quais o seu nome está associado.

1) Teorema KAM

Pode dizer-se que as ideias de probabilidade entraram em física nos finais do século XIX com os trabalhos de Maxwell, Boltzmann e Gibbs sobre um sistema formado por um grande número de partículas, de tal modo complexo que um conhecimento completo é impossível (e de resto inútil, por conter informação irrelevante).

Ora a probabilidade é precisamente útil quando o conhecimento completo é impossível, i.e. quando a situação é caótica e o determinismo falha. Boltzmann e Gibbs desenvolveram uma mecânica de probabilidades – a "mecânica estatística" –, destinada a descrever sistemas caóticos. Uma hipótese fundamental da mecânica estatística é a chamada "hipótese ergódica" (1871), segundo a qual médias temporais de qualquer variável dinâmica podem ser substituídas por médias de "ensemble", quer dizer médias efectuadas sobre um conjunto fictício de sistemas-cópia daquele que se pretende estudar (nessas cópias as condições iniciais são as mais variadas). Para isso o ponto que representa o estado do sistema (ponto no espaço de fase, o hiperespaço das posições e velocidades) tem de percorrer à medida que o tempo avança toda a região acessível do espaço de fase. Todos os estados devem pois ser igualmente passíveis de ser realizados, tal como acontece no lançamento de uma moeda, onde cara ou coroa podem ocorrer com igual probabilidade.

Os físicos cedo verificaram que essa "hipótese" era muito frutuosa e, como é uso e costume na sua arte – a arte de descrever os factos naturais com a melhor aproximação – não se preocuparam por aí além com a demonstração da respectiva validade. Foram os matemáticos (na tradição de Hilbert, segundo o qual "a física é uma ciência extremamente difícil para os físicos") que pegaram nesse problema e constataram a sua não trivialidade, para não dizer mesmo dificuldade extrema. G. Birkhoff em 1927 formulou em linguagem matemática o agora chamado "teorema ergódico" (trata-se de um teorema, pois a sua validade pode ser demonstrada para alguns sistemas). A partir daí, os físicos-matemáticos desenvolveram toda uma teoria ergódica à volta do teorema ergódico. São por isso bem conhecidas excepções à "hipótese ergódica" (os chamados sistemas "integráveis"., para os quais o movimento é irregular e não caótico), mas pensava-se até meados dos anos cinquenta que a maior parte dos sistemas reais era suficientemente complicada para satisfazer o teorema ergódico. E até mais: que modelos simples em que havia apenas um ligeiro afastamento da "integrabilidade" já eram ergódicos.

Surgiu porém Kolmogorov em 1954 a conjecturar que, contrariamente ao senso comum estabelecido, existiam sistemas quase-integráveis que não eram ergódicos: as suas órbitas no espaço de fase eram regulares em regiões bem definidas, que constituíam uma espécie de ilhas de estabilidade num mar de possíveis trajectórias caóticas. Esta conjectura foi verificada num exemplo computacional por Fermi, Parta e Ulam em 1955 e engenhosamente demonstrada por dois colaboradores de Kolmogorov, Arnold e Moser, para condições diferentes, respectivamente em 1962 e 1963. O teorema resultante, que contraria a hipótese ergódica, tem hoje o nome de teorema KAM (das iniciais dos três matemáticos soviéticos), sendo uma pedra angular no estudo de sistemas dinâmicos. O caos não é pois tão universal como se supunha e interpenetra-se com a ordem de uma maneira que continua hoje a ser investigada intensivamente por físicos e matemáticos (e químicos e geólogos) de todo o mundo.

2 — Sistemas K

O facto de um sistema ser ergódico, i.e. de satisfazer o teorema ergódico não significa forçosamente que tenha lugar uma aproximação do equilíbrio. O fenómeno da irreversibilidade, ligado ao facto de o estado de equilíbrio funcionar como atractor, exige uma condição mais forte do que a irreversibilidade — trata-se da chamada propriedade de "mistura". O físico-matemático J. Sinai provou em 1962 que um gás de esferas rígidas é ergódico e, mais do que isso, de mistura (todos os sistemas ergódicos são de mistura, mas o inverso não é verdade). Kolmogorov propôs, ainda nos anos sessenta, uma condição mais forte do que a de "mistura". Definiu uma grandeza chamada hoje entropia de Kolmogorov-Sinai (a compreensão dessa entropia ultrapassa certamente o senso comum, pois já a entropia de Boltzman, mais simples, é geralmente considerada um conceito pouco intuitivo). Os sistemas de Kolmogorov ou sistemas K são aqueles cuja entropia de Kolmogorov-Sinai é positiva. O grau de caoticidade desses sistemas é superior ao dos de mistura. Em sistemas K condições iniciais muito próximas conduzem a trajectórias que divergem exponencialmente (os coeficientes da exponencial são chamados coeficientes de Liapounov, do nome do matemático russo A. M. Liapounov).

Sistemas ainda mais caóticos do que os sistemas K são os sistemas de Bernoulli pois o resultado da evolução dinâmica é completamente aleatório.

Deve-se pois a Kolmogorov a extensão da hierarquia de sistemas caóticos e a descrição quantitativa de algumas classes de caos.

3 — Números aleatórios

Finalmente, como se falou em sistemas completamente caóticos, importa saber se o caos absoluto se pode definir com rigor. A resposta deve-se, uma vez mais, a Kolmogorov (e também a J. Chaitin nos E.U.A.). Esses autores propuseram nos anos setenta a seguinte definição de número aleatório: Aleatório é aquele número cujo algoritmo mais pequeno para o produzir num computador é necessáriamente um algoritmo trivial que contém o próprio número.

Fica como exercício para o leitor obter alguns exemplos de números aleatórios de acordo com esta definição... Pode tentar ao acaso pois a maior parte dos números (inteiros ou reais) são aleatórios, embora seja difícil provar que um dado número o é. Assuntos como a teoria algorítmica da complexidade, à qual a definição de aleatoriedade pertence, tocam de perto problemas fundamentais da matemática, como os problemas da decisibilidade de enunciados num certo quadro axiomático, estudados por K. Gödel, ou as possibilidades de um autómato universal, estudadas por A. Turing.

Neste terceiro exemplo da criação matemática de Kolmogorov mais uma vez o senso comum se encontra ultrapassado, atingindo-se mesmo os limites do senso "tout court".

Nos últimos anos da sua vida, Kolmogorov interessou-se por problemas pedagógicos (metodologia da matemática a nível das escolas secundárias) tendo exercido a sua importante influência para o desenvolvimento do ensino da matemática na U.R.S.S..

A. N. Kolmogorov morreu no fim do ano passado. Os matemáticos, "puros" ou "aplicados", sabem que perderam alguém que marcou de forma irreversível a sua disciplina, essa arte difícil de ir além do senso comum com a ajuda de uns quantos integrais.

REFERENCIAS

A obra de Kolmogorov traduzida em português é:

– *A. Kolmogorov e Fomin*, "Introdução à teoria das funções e à análise funcional", Ed. Mir, Moscovo, 1986 .

Uma referência simples sobre teoria da medida é:

– *J. Kapka*, "Measure Theory: The heart of the matter", Math. Int. 8 (1986); 4, 47.

Referências de introdução à física do caos, incluindo o teorema de KAM, Sistemas K e números aleatórios são:

– *J. Lebowitz e O. Penrose*, "Modern ergodic theory", Physics Today, Fev. 1973, p.23.

– *J. Ford*, "How random is a coin toss?", Physics Today, Abril 1983, p.40

Uma obra especializada sobre sistemas dinâmicos é:

– *J. Lieberman e Lichtenberg*, "Regular and stochastic motion", Springer, N. York, 1983.

Finalmente introduções simples sobre números aleatórios e paradoxos relacionados:

– *G. Chaitin*, Scientific American, Maio 1975, p.47 e Julho 1988, p.52

– *M. Gardner*, Scientific American, Nov. 1979, p.10