O Estranho Mundo dos Fractais

Carlos Fiolhais e Jorge Alexandre Silva
Departamento de Física da Universidade de Coimbra

Bertrand Russel escreveu, em 1918, no seu livro «Misticismo e Lógica»: «A matemática possui não apenas a verdade, mas uma beleza suprema — uma beleza fria e austera como a de uma escultura».

Contudo, essa beleza apenas era perceptível para os matemáticos, habituados a lidar com os domínios abstractos da sua ciência. Recentemente, com o desenvolvimento de um novo ramo da geometria, a chamada «geometria fractal», uma parte daquela beleza tornou-se perceptível e evidente para mais gente. O surpreendente é que essa beleza ao nosso alcance se deve a uma evolução na forma de olhar a natureza.

Galileo Galilei afirmou em 1626 que:

«O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática, e os seus caracteres são os triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras num labirinto escuro».

Foram precisos cerca de 350 anos para surgir uma nova visão da natureza. Foi Benoit Mandelbrot, matemático francês contemporâneo, quem desenvolveu a noção de fractal. No seu livro «The Fractal Geometry of Nature», publicado em 1983, afirma:

«Porque é que a geometria é habitualmente descrita como fria e austera? Uma razão reside na sua inaptidão em descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de uma linha costeira, de uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é suave, nem os relâmpagos se propagam em linha recta (...) A natureza exibe não apenas um grau mais elevado, mas um nível de complexidade completamente diferente. O número de diferentes escalas de comprimento dos motivos naturais é para todos os efeitos infinito. A existência desses motivos desafia-nos a estudar aquelas formas que Euclides deixou de parte como não tendo uma forma definida, desafia-nos a investigar a morfologia do amorfo».

Nascia então a geometria fractal. Para podermos descrever o pormenor irregular e quase aleatório de muitos dos padrões da natureza, não nos podemos cingir à geometria tradicional. Com a geometria fractal, a matemática torna-nos menos «fria» e «autera» e reconcilia-se, de certo modo, com a velha natureza, que desde sempre lhe tem servido de motivo e inspiração.

O aparecimento da ideia de fractal

A evolução das ideias que deram origem aos fractais é curiosa. Diz Mandelbrot:

«Introduzi uma ideia que parecia arbitrária (...) mas que se iria revelar como a base da teoria dos fractais. A ideia era que, no estudo da variação dos preços, não havia nenhuma diferença de natureza entre as variações a curto e a longo prazo».

Com base nesta ideia, ele desenvolveu um modelo matemático que lhe permitia fazer simulações da bolsa que os especialistas não distinguiam da situação real. Da especulação bolsista, Mandelbort passou ao estudo das turbulências atmosféricas e, mais tarde, à chamada «geografia quantitativa», um novo ramo da geografia. E, a partir da ideia de saber quanto media a costa da Grã-Bretanha, Mandelbrot adaptou e aplicou a sua teoria à síntese de imagens. Obteve imagens sobre as quais afirmou:

«As imagens que calculei com a minha teoria matemática assemelhavam-se curiosamente à realidade: e se eu podia imitar a natureza, era porque provavelmente teria descoberto um dos seus segredos...

Um exemplo de fractais que é referido no livro de Mandelbrot é a fronteira entre dois países; aparece aí referenciada a fronteira entre Portugal e a Espanha a qual, poucos o sabem, é um fractal (fig.1). Vejamos porquê.

Uma circunferência não é um fractal. O seu perímetro, definido pela fórmula $2\pi r$, é finito. Para medir esse perímetro podemos colocar um polígono com um número cada vez maior de lados (triângulos, quadrado, pentágono, etc.) dentro da circunferência e calcular o perímetro do polígono. Obtemos, no limite em que o número de lados é infinito, um valor finito: precisamente $2\pi r$.

Tentemos fazer algo de semelhante para a fronteira entre Portugal e Espanha. Comecemos por medir a fronteira utilizando sucessivamente réguas de 100 Km, 10 Km, 1 Km, 1 m, etc.. O curioso é que o comprimento da fronteira vai aumentando progressivamente, à medida que se diminui a escala de observação (o processo experimental tem um limite, pois quando se chega aos átomos já não se sabe qual é o átomo espanhol e qual o átomo português...). Essas figuras cujo comprimento aumenta indefinidamente à medida que diminui a escala de medida são os fractais. Isto acontece porque existe um «rendilhado» em todas as escalas, quer em escalas pequenas quer em escalas grandes.

A auto-semelhança é uma ideia antiga. Contudo, e apesar de ser uma propriedade geométrica simples, apenas no início da década de 70 o homem se apercebeu da sua existência na natureza. Se olharmos para o mundo à nossa volta, vemos uma infinita variedade de objectos com uma estrutura geométrica deveras complexa e intrincada: uma folha de feto, um cristal de neve, a superfície irregular de uma montanha, ou até mesmo uma descarga eléctrica num meio dieléctrico (de que o caso mais conhecido é o relâmpago). Se observarmos a estrutura microscópica destes objectos o que vemos? Algo bastante surpreendente: a parte é muito semelhante ao todo. Um fractal possui um número infinito de pequeninas cópias dele próprio: é a esta propriedade que se chama auto-semelhança.

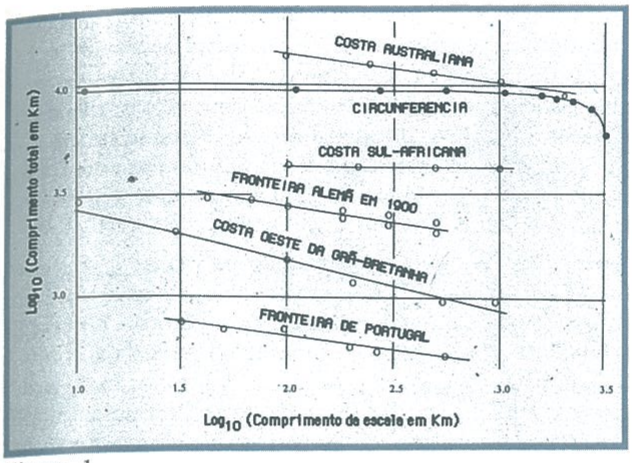


Figura 1

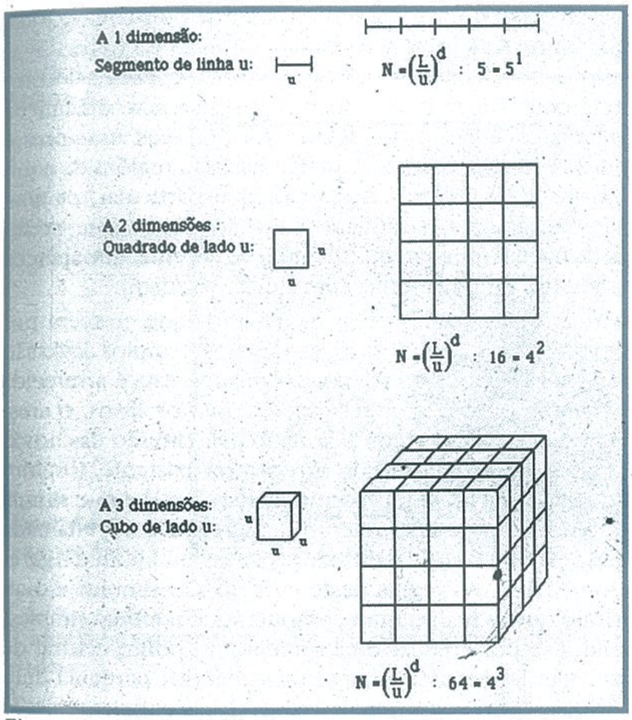


Figura 2

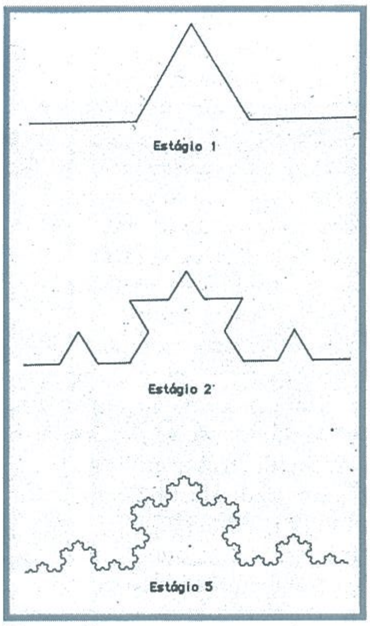


Figura 3

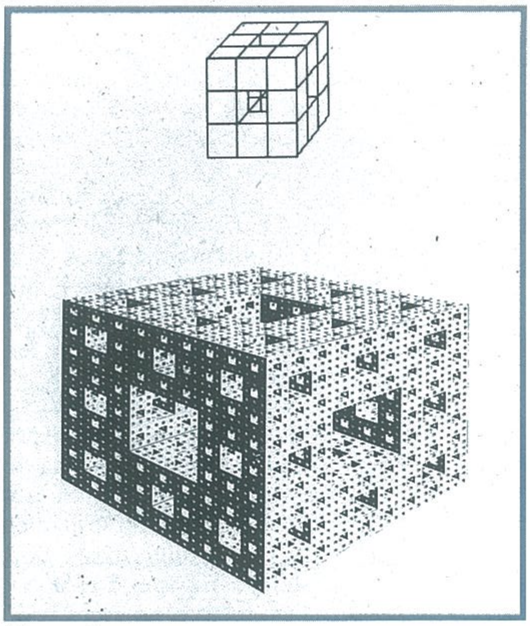


Figura 5

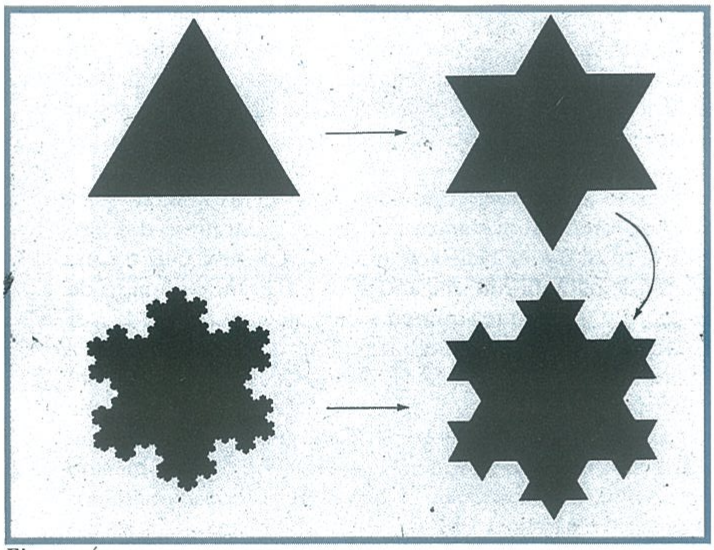


Figura 4

A auto-semelhança está relacionada com o conceito de dimensão fraccionária, isto é, pode ser traduzida matematicamente por um coeficiente chamado dimensão fraccionária. Esta dimensão, diferente da dimensão topológica habitual (que é um número inteiro), serve para caracterizar o fractal. Os fractais são objectos matemáticos que se podem definir, segundo Mandelbrot, como «um conjunto (de pontos no espaço euclideano) para o qual a dimensão de Hausdorff excede a dimensão topológica».

Podemos obter a dimensão de um objecto usando o método que a seguir se descreve. Suponhamos que temos uma linha de comprimento L. Começamos por considerar uma linha de comprimento u e sobrepômo-la à linha L, e contamos quantas linhas u são necessárias para a cobrir completamente (fig. 2). O número N = L/u representa uma medida da linha L. Analogamente, para medir um quadrado (cubo) de lado L, pegamos num quadrado (cubo) unitário de lado u e contamos o número $N = L^2/u^2$ ($N = L^3/u^3$) de que necessitamos para cobrir o objecto. De uma maneira geral, este processo leva a $N = (L/u)^d$, ou, tomando o logaritmo de ambos os membros, $d = \log N / \log (L/u)$ (1)

A auto-semelhança e a dimensão fraccionária

Para um objecto uniforme e compacto, d é um inteiro igual à dimensão topológica. Mas para um fractal tem-se que d é um número fraccionário: d é o que se chama dimensão de Hausdorff ou fractal.

Um dos exemplos mais simples é a chamada curva de Koch (fig. 3). Para formar a curva de Koch, começa-se por um segmento de recta e cria-se um «pico» no meio. Depois cria-se um «pico» em cada um dos segmentos que ficaram e assim sucessivamente, «ad infinitum». A curva construida é um fractal, cuja dimensão é $df = \log 4/\log 3 \simeq 1.262$ (tem-se N = 4 e o chamado factor de escala L/u é 3).

O «floco de neve» da fig. 4 foi obtido a partir da curva de Koch. Embora a sua área seja evidentemente finita ($A = 2\sqrt{3}/5$), o seu perímetro é infinito.

Um exemplo de um fractal no expaço a 3 dimensões é o seguinte. Começa-se por um cubo, formado de cubos mais pequenos (como o cubo de Rubik), e retiram-se os cubos do meio das faces e o cubo do centro. Repete-se o processo indefinidamente, obtendo-se o objecto representado na fig. 5: um cubo completamente esburacado, com buracos de todos os tamanhos. Trata-se de um fractal de dimensão df = log 20/log 3 $\approx$ 2.727 (tiram-se 7 cubos aos 27 iniciais, e o factor de escala é 3). O cubo chama-se «esponja de Menger» e cada uma das suas faces é chamada «carpete de Sierpinski» (de dimensão df = log 8/log 3 $\approx$ 1.893).

Podiam dar-se muitos outros exemplos de fractais, todos eles estranhos e maravilhosos. Em cada um é a auto-semelhança que lhe confere a característica de fractal.

O conjunto de Mandelbrot

O estudo das fronteiras de estabilidade é um assunto extremamente actual. Um sistema particularmente simples mas suficientemente complexo é o conjunto de Mandelbrot. Ele é obtido submetendo os números do plano complexo (números da forma $a + ib$ em que a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ é a constante imaginária) a um determinado processo. Como resultado da aplicação repetida deste processo, obtemos uma sequência de outros números complexos cuja norma (isto é, a distância à origem) pode ter um de dois comportamentos: ou se mantém finita e próxima de zero ou tende para infinito (basta para tanto ser maior que 2). É a fronteira entre estes dois domínios que delimita o conjunto de Mandelbrot. O processo iterativo que lhe dá origem baseia-se numa fórmula surpreendentemente simples:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c \qquad (2)$$

em que tanto z como c são números complexos. Este processo iterativo é muito semelhante ao que aparece na fórmula de Feigenbaum de uma iteração unidimensional; a não linearidade indicada pelo quadrado é comum a ambos os casos.

Fazendo $z_0 = 0$ e repetindo a iteração da fórmula (2) para vários valores da constante c, obtém-se o conjunto de Mandelbrot (figs. 6 e 7). Dele fazem parte os pontos cuja norma não tende para infinito mesmo após um grande número de iterações. Os restantes números pertencem à região de instabilidade e permitirem definir regiões de transição entre a estabilidade (que encontramos dentro do conjunto de Mandelbrot) e o caos, consoante a velocidade à qual a norma do número z tende para infinito. Esta transição é obtida através de uma regra geral, o que leva a concluir que até mesmo o caos tem as suas regras e o estudo de sistemas dinâmicos complexos e não-lineares está ao alcance de uma investigação e sistematização científicas.

A fronteira do conjunto de Mandelbrot é ela própria um fractal, já que é auto-semelhante. Vamos ver de seguida como é que o conjunto de Mandelbrot contém em si uma infinidade de fractais.

Os conjuntos de Júlia

Na obtenção do conjunto de Mandelbrot aplicámos a fórmula (2) fazendo $z_0 = 0$ e atribuindo a c valores do plano complexo, Se agora escolhermos para c um valor fixo (dentro do conjunto de Mandelbrot) e atribuirmos a z_0 valores do plano complexo, vamos obter para cada valor de c figuras que são o conjunto dos valores de z que convergem no processo da iteração sucessiva definido por (2) (figs. 8 a 10). Essas figuras são já conhecidas desde o início do século, tendo sido estudadas por Gaston Julia e Pierre Fatou, matemáticos franceses, mas só há pouco tempo, com a ajuda da computação gráfica, foi possível estudá-los em pormenor e compreender o seu significado e importância. Um dos aspectos curiosos é que a sua fronteira, chamada conjunto de Julia, é fractal, portanto auto-semelhante. Embora só haja um conjunto de Mandelbrot, existem infinitos conjuntos de Julia, um para cada ponto do conjunto de Mandelbrot, que funciona assim como «catálogo» de conjuntos de Julia. No conjunto de Mandelbrot existem «zonas geográficas» diferentes, que se identificam pela forma dos conjuntos de Julia respectivos (vale dos cavalos marinhos, região das dendrites, etc.). O ponto (0,0) é desinteressante: a figura associada é um círculo, que, como vimos, não é um fractal. As zonas mais interessantes são as que se situam nos bordos do conjunto de Mandelbrot. Saíndo um pouco fora deste conjunto, as figuras de Julia desfazem-se em poeira, isto é, deixam de ser conexas.

Uma noção relevante que aparece na análise destes conjuntos é a de atractor. No caso presente, um atractor é um ponto ou um conjunto de pontos para os quais a iteração de outros pontos do plano complexo converge. Os conjuntos de Julia delimitam bacias de atracção. A noção de atractor já é conhecida desde Henri Poincaré, tendo sido aplicada a sistemas dinâmicos dissipativos: verifica-se que a sua evolução temporal é condicionada pela existência de um atractor. Na mecânica clássica estudam-se normalmente sistemas cujos atractores são pontos, círculos ou outras figuras simples. Contudo, estes casos são excepções e o comportamento de muitos sistemas (os sistemas dinâmicos não-lineares) é bem mais complicado: os seus atractores e repulsores (estes, como o nome indica, são regiões de equilíbrio instável) podem ser fractais. Em particular, os chamados «atractores estranhos» mais não são do que exemplos de fractais (por exemplo a figura de Lorentz, que aparece no estudo computacional dum fluido viscoso).

Na natureza são inúmeros os objectos que crescem por adição aleatória de novos constituintes. Exemplos disso são as dendrites que crescem na água quando esta é arrefecida abaixo do ponto de congelação. Em muitos casos, o crescimento do objecto é condicionado pela difusão das novas partículas até à superfície do agregado já existente. Um modelo simples surgido recentemente (em 1981) e que simula este fenómeno de crescimento de agregados é a chamada «agregação limitada por difusão» («Diffusion Limited Aggregation», DLA). As regras deste modelo são simples e o algoritmo que as realiza num computador é também simples. Começa-se por colocar uma semente no ponto central de uma rede. De seguida larga-se uma segunda partícula dum ponto aleatório sobre uma circunferência suficientemente distante da semente. Simula-se então a difusão dessa partícula através de um passeio aleatório, isto é, a partícula move-se aleatoriamente pela rede até chegar a um dos pontos adjacentes ao ponto inicialmente ocupado. Nessa altura ela é capturada, passando a integrar o agregado. Uma nova partícula é então lançada de local e em direcções aleatórias até ser capturada, repetindo-se o ciclo. Formam-se assim agregados (fig. 11) em tudo semelhantes às dendrites, ou à descarga eléctrica num meio dieléctrico.

Um fenómeno curioso e que, no fundo, está por detrás do aspecto ramificado dos agregados produzidos pela DLA é o efeito de protecção que os pontos mais exteriores do agregado exercem sobre os mais interiores. Isto deve-se ao facto de os caminhnates aleatórios não conseguirem penetrar no agregado para ocupar os pontos mais centrais ainda livres, uma vez que são capturados pelos pontos mais exteriores. Existem assim reentrâncias de todos os tamanhos.

É possível determinar a dimensão de uma figura de DLA, chegando-se à conclusão que se trata de uma dimensão fraccionária (df $\approx$ 1.67 para uma rede quadrangular a 2 dimensões). O modelo da DLA conduz portanto a fractais, embora estes fractais sejam estatísticos, pois a sua regra de construção não é perfeitamente determinista.

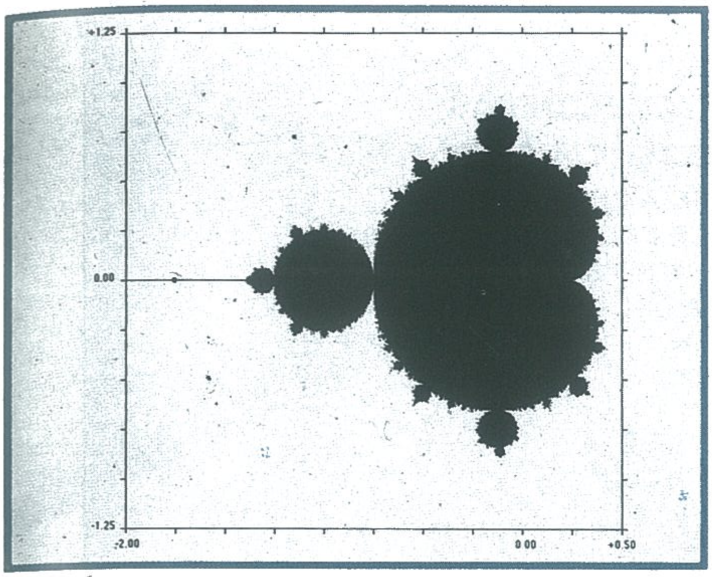
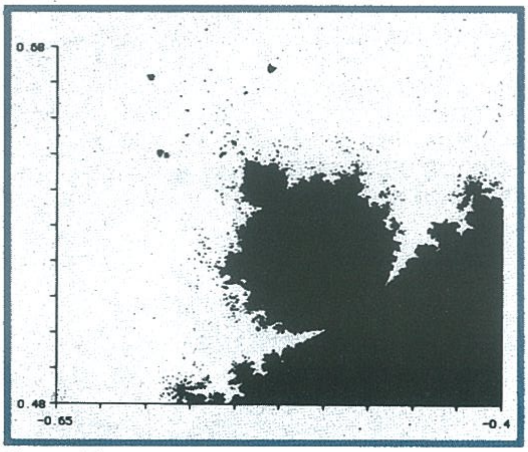


Figura 6



Um fractal de interesse físico

Figura 7

«A Arte é uma mentira que nos permite reconhecer a verdade»

Pablo Picasso

As figuras fractais geradas pelos métodos descritos (e muitos outros existem!) podem ser classificadas de extremamente belas, embora isso seja uma opção estética e portanto pessoal. Contudo, não é o facto de haver arte nos desenhos dos fractais que é importante (assunto relativamente ao qual a opinião de artistas e cientistas pode ser diferente), mas sim o facto de os fractais mostrarem que também os sistemas complexos são passíveis de um estudo sistemático, que até o caos tem as suas regras. Os matemáticos e os físicos já não estão limitados ao estudo de sistemas simples e lineares: têm diante de si o mundo real, bem mais complexo e fascinante.

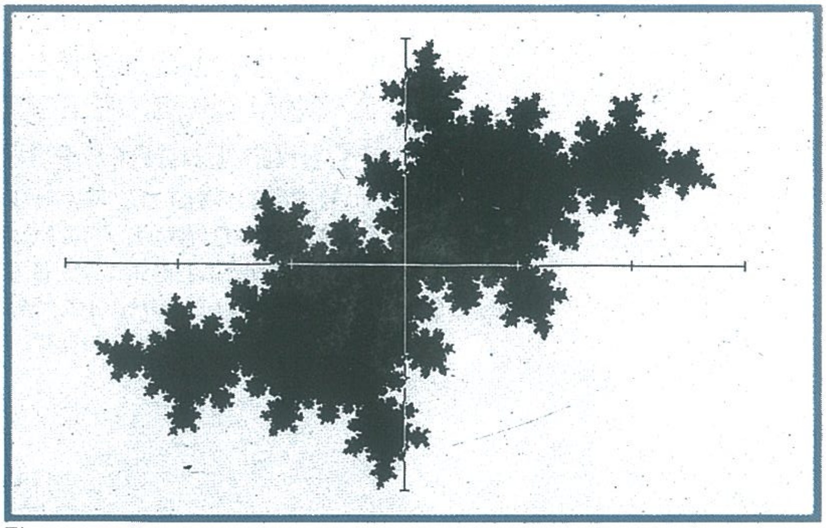


Figura 8

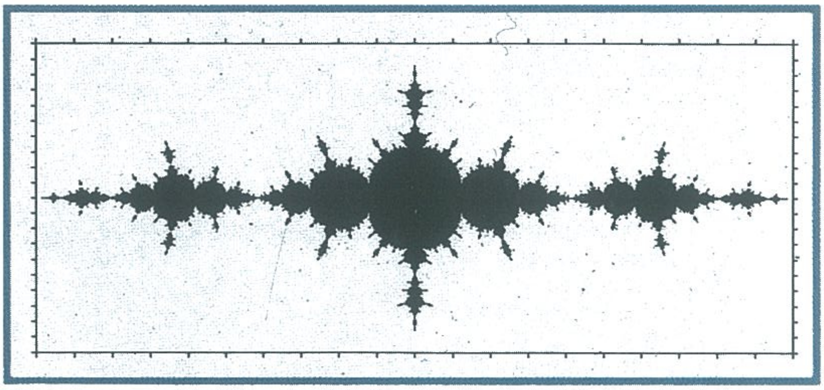


Figura 9

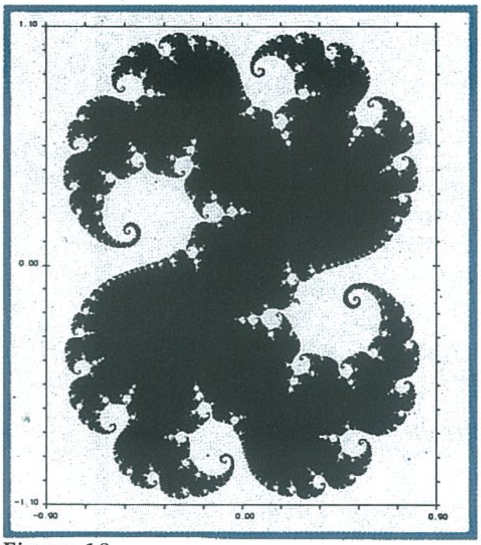


Figura 10

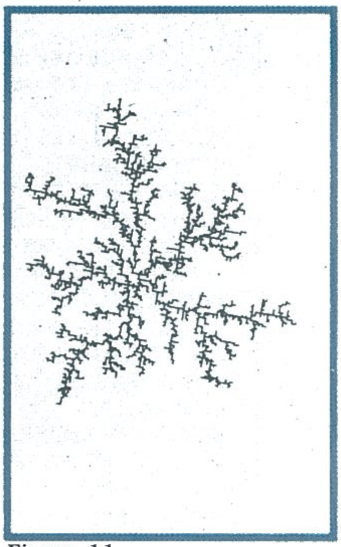


Figura 11

BIBLIOGRAFIA

Introduções simples à matemática dos fractais:

K. Delvin, «Beauty from Chaos», Mathematical Spectrum 18,3 (1985) 65

P. Barcellos, «The Fractal Geometry of Mandelbrot», The College Mathematics Journal, 15 (1984) 98

Sobre os trabalhos de Mandelbrot, ver:

B. Mandelbrot, «Comment j'ai découvert les fractales», La Recherche 175 (1986) 420

B. Mandelbrot, «The Fractal Geometry of Nature», W.H. Freeman and Company, 1983

Sobre a realização computacional de figuras fractais, ver:

H.-O. Peitgen, P.H. Richter, «The Beauty of Fractals — Images of Complex Dynamical Systems», Springer Verlag 1986

K. A. Dewdney, «Computer Recreations», Scientific American 253,2 (Agosto de 1985) 16 e 257,5 (Novembro de 1987) 140

M. Novak, J. Weber, «Conjuntos fractais», Personal Computer World (ed. portuguesa), 3 (Abril 1987) 48

Sobre as figuras de DLA:

T. A. Witten, L. M. Sander, «Diffusion-Limited Aggregation, a kinetic critical phenomenon», Physical Review Letters 47,19 (1981) 1400

J. Silva, C. Fiolhais, «DLA» — um exemplo simples de simulação computacional em física», submetido à «Gazeta da Física», 1988.