

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FACULDADE DE ECONOMIA

**A INFORMAÇÃO IMPRECISA E OS MODELOS  
MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO**

**Identificação e uso de conclusões robustas**

Luís Miguel Cândido Dias

Coimbra

2000

# **A INFORMAÇÃO IMPRECISA E OS MODELOS MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO**

**Identificação e uso de conclusões robustas**

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FACULDADE DE ECONOMIA

# **A INFORMAÇÃO IMPRECISA E OS MODELOS MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO**

**Identificação e uso de conclusões robustas**

Luís Miguel Cândido Dias

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Doutor em Organização e Gestão de Empresas, Especialidade de Ciências dos Sistemas nas Organizações, na Universidade de Coimbra.

Coimbra

2000



## **Agradecimentos**

Ao meu Orientador, João Clímaco, aqui expresso o meu reconhecimento, pelo seu aconselhamento e inestimável apoio, não apenas durante a preparação desta dissertação, mas durante todo o percurso que iniciei ao ingressar na FEUC em 1992.

Aos meus colegas João Paulo Costa e José Figueira, pela amabilidade que tiveram ao ler e discutir alguns capítulos desta dissertação, o meu obrigado. Este trabalho beneficiou ainda dos comentários dos revisores anónimos das revistas científicas internacionais que aceitaram publicar partes do mesmo, bem como da correspondência mantida com Joaquim Gromicho, consultor da ORTEC.

Agradeço a todos os colegas da FEUC e do INESC de Coimbra, pela amizade e pelo apoio dispensados.

Devo uma palavra de gratidão à FEUC e ao INESC, cujos órgãos dirigentes sempre me apoiaram. Em particular, foi-me concedida pela FEUC uma redução parcial de serviço docente nos últimos três anos, bem como apoio à participação em conferências. Estas instituições permitiram-me ainda receber apoio adicional da FCT (através de dois projectos PRAXIS atribuídos ao INESC de Coimbra) e do ICCTI (através de um acordo de cooperação entre a FEUC e o LAMSADE / Universidade de Paris-Dauphine). Aqui agradeço a estas instituições e aos coordenadores dos projectos em que participei. A Bernard Roy e Vincent Mousseau devo um excelente acolhimento em Paris.

Agradeço aos meus pais, pelo incentivo que sempre me dispensaram, e agradeço à Isabel, pelo constante encorajamento e apoio, bem como por ter permitido que eu pudesse ter tempo e disponibilidade para escrever esta dissertação, mesmo após o nascimento da Laura, que conosco partilhou este último ano. O meu esforço é-lhes dedicado.

## Resumo

Esta dissertação estuda a utilização de modelos matemáticos no apoio à avaliação de um conjunto de acções (alternativas, projectos, candidatos, consoante o contexto) definido em extensão, perante a existência de arbitrariedade, incerteza, imprecisão ou contradição acerca do valor dos seus parâmetros. Centramo-nos em modelos de avaliação multicritério, nos quais os parâmetros podem influenciar o desempenho das acções, a forma como são tratadas as diferenças de desempenho, ou a importância de cada critério na agregação dos desempenhos. Propomos que se avance no processo de decisão com informação imprecisa, podendo os decisores indicar múltiplas combinações aceitáveis de valores para os parâmetros. Existe um paralelismo entre a decisão com múltiplos critérios (sem informação imprecisa) e os problemas de decisão monocritério com informação imprecisa, que ilustraremos através do estudo do problema do caminho mais curto entre dois nós de um grafo.

Apresentamos uma metodologia para o apoio à decisão com informação imprecisa baseada na identificação de conclusões robustas, válidas para todas as combinações de valores para os parâmetros aceites pelos decisores. Trata-se de explorar as consequências da imprecisão, para encontrar os resultados que se verificam sempre, para identificar os resultados que mais são influenciados pela imprecisão e para ajudar os decisores a delimitar progressivamente aquela imprecisão. Porém, demarcamo-nos da concepção habitual da análise de robustez, ao considerarmos a imprecisão e a procura de conclusões robustas desde o início do processo de decisão, para que a análise das consequências dessa imprecisão possa influenciar o curso desse processo.

Concretizamos esta metodologia para a função de valor aditiva e para alguns métodos ELECTRE, não existindo praticamente investigação anterior no contexto da informação imprecisa para estes últimos. A escolha destes métodos de apoio multicritério à decisão deve-se à sua representatividade, quer em termos de utilização na prática, quer em termos dos seus fundamentos e dos desafios técnicos que colocam. No estudo da função de valor aditiva, propomos a utilização de uma ferramenta computacional que se ajusta à análise de problemas de escolha segundo múltiplas perspectivas e segundo diferentes níveis de detalhe. No estudo dos ELECTRE de avaliação relativa, propomos uma análise ao nível da relação binária de prevalência entre as acções. Estudamos ainda o ELECTRE TRI (avaliação absoluta), mostrando como determinar a melhor e a pior categoria para cada acção, face à informação disponibilizada pelos decisores. Em todos estes problemas estudamos a situação em que as combinações aceitáveis de valores para os parâmetros são definidas através de restrições matemáticas, pelo que recorremos a técnicas de optimização. Tomamos como exemplos problemas reais descritos na literatura, verificando que, apesar de trabalharmos com informação imprecisa, é possível obter resultados próximos dos originais.

## Abstract

The dissertation *Imprecise information and multicriteria decision-aid models: identification and use of robust conclusions* addresses the evaluation of discrete actions (alternatives, projects, candidates, etc., according to the context) based on mathematical models, when there exists some arbitrariness, uncertainty, imprecision or contradiction concerning the value of the intervening parameters. It focuses on multicriteria evaluation models, where parameters may determine the actions' performance, the discrimination among different performances, and the importance of each criterion in the aggregation of these performances. This work sustains that the decision process should advance with imprecise information, meaning that the decision makers may indicate multiple acceptable combinations of parameter values. To illustrate the analogy between multicriteria decision problems (with precise information) and monocriterion decision problems with imprecise information, a study of the well-known shortest path problem is presented.

The methodology proposed here for decision aiding with imprecise information is based on the identification of robust conclusions, which are valid for all the combinations of parameter values accepted by the decision makers. It intends to explore the consequences of imprecision, to find the results that hold always, to identify the results that are more affected by the imprecision, and to help the decision makers to delimit the imprecision progressively. The imprecision and the search for robust conclusions are present from the outset of the decision process, contrary to the usual idea of robustness analysis, in order to allow the consequences of the imprecision to influence the course of that process.

Considering the framework outlined above, the additive value function and some of the ELECTRE methods are studied in detail (concerning the latter, there hardly exists any research in the imprecise information context). These are quite representative multicriteria methods, both in terms of practice and in terms of their foundations and challenges. On considering the additive value function, this work proposes a flexible computational tool to analyse choice problems according to multiple perspectives and levels of detail. Concerning ELECTRE methods for relative evaluation problems, this work proposes an analysis at the outranking relation level. The ELECTRE TRI method (sorting problems) is also studied, in order to show how to determine the best and the worst category for each action, given imprecise information. For all of these problems, optimisation techniques are used to deal with the situations where the acceptable combinations of parameter values are defined through mathematical constraints. The examples, which are taken from real problems described in the literature, show that despite the imprecision it is possible to obtain results that are close to the original ones.

## Índice geral

<b>I. Introdução</b> .....	1
<b>II. Apoio multicritério à decisão</b> .....	11
1. Nota introdutória.....	11
2. O Processo de decisão.....	13
3. Da estruturação à parametrização .....	15
3.1. Actores no processo de decisão .....	15
3.2. Conjunto das acções.....	16
3.3. Problemáticas de apoio à decisão.....	17
3.4. Valores e pontos de vista .....	18
3.5. Critérios e desempenhos .....	19
3.6. Parâmetros que influenciam a tabela de desempenhos .....	21
4. Da parametrização à recomendação.....	23
4.1. Relação de dominância multicritério .....	23
4.2. Situações e estruturas de preferência .....	24
4.3. Métodos de avaliação multicritério.....	25
4.4. Agregação multicritério por uma função de utilidade ou de valor.....	29
4.5. A família dos métodos ELECTRE.....	33
5. Sistemas computacionais de apoio à decisão .....	36
<b>III. Apoio à decisão com informação imprecisa</b> .....	41
1. Informação imprecisa.....	41
1.1. Dificuldades em obter informação precisa.....	41
1.2. Informação precisa vs. informação imprecisa.....	42
1.3. Outros paradigmas .....	44
2. Conceitos de dominância e de óptimo .....	45
3. Uma analogia: o problema do caminho mais curto.....	46
3.1. Introdução ao problema .....	46
3.2. O caso de um conjunto discreto de combinações .....	49
3.3. O caso de um conjunto de combinações genérico .....	52
3.4. Notas conclusivas .....	62
<b>IV. Uma metodologia de delimitação ajustável</b> .....	65
1. Algumas perspectivas sobre o apoio à decisão .....	65
2. Informação imprecisa e conclusões robustas .....	67
3. Modelos sob uma nova perspectiva .....	71
4. Papel no apoio à decisão em grupo.....	75
5. Implicações para os Sistemas de Apoio à Decisão .....	78



<b>V. Agregação aditiva com informação imprecisa .....</b>	<b>81</b>
1. Introdução ao problema .....	81
2. Uma taxinomia dos procedimentos existentes.....	83
2.1. Notação.....	83
2.2. Procedimentos baseados no conceito de óptimo.....	85
2.3. Procedimentos baseados em relações binárias.....	87
2.4. Variabilidade absoluta e relativa .....	88
2.5. Regras pessimistas e regras de agregação.....	89
2.6. Programas informáticos .....	90
3. Metodologia.....	91
3.1. Recurso a múltiplos procedimentos.....	91
3.2. Análise de um grande número de acções.....	92
3.3. Análise de um número de acções não muito grande.....	93
3.4. O caso particular com três critérios .....	97
4. O programa <i>VIP Analysis</i> .....	99
5. Exemplos ilustrativos .....	101
6. Notas conclusivas .....	112
<b>VI. Análise dos índices de credibilidade do ELECTRE</b>	
<b>com informação imprecisa .....</b>	<b>115</b>
1. Introdução ao problema.....	115
2. Cálculo dos índices de credibilidade .....	118
3. Restrições aos valores dos parâmetros .....	121
4. Cálculo do intervalo de variação de índices de credibilidade.....	125
4.1. Maximização de índices de credibilidade.....	126
4.2. Minimização de índices de credibilidade.....	130
4.3. Resumo.....	133
5. Exemplos ilustrativos .....	134
5.1. Determinação do intervalo de variação de um índice de credibilidade .....	134
5.2. Conclusões robustas referentes às acções melhor posicionadas numa ordenação.....	138
5.3. Conclusões robustas referentes a decisões de aceitação / rejeição .....	140
6. Notas conclusivas .....	144
<b>VII. Problemas de escolha utilizando o ELECTRE com informação imprecisa</b>	<b>147</b>
1. Introdução ao problema.....	147
2. Revisão dos métodos ELECTRE para problemas de escolha.....	149
3. Procedimento no caso da informação imprecisa.....	152
3.1. Que tipo de conclusões robustas procurar? .....	152
3.2. Técnicas para encontrar conclusões binárias robustas.....	155
4. Formas de enriquecer as relações robustas .....	161
5. Formas de explorar as conclusões robustas .....	169
6. Exemplos ilustrativos .....	172
6.1. Exemplo baseado no ELECTRE II.....	172
6.2. Exemplo baseado no ELECTRE IS.....	175
7. Notas conclusivas .....	180

<b>VIII. Afectação ordenada com informação imprecisa .....</b>	<b>183</b>
1. Introdução ao problema .....	183
2. O MÉTODO ELECTRE TRI.....	185
3. Adaptação do ELECTRE TRI para o caso de informação imprecisa .....	187
3.1. Caracterização da informação imprecisa .....	187
3.2. Adaptação dos algoritmos de afectação.....	188
3.3. Melhoramento dos algoritmos de afectação.....	190
4. Determinação do resultado do teste .....	191
4.1. Formulação como problema de optimização .....	191
4.2. Sobre a determinação da melhor categoria para uma acção.....	193
4.3. Sobre a determinação da pior categoria para uma acção .....	194
5. Exemplo ilustrativo.....	198
6. Integração com um procedimento por agregação/desagregação.....	200
6.1. Nota introdutória.....	200
6.2. Breve revisão do procedimento por inferência .....	201
6.3. O procedimento integrado.....	202
7. Notas conclusivas .....	208
<b>IX. Conclusões e vias para investigação futura .....</b>	<b>211</b>
<b>Apêndice A</b>	
Algoritmos para problemas de caminho mais curto com informação imprecisa .....	219
<b>Apêndice B</b>	
Algumas propriedades dos índices de credibilidade do método ELECTRE.....	223
<b>Apêndice C</b>	
Sobre os intervalos $[W(a_i), B(a_i)]$ no ELECTRE TRI .....	235
<b>Apêndice D</b>	
Exemplo de avaliação do risco de empresas .....	239
<b>Bibliografia citada .....</b>	<b>247</b>

# Capítulo I

## Introdução

Numa perspectiva muito ampla, esta dissertação estuda o tema do apoio à decisão com base em modelos matemáticos. A actividade de decidir está presente na gestão das nossas vidas, na gestão de empresas, na gestão de países, na gestão de sistemas em geral. Está presente nas funções de planear, organizar, liderar e controlar (Stoner et al., 1995). Muitas decisões podem ser apoiadas pelo bom senso, pela experiência vivida e até pela intuição daquele que decide ou daqueles que o aconselham. Porém, para muitas outras decisões o apoio à decisão pode ser mais elaborado e formal, recorrendo a abstracções (modelos) e técnicas para extrair conclusões com base nesses modelos.

Turban e Aronson (1998: 8) notam que os modelos matemáticos e os sistemas computacionais são cada vez mais necessários no apoio à decisão. Por um lado, a crescente globalização e a inovação tecnológica multiplicam o número de alternativas a analisar, cujas consequências futuras são cada vez mais incertas. Por outro lado, o custo de uma má decisão (e.g. ignorar uma tecnologia alternativa, menosprezar um risco) começa a ser, frequentemente, muito grande. Acresce ainda, muitas vezes, a necessidade de prestar contas (aos colaboradores, aos accionistas, aos cidadãos, ...) das decisões que se tomam. Apesar de tudo, exigem-se decisões cada vez mais rápidas, pois da celeridade pode depender a concretização de uma oportunidade ou a sobrevivência a uma ameaça.<sup>1</sup>

Os modelos matemáticos são desde há muito utilizados em ciências naturais como a Física ou a Biologia, frequentemente para apoiar raciocínios hipotético-dedutivos, bem como em diversas áreas de

---

<sup>1</sup> Para exemplos apresentados pelos próprios decisores v. Holl (1983) — acerca de uma oportunidade — e Grover (1999). Segundo ambos, os métodos da Investigação Operacional / Ciências da Gestão requerem por vezes demasiado tempo, sobretudo na recolha dos dados exigidos pelos modelos, para serem úteis.

## 2 Capítulo I

Engenharia. Nesses contextos, o papel dos modelos é o de descrever sistemas para os explicar ou para prever o seu comportamento. A utilização de modelos no contexto do apoio à decisão vulgarizou-se a partir da Segunda Guerra mundial, quando os Aliados trataram de forma científica muitos dos problemas operacionais que então surgiram. Aí nasceu a Investigação Operacional (IO), uma disciplina e uma profissão que, no final da Guerra, aspirava a ser igualmente bem sucedida na sociedade civil. Foi-o, decerto, e muito, em áreas como o planeamento da produção, com recurso a ferramentas como a programação linear. Porém, quando se esperava que esta disciplina pudesse tratar com igual sucesso problemas, porventura mais importantes, mas menos estruturados, cedo sobreveio alguma desilusão (e.g. v. Beer, 1966; Roy, 1968b; Rosenhead, 1989b).

Muitas vezes, o insucesso das técnicas de optimização deve-se à dificuldade (frequentemente, impossibilidade) de optimizar separadamente componentes de um sistema complexo. O movimento dos sistemas (e.g. v. Ackoff, 1973) enfatiza a importância de analisar os problemas considerando a globalidade do sistema onde se inserem. Consideram-se assim redutoras as abordagens que pretendem optimizar apenas uma parte do sistema, ignorando as emergências e imposições que o tornam um todo indivisível e teleonómico. Ainda a IO era uma disciplina jovem, e já Beer (1966) expunha a relevância do que designou por *management cybernetics*, englobando conceitos como a homeostasia, a entropia ou a largura de banda.

A abordagem clássica da IO, segundo Roy (1990), caracteriza-se por lidar com problemas bem formulados, onde se pretende escolher a melhor alternativa de entre um conjunto bem definido (seja em extensão ou em compreensão), utilizando uma função que atribui um valor preciso a cada uma delas, que expressa o seu valor para o decisor. As mesmas características estão patentes na análise / engenharia de sistemas (que Checkland designa por "*hard*" *systems thinking*), onde se procura projectar o sistema óptimo (de acordo com um determinado critério de desempenho) para satisfazer uma necessidade bem formulada (v. Checkland, 1981). Em qualquer dos casos, resulta um problema de optimização, cuja solução ditará ao decisor como deve agir. Rosenhead (1989b) acrescenta a esta tipificação outras características, como a orientação para problemas táticos (*versus* estratégicos), a necessidade de dados em quantidade e "qualidade" (credibilidade, ausência de incerteza), a existência de um só decisor, ou a concepção dos seres humanos como sujeitos passivos (v. ainda os estereótipos apontados por Beer, 1966: 47-68).

Têm sido propostas algumas vias que se demarcam, em maior ou menor grau, do paradigma clássico da otimização. Destacaremos nos parágrafos que se seguem a racionalidade da decisão por adequação (*satisficing*),<sup>2</sup> a *IO soft* e a metodologia do apoio multicritério à decisão.

Uma das vias que recusa o paradigma da otimização é a da decisão por adequação, proposta por Simon (1959) para lidar com a incerteza e a complexidade presentes em muitos processos de decisão. Esta via contrapõe à racionalidade substantiva (aquela que se refere à decisão ótima) uma racionalidade procedimental (aquela que se refere a procedimentos racionais, v. Simon, 1988), segundo a qual o decisor termina o processo de escolha assim que encontra uma alternativa adequada às suas aspirações, as quais vão sendo ajustadas ao longo da procura. Por exemplo, rejeita-se o postulado de que o conjunto de *todas* as alternativas é dado e bem conhecido à partida, notando-se que a procura e a invenção de alternativas envolvem custos que poderão não valer a pena. Wierzbicki (1982), no contexto da programação matemática multiobjectivo, propõe princípios de decisão “*quasisatisficing*”, segundo os quais o decisor opta entre a otimização e a adequação, consoante as soluções de que disponha estejam abaixo ou acima dos seus níveis de aspiração.

A *IO soft* constitui outra via que se demarca da *IO clássica (hard)*. Rosenhead (1989b) tipifica a *IO soft* como aquela que: procura soluções aceitáveis segundo múltiplas dimensões, mais do que soluções ótimas ou a redução das várias dimensões a uma escala comum; integra dados quantitativos com dados qualitativos e julgamentos subjectivos; enfatiza a simplicidade, a transparência e a participação dos intervenientes. Um dos pilares da *IO soft* é precisamente a convicção de que o recurso a técnicas analíticas pouco ambiciosas, simples e transparentes fomenta a participação de leigos e enriquece a faceta de processo social da tomada de decisão (Rosenhead, 1989b). A *IO soft* atribui ainda grande importância à estruturação da situação de decisão, para evitar resolver o problema errado e permitir acomodar diferentes perspectivas sobre a situação (v. Rosenhead, 1996).

Destacamos, por fim, a via na qual este trabalho melhor se enquadra. Trata-se da metodologia do apoio multicritério à decisão segundo a Escola Europeia,<sup>3</sup> que começou a emergir como um todo coerente a partir da obra de Roy (1985). A Escola Europeia reconhece a importância da subjectividade

---

<sup>2</sup> Bourguine e Le Moigne (1991) propõem a tradução de *satisficing* para *adéquate* (em francês), notando que *satisficing* é uma palavra escocesa há muito em desuso, diferente de *satisfying* (satisfatório). A palavra adequação, tal como adaptação, ajusta-se bem ao significado do neologismo *satisficing*.

#### 4 *Capítulo I*

no processo de apoio à decisão e a impossibilidade de procurar uma decisão objectivamente óptima<sup>4</sup> (v. Roy, 1990; Roy e Vanderpooten, 1996):

- a fronteira entre as decisões praticáveis e as impraticáveis é difícil de estabelecer e pode evoluir ao longo de um processo de decisão;
- os dados estão sujeitos a imprecisão, a incerteza e a arbitrariedade;
- em muitas situações não existe um decisor isolado, mas sim múltiplos intervenientes, cujas preferências nem sempre são estáveis e firmemente estabelecidas, mas antes sujeitas a indefinições, contradições e conflitos internos;
- as preferências não são vistas como sendo preexistentes, mas antes como sendo construídas ao longo do processo de decisão;
- uma decisão não pode em geral ser considerada como boa ou como má com base num modelo matemático, sem atender aos aspectos organizacionais, pedagógicos e culturais de todo o processo de decisão, habitualmente não incluídos no modelo.

A metodologia do apoio multicritério à decisão caracteriza-se pela relativa modéstia do seu propósito: construir modelos que façam intervir de forma explícita múltiplos critérios de avaliação (pontos de vista), constantemente sujeitos à análise crítica dos intervenientes no processo de decisão, capazes de ajudar cada interveniente a moldar as suas preferências e a encontrar argumentos para as sustentar, em conformidade com os seus múltiplos objectivos (frequentemente conflituosos). Confere-se grande importância à modelação do papel de cada critério, atendendo ao carácter mal definido quer das opções em avaliação, quer das preferências dos decisores. Para além disso, a agregação das vantagens e desvantagens que cada opção apresenta relativamente às restantes sob os múltiplos critérios pode resultar em situações não contempladas pelo paradigma da IO clássica, tais como a incomparabilidade ou as preferências intransitivas. De acordo com Roy (1999), procura-se escapar à propensão de utilizar a aritmética para reduzir todos os factores e fenómenos a uma escala comum, por exemplo, uma escala monetária. Por fim, atribui-se grande interesse a tipos de problemas em que não se pretende escolher

---

<sup>3</sup> Esta Escola é também conhecida por Escola Francesa (reconhecendo as suas origens) ou ainda Escola Francófona (para abarcar a Bélgica e o Canadá). A designação de Escola Europeia tornou-se a mais comum a partir de Roy e Vanderpooten (1996), reflectindo a influência que teve o European Working Group “Multicriteria Aid for Decisions”, a que pertencem muitos investigadores de países não francófonos.

<sup>4</sup> Roy (1993) fala de uma ciência de apoio à decisão, acerca do rigor do processo, em oposição a uma ciência da decisão, acerca da melhor decisão possível.

uma solução (*a* solução, nos modelos de optimização), mas antes ordenar várias opções por ordem de preferência ou atribuir-lhes uma classificação.

As vias que acabámos de expor não são incompatíveis entre si. Pelo contrário, complementam-se. Todas elas visam ultrapassar uma concepção redutora da IO clássica,<sup>5,6</sup> baseada em situações e soluções (óptimas) estereotipadas, por forma a poderem ser úteis numa gama de situações de decisão mais vasta. Como exemplos dessa compatibilidade podemos referir a conjugação da IO *soft* com o apoio multicritério à decisão (Belton et al. 1997; Bana e Costa et al., 1999), a conjugação da IO *soft* com o movimento dos sistemas através da *Soft Systems Methodology* (Checkland, 1981) e até a conjugação desta última com o apoio multicritério à decisão (Daellenbach, 1997).

A presente dissertação enquadra-se sobretudo na via do apoio multicritério à decisão, apesar de termos sido também influenciados por algumas ideias da decisão por adequação e da IO *soft*. Ao falar de *apoio* à decisão, sublinhamos que nos interessa a forma como os decisores podem ser ajudados a progredir num processo de decisão de acordo com as suas convicções (que são subjectivas). Em particular, o nosso trabalho não trata de descrever os processos de decisão, tal como são habitualmente conduzidos pelos decisores, nem trata de conceber como se pode automatizar esse processo de decisão, substituindo o decisor. Por outro lado, ao falar de apoio *multicritério* à decisão, anunciamos que nos iremos focar no uso de modelos de avaliação onde se explicitam múltiplos critérios, embora muitas das ideias que desenvolvermos sejam obviamente aplicáveis a modelos monocritério. Nos parágrafos seguintes enumeramos outros pressupostos que delimitam o contexto do nosso trabalho.

Consideraremos que uma fase de estruturação foi já realizada, na qual se delineou um conjunto de critérios de avaliação, que falta apenas parametrizar. Por conseguinte, não nos interessaremos sobre a importante actividade de estruturar a situação de decisão em termos qualitativos, que tem beneficiado de relevantes contribuições tanto da área do apoio multicritério à decisão (Roy, 1985; Bana e Costa, 1992; Keeney, 1992) como da área da IO *soft* (Rosenhead, 1989). Os parâmetros a que nos referimos, cujo valor ainda não se fixou, podem influenciar:

---

<sup>5</sup> Alguns autores (v. Checkland, 1981; Schärli, 1985; Bourguin e Le Moigne, 1991) associam o paradigma da IO clássica ao pensamento predominante da cultura ocidental, marcado por Aristóteles, Descartes ou Comte, como forma de justificar a resistência dos mais tradicionalistas a novos paradigmas.

<sup>6</sup> Notemos, porém, que a IO pode ser entendida numa perspectiva mais ampla, aquela em que se pretende reunir e aplicar a Matemática e o conhecimento de diversas ciências (Psicologia, Biologia, Física, etc.) na construção de modelos para apoiar os gestores na tomada de decisão. Nesta acepção, todas as vias que enumerámos são IO.

## 6 *Capítulo I*

- a forma como cada critério agrega múltiplos elementos que influenciam a avaliação segundo o ponto de vista representado por este (e.g. um critério que avalie os efeitos ambientais de um projecto pode agregar os efeitos sobre o Homem, sobre a fauna e sobre a flora, atribuindo um “peso” a cada um desses elementos);
- a forma como se fixa a arbitrariedade de certas medidas (e.g. o consumo de um automóvel pode ser medido à velocidade  $x$  ou à velocidade  $y$ , em condições de tráfego intenso ou fluido, com apenas um passageiro ou completamente carregado, etc.);
- a forma como cada critério discrimina diferenças de desempenho (e.g. o critério pode possuir um limiar de indiferença para que considere desempenhos muito próximos como sendo equivalentes);
- a importância de cada critério, bem como o seu eventual “poder de veto”, ou níveis de avaliação de referência (nível de aceitação, nível de aspiração, ...).

Os modelos que iremos considerar são concebidos para avaliar um conjunto de acções (os objectos da avaliação: alternativas, opções, projectos, candidatos, etc., consoante o contexto) definido em extensão. Excluimos, pois, a programação matemática com múltiplos objectivos, na qual os objectos da avaliação são vectores de variáveis de decisão sujeitos a restrições (trata-se de conjuntos definidos em compreensão). Suporemos que previamente, numa fase de estruturação, a lista das acções e suas características foi já delineada, embora as suas características (e.g. “custo”) possam ser parametrizadas, não se tendo fixado o valor dos parâmetros (e.g. “taxa de juro”, “cotação do dólar”).

Por último, assumiremos que existe uma coesão forte entre os objectivos daqueles que intervêm no processo de decisão, pelo que a tomada de decisão por consenso não será um desiderato irrealista.

Face a este enquadramento, para obter uma recomendação adequada à situação de decisão (escolha, ordenação ou classificação de acções) resta apenas parametrizar o modelo (atribuir valores aos parâmetros) e utilizar um método de agregação multicritério. Não nos pronunciaremos sobre a escolha do método de agregação, não obstante termos optado pela função de valor aditiva e pelos métodos ELECTRE para ilustrar as nossas ideias. Essa opção justifica-se pela representatividade desses métodos, tanto em termos de utilização na prática, como em termos dos fundamentos de cada um (representam famílias bastante distintas) e dos desafios que colocam.

O principal objectivo deste trabalho é estudar o apoio à decisão nos casos, que argumentaremos serem praticamente todos (v. Capítulo III), em que a parametrização do modelo é uma



tarefa difícil perante a existência de arbitrariedades, incertezas, imprecisões ou contradições acerca do valor (ou mesmo da definição) de cada parâmetro.<sup>7</sup> Analisaremos estas situações utilizando o conceito de parâmetros com valor impreciso, i.e. não-pontual:

There are many kinds of uncertainty attached to each number [...]. Since the special circumstances which generate a number are never exactly repeated, never exhaustively enumerated, and never precisely measured, we are not entitled to regard that number as a sharp point on a scale.  
[Beer (1966: 153)]

Neste enquadramento, os decisores podem considerar múltiplos valores para cada parâmetro, eventualmente interrelacionados. Logo, será mais próprio falar de múltiplas combinações aceitáveis de valores para os parâmetros. Muitos autores referem-se a estas situações como decisão com informação parcial (e.g. Hazen, 1986), informação incompleta (e.g. Kim e Ahn, 1997), informação pobre (e.g. Bana e Costa e Vincke, 1995) ou informação imprecisa (e.g. Athanassopoulos e Podinovski, 1997). Adoptaremos esta última designação, no sentido de não se utilizar uma combinação de valores precisos para os parâmetros.

Quando não existem certezas acerca do valor que cada parâmetro deve assumir, é habitual efectuarem-se análises de sensibilidade ou análises de robustez. A primeira designação refere-se habitualmente à determinação dos valores para os parâmetros que são compatíveis com um determinado resultado do modelo; a segunda designação refere-se habitualmente à determinação dos resultados do modelo compatíveis com os múltiplos valores aceitáveis para os parâmetros (utilizamos as acepções de Roy e Bouyssou, 1993: 314-315). Na análise de robustez, procura-se encontrar conclusões que sejam válidas independentemente do valor que se escolha para os parâmetros, de entre as combinações aceitáveis: são as conclusões ditas robustas. Em virtude da sua simplicidade, um processo por vezes utilizado para conduzir uma análise de robustez consiste em determinar os resultados correspondentes a apenas algumas das combinações (uma “amostra” do conjunto daquelas que são consideradas aceitáveis). No caso de disporem de meios de cálculo que permitiam respostas muito rápidas, os decisores poderão sentir-se encorajados a realizar um grande número dessas experiências de uma forma interactiva (v. Dias et al., 1996, 1997). Um objectivo do presente trabalho é o de propor métodos mais sistemáticos para encontrar conclusões robustas.

Os dois objectivos apontados acabam por ser, de certa forma, duas faces de uma mesma moeda, porquanto tentaremos mostrar que as ferramentas e os conceitos desenvolvidos para a análise de

---

<sup>7</sup> Tsoukiàs (1997: 13-14) refere-se à semântica da incerteza, distinguindo a incerteza associada ao mau

## 8 Capítulo I

robustez são particularmente adequados para explorar as situações de decisão com informação imprecisa. Neste trabalho, é ainda nosso objectivo propor uma metodologia que integra a informação imprecisa e a análise de robustez na utilização de modelos para o apoio à decisão. As opções que mais marcam este trabalho são duas, que passamos a explicitar.

- a) **explorar (vs. agregar)**. Perante um conjunto de combinações aceitáveis de valores para os parâmetros (informação imprecisa), optamos por uma atitude de exploração das consequências da imprecisão sem as procurar agregar. Falaremos por exemplo em valores mínimos e máximos para funções de output, e não de valores médios, de valores esperados ou de valores mais prováveis. Falaremos de resultados que se verificam sempre ou que nunca se verificam. Falaremos de resultados que são muito afectados pela imprecisão e de resultados que pouco o são. Em consonância com esta opção, não faremos distinções entre as múltiplas combinações aceitáveis de valores para os parâmetros (e.g. não consideraremos que umas são mais aceitáveis ou “prováveis” do que outras).
- b) **ab initio (vs. a posteriori)**. Consideraremos que a imprecisão da informação e a procura de conclusões robustas estão explicitamente presentes desde o início do processo de decisão,<sup>8</sup> para que a análise das consequências da imprecisão possa influenciar o curso desse processo. Tal proposta contrasta com a concepção habitual da análise de robustez como algo que se efectua apenas na parte final do processo de decisão, por forma a estabelecer a validade dos resultados.

Este trabalho apresentará uma metodologia de delimitação ajustável, baseada nestas ideias fundamentais, que visa apoiar os decisores a delimitar progressivamente, como produto da interacção entre estes e as ferramentas que investigam a robustez das conclusões, a imprecisão relativa aos parâmetros e aos resultados. Concretizaremos a metodologia para alguns dos métodos de apoio multicritério à decisão mais representativos, a saber, a função de valor aditiva e alguns dos métodos ELECTRE. Proporemos o recurso a ferramentas de optimização para determinar quais as conclusões que são robustas e quais os resultados que mais variam, face a um conjunto de múltiplas combinações aceitáveis para os parâmetros do modelo. Para o caso da função de valor aditiva, apresentaremos uma ferramenta computacional de apoio à decisão, que ilustra o papel que a informática poderá desempenhar no tipo de processo de apoio à decisão que idealizamos. A aplicação dos conceitos e ferramentas que

---

conhecimento, da incerteza associada à má definição.

<sup>8</sup> A ideia de considerar a imprecisão *ex ante* é também defendida por Vladimirov e Zenios (1997) no contexto de problemas de programação matemática.

propomos a problemas reais descritos na literatura mostrará que é possível obter conclusões muito ricas, sem se fixarem (ou antes de se fixarem) valores precisos para os parâmetros.

Concluimos este capítulo introdutório com uma breve descrição da estrutura desta dissertação.

Começamos por inserir este trabalho na corrente do apoio multicritério à decisão, uma via que se demarca da Investigação Operacional clássica. Em particular, visamos estudar as dificuldades em fixar os valores dos parâmetros de modelos multicritério, procurando integrar os temas da decisão com informação imprecisa e da análise da robustez de resultados. *[I. Introdução]*

Revemos por isso a área do apoio multicritério à decisão, aproveitando para situar a fixação do valor dos parâmetros no processo de decisão, enquanto charneira entre uma fase de estruturação (que tipo de problema?, que critérios?, que acções?) e uma fase de avaliação das acções. Estendemos ainda a revisão à área dos sistemas computacionais de apoio à decisão. *[II. Apoio multicritério à decisão]*

Revemos também o enquadramento e os conceitos da decisão com informação imprecisa, após identificar as dificuldades que aconselham que esta seja tornada explícita em muitos (senão mesmo todos) os processos de decisão. Encontramos algum paralelismo entre a decisão com múltiplos critérios e os problemas de optimização com informação imprecisa. Como ilustração, apresentamos uma forma de trabalhar com informação imprecisa na determinação do caminho mais curto entre dois nós de um grafo (um problema de optimização bem conhecido) recorrendo a conceitos e ferramentas do problema do caminho mais curto multicritério. *[III. Apoio à decisão com informação imprecisa]*

Apresentamos de seguida uma visão possível para o apoio à decisão face a informação imprecisa. Começamos por rever algumas perspectivas sobre o apoio à decisão (sobretudo a visão construtiva) e o conceito de análise de robustez, confrontando-o com a análise de sensibilidade. Propomos depois uma metodologia de delimitação progressiva da imprecisão relativa aos parâmetros e resultados do modelo, baseada na procura de conclusões robustas, procurando antever o papel que esta metodologia poderá ter no âmbito de decisões em grupo e as implicações para os sistemas computacionais de apoio à decisão. *[IV. Uma metodologia de delimitação ajustável]*

## 10 *Capítulo I*

Essa metodologia pode ser utilizada em muitos tipos de problemas. Os problemas que visam encontrar uma solução através da maximização de uma função são os mais estudados até agora e permitem a utilização de uma diversidade de técnicas. O caso que estudamos como exemplo é o da agregação de desempenhos sob múltiplos critérios através de uma função de valor aditiva, com o intuito de escolher uma acção. Propomos para este caso a utilização de uma ferramenta computacional que engloba múltiplas técnicas. *[V. Agregação aditiva com informação imprecisa]*

Um tipo de problemas muito diferente é colocado pelos métodos do tipo ELECTRE. Antes de os analisarmos, porém, iremos dedicar um capítulo ao estudo da procura de conclusões robustas acerca do valor dos índices de credibilidade nos quais alguns desses métodos se baseiam. *[VI. Análise dos índices de credibilidade do ELECTRE com informação imprecisa]*

Estudaremos então novamente situações de escolha sob múltiplos critérios e informação imprecisa, mas agora utilizando métodos do tipo ELECTRE. *[VII. Problemas de escolha utilizando o ELECTRE com informação imprecisa]*

Por último, estudamos o problema de afectar acções a categorias pré-definidas e ordenadas por ordem de preferência. Consideraremos para o efeito o método ELECTRE TRI, analisando como se podem obter conclusões robustas face a informação imprecisa, e como se pode integrar este tipo de análise com uma outra, que visa inferir os parâmetros daquele método a partir de exemplos fornecidos por um decisor. Embora nos foquemos no método ELECTRE, as mesmas ideias são facilmente aplicáveis aos métodos baseados numa função de valor. *[VIII. Afectação ordenada com informação imprecisa]*

Terminaremos com um resumo do trabalho e algumas conclusões genéricas, identificando algumas vias para investigação futura. *[Conclusões e vias para investigação futura]*

Optámos por colocar em apêndice alguns algoritmos, a demonstração de algumas proposições e um dos exemplos ilustrativos, por forma a não sobrecarregar o texto principal.

# Capítulo II

## Apoio multicritério à decisão

### 1. Nota introdutória

---

Este capítulo apresenta, sucintamente, uma revisão de alguns conceitos e de algumas ferramentas de apoio *multicritério* à decisão. Falar de apoio multicritério à decisão, em lugar de apoio à decisão, anuncia desde logo uma opção. Contudo, não pretendemos deixar de reconhecer algum interesse às abordagens em que se considera apenas um critério, as abordagens de otimização. Pode decerto acontecer que o decisor se sinta confortável ao utilizar apenas um critério, julgado predominante, para avaliar as alternativas com que se depara, mesmo que reconheça que existiriam outros que poderia considerar. Esse decisor procurará então encontrar a alternativa com o melhor desempenho segundo esse critério. Outras preocupações, a existirem, podem surgir sob a forma de restrições que delimitam o conjunto das alternativas aceitáveis.<sup>1</sup>

Em muitos casos, porém, um processo de decisão que faça intervir *explicitamente* vários critérios de avaliação, representando os vários pontos de vista dos interessados nesse processo, será mais transparente e menos arbitrário. Schärli (1995, 35-51) apresenta mesmo vários argumentos para sustentar que a abordagem multicritério constitui uma via necessária em Gestão. O interesse de ultrapassar o paradigma da otimização de uma função (critério) é referido também por Beer (1966: 98), referindo-se a sistemas biológicos:

the primary characteristic of viable systems is that is that they try to optimize a whole set of conflicting objective functions at once. They cannot do this [...] but they try to do it. The result

---

<sup>1</sup> Montgolfier e Bertier (1978: 39) assinalavam justamente: «une contrainte peut être considérée comme un point de vue dont on a provisoirement fixé un seuil de réalisation.»

## 12 Capítulo II

is that their method of control is essentially one of contriving a stable balance, and not of seeking some unique maximum.

Bouyssou (1993) apresenta uma visão menos normativa, segundo a qual optar por uma abordagem multicritério não constitui mais do que um “*acte de foi*”,<sup>2</sup> baseado na convicção de que o apoio multicritério favorece:

- i) a constituição de uma base para o diálogo entre os intervenientes utilizando diversos pontos de vista compreendidos por todos,
- ii) uma modelação mais fácil da incerteza, da arbitrariedade ou da imprecisão associada aos dados, segundo cada ponto de vista e, sobretudo,
- iii) o encarar de cada decisão como um compromisso entre objectivos em conflito.

Bouyssou sublinha, através deste último argumento, a mudança de perspectiva associada à transição para um paradigma multicritério, no qual se abandona o desiderato de encontrar a alternativa óptima, para se procurar uma alternativa de compromisso entre vários pontos de vista. De facto, raramente se poderá esperar que exista uma alternativa superior a todas as outras, segundo todos os pontos de vista. Há, pois, relativamente aos múltiplos pontos de vista que intervêm na avaliação, a procura de um equilíbrio, o *balance* de que falava Beer, o *arbitrage* a que se referem Montgolfier e Bertier (1978: 41): «toute décision, lorsqu'elle ne s'impose pas immédiatement à l'évidence, est en réalité le résultat d'un arbitrage entre points de vue.»

Rogers et al. (2000: 13) apresentam outro argumento a favor do apoio multicritério à decisão, em confronto com as metodologias da Análise Custo / Benefício. Trata-se de conferir, à partida, igual estatuto (o que não significa igual importância) a todos os critérios de avaliação, mesmo quando alguns desses critérios (porventura de natureza qualitativa) não possam ser relacionados com resultados de natureza monetária.

Na secção seguinte falaremos do processo de decisão, com o intuito de contextualizar duas importantes fases: a fase de estruturação (construção de modelos de apoio à decisão) e a fase de avaliação. Na secção 3 apresentaremos alguns conceitos e produtos da fase de estruturação, ao passo que na Secção 4 inventariaremos alguns métodos de avaliação multicritério, desenvolvendo um pouco aqueles mais relevantes para a presente dissertação. Concluiremos este capítulo com uma breve secção

---

<sup>2</sup> Em oposição a uma necessidade imperiosa face à natureza multidimensional de qualquer situação de decisão. Para sublinhar esta distinção, Bouyssou defende o uso de *apoio multicritério à decisão*, em substituição de *apoio à decisão multicritério*.

sobre sistemas computacionais de apoio à decisão e sobre a presença de modelos de avaliação multicritério nestes sistemas.

## 2. O Processo de decisão

---

A tomada de decisões insere-se num processo que decorre ao longo de um certo tempo.

Trata-se, como nota Silver (1991: 33), de percorrer um caminho:

People often speak of “arriving at a decision” or “reaching a decision”. Traversing a path is an apt metaphor for making a decision. The path is the decision making process, taking us from the current position, “undecided”, to some other location, “decided upon X”.

Simon (e.g. v. Simon, 1977) apresenta um enquadramento geral para os processos de decisão, englobando quatro fases: *intelligence*, *design*, *choice* e *review*. A fase de *intelligence* (“inteligência”, no sentido habitualmente associado aos “Serviços de Inteligência”) é aquela onde se detecta a necessidade de decidir. Essa necessidade pode surgir da identificação de uma oportunidade, da identificação de um problema ou da emergência de uma crise. Cabem nesta fase os esforços de procurar, de forma activa, situações em que seja necessário tomar decisões. A fase de *design* (“concepção”) compreende a estruturação, através de modelos, da situação de decisão. Em particular, inventam-se, desenvolvem-se e caracterizam-se cursos de acção possíveis, critérios de avaliação e, porventura, cenários. A fase de *choice* (“escolha”) corresponde à tomada de decisão propriamente dita, seleccionando-se um dos cursos de acção possíveis, frequentemente com o apoio de técnicas matemáticas, algoritmos, ou regras de carácter heurístico. Por fim, na fase de *review* (“revisão”), coloca-se em prática a decisão tomada e acompanham-se as suas consequências, com o intuito de detectar a necessidade de correcções e de aprender com eventuais erros.

Nesta sequência, admite-se em qualquer altura um retorno às etapas anteriores, bem como o desenvolvimento, em paralelo, de trabalho ligado a etapas distintas. Naturalmente, as fases de concepção, escolha e revisão só ocorrerão se o problema ou a oportunidade o justificarem. Num contexto organizacional, Stoner et al. (1995) identificam algumas questões que o potencial decisor deve colocar a si próprio: o problema é suficientemente importante? (há que estabelecer prioridades, pois não é possível um gestor lidar com *todos* os problemas com que se depara diariamente); o problema merece

## 14 Capítulo II

um tratamento formal?; será que o problema não se resolve por si próprio?; a quem caberá a decisão — não poderá ser delegada para um nível inferior da hierarquia organizacional?

Na caracterização dos processos de decisão importa distinguir os **problemas estruturados** (ou programados, na terminologia de Simon) dos **não estruturados** (não programados). Os primeiros são problemas para os quais existem dados, procedimentos de resolução e resultados completamente especificados, muitas vezes através de políticas ou regras bem definidas. Trata-se habitualmente de problemas de rotina, como por exemplo estabelecer o salário de um operário recém-contratado ou gerir a tesouraria. Os problemas não estruturados são aqueles no pólo oposto, como por exemplo elaborar um plano de investigação e desenvolvimento (note-se que esta decisão até pode ser periódica e, nesse aspecto, algo rotineira), ultrapassar um conflito com os operários de uma fábrica, ou responder a uma inovação de uma empresa concorrente. Encontram-se ainda referências a problemas **semi-estruturados**, ora significando aqueles que se situam entre estes dois extremos, ora significando aqueles em que umas fases são estruturadas e outras não (v. Silver, 1991: 67).

No contexto particular da metodologia multicritério de apoio à decisão, Roy (1985) sugere uma sequência de etapas (níveis) para um processo de decisão:

1. identificação do objecto da decisão e espírito da recomendação;
2. análise das consequências das acções possíveis e especificação dos critérios de avaliação;
3. modelação das preferências entre as acções e escolha dos métodos de agregação das preferências sob os vários critérios;
4. utilização dos modelos e elaboração da recomendação.

A etapa 1 partilha aspectos da fase de *intelligence* de Simon, enquanto as etapas 2 e 3 corresponderão à fase de *design*, que também poderemos designar por fase (ou etapa) de estruturação. A etapa 4 corresponderá à fase de *choice*, embora Roy reconheça que nem todas as decisões correspondem a problemas de escolha, conforme assinalaremos na Subsecção 3.3. Preferiremos, por esse motivo, designar esta última por fase (ou etapa) de avaliação. A fase de *review* não é aqui contemplada.

De seguida, iremos apresentar com mais detalhe as etapas de estruturação e de avaliação. Estas duas etapas têm uma fronteira indefinida, sendo o objectivo da estruturação construir uma representação formal — o modelo — da situação de decisão, ao passo que a avaliação considera esse modelo como o ponto de partida para se chegar a uma recomendação final. Podemos considerar a actividade de parametrizar o modelo, com valores precisos ou imprecisos, como uma charneira difusa entre a etapa de



estruturação e a etapa de avaliação. Na perspectiva da estruturação, trata-se de especificar mais detalhadamente o modelo (poderíamos falar de uma estruturação qualitativa “de alto nível” / “grossa”, seguida de uma estruturação quantitativa “de baixo nível” / “fina”). Na perspectiva da avaliação, trata-se já de efectuar julgamentos de valor sobre a comparação dos cursos de acção e sobre o papel de cada um dos critérios.

### **3. Da estruturação à parametrização**

---

Bana e Costa ( 1992: 17) define a estruturação da seguinte forma:

La problématique de la structuration consiste, dans un sens élargi, à poser le problème de l'aide à la décision en termes d'organisation de connaissances d'une situation décisionnelle à laquelle le décideur et autres intervenants font face (“structuration / formulation du problème”), puis d'un processus orienté vers l'acquisition d'informations préférentielles visant, et rendant plus aisée, la construction et reconstruction d'un modèle d'aide à la décision (“structuration du modèle”).

A estruturação é uma actividade extremamente importante, pois é sobre ela que se edifica a fase da avaliação. Silver (1995: 32) define esta actividade como «deciding how to decide» (que modelos? que dados? que técnicas de resolução?). A estruturação pode até ter também interesse por si só (v. Bana e Costa, 1992: 62). Porém, face ao âmbito do nosso trabalho, não nos alongaremos sobre a actividade de estruturar. Importantes lições sobre a actividade da estruturação podem ser colhidas na área da psicologia cognitiva (e.g. Kelly, 1955), na área da investigação operacional “*soft*” (e.g. Rosenhead, 1989, particularmente nos capítulos acerca da utilização de mapas cognitivos e da *soft systems methodology*) e sobretudo na área do apoio multicritério à decisão (e.g. Roy, 1985; Bana e Costa, 1992; Keeney, 1992). Nesta secção apresentaremos alguns conceitos / produtos da actividade de estruturação, que são essenciais para o remanescente deste texto.

#### **3.1. Actores no processo de decisão**

Na tomada de decisão no contexto organizacional há **actores** internos e externos que podem influenciar o processo de decisão, seja de forma directa, porque intervêm no processo, seja de forma indirecta, porque aqueles que intervêm têm em consideração as suas opiniões e possíveis reacções.

Uma organização é um sistema inserido num ambiente onde se incluem múltiplos actores. Stoner et al. (1995: 63-64) identificam os seguintes *stakeholders* nesse ambiente: clientes, fornecedores, reguladores (e.g. Governo, tribunais, entidades reguladoras do mercado), grupos de interesse (e.g. associações de consumidores, associações de moradores, etc.), media, sindicatos, instituições financeiras e concorrentes. Neste grupo podemos ainda incluir os *complementors*, aqueles que fornecem bens ou serviços que complementam a oferta da organização (e.g. v. Grove, 1999, onde se nota a importância que teve para a Intel, que produz microprocessadores, uma empresa como a Microsoft, que produz sistemas operativos). Já no seio da organização existem outros *stakeholders*, nomeadamente os que nela colaboram e os seus sócios ou accionistas.

O apoio à decisão dirige-se a um sub-sistema de actores que tenha identificado ou procure identificar uma oportunidade ou um problema. Esses actores são os **intervenientes**, que condicionam directamente o processo de decisão, coordenados pelo **decisor**.<sup>3</sup> Em muitas situações, cada vez mais frequentes (e.g. conselhos de administração, círculos de qualidade, painéis de avaliação, *task forces*), existirão múltiplos **decisores**, que coordenam conjuntamente as actividades, agindo através da formação de consensos (trata-se do estilo de gestão habitualmente utilizado no Japão), ou agindo com base no resultado de votações. Tratar-se-á então de situações de tomada de **decisão em grupo**. Outras vezes, os intervenientes representam partes com objectivos notoriamente divergentes, sendo a negociação, a arbitragem e a mediação (v. Raiffa, 1982) utilizadas para definir um acordo entre as partes. Tratar-se-á, nestes casos, de situações de **negociação**, que não estudaremos neste trabalho.

Os intervenientes que não são decisores participarão sobretudo com o objectivo de partilhar opiniões, informações e conhecimento e/ou com o objectivo de não excluir actores importantes na implementação das decisões. Quem também contribuirá com os seus conhecimentos é o especialista em apoio à decisão, o **analista** (os autores francófonos preferem *homme d'étude*), que pode ser um dos intervenientes ou mesmo o próprio decisor, ou pode ser um consultor externo a esse sub-sistema.

### 3.2. Conjunto das acções

As acções são os elementos sujeitos a avaliação durante o processo de decisão. Consoante o contexto, podem ser designadas por planos, projectos, candidatos, soluções, etc. Segundo Roy (e.g. v.

Roy, 99), as acções são representações que não implicam, *a priori*, uma existência real. Distinguem-se assim **acções reais** de **acções fictícias**. Estas últimas correspondem a algo apenas imaginado, podendo ainda dividir-se em acções realistas ou irrealistas, consoante se anteveja ou não a viabilidade da sua existência. Por vezes, é necessário agrupar várias acções, atendendo a eventuais interdependências entre estas, para responder à situação de decisão (e.g. constituição de um portfolio de aplicações financeiras). Trata-se de **acções fragmentárias**. Outras vezes, a escolha de uma acção exclui todas as outras (e.g. selecção de um executivo entre vários candidatos). Trata-se de **acções globais** ou **alternativas**.<sup>4</sup>

O conjunto das acções, que habitualmente designaremos por *A*, pode ser definido em extensão (os elementos do conjunto são explicitamente enumerados) ou em compreensão (o conjunto é definido por um conjunto de restrições a que obedecem os seus elementos). A definição do conjunto das acções pode frequentemente evoluir ao longo do processo de decisão:

- a passagem do tempo pode alterar as características de algumas acções;
- algumas acções podem deixar de estar disponíveis, ou deixar de ser consideradas interessantes;
- algumas acções podem passar a estar disponíveis, ou passar a ser consideradas interessantes;
- algumas acções podem ser inventadas durante o processo de decisão;
- o âmbito do processo de decisão pode ser reformulado, e.g. um processo no qual se pretende avaliar novas máquinas para uma fábrica pode evoluir para um processo em que se pretende avaliar estratégias para o aumento da qualidade dos artigos que esta produz.

### 3.3. Problemáticas de apoio à decisão

Uma das componentes da actividade de estruturar é formular a questão a que se pretende responder. Deve-se a Roy a definição de quatro problemáticas de apoio à decisão (e.g. v. Roy e Bouyssou, 1993: 69-70), enumeradas de seguida.

**Problemática de descrição.** Apenas se visa descrever a situação de decisão numa linguagem formal e adequada, pelo que não se chega à fase de avaliação.

---

<sup>3</sup> Roy (1985) utiliza a designação “*demandeur*” para o coordenador do grupo dos intervenientes, reconhecendo que este pode ser um representante do verdadeiro “*décideur*”, que detém o poder de decisão acerca da implementação da recomendação.

<sup>4</sup> Os conceitos de acção real vs. fictícia, realista vs. irrealista e global vs. fragmentária são os apresentados por Roy (v. Roy, 1985; Roy e Bouyssou, 1993). Utiliza-se ainda a designação de acção potencial para designar uma acção real ou fictícia mas realista.

**Problemática de escolha** (ou de **selecção**). O objectivo do processo de decisão é a recomendação da escolha de uma acção, de entre um conjunto de alternativas. Bana e Costa (1996) acrescenta a problemática da escolha de  $k$  acções (em que  $k$  é um valor pré-definido) e a problemática de escolha sucessiva, especialmente adequada a acções fragmentárias.

**Problemática de ordenação** (ou **seriação**). O objectivo do processo de decisão é a recomendação de uma ordenação (seriação) das acções, da mais preferida para a menos preferida. Trata-se, por vezes, de uma seriação que é efectuada para submeter a uma hierarquia superior, responsável pela escolha final. Outras vezes, a seriação é uma imposição legal (e.g. contratação de recursos humanos na Administração Pública portuguesa), mesmo quando o objectivo final é proceder a uma escolha.

**Problemática de afectação** (ou **triagem**, ou ainda **classificação**). O objectivo do processo de decisão é a recomendação de uma afectação das alternativas a categorias (classes) pré-definidas, que podem ser ordenadas (e.g. candidato “bom”, “aceitável”, “mau”) ou não ordenadas (e.g. candidato com “perfil comercial”, “perfil técnico”, “perfil administrativo”, “perfil criativo”). No primeiro caso, fala-se de **afectação ordinal**; no segundo caso, de **afectação nominal**.

As problemáticas de escolha e ordenação referem-se à avaliação relativa das acções, confrontando-as entre si. A problemática de afectação refere-se à avaliação absoluta das acções, confrontando-as com padrões pré-definidos. No decurso de um mesmo processo de decisão podem encontrar-se sucessivamente diferentes problemáticas. Por exemplo, a problemática de afectação pode servir para efectuar uma primeira triagem das acções em “interessantes” e “desinteressantes”, seguindo-se uma ordenação das acções classificadas como “interessantes”, que constituiria posteriormente um input para uma escolha final, efectuada a um nível hierárquico superior.

### 3.4. Valores e pontos de vista

Um dos aspectos mais difíceis de estruturar é o dos valores (ou sistema de valores) dos decisores. Segundo Keeney (1992: 6), os valores são os princípios usados na avaliação das acções e das suas consequências, não se cingindo a princípios éticos. Os valores dos decisores não serão apenas os que reflectem os seus interesses próprios, podendo incluir os valores subjacentes à cultura da organização a que pertencem e os valores dos *stakeholders*.

Os valores são explicitados através de uma estrutura de **pontos de vista** para a avaliação das acções (Keeney refere-se aos “objectivos” do decisor). Para Bana e Costa (1992), os pontos de vista

interligam as características das acções a avaliar e os valores dos decisores. Este autor apresenta o conceito de ponto de vista da seguinte forma:

Un point de vue représente tout aspect de la réalité décisionnelle que l'homme d'étude perçoit comme important pour la construction d'un modèle d'évaluation d'actions existantes ou à créer. Un tel aspect que découle du système de valeurs et / ou de la stratégie d'intervention d'un acteur dans le processus de décision, regroupe des éléments primaires qui interfèrent ensemble dans la formation des préférences de cet acteur.

A construção de um modelo para avaliar as acções envolve a procura de um conjunto de **pontos de vista fundamentais**, caracterizados por serem aceitáveis para todos os actores e por serem isoláveis entre si. Por isolabilidade de um ponto de vista, entende-se que a avaliação das acções segundo as preocupações que esse ponto de vista representa não dependem de nenhum outro ponto de vista. Tal conjunto de pontos de vista originará naturalmente o conjunto de critérios a utilizar na avaliação das acções, pelo que não deverá colocar em causa as propriedades associadas a uma família coerente de critérios: exaustividade, coesão e não redundância (v. subsecção seguinte). Para além disso, os pontos de vista fundamentais devem ser compreensíveis por todos os actores (não ambíguos) e operacionalizáveis (v. sobre estes assuntos Bana e Costa, 1992; Keeney, 1992).

### 3.5. Critérios e desempenhos

De acordo com Roy (1999), um **critério** é uma ferramenta para avaliar e comparar as acções de acordo com um determinado ponto de vista. A avaliação de uma acção, mesmo considerando apenas um ponto de vista, pode ser complexa e congregar vários dos seus efeitos e atributos.

Uma das vertentes do critério é constituir um descritor (v. Bana e Costa, 1992: 123-135), que atribui a cada acção uma nota de **desempenho** (nível de impacto) numa **escala** qualitativa ou quantitativa, de forma não ambígua. Assim, utilizaremos a notação  $g_j(.)$  ( $j=1, \dots, n$ ) para representar os  $n$  critérios de avaliação, vistos como uma aplicação cujo domínio é o conjunto  $A$  das acções e cujo contradomínio é um conjunto de níveis de avaliação. Se o critério se referir a apenas um atributo das acções para o qual exista uma escala natural (e.g. a capacidade de uma máquina), então será essa a escala segundo a qual as acções serão descritas. Caso contrário, poder-se-á recorrer a um descritor indirecto (e.g. usar a classificação de um teste como um indicador de inteligência) ou a um descritor construído, que agrega diversos indicadores segundo fórmulas ou regras.

As escalas associadas a cada critério podem ter um carácter ordinal (qualitativo) ou cardinal (quantitativo). No primeiro caso, existe um conjunto finito e geralmente pequeno de níveis de

## 20 Capítulo II

desempenho de carácter qualitativo, ainda que codificáveis através de números (e.g. “mau” = 0, “mediocre” = 1, “satisfatório” = 2, ...). Note-se, porém, que a codificação é arbitrária (podia ser, por exemplo, “mau” = 0, “mediocre” = 8, “satisfatório” = 10, ...).

No caso quantitativo, os níveis de desempenho são expressos numa escala numérica, onde as diferenças entre valores podem ser comparadas (e.g. podemos afirmar que a diferença de peso entre 10 e 20 Kg é maior do que a diferença entre 30 e 35 Kg). Trata-se de um requisito mínimo para podermos falar de escalas cardinais (escalas de intervalo). Assim, ainda poderemos arbitrar o nível de desempenho naquela escala para duas acções  $a_x$  e  $a_y$ , mas não mais, pois a partir daí o desempenho de uma terceira acção  $a_z$  pode ser determinado comparando a diferença entre  $a_x$  (ou  $a_y$ ) e  $a_z$  com a diferença entre  $a_x$  e  $a_y$ . Um requisito mais forte é o das escalas de razão, onde existe um zero absoluto (como é o caso da massa de um corpo), e onde após arbitrar o desempenho de uma acção  $a_x$ , o desempenho de qualquer outra acção  $a_z$  é determinado comparando a diferença entre zero e  $a_z$  com a diferença entre zero e  $a_x$ .

Uma segunda vertente associada a um critério é o estabelecimento de relações de preferência entre as acções segundo o ponto de vista que o critério representa. A um critério está associado um **sentido de preferência**: crescente (critério a maximizar — quanto mais elevado for o valor da escala, melhor) ou decrescente (critério a minimizar — quando ocorre o inverso). A codificação do critério terá que ter este aspecto em conta. A título de exemplo, numa decisão com efeitos sobre o habitat de uma espécie selvagem não se pretenderá minimizar nem maximizar o número de indivíduos dessa espécie, mas sim (quicá) minimizar o desvio em relação à situação actual. Se exceptuarmos as situações de negociação, em que por exemplo o vendedor pretende maximizar o preço e o comprador pretende minimizá-lo, o sentido de preferência associado a um critério deve ser unânime entre todos os intervenientes.

Nesta segunda vertente dos critérios um conceito importante é o seu poder de discriminação (v. e.g. Roy e Bouyssou, 1993: 55-56). Segundo o critério na sua forma habitual (a que também se chama *verdadeiro-critério*), se o desempenho de uma acção for melhor do que o de outra, mesmo que a diferença seja ínfima, a primeira é preferível à segunda nesse critério. Logo, as duas acções só serão consideradas indiferentes segundo esse critério se os seus desempenhos forem exactamente iguais. Já segundo um **pseudo-critério**, se a diferença de desempenhos for pequena (i.e. não exceder um **limiar de indiferença** associado ao critério), então as acções são consideradas indiferentes e só se a diferença de desempenhos for significativa (i.e. não inferior a um **limiar de preferência** associado ao critério) é

que se afirma que a melhor acção é estritamente preferida à outra. Como o limiar de indiferença não tem que ser igual ao limiar de preferência, pode ocorrer a situação intermédia, designada por “preferência fraca”, que corresponde a uma hesitação entre a indiferença e a preferência.

O conjunto dos critérios constitui uma **família coerente** se verificar cumulativamente as três condições seguintes (para uma exposição detalhada, incluindo exemplos, v. Roy e Bouyssou, 1993: 73-125):

- **exaustividade** — a família de critérios compreende todos os aspectos relevantes para a avaliação, pelo que duas acções com desempenhos idênticos em todos os critérios têm que ser consideradas indiferentes;
- **coesão** — para qualquer acção, a melhoria do seu desempenho num critério não pode piorar a sua apreciação global, quando os desempenhos nos restantes critérios se mantêm inalterados, independentemente dos valores destes últimos; logo, se uma acção  $a_x$  for considerada indiferente (em termos globais) a uma acção  $a_y$ , então se apenas se alterar um desempenho de  $a_x$  para melhor, a acção  $a_x$  será considerada (em termos globais) pelo menos tão boa quanto a acção  $a_y$ ;
- **não redundância** — a remoção de qualquer critério implicaria a não satisfação da exaustividade ou da coesão.

Uma vez definidos o conjunto das acções e a família coerente de critérios, não necessariamente por esta ordem (podem até ser definidos em paralelo num processo que evolua de forma helicoidal), podemos, no caso do conjunto das acções ser definido em extensão ( $A=\{a_1, \dots, a_m\}$ ), construir uma **tabela de desempenhos** (também designada por matriz de impacto ou matriz de decisão) de duas entradas, na qual cada elemento  $g_j(a_i)$  indica o desempenho da acção  $a_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) de acordo com o  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ ).

### 3.6. Parâmetros que influenciam a tabela de desempenhos

Na actividade de estruturação pode ser considerado conveniente não fixar todos os valores da tabela de desempenhos. Em vez disso, alguns desses valores poderão depender de vários **parâmetros** cujos efeitos apenas serão analisados na fase da avaliação. Os parâmetros de que falamos podem referir-se à agregação de elementos efectuada no âmbito de cada ponto de vista, às características das acções e ao modo como estas características são medidas.

Consideremos o seguinte exemplo, que ilustra estes vários tipos de parâmetros. Numa dada situação de decisão, que visa escolher um veículo de transporte de mercadorias, intervém um ponto de vista “custos”. Entre os elementos relevantes para a formação de julgamentos segundo este ponto de vista encontram-se os custos em combustível, o preço do veículo, etc. Em primeiro lugar, a agregação destas características no âmbito do ponto de vista “custos” poderá fazer intervir alguns parâmetros que reflectam a importância de cada uma delas. A um nível mais baixo, a medição de cada uma das características pode também envolver alguns parâmetros. Por exemplo, a medição do preço do veículo pode envolver a determinação do valor actual líquido das prestações de leasing, onde intervém o parâmetro “taxa de actualização”, enquanto na medição dos custos em combustível podem intervir parâmetros que indiquem o número de quilómetros a percorrer em vias rápidas e o número de quilómetros a percorrer em estradas nacionais. A um nível mais baixo ainda, a característica “custo em combustível” pode depender de parâmetros como o preço do combustível.

Nestas circunstâncias, a actividade de estruturação poderá compreender a definição das combinações possíveis de valores para os parâmetros (atendendo a eventuais interdependências) ou, mais modestamente, a definição de um pequeno conjunto de **cenários**. Cada cenário será definido por uma combinação coerente de valores para os parâmetros (e.g. um futuro realista), a que corresponderá uma tabela de desempenhos. Em qualquer dos casos, estaremos perante uma situação de decisão com **informação imprecisa**.

Outros paradigmas bem conhecidos em que não se fixa um valor preciso para cada desempenho são a teoria das **probabilidades** e a teoria dos **conjuntos difusos** (um resumo recente sobre estes paradigmas é apresentado por Matos, 2000). No primeiro caso, os elementos da tabela de desempenhos são variáveis aleatórias, contínuas ou discretas, às quais está associada uma distribuição de probabilidade.<sup>5</sup> Posteriormente, na fase de avaliação, é habitual considerar apenas os valores esperados dessas distribuições e, porventura, as suas variâncias.<sup>6</sup> No segundo caso, os elementos da tabela de desempenhos são números difusos (*fuzzy*), cada um quantificando o grau de pertença de uma acção ao conjunto das acções que goza de determinada propriedade (e.g. ter custo baixo).

---

<sup>5</sup> Existe uma distinção clássica entre problemas com risco, nos quais as probabilidades dos acontecimentos são conhecidas, e os problemas com incerteza, onde nem sequer se conhecem aquelas probabilidades (e.g. v. Fishburn, 1988).

<sup>6</sup> Este tipo de procedimento está enraizado nas teorias normativas de decisão baseadas em utilidade (e.g. v. von Neumann e Morgenstern, 1947; Savage, 1954; Fishburn, 1988).



Posteriormente, na fase de avaliação, é usual o recurso a operadores de agregação próprios para números difusos.<sup>7</sup>

## 4. Da parametrização à recomendação

---

A fase da avaliação das acções pode entrelaçar-se com a fase da estruturação. Por um lado, durante a fase de estruturação podem-se efectuar, implicitamente, algumas avaliações. Por exemplo, ao definir o conjunto das acções potenciais excluem-se aquelas que são visivelmente irrealistas, o que constitui um juízo técnico, mas também aquelas que não são consideradas minimamente interessantes ou relevantes, o que já constitui uma avaliação (de carácter holístico), um juízo de valor. Por outro lado, durante a fase de avaliação pode-se sentir a necessidade de acrescentar algo à estruturação. Por exemplo, conclui-se que existe um critério que foi esquecido, ou inventam-se novas acções (pode-se até considerar que um processo de decisão foi bem sucedido porque ajudou a inventar uma acção que veio a ser considerada superior às existentes no início do mesmo). Outras vezes, pode-se sentir mesmo a necessidade de reformular por completo o trabalho de estruturação efectuado (e.g. porque se alterou o propósito do processo de decisão, ou porque se descobriu que a família de critérios não era, afinal, coerente).

Nesta secção continuaremos a (breve) revisão de conceitos e ferramentas do apoio multicritério à decisão. Começaremos por expor os importantes conceitos de *dominância multicritério* e de *estrutura de preferências*, passando posteriormente à apresentação dos principais tipos de métodos de avaliação (*agregação multicritério*). Os métodos de agregação trazem consigo um novo conjunto de parâmetros (que difere de método para método), que vem completar o modelo delineado na fase de estruturação.

### 4.1. Relação de dominância multicritério

Seja  $A$  o conjunto das acções e seja  $F = \{g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)\}$  a família coerente de critérios que resultaram da fase de estruturação. Diz-se que uma acção  $a_x \in A$  domina (em termos multicritério) uma

---

<sup>7</sup> Para uma revisão do uso de números *fuzzy* em apoio multicritério à decisão v. e.g. Ribeiro, 1996; Roubens, 1997.

## 24 Capítulo II

acção  $a_y \in A$  se e só se os desempenhos da primeira não forem piores do que os desempenhos da segunda em nenhum critério e forem estritamente melhores em pelo menos um. Nesse caso, a acção  $a_x$  deve ser considerada objectivamente (i.e. independentemente da importância que se atribua a cada critério) superior à acção  $a_y$ , caso contrário poder-se-á questionar a coerência da família de critérios.

Podemos agora falar de acções **não dominadas**, que são aquelas para as quais se verifica não existir nenhuma outra acção em  $A$  que as domine. Note-se que este conceito é relativo à definição de  $A$  e não implica qualquer valorização das acções em termos absolutos: uma acção não dominada pode ser considerada má, enquanto uma acção dominada (por uma acção diferente da anterior) pode ser considerada boa. Mesmo no contexto de uma avaliação relativa, como é o caso de uma ordenação, nada impede que no resultado final a acção colocada em segundo lugar seja dominada, enquanto a acção posicionada na terceira posição seja não dominada. O conceito de dominância é, pois, determinante apenas no contexto em que se pretende escolher uma só acção, que deverá logicamente ser não dominada.

### 4.2. Situações e estruturas de preferência

As situações de preferência são formalmente relações binárias sobre o conjunto das acções. As quatro situações fundamentais de preferência quando se confrontam duas acções são as seguintes (e.g. v. Roy e Bouyssou, 1993: 33):

- *indiferença* (relação simétrica e reflexiva), representada por  $I$  — corresponde à existência de razões que justificam uma indiferença entre duas acções;
- *preferência estrita* (relação assimétrica e irreflexiva), representada por  $P$  — corresponde à existência de razões que justificam uma preferência significativa a favor de uma das acções;
- *preferência fraca* (relação assimétrica e irreflexiva), representada por  $Q$  — corresponde a uma hesitação entre  $I$  e  $P$ ;
- *incomparabilidade* (relação simétrica e irreflexiva), representada por  $R$  — corresponde à ausência de razões que justifiquem alguma das situações anteriores.

Podem-se definir outras situações de preferência a partir das acima apresentadas. Por exemplo, a relação  $S = P \cup Q \cup I$  (que designaremos por relação de prevalência) verifica-se sempre que existir preferência estrita, preferência fraca ou indiferença. Assim,  $a_x S a_y$  pode ler-se “ $a_x$  não é pior do que  $a_y$ ” ou “ $a_x$  é pelo menos tão boa como  $a_y$ ” (pois  $a_x$  ou é preferida ou indiferente a  $a_y$ ). Em termos de

notação, a presença de um índice indicará que a situação de preferência se refere a um critério, e a ausência de qualquer índice indicará que se refere a uma comparação global (considerando todos os critérios). Destarte,  $a_x I_2 a_y$  significa que  $a_x$  é indiferente a  $a_y$  no segundo critério, enquanto  $a_x I a_y$  significa que são indiferentes em termos globais.

Um conjunto de relações binárias sobre  $A$  simultaneamente exaustivas e mutuamente exclusivas (i.e. para qualquer par de acções verifica-se sempre uma e não mais do que uma dessas relações binárias) é designado por *estrutura de preferências*. Por exemplo, um método que não considere a possibilidade de preferência fraca pode construir sobre  $A$  uma estrutura de preferências  $\{P, I, R\}$ . Se, para além disso, for excluída a possibilidade da incomparabilidade, então resultará uma estrutura de preferências  $\{P, I\}$ .

### 4.3. Métodos de avaliação multicritério

Salvo no caso em que se verifique uma relação de dominância, a comparação de duas acções terá que implicar uma ponderação das vantagens e desvantagens de cada uma, habitualmente considerando que uns critérios podem ser mais importantes do que outros.

Existe uma grande variedade de métodos de avaliação multicritério, embora se reduzam a um pequeno número aqueles com alguma expressão na prática do apoio multicritério à decisão. O conjunto destes métodos pode ser classificado segundo dois eixos ortogonais. O primeiro eixo corresponde às problemáticas a que cada um dos métodos se dedica. Existem métodos para escolher, para ordenar ou para classificar as acções, sendo óbvio que aqueles dedicados à problemática de ordenação também podem ser utilizados no contexto de uma problemática de escolha. Um segundo eixo corresponde às taxinomias de Roy (1985), Schärliig (1985) e Vincke (1989), que distinguem as três classes que caracterizamos a seguir.

**Procedimentos de critério único excluindo incomparabilidade** (Roy) [métodos de agregação completa (Schärliig); teoria da utilidade multiatributo (Vincke)].

Esta classe de métodos caracteriza-se por procurar atribuir um valor de desempenho global  $V(a_i)$  a cada uma das acções  $a_i \in A$ , agregando os seus desempenhos nos vários critérios. Estes métodos permitem obter uma estrutura de preferências  $\{P, I\}$  sobre o conjunto das acções:

$$\begin{cases} a_x P a_y & \Leftrightarrow V(a_x) > V(a_y) \\ a_x I a_y & \Leftrightarrow V(a_x) = V(a_y) \end{cases}.$$

Notemos ainda que, definidas desta forma, as relações de preferência e de indiferença são transitivas (e.g. se  $a_x P a_y$  e  $a_y P a_z$ , então  $a_x P a_z$ ). Estes métodos podem utilizar-se no contexto da problemática de escolha (basta seleccionar a acção com melhor desempenho global), no contexto da problemática de ordenação (basta ordenar as acções pelo seu desempenho global) ou no contexto da problemática de afectação ordinal (basta associar as categorias a intervalos de desempenho global).

São três os principais tipos de procedimento que se podem integrar nesta classe. O principal é o da construção de funções de utilidade / funções de valor, sobre o qual nos alongaremos um pouco mais na Subsecção 4.4. Um segundo tipo corresponde ao método *AHP* (*Analytic Hierarchy Process*) de Saaty (1980; 1996) que, não obstante as críticas a que tem sido sujeito ao nível teórico, é frequentemente utilizado na prática. Um terceiro tipo corresponde à utilização de operadores de agregação *fuzzy* tais como o *OWA* (*Ordered Weighted Average*) ou os integrais *fuzzy* (v. e.g. as revisões apresentadas por Grabisch, 1986; Roubens, 1997; Chen e Hwang, 1992).

**Procedimentos de relação de prevalência aceitando incomparabilidade** (Roy) [métodos de agregação parcial (Schärlig); métodos de prevalência (Vincke)].

Os métodos desta classe caracterizam-se por construir e posteriormente explorar uma ou várias relações binárias sobre o conjunto das acções, que sejam mais ricas do que a relação de dominância,<sup>8</sup> embora não tão ricas quanto a relação de preferência que é obtida pelos métodos da classe anterior (v. Vincke, 1989: 85-86). Em particular, a estrutura de preferências que se obtém admite a possibilidade de alguns pares de acções serem considerados incomparáveis. Segundo Vincke (1989: 85), trata-se de uma possibilidade útil num processo de decisão, compatível com a situação, eventualmente provisória, de um decisor que não possa, não saiba, ou simplesmente não queira comparar alguns pares de acções. Deste modo, as recomendações a extrair dos resultados do método poderão não ser tão directas como no caso dos métodos da classe anterior. É até comum encontrarmos métodos dedicados a apenas uma problemática. Em contrapartida, os métodos desta classe são menos exigentes em termos da informação requerida e podem modelar aspectos, como a incomparabilidade ou a existência de preferências intransitivas, que não é possível capturar com os métodos da classe anterior. A *relação de prevalência*

(do francês “*surclassement*”, também traduzível por *subordinação*), que dá o nome a esta classe e na qual se baseiam muitos dos seus métodos, corresponde à reunião das relações de indiferença e de preferência: dizer que uma acção  $a_x$  prevalece sobre uma acção  $a_y$ , equivale a afirmar que a primeira não é pior do que a segunda.

Os principais métodos desta classe são os da família ELECTRE, sobre a qual falaremos mais na Subsecção 4.5. Uma outra família de métodos desta classe que atingiu alguma notoriedade é a família PROMETHEE (v. e.g. Brans e Vincke, 1985). Para uma breve descrição de outros métodos desta classe menos conhecidos do que os anteriores (MAPPAC, MELCHIOR, ORESTE, PRAGMA, REGIME, TACTIC) v. Pomerol e Barba-Romero (1993: 214-218). Para uma revisão desta classe de métodos recomendamos ainda Vincke (1999b) e Roy e Bouyssou (1993).

**Procedimentos de julgamento interactivo com interacções de tentativa e erro** (Roy) [métodos de agregação local (Schärlig); métodos interactivos (Vincke)].

Os métodos interactivos, também designados por *métodos de articulação progressiva de preferências* (v. Clímaco et al., 1996), funcionam como algoritmos iterativos em que se alternam fases de diálogo com fases de cálculo. Cada fase de diálogo propõe um ou mais resultados aos decisores, que estes podem aceitar (terminando o processo) ou procurar melhorar, fornecendo informação adicional. Com base nessa informação, a fase de cálculo determina uma nova proposta a apresentar aos decisores e volta-se à fase de diálogo.

A maior parte dos métodos desta classe dedica-se à problemática de escolha e a um contexto em que as acções são definidas em compreensão,<sup>9</sup> constituindo extensões *multi-objectivo* da programação matemática. As fases de cálculo correspondem, nesses casos, a problemas de optimização em que as múltiplas funções objectivo são agregadas por um operador de carácter temporário (a função “escalarizante”, que será diferente de iteração para iteração), por exemplo, minimizando uma distância a uma acção de referência ou efectuando uma soma ponderada das funções objectivo. Para uma revisão destes métodos (e.g. TRIMAP, STEM, Pareto Race, ICW,...) v. Clímaco et al. (1996), Steuer (1986), Vanderpooten (1990b), ou a breve nota de Gardiner e Vanderpooten (1997).

---

<sup>8</sup> Diz-se que uma relação é tanto mais rica quanto maior for o número de pares de acções para os quais essa relação se verifique.

<sup>9</sup> Alguns desses métodos, porém, são adaptáveis ao caso em que o conjunto das acções é definido por enumeração, o que poderá ter interesse quando o número das acções for considerável.

A taxinomia que acabámos de descrever não pretende definir três classes de métodos, mas apenas tipificar as suas características. A classificação nem pretende ser, sequer, exhaustiva, existindo alguns métodos que não se enquadram em nenhuma daquelas classes, enquanto outros se podem enquadrar em mais do que uma classe.

Como exemplos de métodos que não enquadramos na taxinomia anterior podemos citar regras de decisão clássicas, como a regra conjuntiva, a eliminação por aspectos, a regra lexicográfica ou a regra da semi-ordem lexicográfica (v. e.g. Goodwin and Wright, 1998: 56-62). Outro exemplo é o do grupo de métodos que, em lugar de agregar os desempenhos das acções, agregam as posições relativas das acções segundo os vários critérios, tais como o método de Borda (v. e.g. Pomerol e Barba-Romero, 1993:122-129).

Um grupo de métodos interessante, embora ainda em desenvolvimento, é o dos baseados nos *rough sets* (conjuntos aproximativos) de Pawlak (1991), conjuntos não caracterizáveis de forma precisa em termos de elementos e atributos dos elementos, mas que possuem aproximações inferiores e superiores já caracterizáveis nesses termos. Inicialmente, a utilização dos *rough sets* cingiu-se à problemática de afectação (Pawlak e Slowinski, 1994), tendo posteriormente sido estendida a outras problemáticas (Greco et al., 1997, 1999). A aplicação dos *rough sets* a problemas multicritério envolve a aproximação de relações de prevalência a partir de exemplos de classificação (se a problemática for a afectação ordinal) ou de exemplos de comparação de pares de acções (problemáticas de escolha e de ordenação), que o decisor seja capaz de fornecer. Neste aspecto, poderíamos incluir estes métodos na classe dos procedimentos de prevalência. Os resultados podem ser apresentados sob a forma de regras *se...então* (e.g. “se uma acção for muito boa no critério X sem ser má no critério Y então é globalmente boa”, ou “se uma acção for superior a outra nos critérios X, Y e Z então prevalece sobre aquela”), inferidas a partir dos exemplos fornecidos. Uma característica da técnica dos *rough sets* é a de considerar sempre desempenhos qualitativos (note-se que, se necessário, é sempre possível transformar desempenhos quantitativos em qualitativos).

Para terminar esta subsecção, mencionemos ainda um tipo de procedimentos que visa, de forma interactiva, parametrizar um modelo associado a um dos métodos de avaliação anteriores. No que respeita a métodos enquadáveis nos procedimentos de critério único (referimo-nos à função de valor aditiva), encontramos o UTA (Jacquet-Lagrange e Siskos, 1982) e o MACBETH (Bana e Costa e Vansnick, 1994, 1995). O primeiro determina em simultâneo a forma das funções de valor e os

coeficientes de escala (v. Subsecção 4.4 *infra*) que melhor reconstituem a ordenação de um subconjunto das acções, previamente efectuada pelos decisores de forma holística. O segundo permite determinar em separado a forma das funções de valor e os coeficientes de escala, a partir de comparações (em termos de diferença de atractividade) entre pares de acções, também efectuadas pelo decisor de forma holística. No que respeita a métodos enquadráveis nos procedimentos baseados em relações de prevalência, encontramos o DIVAPIME (Mousseau, 1993), que infere coeficientes de importância para modelos ELECTRE a partir de comparações holísticas entre acções, e o método de Mousseau e Slowinski (1998), que infere coeficientes de importância para modelos ELECTRE a partir de exemplos de classificação de acções.

#### 4.4. Agregação multicritério por uma função de utilidade ou de valor

A teoria da decisão clássica, normativa e baseada na teoria da utilidade esperada, teve a sua origem longínqua no matemático Bernoulli,<sup>10</sup> continuando no trabalho na área económica de von Neumann e Morgenstern, particularmente a partir da segunda edição em 1947 do clássico *Theory of games and economic behavior*, e no também clássico *The foundations of statistics* de Savage (1954). Assim se construiu um corpo de axiomas que indicava como um ser racional se deveria comportar perante o risco ou a incerteza. Segundo a teoria, face a um conjunto de acções com consequências distintas consoante o “estado da natureza” (cenário) que ocorrer, após a atribuição de valores numéricos que expressem as utilidades das várias consequências e de valores numéricos que expressem as probabilidades (ainda que subjectivas) de cada cenário, a acção que deve ser escolhida é aquela que maximizar a utilidade esperada. Os axiomas necessários e suficientes para que as preferências de um decisor concordem com a ordenação das acções induzida pela utilidade esperada são os seguintes:<sup>11</sup>

- U1. **Conectividade.** Perante duas acções, o decisor ou prefere uma, ou prefere a outra, ou conclui que são indiferentes. Esta condição será violada caso o decisor não queira ou não possa comparar duas acções, dado que exclui a situação de incomparabilidade.
- U2. **Transitividade.** As relações de preferência e de indiferença são transitivas.
- U3. **Consequência garantida.** Se duas acções têm a mesma consequência num dado cenário, a comparação entre ambas não deve depender da utilidade dessa consequência. Por exemplo, se  $a_1$  for preferível a  $a_2$  se ambas forem igualmente boas num dado cenário, então  $a_1$  deve continuar a ser preferível a  $a_2$  se afinal ambas forem igualmente más nesse cenário, mantendo-se tudo o resto igual.

<sup>10</sup> Segundo Jacquet-Lagrèze, ter-se-á tratado do primeiro a assinalar as atitudes subjectivas dos decisores perante o risco (v. intervenção de Jacquet-Lagrèze em Courbon et al., 1994).

<sup>11</sup> Seguimos a apresentação de von Winterfeldt e Edwards (1986: 321-325). Outra apresentação possível é, por exemplo, a que encontramos em Shafer (1988).

- U4. **Continuidade.** O conjunto dos cenários e das consequências é suficientemente rico para que se possam formular equações de indiferença entre escolhas sob risco, variando ora as consequências ora as probabilidades.
- U5. “**Arquimedes**”. Não existem consequências com utilidade infinita (seja  $-\infty$ , seja  $+\infty$ ), o que exclui perdas ruinosas (e.g. uma lotaria em que se pode ganhar um carro, com probabilidade 0,95, ou ser-se torturado até à morte, com probabilidade 0,05).
- U6. **Sequência standard comum.** Consequências que num dado cenário estão igualmente espaçadas em termos de utilidade também estarão igualmente espaçadas num cenário diferente.

Um enquadramento idêntico foi proposto para emular as preferências do decisor através de uma função de valor, que em lugar de apelar a julgamentos envolvendo acontecimentos e probabilidades, se baseia em julgamentos sobre diferenças de atractividade (e.g. v. von Winterfeldt e Edwards, 1986: 314-321). As questões que tipicamente se colocam aos decisores neste enquadramento requerem a comparação entre a intensidade de preferência (diferença de valor) de uma acção  $b$  sobre outra acção  $a$  e a intensidade de preferência de uma acção  $d$  sobre outra acção  $c$ . Os axiomas para este enquadramento são os seguintes:

- V1. **Conectividade.** Perante dois pares de acções, o decisor consegue indicar se a intensidade de preferência (diferença de valor) entre as acções do primeiro par é maior, menor ou igual à intensidade de preferência entre as acções do segundo par.
- V2. **Transitividade.** A intensidade de preferência é transitiva.
- V3. “**Aditividade**”. Sejam  $a$ ,  $b$ , e  $c$  três acções quaisquer tais que  $c$  seja preferível a  $b$  e  $b$  seja preferível a  $a$ . Então a intensidade de preferência de  $c$  sobre  $a$  não é inferior à intensidade de preferência de  $c$  sobre  $b$  nem é inferior à intensidade de preferência de  $b$  sobre  $a$ .
- V4. **Cancelamento.** Se a intensidade de preferência de  $a$  sobre  $b$  não é inferior à intensidade de preferência de  $a'$  sobre  $b'$  e se a intensidade de preferência de  $b$  sobre  $c$  não é inferior à intensidade de preferência de  $b'$  sobre  $c'$ , então a intensidade de preferência de  $a$  sobre  $c$  não é inferior à intensidade de preferência de  $a'$  sobre  $c'$ .
- V5. **Continuidade.** O conjunto das acções é suficientemente rico para que se possam formular equações de indiferença sobre intensidade de preferência entre pares de acções.
- V6. “**Arquimedes**”. Não existem acções com valor infinito (seja  $-\infty$ , seja  $+\infty$ ).

Se os axiomas V1 a V6 forem satisfeitos, então existe uma função de valor  $V(.)$  tal que:

- $V(a) > V(b)$  se e só se a acção  $a$  for preferível à acção  $b$ ;
- $V(a) = V(b)$  se e só se a acção  $a$  for indiferente à acção  $b$ ;
- $V(a) - V(b) \geq V(c) - V(d)$  se e só se a intensidade de preferência de  $a$  sobre  $b$  não for inferior à intensidade de preferência de  $c$  sobre  $d$ .

Segundo estas teorias, é necessário converter a escala dos desempenhos de cada critério numa escala de valor que considere as diferenças de atractividade, e posteriormente transformar cada escala de valor numa escala de utilidade, atendendo à atitude face ao risco (aversão, neutralidade, propensão) do decisor. Porém, segundo von Winterfeldt e Edwards (1986: 211-215), a distinção na prática entre



funções de utilidade e funções de valor é questionável, por vários motivos: o valor de uma consequência sem risco (e.g. receber 1000 dólares) é na realidade o valor que se atribui à utilização (que envolve incerteza) dessa consequência; a aversão ao risco pode ser modelada por funções de valor côncavas ou pela presença de critérios específicos; as escolhas repetitivas tendem a eliminar a aversão ao risco; e, sobretudo, os erros de modelação, quer no caso da função de valor, quer no caso da função de utilidade, são mais significativos do que a subtil distinção entre utilidade e valor. Aqueles autores argumentam, por um lado, que se podem utilizar na construção ou teste de funções de valor as técnicas utilizadas na construção de funções de utilidade, e por outro lado, que se podem construir funções de valor perante as quais o decisor seja neutro face ao risco.

Podemos encontrar em von Winterfeldt e Edwards (1986: 205-258) uma apresentação pormenorizada de várias técnicas para interrogar um decisor, com o intuito de construir funções de valor ou de utilidade compatíveis com as suas respostas. Estas dividem-se em técnicas de estimação numérica e técnicas de indiferença. As primeiras incluem o *rating* directo das consequências das acções, eventualmente com a ajuda de gráficos, ou a estimação de parâmetros de funções pré-estabelecidas (e.g.  $V(x) = \alpha - \beta e^{-\beta x}$ ). As segundas incluem questões do tipo “um aumento de 0 para 20 unidades é tão atraente como um aumento de 20 para  $x$ ; qual o valor de  $x$ ?”, ou “se 0 unidades valerem 0 e 3000 unidades valerem 1, qual o número de unidades que vale 0,5?” (técnica da bissecção), ou ainda “entre receber 50 unidades ou participar num jogo em que se ganha 100, com probabilidade  $p$ , ou 0, com probabilidade  $1-p$ , a partir de que valor de  $p$  é que preferiria o jogo?” (técnica da variação das probabilidades).

A teoria da utilidade multiatributo (e pode falar-se também de uma teoria de valor multiatributo) visa a simplificação da tarefa de construir funções de utilidade (ou de valor) quando as acções a avaliar são descritas por múltiplos atributos, i.e. pelos desempenhos segundo múltiplos pontos de vista. A simplificação da tarefa do decisor consiste em centrar a sua atenção num só atributo de cada vez e posteriormente na agregação dos atributos, em lugar de efectuar julgamentos directamente sobre utilidade (ou valor) global. O trabalho seminal de Keeney e Raiffa (1976) mostra que se podem construir funções de utilidade ou valor *locais* (referentes a um só atributo), e posteriormente agregá-las numa função de utilidade ou valor global. A função de agregação pode ser mais ou menos simples, conforme as condições de independência entre os atributos que se verifiquem.

## 32 Capítulo II

O modelo de agregação mais utilizado na prática, pela sua simplicidade, é o modelo aditivo. Seja  $v_j(a_i)$  o valor local segundo o  $j$ -ésimo ponto de vista ( $j=1, \dots, n$ ) de uma acção  $a_i$ . Então, a função de valor aditiva agrega estes valores através de uma soma ponderada onde intervêm  $n$  coeficientes de escala  $k_1, \dots, k_n$ :

$$V(a_i) = \sum_{j=1}^n k_j v_j(a_i).$$

Esta forma simples de agregação, porém, só é válida se for verificada a condição de independência mútua de preferências. Esta condição requer que as preferências entre acções cujo valor só difira num subconjunto dos atributos não dependam do valor que as mesmas acções têm nos restantes atributos. A título de exemplo, imaginemos que na escolha do local para um hipermercado intervêm, entre outros, os atributos *custo*, *área* e *atractividade* (*capacidade de atrair clientes*). Dois locais possuem a mesma *atractividade* mas diferem em *área* e *custo*. Ora, se nas suas preferências um decisor der primazia à *área* no caso de a *atractividade* ser elevada, mas der primazia ao *custo* no caso de a *atractividade* ser baixa, então a condição de independência de preferências mútua é violada. Outras formas de agregação, tais como a multiplicativa ou a multilinear, requerem condições de independência mais fracas (v. Keeney e Raiffa, 1976).

A atribuição de valores aos coeficientes de escala do modelo aditivo requer novamente uma série de julgamentos por parte do decisor. Entre as várias técnicas disponíveis (e.g. v. von Winterfeldt e Edwards, 1986) encontram-se o *rating* directo, o método dos *swings* e as equações de indiferença. O *rating* directo é o mais problemático, dada a facilidade com que os decisores atribuem valores numéricos à importância de cada critério, sem considerar a natureza dos coeficientes de escala (em particular, sem atender à gama de desempenhos existente em cada critério). Mais seguro é o método dos *swings*, segundo o qual se pede ao decisor para comparar acções cujo desempenho aumenta do pior para o maior valor em cada critério: se a transição do pior para o melhor valor no critério  $X$  valer 100, quanto valerá a transição correspondente no critério  $Y$ ? Outra alternativa é determinar taxas de compensação entre critérios através de equações de indiferença. Por exemplo, se uma acção  $a_i$ , cujos valores parciais são  $v_1(a_i), v_2(a_i), v_3(a_i), \dots, v_n(a_i)$ , for indiferente a uma outra acção  $a_k$ , cujos valores parciais são  $v_1(a_i)-r, v_2(a_i)+1, v_3(a_i), \dots, v_n(a_i)$  (podendo-se perguntar ao decisor o valor de  $r$ ), então, da equação

$$k_1 v_1(a_i) + k_2 v_2(a_i) + k_3 v_3(a_i) + \dots + k_n v_n(a_i) = k_1 [v_1(a_i)-r] + k_2 [v_2(a_i)+1] + k_3 v_3(a_i) + \dots + k_n v_n(a_i)$$

deduz-se  $k_2/k_1 = r$ . Estas taxas de compensação (*trade-offs*) ilustram bem o carácter totalmente compensatório destes modelos. Existem outras formas de proceder que podem auxiliar a obtenção dos coeficientes de escala, e até do valor parcial de cada acção em cada critério, nomeadamente os já referidos métodos UTA e MACBETH (v. Subsecção anterior).

Na prática, a simplicidade da função de valor aditiva possui um enorme apelo, tanto para o decisor como para o eventual analista. Edwards e Barron (1994) recomendam o seu uso sempre que a independência mútua de preferências não seja violada de forma “grosseira” (e.g. o valor de uma acção no critério  $X$  aumenta com o seu desempenho se esta tiver um dado valor no critério  $Y$ , mas diminui com o seu desempenho se o valor segundo o critério  $Y$  for outro). Na mesma linha, após efectuar um estudo de simulação, Stewart (1995) conclui que a função aditiva pode constituir uma aproximação aceitável de uma função multiplicativa. Keeney (1992: 141) assinala que a não verificação das condições de independência que permitem uma agregação simples é frequentemente fruto de uma estruturação deficiente (v. ainda exemplo em Belton, 1999).

O assunto da teoria da utilidade multiatributo é vasto e foi aqui apenas afluado. Para uma exposição mais detalhada, incluindo algumas aplicações, v. Keeney e Raiffa (1976) ou von Winterfeldt e Edwards (1986).

#### 4.5. A família dos métodos ELECTRE

Cada um dos métodos ELECTRE teve a sua origem em dificuldades encontradas para resolver um problema concreto (Roy e Vanderpooten, 1996). O primeiro deles foi o ELECTRE I (Benayoun et al., 1966; Roy, 1968), onde o nome do método representava “*ELimination Et Choix Traduisant la Réalité*”. Aí surgiram pela primeira vez os conceitos de relação de prevalência, concordância e discordância, embora a filosofia de comparar acções (candidatos) aos pares e de verificar quais os critérios (votantes) a favor de cada acção nesses confrontos estivesse já patente nos trabalhos de Condorcet (1785), referentes a problemas de votação.

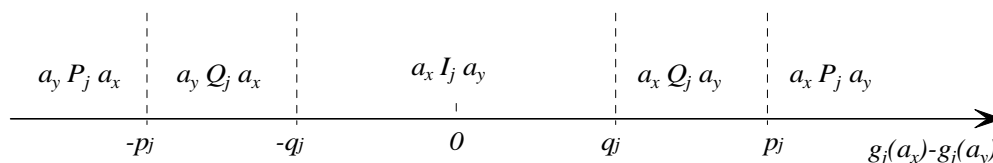
Os métodos ELECTRE baseiam-se na comparação entre pares de acções. Perante um par ordenado  $(a_x, a_y)$ , pretende-se saber se existem argumentos suficientes para afirmar que  $a_x$  prevalece sobre (é pelo menos tão boa como)  $a_y$ , o que se representa por  $a_x S a_y$ . Para o determinar agrega-se a força conjunta dos critérios que concordam com essa afirmação e verifica-se se nos restantes critérios a discordância não é demasiado forte (podendo estes exercer um “direito de veto” àquela afirmação se a

diferença de desempenhos for muito grande). Notemos que não existe agora um princípio de compensação total: o piorar do desempenho de uma acção associado a um critério pode não ser compensado pela melhoria no desempenho segundo outro(s) critério(s).

Uma análise idêntica à usada para aferir se  $a_x$  prevalece sobre  $a_y$  pode ser efectuada para saber se  $a_y$  prevalece sobre  $a_x$ . Podem ocorrer, por conseguinte, quatro situações distintas:

- $a_x S a_y \wedge \neg(a_y S a_x)$  —  $a_x$  é preferível a  $a_y$ , o que se representa por  $a_x P a_y$ ;<sup>12</sup>
- $\neg(a_x S a_y) \wedge a_y S a_x$  —  $a_y$  é preferível a  $a_x$ , o que se representa por  $a_y P a_x$ ;
- $a_x S a_y \wedge a_y S a_x$  —  $a_x$  e  $a_y$  são indiferentes entre si, o que se representa por  $a_x I a_y$  (ou  $a_y I a_x$ );
- $\neg(a_x S a_y) \wedge \neg(a_y S a_x)$  —  $a_x$  e  $a_y$  são incomparáveis, o que se representa por  $a_x R a_y$  (ou  $a_y R a_x$ ).

A primeira fase dos métodos ELECTRE consiste na construção de uma relação de prevalência (ou várias) sobre o conjunto das acções (exceptuando o método de afectação ELECTRE TRI, no qual as acções a afectar não são comparadas entre si, mas antes confrontadas com acções de referência). Posteriormente, essas relações são exploradas no âmbito da problemática a que o método se dedica (cada membro da família ELECTRE foi construído para uma problemática específica).



**Figura II.1. Relação entre os limiares e as situações de indiferença, de preferência fraca e de preferência estrita (para um pseudo-critério a maximizar).**

Os métodos ELECTRE I e IS (Roy e Skalka, 1984) dedicam-se à problemática de escolher a melhor acção. A diferença entre ambos situa-se na modelação dos critérios, que são *verdadeiros-critérios* no ELECTRE I e *pseudo-critérios* no ELECTRE IS. Num pseudo-critério  $g_j(\cdot)$ , a comparação de dois desempenhos resulta numa situação de indiferença se a diferença entre eles não exceder um *limiar de indiferença*  $q_j$  e só resulta numa situação de preferência estrita se a diferença entre eles igualar ou exceder um *limiar de preferência*  $p_j$  (Figura II.1 e Subsecção 3.5). Pretende-se desta forma acomodar a imprecisão associada aos desempenhos das acções. Associado a cada critério encontramos também um *coeficiente de importância*  $k_j$  e um *limiar de veto*  $v_j$ . Os primeiros entram no cômputo da força da coligação de critérios que concorda com cada prevalência (nos ELECTREs, estes

<sup>12</sup> Neste texto, o símbolo  $\neg$  denota a negação lógica.

coeficientes de importância possuem o sentido conferido pela metáfora dos “pesos”), ao passo que os segundos indicam qual a diferença de desempenhos, desfavorável à prevalência que se pretende estabelecer, a partir da qual essa prevalência é recusada (vetada). Tanto no caso do ELECTRE I como no do ELECTRE IS, o objectivo da fase de exploração da relação de prevalência é tentar identificar um subconjunto tão pequeno quanto possível de acções (*núcleo*), onde se deverá encontrar a melhor, que permita justificar a exclusão de todas as restantes (mais detalhes serão apresentados no Capítulo VII).

Os métodos ELECTRE II (Roy e Bertier, 1971), ELECTRE III (Roy, 1978) e ELECTRE IV (Roy e Hugonnard, 1982) dedicam-se à problemática de ordenar as acções. O ELECTRE II baseia-se nas mesmas ideias do ELECTRE I, fazendo intervir duas relações de prevalência, uma “forte” e outra “fraca”, sendo a segunda implicada pela primeira. O ELECTRE III já utiliza pseudo-critérios e constrói uma relação de prevalência difusa:<sup>13</sup> para cada par de acções  $(a_x, a_y)$ , determina um índice de credibilidade  $\sigma(a_x, a_y)$ , que agrega a informação relativa à concordância e à discordância para indicar a credibilidade da afirmação “ $a_x$  prevalece sobre  $a_y$ ” (mais detalhes serão apresentados no Capítulo VI). O ELECTRE IV, que também utiliza pseudo-critérios, obtém na fase de construção um número de relações de prevalência (não difusas) que pode variar entre dois e cinco, contidas umas nas outras (“encaixotadas”), sem fazer apelo a coeficientes de importância (os critérios não são discriminados nesse aspecto). A fase de exploração dos ELECTREs II, III e IV, produz duas pré-ordens (ordenações das acções com eventuais *ex-aequo*), que são fundidas numa pré-ordem parcial (ordenações com eventuais *ex-aequo* e eventual presença de acções incomparáveis).

Por último, o método ELECTRE TRI (Yu, 1992) dedica-se à problemática de afectação ordinal. Face a um conjunto de categorias, cada uma delimitada por duas acções de referência, o método procura encontrar qual a categoria a que pertence cada uma das acções a afectar, comparando-a com as acções de referência. As comparações são efectuadas calculando índices de credibilidade, tal como no método ELECTRE III (o Capítulo VIII apresenta o ELECTRE TRI com maior detalhe).

Exposições detalhadas sobre os métodos ELECTRE podem ser encontradas, por exemplo, em Roy (1991) (apenas fundamentos), Vanderpooten (1990) (apenas fase da exploração), Roy e Bouyssou (1993), Maystre et al. (1994) (que inclui aplicações à área do ambiente) e Rogers et al. (2000) (que inclui aplicações à área do planeamento de infra-estruturas).

---

<sup>13</sup> Sobre relações binárias difusas (*fuzzy*), v. e.g. Perny e Roy, 1992.

## 5. Sistemas computacionais de apoio à decisão

---

Iremos concluir a revisão sobre o apoio à decisão neste capítulo com uma breve panorâmica do tema do apoio computacional à tomada de decisões. Os Sistemas de Apoio à Decisão (SAD) surgiram nos anos 70, como resultado da confluência entre a evolução dos sistemas computacionais e a investigação em métodos de apoio à decisão. Por um lado, os modelos e métodos de apoio à decisão vêm enriquecer os sistemas de informação, que embora tivessem começado por desempenhar nas organizações um papel meramente operacional (e.g. processamento de facturas, processamento de salários), haviam já chegado ao nível da gestão (sob a forma de *management information systems*). Por outro lado, os sistemas computacionais vieram impulsionar a utilização de ferramentas quantitativas de apoio à decisão, tornando essa utilização mais acessível e interactiva.

Não existe ainda uma definição consensual acerca do que são ou não sistemas de apoio à decisão (v. Silver, 1991; Turban e Aronson, 1998; Costa, 1999). Há quem distinga os SAD de outros sistemas computacionais de apoio à gestão (e.g. sistemas de informação para executivos ou sistemas periciais; v. Costa, 1999), enquanto para outros, como Silver (1991), qualquer sistema concebido para influenciar a forma como as pessoas decidem merece ser designado por sistema de apoio à decisão. Turban e Aronson (1998) apresentam mesmo duas definições, que diferem quanto à necessidade destes sistemas incluírem modelos matemáticos:

A DSS (Decision Support System) is an interactive flexible and adaptable computer-based information system specially developed for supporting the solution of a nonstructured management problem for improved decision making. It uses data, provides user interface, and can incorporate the decision maker's own insights. In addition, a DSS may use models, is built by an interactive process (often by end users), supports all phases of decision making, and may include a knowledge component. (p. 77)

Decision Support System — Computer-based information system that combines models and data in an attempt to solve nonstructured problems with extensive user involvement. (Glossário, p. 856)

As definições mais restritas na linha das de Turban e Aronson (1998) acabam por ser as mais comuns. Nessa perspectiva, os SAD incorporam tipicamente os subsistemas seguintes (a inclusão de uma componente de conhecimento não será tão omnipresente nos SAD actuais):

- O *subsistema de gestão de dados* permite criar, aceder e actualizar a base de dados do sistema. Alguns dos sistemas mais recentes são construídos com base nos conceitos de *data warehouse*, agrupando dados de diversas origens e formatos, actuais e históricos, que surgem aos utilizadores

como um todo coerente, acessível a poderosas ferramentas pesquisa, visualização e análise de dados. Por exemplo, a possibilidade de desagregar dados (*drill down*) até ao nível de detalhe que se deseje (e.g. vendas por país, por região, por loja, por vendedor) pode constituir um precioso auxiliar na fase de inteligência.

- O *subsistema de gestão de modelos* permite criar ou manipular modelos, ligar os modelos aos dados e executar métodos numéricos sobre os modelos. Segundo, Turban e Aronson (1998: 77), o SAD poderá conter ou não esta componente.
- O *subsistema de interface com o utilizador* fornece um ambiente de interacção coerente, disponibilizando um acesso fácil aos modelos, aos dados e aos resultados, orientando ainda o utilizador na utilização do sistema. Na situação ideal, o interface deverá ser construído de tal forma que possa ser utilizado por pessoas pouco experientes no uso de computadores.

O papel dos SAD é apoiar a tomada de decisões, sem procurar substituir o decisor. As suas características principais, no que respeita às fases de estruturação e de avaliação de um processo de decisão, deverão ser a facilidade com que se constroem e se combinam modelos, a facilidade com que esses modelos acedem aos dados existentes, e sobretudo a facilidade com que se utilizam os modelos como meios de experimentação e de aprendizagem: “e se os pressupostos forem outros?”, “e se ocorrer determinado acontecimento?”, “e se optarmos por determinada acção?”.

Existem SAD especialmente concebidos para grupos de decisores. Os Sistemas de Apoio à Decisão em Grupo (SADG) dirigem-se a grupos de decisores que trabalham em conjunto (embora possam estar geograficamente dispersos) para os mesmos objectivos, muitas vezes pertencentes à mesma organização, não existindo entre eles conflitos de interesses significativos (para esses casos existem os Sistemas de Apoio à Negociação). DeSanctis e Gallupe (1987) dividem os SADG em três níveis:

- Os SADG de nível 1 oferecem ferramentas de *groupware* para ultrapassar as barreiras de comunicação entre os elementos do grupo, tais como troca electrónica de documentos, solicitação activa de ideias e votos (possivelmente de forma anónima), output de sumários para dispositivos de visualização comum, etc.
- Os SADG de nível 2 acrescentam modelos e métodos de apoio à decisão, tal como um SAD individual, possivelmente adaptados a processos de decisão em grupo.
- Os SADG de nível 3 oferecem ainda uma componente de apoio (e.g. através de um sistema pericial) à regulação do padrão, do tempo e do conteúdo da discussão (e.g. moderar a intervenção de oradores, propor um método de votação, ou propor o avanço para a etapa seguinte do processo de decisão).

A intersecção entre a área dos SAD e a do apoio multicritério à decisão é ainda pobre, relativamente ao potencial que apresenta. Por um lado, a maioria dos SAD que oferece as potencialidades acima descritas em termos de gestão de modelos e gestão de dados (sobretudo esta última, na qual apostam os SAD vendidos pelas empresas de software) é ainda nula ou rudimentar no que respeita à oferta de modelos multicritério (e.g. pontuação simples das acções em vários critérios). Por outro lado, os métodos de avaliação multicritério mais conhecidos são implementados em programas informáticos que apenas incluem esse método, quase sempre construídos por iniciativa dos seus autores, com o intuito de fomentar a sua utilização e divulgação.<sup>14</sup> Apenas para citar alguns exemplos bem conhecidos, o programa Expert Choice implementa o método AHP, o programa DecisionLab implementa o PROMETHEE, o programa VISA implementa a função de valor aditiva e os programas ELECTRE TRI e MACBETH implementam os métodos com os nomes respectivos. Os programas *VIP Analysis* e *VIP Sort*, de que falaremos mais adiante, são também criticáveis sobre este prisma. Pomerol e Barba-Romero (1993: 289-323) apresentam uma revisão das implementações computacionais de métodos de avaliação multicritério existentes à data. Perante a especificidade das implementações existentes, não surpreende a necessidade de utilizar vários programas para tratar um mesmo problema (e.g. Bana e Costa et al., 1999).

A evolução desejável já começou. Por exemplo, Antunes et al. (1994) apresentam um programa que disponibiliza vários métodos de outros autores (ELECTRE I, modelo de agregação aditivo, AHP, entre outros), deixando ao utilizador a liberdade de escolher qual ou quais utilizar. O sistema AGAP (Costa et al., 1998) para avaliação de projectos financeiros incorpora e permite integrar métodos de análise financeira com métodos multicritério (na versão actual, ELECTRE TRI, PROMETHEE, agregação por uma função de valor e filtros conjuntivo/disjuntivo). Há ainda que integrar a oferta de múltiplos métodos de avaliação com a oferta de métodos de apoio à estruturação e à parametrização dos modelos, envolvendo porventura técnicas da área da inteligência artificial. Segundo von Winterfeldt e Edwards (1986: 572-573), o papel da informática na substituição do analista é potencialmente interessante, como forma de tornar as análises formais menos onerosas e, por conseguinte, aplicáveis a uma maior gama de situações de decisão. Perny e Pomerol (1999) apresentam uma revisão acerca do papel que a inteligência artificial pode desempenhar no apoio multicritério à

---

<sup>14</sup> Roy (1999) expressa alguns receios sobre a forma como a disponibilidade de um programa de utilização fácil e apelativa pode influenciar os decisores na escolha de um método de avaliação multicritério, quando esse método pode não ser o mais adequado para a situação de decisão.



decisão, particularmente na geração de acções, na escolha do método de avaliação e na agregação de desempenhos.



# Capítulo III

## Apoio à decisão com informação imprecisa

### 1. Informação imprecisa

---

#### 1.1. Dificuldades em obter informação precisa

Na actividade de apoio à decisão, quer se recorra a apenas um, quer a múltiplos critérios, procura-se utilizar modelos matemáticos como forma de sintetizar a situação de decisão em causa, de facilitar a comunicação entre os decisores e de encontrar respostas adequadas para as suas questões. Contudo, surgem quase sempre grandes dificuldades em obter valores precisos para alguns (senão mesmo para todos) parâmetros do modelo.<sup>1</sup> Para esta dificuldade em obter valores precisos para os parâmetros concorrem os seguintes factores (consultem-se também os artigos de French, 1995, Roy e Bouyssou, 1989, e Zimmermann, 2000):

- Em cada critério, os desempenhos das acções podem enfermar da arbitrariedade presente no modo como este foi construído (e.g. o modo como são agregados os aspectos tidos em conta por esse critério, ou a necessidade de escolher medidas indirectas para o ponto de vista que o critério representa).
- Alguns parâmetros possuem um significado técnico inerente ao modelo que está a ser utilizado e sem qualquer referência tangível, o que pode conduzir quer à impossibilidade de

---

<sup>1</sup> Neste texto, os parâmetros devem ser considerados na acepção mais lata possível, incluindo o que alguns autores (e.g. Silver, 1991) designam por *dados* (e.g. vendas, elementos demográficos, indicadores económicos) e *opções de controlo de algoritmos* (e.g. precisão, condições de paragem).

o decisor indicar valores precisos, quer à fixação desses valores pelo próprio analista, atendendo à sua visão (necessariamente imperfeita) dos intuítos do decisor.

- Outros parâmetros reflectem valores ou preferências dos decisores, que estes podem considerar difíceis de expressar, seja porque consideram difícil atribuir-lhes um valor numérico preciso, seja porque preferem não os divulgar; inclusivamente, podem evoluir ao longo do processo de decisão.
- Os desempenhos das acções (sobretudo os seus desempenhos no futuro) podem depender de variáveis cujo valor não é conhecido na altura da análise (e.g. custos laborais, custos energéticos, procura de um produto, acções de entidades reguladoras ou de empresas concorrentes, etc.).
- A incerteza quanto ao que o futuro reserva pode também interferir no sistema de valores dos decisores (e.g. a importância conferida aos critérios na escolha de uma habitação é influenciada por expectativas, que poderão ou não concretizar-se, acerca da estabilidade do emprego, do aumento do agregado familiar, da evolução da área circundante, etc.).
- Os desempenhos das acções podem resultar de instrumentos de medida ou de valores estatísticos, que nunca são perfeitamente precisos.
- A informação que permitiria fixar o valor de alguns parâmetros pode estar incompleta, ser pouco credível, ser contraditória (entre diferentes fontes) ou controversa (entre diferentes opiniões).

Por vezes, alguns destes factores poderiam ser minorados à custa de tempo, discussões ou dinheiro, mas os intervenientes desejam evitar (ou pelo menos protelar) incorrer nesses custos. Em situações de decisão com múltiplos decisores, é frequente que existam divergências de opinião ou de preferência entre os mesmos na escolha dos valores para os parâmetros do modelo, o que agravará muitos dos factores aqui apontados.

## 1.2. Informação precisa vs. informação imprecisa

Diremos que estamos numa situação de **informação precisa**<sup>2</sup> quando os decisores conseguirem indicar com convicção um valor preciso para cada parâmetro, ou, o mesmo é dizer, quando um analista

---

<sup>2</sup> Aqui, a expressão *informação precisa* é utilizada no sentido de *informação pontual, bem determinada*, e não no sentido de *informação correcta* ou *verdadeira*.

consegue determinar esses valores a partir das respostas dos decisores às suas questões. Note-se que esta situação surge frequentemente na prática. Todavia, reconhecendo-se a incerteza, a arbitrariedade e a imprecisão que estão apesar de tudo associadas ao valor dos parâmetros, sente-se então a necessidade de efectuar uma análise *a posteriori* por forma a estudar o efeito nos resultados da variação desses valores (este ponto será mais desenvolvido no Capítulo IV).

Noutras situações, os decisores apenas conseguem fornecer aquilo a que chamaremos **informação imprecisa** (e não estamos sós: e.g. Athanassopoulos e Podinovski, 1997; Miettinen e Salminen, 1999), por não conduzir a uma combinação de valores precisos para os parâmetros. Outros autores utilizam outras designações. A título de exemplo, Park e Kim (1997) referem-se a **informação incompleta**, French e Rios Insua (1989) referem-se a **informação parcial**, enquanto Bana e Costa e Vincke (1995) sugerem **informação pobre**. Bana e Costa (1992: p. 250-251) nota que os autores que consideram a informação *parcial* ou *incompleta* o fazem admitindo implicitamente a existência de informação completa latente na mente do decisor (e.g. referem-se a uma estimação do valor dos parâmetros), o que é questionável. Porém, já será lícito referirmo-nos a informação *parcial* do ponto de vista de um modelo ou de um método: será parcial porque falta mais informação para obter o resultado pretendido.

Os modelos que designaremos de decisão informação imprecisa generalizam os modelos em que se consideram vários “cenários” para o valor dos parâmetros, bem como os modelos em que se atribui um intervalo de valores para cada parâmetro. Consideraremos um conjunto  $T$  de múltiplas combinações de valores (ou, mais rigorosamente, vectores de valores) para os parâmetros. Os elementos de  $T$  são todas as combinações de valores para os parâmetros (de ora em diante, **combinações**) compatíveis com a informação imprecisa conhecida em determinado instante do processo de decisão. Trata-se das combinações que são provisoriamente consideradas aceitáveis pelos decisores. Num espaço  $\theta$ -dimensional (em que  $\theta$  designa o número de parâmetros), cada combinação corresponderá a um ponto.<sup>3</sup> O conjunto  $T$  poderá ser discreto, contendo um número finito de “cenários”, ou poderá ser contínuo, podendo estabelecer intervalos para o valor dos parâmetros e incluir restrições adicionais que inter-relacionem os mesmos (e.g. o valor do parâmetro 1 não pode exceder o valor do parâmetro 2).

---

<sup>3</sup> Nesse sentido, poderemos também designar a informação imprecisa por informação *não-pontual*.

### 1.3. Outros paradigmas

Não estudaremos directamente neste trabalho outros paradigmas de modelação bem conhecidos em que os parâmetros podem não possuir um valor preciso, tais como a teoria das probabilidades<sup>4</sup> ou a teoria dos conjuntos difusos, incluindo a *possibility theory* (v. Dubois e Prade, 1989; Matos, 2000; Zimmermann, 2000).

Segundo a teoria das probabilidades, podemos associar o valor dos parâmetros a variáveis aleatórias, por forma a que algumas combinações possam ser consideradas mais prováveis do que outras. Todavia, seria estranho associar variáveis aleatórias a certo tipo de parâmetros, como por exemplo os que definem a importância de cada critério para o decisor. Trabalhar com informação imprecisa já permite integrar no mesmo paradigma todo o tipo de parâmetros. Segundo esse paradigma, não se efectuam distinções entre as diferentes combinações, sendo todas consideradas igualmente aceitáveis.

Os conjuntos difusos, embora generalizem a noção de intervalo, efectuam habitualmente distinções entre as combinações, considerando que umas são mais possíveis do que outras. Ao contrário das variáveis aleatórias, já permitem integrar todo o tipo de parâmetros no mesmo paradigma, podendo mesmo modelar informação fornecida verbalmente (e.g. o critério *j* tem uma importância *elevada*). Porém, trata-se de um tipo de modelos de construção mais difícil e de análise mais complexa do que os de informação imprecisa, particularmente quando se pretenda inter-relacionar o valor dos vários parâmetros. O decisor deverá ser suficientemente conhecedor da teoria dos números difusos ou, provavelmente, acabará delegar algum do seu arbítrio no analista.

Notemos que a utilização de variáveis aleatórias, bem como a utilização de números difusos, não excluem o paradigma da informação imprecisa, pois tanto num caso como no outro irão surgir no modelo novos parâmetros (e.g. a média e o desvio padrão de uma distribuição normal, a definição das funções de pertença), cujo valor preciso os decisores poderão não desejar fixar. Podemos, por conseguinte, encarar o paradigma da informação imprecisa como um complemento dos anteriores, porquanto permite utilizar modelos com variáveis aleatórias e modelos com conjuntos difusos. Por fim, o paradigma da informação imprecisa conjuga-se de forma particularmente adequada com estratégias de exploração das consequências da imprecisão (análises de robustez, conforme veremos no Capítulo IV),

ao passo que os modelos associados a probabilidades ou a conjuntos difusos estão associados, habitualmente, a operações que visam agregar a informação para prescrever uma decisão (e.g. maximização do valor esperado).

## 2. Conceitos de dominância e de óptimo

---

A literatura acerca da análise de decisão clássica, baseada na atribuição de um valor (utilidade) a cada acção, define alguns conceitos de dominância e de óptimo para o caso com informação imprecisa (v. Weber, 1987; French e Rios Insua, 1989; ou Rios Insua e French, 1991). Aqui, a dominância não é relativa aos diversos critérios, mas aos parâmetros; deve ser interpretada como uma relação de preferência. Com o intuito de evitar a confusão entre dominância no sentido multicritério e dominância no sentido do valor dos parâmetros, Podinovski (1999) propõe a expressão *outperforms* em lugar de *dominates*. Aqui, mantemos a designação habitual (dominância), evitando-se a confusão quer pelo contexto, quer pela apensação do símbolo  $\Delta$ .

Nas definições seguintes, sejam  $a_x$  e  $a_y$  duas acções de  $A$ , e **assuma-se que uma acção é tanto melhor quanto maior for o seu valor**. A notação  $V(a_x, t)$  designa o valor da acção  $a_x \in A$  quando os parâmetros assumem os valores da combinação  $t \in T$ .

- **Dominância absoluta** — uma acção domina outra de forma absoluta se o seu valor for sempre igual ou superior (e estritamente superior em pelo menos um caso) ao da segunda, mesmo que sejam avaliadas segundo combinações distintas. Nestes casos, o valor no pior caso da primeira não é inferior ao valor no melhor caso da segunda. Esta  **$\Delta_A$ -dominância** pode expressar-se matematicamente como:

$$a_x \Delta_A a_y \Leftrightarrow V(a_x, t) \geq V(a_y, t'), \forall t, t' \in T \wedge \exists t, t' \in T : V(a_x, t) > V(a_y, t').$$

- **Dominância comum (de Bernoulli)** — uma acção domina outra se o seu valor for sempre igual ou superior (e estritamente superior em pelo menos um caso) ao da segunda para todas as combinações aceitáveis. Esta  **$\Delta$ -dominância** pode expressar-se matematicamente como:

---

<sup>4</sup> Quando na subsecção anterior referimos que os modelos de informação imprecisa generalizavam os modelos com “cenários”, não nos referíamos a *estados da natureza* associados a uma variável

$$a_x \Delta a_y \Leftrightarrow V(a_x, t) \geq V(a_y, t), \forall t \in T \wedge \exists t \in T : V(a_x, t) > V(a_y, t).$$

Designemos agora por  $Opt(a_x)$  o conjunto de combinações de  $T$  para as quais a acção  $a_x$  tem um valor igual ou superior ao de qualquer outra acção de  $A$ :

$$Opt(a_x) = \{ t \in T : \forall a_y \in A \setminus \{a_x\}, V(a_x, t) \geq V(a_y, t) \}.$$

Podemos então definir alguns conceitos de óptimo:

- $a_x$  é **óptima para  $t \in T$**   $\Leftrightarrow V(a_x, t) \geq V(a_y, t), \forall a_y \in A \setminus \{a_x\} \Leftrightarrow t \in Opt(a_x)$ .
- $a_x$  é **óptima para  $T' \in T$**   $\Leftrightarrow T' \subseteq Opt(a_x)$ .
- $a_x$  é **óptima**  $\Leftrightarrow Opt(a_x) = T$ .
- $a_x$  é **potencialmente óptima**  $\Leftrightarrow Opt(a_x) \neq \emptyset$ .

É imediato comprovar que, de acordo com estas definições, uma acção potencialmente óptima tem que ser não  $\Delta$ -dominada, i.e. não existe nenhuma outra acção que a  $\Delta$ -domine. Athanassopoulos e Podinovski (1997) propõem o uso de modelos tecnicamente semelhantes aos de DEA (*Data Envelopment Analysis*) para indicar como poderia ser melhorada uma acção não  $\Delta$ -dominada e não potencialmente óptima, através da determinação de uma “acção mista” fictícia (uma combinação convexa de outras acções) que  $\Delta$ -dominasse a primeira.

### 3. Uma analogia: o problema do caminho mais curto

---

#### 3.1. Introdução ao problema

Consideraremos no remanescente deste capítulo um exemplo simples, apenas com o intuito de ilustrar a relação de analogia entre a decisão com múltiplos critérios e a decisão com informação imprecisa.<sup>5</sup> Podemos começar por reparar, por exemplo, no facto de a noção de dominância no contexto da informação imprecisa ( $\Delta$ -dominância) ser análoga à bem conhecida noção de dominância no contexto da análise multicritério (cf. Capítulo II). Enquanto a primeira se refere aos desempenhos sob cada combinação de valores para os parâmetros, a segunda refere-se aos desempenhos segundo cada critério.

---

aleatória, daí o uso de aspas.



Surgiu assim a ideia de estudar sob o prisma da informação imprecisa um problema bastante desenvolvido no contexto multicritério, a saber, o problema do caminho mais curto entre dois nós de um grafo. Os algoritmos desenvolvidos para este último tipo de problema podem ser utilizados, com maiores ou menores adaptações, para apoiar a escolha de um caminho no contexto monocritério com informação imprecisa.

Consideremos um grafo dirigido  $G(N, A)$ , que inclui um conjunto de nós indexados por  $N = \{1, \dots, n\}$  e um conjunto de arcos  $A = \{(i,j) \in N \times N: \text{existe um arco com origem no nó } i \text{ e destino no nó } j\}$ . Sem perda de generalidade, arbitremos que o índice 1 está associado a um dos nós do grafo, denominado *origem*, enquanto o índice  $n$  está associado a outro nó, denominado *destino*. Um caminho não é mais do que uma sequência de nós de  $N$  e de arcos de  $A$  entre a origem e o destino:  $\{1, (1,x), x, (x,y), y, \dots, n\}$ . Designemos por  $P$  o conjunto de todos esses caminhos, não necessariamente acíclicos<sup>6</sup> (não admitiremos, porém, a existência de ciclos com custo negativo, por forma a assegurar a finitude do problema).

Cada caminho possui um custo, igual à soma dos custos associados aos arcos que dele façam parte. Pretendemos encontrar o melhor caminho entre a origem e o destino em termos de custo (i.e. minimizar o custo). No contexto multicritério, o custo de cada arco é multidimensional. As dimensões (critérios) podem referir-se a um custo monetário, a um custo temporal, a um custo ambiental, etc. No caso que analisaremos, o custo é unidimensional, mas depende dos valores de  $r$  parâmetros ( $r \geq 1$ ) sobre os quais não existe informação precisa. Trata-se de uma situação muito plausível, face à presença das dificuldades apontadas na Secção 1. Podemos imaginar uma situação de transporte de mercadorias através de uma rede viária, onde o custo de cada troço de estrada dependeria de parâmetros tais como os gastos em combustível e o custo do tempo do motorista, difíceis de prever por causa da variabilidade das condições de tráfego.

Mantendo a notação apresentada nas secções anteriores, representemos por  $T$  o conjunto das combinações de valores para os parâmetros que são compatíveis com a informação imprecisa fornecida pelo decisor. Consideraremos aqui que este conjunto pode ser discreto (correspondendo a um número

---

<sup>5</sup> Esta secção baseia-se no trabalho que relatámos em Dias e Clímaco (2000).

<sup>6</sup> Um caminho contém um ciclo se passar por determinado nó mais do que uma vez. Um caminho acíclico não possui qualquer ciclo. Note-se, porém, que alguns autores (e.g. Pascoal, 2000) designam os primeiros por *trajectos*, e reservam a designação de *caminhos* para os segundos (trajectos sem ciclos).

finito de “cenários”) ou contínuo (um subconjunto de  $\mathfrak{R}^T$  definido através de restrições a que os valores devem obedecer).

Representemos por  $c_{ij}(t)$  o custo do arco  $(i,j) \in A$  correspondente à combinação  $t \in T$ , e por  $c(p, t)$  o custo do caminho  $p \in P$  para a mesma combinação. Então,  $c(p, t) = \sum_{(i,j) \in p} c_{ij}(t)$ .

As noções de dominância e de óptimo apresentadas na Secção 2 têm de ser reformuladas, para reflectir o facto de se referirem a custos no lugar de valor. Nas definições seguintes, sejam  $p$  e  $q$  dois caminhos quaisquer de  $P$ :

- **Dominância absoluta** — um caminho domina outro de forma absoluta se o seu custo for sempre igual ou inferior (e estritamente inferior em pelo menos um caso) ao do segundo, mesmo que sejam avaliados segundo combinações distintas. Nestes casos, o custo no pior caso do primeiro não é superior ao custo no melhor caso do segundo. Esta  $\Delta_A$ -dominância pode expressar-se matematicamente como:

$$p \Delta_A q \Leftrightarrow c(p, t) \leq c(q, t'), \forall t, t' \in T \wedge \exists t, t' \in T : c(p, t) < c(q, t).$$

- **Dominância comum (de Bernoulli)** — um caminho domina outro se o seu custo for sempre igual ou inferior (e estritamente inferior em pelo menos um caso) ao o segundo para todas as combinações aceitáveis. Esta  $\Delta$ -dominância pode expressar-se matematicamente como:

$$p \Delta q \Leftrightarrow c(p, t) \leq c(q, t), \forall t \in T \wedge \exists t \in T : c(p, t) < c(q, t).$$

- $p$  é óptimo  $\Leftrightarrow \forall t \in T, q \in P \setminus \{p\}, c(p, t) \leq c(q, t)$ .
- $p$  é potencialmente óptimo  $\Leftrightarrow \exists t \in T : \forall q \in P \setminus \{p\}, c(p, t) \leq c(q, t)$ .

Sempre que  $p \Delta q$  (mesmo que  $p$  não  $\Delta_A$ -domine  $q$ ) para um determinado par de caminhos de  $P$ , o caminho  $q$  nunca custará menos do que o  $p$ , podendo ser excluído por esse motivo. Só interessa portanto apresentar ao decisor os caminhos não  $\Delta$ -dominados, i.e. caminhos tais que não exista nenhum outro que os  $\Delta$ -domine. Não estudaremos aqui a questão da escolha do melhor desses caminhos: veremos no Capítulo V algumas ideias para escolher entre acções cujo desempenho é agregado num só valor.

Poderíamos optar por restringir ainda mais o número de caminhos apresentado ao decisor, seleccionando aqueles que fossem potencialmente óptimos. Todavia, se podemos afirmar que um caminho potencialmente óptimo é interessante (até porque é não  $\Delta$ -dominado), já não podemos inferir

que um caminho sem potencial para ser óptimo seja desinteressante. O exemplo da Tabela III.1 ilustra isso mesmo, apresentando os custos de três caminhos —  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  — numa situação em que  $T = \{t_1, t_2\}$  (dois “cenários”). Podemos observar que os três caminhos são não  $\Delta$ -dominados, embora apenas  $p_1$  e  $p_3$  sejam potencialmente óptimos. Contudo, o caminho  $p_2$  constitui um compromisso muito interessante entre aqueles, pelo que duvidamos que o decisor aceitasse um método que o excluísse.

	$t_1$	$t_2$
$p_1$	10	20
$p_2$	11	11
$p_3$	20	10

**Tabela III.1.**

Enfim, podemos resumir o nosso propósito: encontrar o conjunto de caminhos não  $\Delta$ -dominados, para o apresentar ao decisor. Caberá a este a escolha final, baseada nos seus juízos de valor. A Subsecção 3.2. analisará o caso de  $T$  ser discreto, ao passo que a Subsecção 3.3 analisará o caso em que  $T$  é um subconjunto qualquer de  $\mathfrak{R}^r$  (que pode ser contínuo ou discreto).

### 3.2. O caso de um conjunto discreto de combinações

Representemos por  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$  um conjunto discreto de  $K$  combinações (chamemo-lhes “cenários”). Nesta subsecção veremos que os algoritmos que foram desenvolvidos para o problema do caminho mais curto multicritério podem ser utilizados para determinar caminhos  $\Delta$ -dominados.

Consideremos primeiro o caso em que  $T = \{t_1, t_2\}$ . Este caso pode corresponder a uma situação na qual existem dois decisores, cada um com a sua combinação de valores para os parâmetros, ou a uma situação com dois cenários para o futuro (e.g. um cenário optimista e um cenário pessimista), conducentes a custos diferentes para os arcos.

Dado que não excluimos a possibilidade do grafo  $G(N, A)$  conter ciclos, adaptaremos o algoritmo de Clímaco e Martins (1982), desenvolvido para o problema do caminho mais curto bicritério (para outras possibilidades v. Santos, 1999). Caso assumíssemos que o grafo não continha ciclos, poderíamos adaptar o algoritmo mais específico de Azevedo e Martins (1991). Estes algoritmos baseiam-se num procedimento que forneça uma ordenação (*ranking*) dos caminhos de  $P$ , por ordem do valor segundo um dos critérios (para uma revisão recente destes procedimentos v. Pascoal, 2000).

Adaptaremos então o algoritmo de Clímaco e Martins, assumindo, sem perda de generalidade, que o procedimento que fornece uma ordenação dos caminhos o faz por ordem (crescente) do seu custo segundo a combinação  $t_2$ . O algoritmo adaptado pode ser esquematizado da seguinte forma:

Seja  $P_N$  o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados; inicialmente,  $P_N \leftarrow \emptyset$ .

Sejam  $f_1$  e  $f_2$  os custos sob  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente, do último caminho considerado.

Seja  $S$  um conjunto de trabalho contendo caminhos candidatos a ser não  $\Delta$ -dominados.

Seja  $u$  um limite superior para o custo sob  $t_2$  de qualquer caminho não  $\Delta$ -dominado.

Início:  $u$  toma o valor do custo sob  $t_2$  do caminho de menor custo sob  $t_1$ . Clímaco and Martins (1982) mostram (no contexto bicritério) que qualquer caminho  $p \in P$  para o qual  $c(p, t_2) > u$  tem de ser  $\Delta$ -dominado. Note-se que se a combinação  $t_2$  representar um cenário pessimista, então os decisores poderão diminuir o valor de  $u$  até ao maior custo que considerem tolerável.

Iteração 1:

$p_1 \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $t_2$ ;  $S \leftarrow \{p_1\}$ ;  $f_1 \leftarrow c(p_1, t_1)$ ;  $f_2 \leftarrow c(p_1, t_2)$ .

Iteração  $j$  ( $j > 1$ ):

$p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $t_2$ ;

SE  $c(p_j, t_2) > u$  ENTÃO termina;

CASO CONTRÁRIO ocorrerá um dos quatro casos seguintes:

Caso 1)  $[c(p_j, t_1) = f_1 \text{ e } c(p_j, t_2) = f_2]$

(O caminho  $p_j$  partilha os valores do último caminho considerado, pelo que se junta aos candidatos em  $S$ )

$S \leftarrow S \cup \{p_j\}$

Caso 2)  $[c(p_j, t_1) > f_1]$  ou  $[c(p_j, t_1) = f_1 \text{ e } c(p_j, t_2) > f_2]$

(Como os caminhos estão por ordem do seu custo segundo  $t_2$ ,  $c(p_j, t_2) \geq f_2$ . Isto significa que o caminho  $p_j$  é  $\Delta$ -dominado, pelo que é ignorado)

Caso 3)  $[c(p_j, t_1) < f_1 \text{ e } c(p_j, t_2) = f_2]$

(Os caminhos em  $S$  são  $\Delta$ -dominados por  $p_j$ , pelo que são ignorados)

$S \leftarrow \{p_j\}$ .

Caso 4)  $[c(p_j, t_1) < f_1 \text{ e } c(p_j, t_2) > f_2]$

(Os caminhos melhores do que aqueles em  $S$  segundo  $t_1$  são piores segundo  $t_2$ , pelo que os caminhos em  $S$  são não  $\Delta$ -dominados)

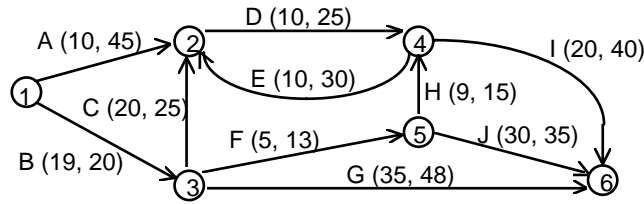
$P_N \leftarrow P_N \cup S$ ;

$S \leftarrow \{p_j\}$ .

Actualiza  $f_1$  e  $f_2$ . Passa à iteração  $j+1$  se ainda houver caminhos por examinar.

O algoritmo detalhado encontra-se no Apêndice A (**Algoritmo 1**). Trata-se de um algoritmo que apenas efectua algumas operações por cada caminho que examina. Por conseguinte, pode ser extremamente rápido, na medida em que o algoritmo que fornece os caminhos por ordem de  $t_2$  também o seja.<sup>7</sup>

Como ilustração, consideremos o grafo da Figura III.1, onde estaremos interessados em encontrar o caminho mais curto do nó 1 ao nó 6. A cada arco associou-se uma etiqueta indicando o seu custo segundo os “cenários”  $t_1$  (à esquerda) e  $t_2$  (à direita). O facto de o custo segundo  $t_1$  ser sempre inferior ao custo sob  $t_2$  é fortuito: o algoritmo não requer que tal se verifique.



**Figura III.1. Problema com duas combinações de valores para os parâmetros.**

Nestas condições, o algoritmo começaria por determinar o caminho mais curto segundo  $t_1$ , i.e. o caminho *ADI* (para simplificar a apresentação, designamos os caminhos através da sequência de arcos que estes atravessam). Logo, coloca-se  $u = 110$ , pois qualquer caminho que se siga com custo segundo  $t_1$  superior a este tem de ser  $\Delta$ -dominado. O algoritmo continuaria então conforme o exposto na Tabela III.2, concluindo com o conjunto de caminhos não  $\Delta$ -dominados, neste caso  $\{p_1, p_2, p_3, p_5\}$ .

$j$	Caminho $p_j$	$c(p_j, t_1)$	$c(p_j, t_2)$	Notas
1	<i>BFJ</i>	54	68	$P_N \leftarrow \emptyset; S \leftarrow \{p_1\}; f_1 \leftarrow 54; f_2 \leftarrow 68$
2	<i>BG</i>	54	68	Caso 1 $\Rightarrow S \leftarrow \{p_1, p_2\}$
3	<i>BFHI</i>	53	88	Caso 4 $\Rightarrow f_1 \leftarrow 53; f_2 \leftarrow 88; P_N \leftarrow \{p_1, p_2\}; S \leftarrow \{p_3\}$
4	<i>BCDI</i>	69	110	Caso 2 $\Rightarrow$ (não faz nada)
5	<i>ADI</i>	<b>40</b>	<b>110</b>	Caso 4 $\Rightarrow f_1 \leftarrow 40; f_2 \leftarrow 110; P_N \leftarrow P_N \cup S = \{p_1, p_2, p_3\}; S \leftarrow \{p_5\}$
6	<i>BFHEDI</i>	73	143	$c(p_6, t_2) > u \Rightarrow \text{STOP. } P_N \leftarrow P_N \cup S = \{p_1, p_2, p_3, p_5\}$

**Tabela III.2.**

O mesmo raciocínio é extensível ao caso de um conjunto discreto de  $K$  combinações  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$  ( $K > 2$ ). Estas combinações podem por exemplo corresponder aos vários decisores de uma situação de decisão em grupo, em que poderiam ser eliminados de forma consensual todos os caminhos  $\Delta$ -dominados. Podemos estar de igual modo perante uma situação em que se imaginam  $K$  cenários para o futuro, cada um acarretando diferentes custos para os diversos arcos. Por fim, pode suceder que  $T$  não seja discreto e os decisores se contentem em verificar o que acontece aos custos num conjunto de  $K$  pontos (“amostras”) de  $T$ . Note-se, porém, que nesta última situação um caminho pode ser  $\Delta$ -dominado considerando as  $K$  combinações seleccionadas, mas não  $\Delta$ -dominado se considerássemos o conjunto original.

Se o grafo  $G(N,A)$  incluir ciclos, podemos adaptar o algoritmo de Clímaco e Martins (1980) para o problema do caminho mais curto com um número qualquer de critérios. Todavia, este algoritmo

<sup>7</sup> Azevedo et al. (1993) e Martins e Santos (2000), por exemplo, apresentam algoritmos muito rápidos,

pode ser lento para problemas de grande dimensão. Portanto, se não existirem ciclos, será preferível adaptar o algoritmo de Azevedo e Martins (1991), que é mais rápido.

### 3.3. O caso de um conjunto de combinações genérico

Consideremos agora um conjunto  $T$  qualquer, contido em  $\mathfrak{R}^t$ , que pode ser discreto ou contínuo. Nesses casos, o teste para verificar se um caminho  $p \in P$   $\Delta$ -domina outro caminho  $q \in P$  é o seguinte:

( $\Delta$ -teste:) Seja  $d^*$  o valor óptimo de  $\max\{d(t) = c(p, t) - c(q, t) : t \in T\}$ .

Então,  $p \Delta q \Leftrightarrow d^* < 0 \vee [d^* = 0 \wedge \exists t \in T : c(p, t) < c(q, t)]$ .

No caso de  $T$  ser um conjunto delimitado por restrições matemáticas, este teste envolve um programa matemático, que pode requerer muitos cálculos para resolver. Por isso, será porventura vantajoso despender algum esforço computacional na tentativa de identificar caminhos que sejam seguramente  $\Delta$ -dominados ou não  $\Delta$ -dominados. Então, seria apenas necessário efectuar o  $\Delta$ -teste para determinar se os restantes caminhos são  $\Delta$ -dominados ou não.

Vamos começar por definir o mínimo e o máximo custo de um arco qualquer  $(i, j) \in A$ :

$$m_{ij} = \min \{c_{ij}(t) : t \in T\};$$

$$M_{ij} = \max \{c_{ij}(t) : t \in T\}.$$

Estes valores permitem-nos definir um minorante e um majorante para qualquer caminho  $p \in P$ ,

$$c^m(p) = \sum_{(i,j) \in p} m_{ij} \text{ e}$$

$$c^M(p) = \sum_{(i,j) \in p} M_{ij} ,$$

que por definição permitem escrever:

$$c^m(p) \leq c(p, t) \leq c^M(p), \forall t \in T, p \in P. \quad (1)$$

De seguida, definamos as seguintes relações binárias entre pares ordenados de caminhos  $(p, q) \in P^2$ :

$$p \ll q \quad \Leftrightarrow \quad c^M(p) < c^m(q);$$

$$p < q \quad \Leftrightarrow \quad [c^m(p) \leq c^m(q) \wedge c^M(p) < c^M(q)] \vee [c^m(p) < c^m(q) \wedge c^M(p) \leq c^M(q)];$$

$$p \approx q \quad \Leftrightarrow \quad c^m(p) \leq c^m(q) \wedge c^M(p) \leq c^M(q).$$

Estas três relações binárias — é fácil verificá-lo — são transitivas. Notemos também que as estas relações estão contidas umas nas outras:

$$p \ll q \Rightarrow p < q \Rightarrow p \lessapprox q.$$

**Proposição 1.** Sejam  $p$  e  $q$  dois caminhos de  $P$ . Então,  $p \ll q \Rightarrow p \Delta q$ .

*Prova:*

$$p \ll q \Rightarrow c^M(p) < c^m(q) \text{ (por definição).}$$

$$\text{Por (1) sabemos que } c(p, t) \leq c^M(p) \text{ e } c^m(q) \leq c(q, t), \forall t \in T.$$

$$\text{Logo, } c(p, t) \leq c^M(p) < c^m(q) \leq c(q, t), \forall t \in T \Rightarrow c(p, t) < c(q, t), \forall t \in T \Rightarrow p \Delta q. \square$$

Não conseguiríamos provar um resultado análogo para as relações  $<$  e  $\lessapprox$ , conforme mostra o contra-exemplo que se segue. Suponhamos que entre a origem e o destino de um determinado grafo existem dois caminhos. O caminho  $q$  atravessa os arcos  $A, B$  e  $C$ , enquanto o caminho  $p$  atravessa os arcos  $X$  e  $Y$ . A Tabela III.3 apresenta os custos desses arcos segundo três combinações —  $t_1, t_2$  e  $t_3$  — associadas a três cenários.

Arco	$c_{ij}(t_1)$	$c_{ij}(t_2)$	$c_{ij}(t_3)$
$A$	0	0	20
$B$	0	20	0
$C$	20	10	10
$X$	5	30	15
$Y$	25	4	20

**Tabela III.3.**

Nestas circunstâncias, obteríamos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 c(q, t_1) = 20, & \quad c(q, t_2) = 30, & \quad c(q, t_3) = 30, & \quad c^m(q) = 10, & \quad c^M(q) = 60, \\
 c(p, t_1) = 30, & \quad c(p, t_2) = 34, & \quad c(p, t_3) = 35, & \quad c^m(p) = 9, & \quad c^M(p) = 55.
 \end{aligned}$$

Este exemplo mostra que, apesar de  $p < q$ , verifica-se  $\neg(p \Delta q)$ . De facto,  $q \Delta p$ ! Logo, nunca poderíamos afirmar que  $p < q \Rightarrow p \Delta q$ . Pelo mesmo raciocínio, é também falsa a implicação  $p \lessapprox q \Rightarrow p \Delta q$ .

Em suma, se considerarmos um conjunto  $T$  genérico, o procedimento sugerido por estes resultados é o de efectuar uma triagem dos caminhos de  $P$  baseada na relação  $\ll$ . Definamos  $\ll$ -dominância da seguinte forma:

$$p \text{ é } \ll\text{-dominado} \Leftrightarrow \exists q \in P: q \ll p.$$

Iremos adaptar um algoritmo de caminho mais curto bicritério, no qual os dois critérios que caracterizarão cada caminho são o seu minorante  $c^m(\cdot)$  e o seu majorante  $c^M(\cdot)$ , para obter os caminhos não  $\ll$ -dominados. Entre estes, encontraremos *todos* os caminhos não  $\Delta$ -dominados, mas também alguns dos caminhos  $\Delta$ -dominados. O **Algoritmo 2**, apresentado no Apêndice A, é o resultado dessa adaptação, baseada no algoritmo que Clímaco e Martins (1982) desenvolveram para o problema de caminho mais curto bicritério. Este segundo algoritmo começa por encontrar o caminho mais curto segundo o “critério”  $c^M(\cdot)$ , e atribui a  $u$ , que constitui um limite superior para o custo segundo  $c^m(\cdot)$  para o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados, o valor de  $c^M(\cdot)$  para esse caminho. De facto, qualquer caminho cujo minorante seja superior ao menor dos majorantes é necessariamente  $\ll$ -dominado, o que implica ser  $\Delta$ -dominado (Proposição 1). O algoritmo considera os caminhos por ordem crescente do seu minorante  $c^m(\cdot)$ , até ser ultrapassado o limite  $u$ .

Se representarmos por  $n_p$  o número total de caminhos em  $P$  e por  $n_{\ll}$  o número de caminhos não  $\ll$ -dominados, i.e. os caminhos com  $c^m(\cdot) > u$ , então teremos que efectuar  $n_{\ll}(n_{\ll} - 1)$   $\Delta$ -testes, no máximo.<sup>8</sup> Se  $n_{\ll}$  for suficientemente menor do que  $n_p$  então a melhoria pode ser muito significativa.

### Um caso particular

Terminamos esta subsecção com a análise de um caso particular, em que  $T$  pode não ser discreto, para o qual encontraremos um algoritmo específico que o explore de forma eficiente, por forma a diminuir o número de  $\Delta$ -testes. O caso particular refere-se à satisfação, por parte dos caminhos de  $P$ , da seguinte condição:

**Condição 1:** Os custos dos arcos  $c_{ij}(\cdot)$  são tais que:

$$\forall p \in P, \exists t^m, t^M \in T: c(p, t^m) = c^m(p) \text{ e } c(p, t^M) = c^M(p).$$

Esta condição é verificada se, qualquer que seja o caminho  $p \in P$ , existir uma combinação segundo a qual o seu custo é  $c^m(p)$  e existir uma outra combinação segundo a qual o seu custo é  $c^M(p)$ .

Uma definição alternativa para a Condição 1 é a seguinte:

$$\forall p \in P, \bigcap_{(i,j) \in p} T^m(i,j) \neq \emptyset \text{ e } \bigcap_{(i,j) \in p} T^M(i,j) \neq \emptyset,$$



onde  $T^m(i,j) = \{t \in T: c_{ij}(t) = m_{ij}\}$  (conjunto das combinações de  $T$  que minimiza o custo do arco  $(i,j)$ )

e  $T^M(i,j) = \{t \in T: c_{ij}(t) = M_{ij}\}$  (conjunto das combinações de  $T$  que maximiza o custo do arco  $(i,j)$ ).

Logo, a condição é satisfeita se existir uma combinação de  $T$  que conduza ao maior custo para todos os arcos de  $A$  e existir uma combinação de  $T$  que conduza ao menor custo para todos os arcos de  $A$ . Trata-se de uma condição que é satisfeita em algumas situações com interesse prático, conforme se ilustra nos dois exemplos seguintes.

**Exemplo 1.**

Consideremos que o custo de cada arco  $(i, j) \in A$  é função não decrescente de  $r$  parâmetros:

$$c_{ij}(t) = c_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \text{ é tal que } \forall k \in \{1, \dots, r\}, \delta > 0, c_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_k + \delta, \dots, \alpha_r) \geq c_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r).$$

Os parâmetros podem por exemplo representar o custo de combustível, o custo laboral, a taxa de juro, etc. Adicionalmente, é possível conceber um “cenário” realizável em que todos os parâmetros assumem o seu valor mínimo e outro “cenário” em que todos os parâmetros estão nos seus valores máximos (e.g. cenários de inflação alta / inflação baixa). Nesta situação, a Condição 1 é verificada. Neste tipo de modelos, a condição só não é satisfeita quando:

- a) existem arcos que respondem de maneira diferente ao aumento de um parâmetro: nalguns o custo melhora, noutros piora;
- b) é inconcebível, ou os decisores consideram inaceitável, uma combinação em que todos os parâmetros assumam o seu mínimo (ou máximo).

**Exemplo 2.**

Associa-se ao custo de cada arco  $(i, j) \in A$  um intervalo de imprecisão  $[\lambda_{ij}, \nu_{ij}]$ . Os custos dos arcos podem variar nesses intervalos, de forma independente uns dos outros. Nesta situação, verifica-se a Condição 1. Este tipo de modelo pode integrar-se no nosso enquadramento, bastando fazer corresponder um parâmetro ao custo de cada arco, restringindo a gama de variação de cada parâmetro ao intervalo de custos definido para o arco:

$$T = \prod_{(i,j) \in A} [\lambda_{ij}, \nu_{ij}] = \prod_{(i,j) \in A} \{c \in \mathfrak{R}: \lambda_{ij} \leq c \leq \nu_{ij}\}$$

(onde o operador  $\Pi$  representa o produto Cartesiano de conjuntos).

---

<sup>8</sup> Uma vez que a relação de  $\Delta$ -dominância é transitiva, podemos deixar de considerar um caminho mal saibamos que é  $\Delta$ -dominado. Por conseguinte, não iremos testar se esse caminho  $\Delta$ -domina outros ou é

Consideremos então, no remanescente desta subsecção, que se verifica a Condição 1. Nessas circunstâncias, podemos provar alguns resultados simples, que nos irão auxiliar a diminuir o número de  $\Delta$ -testes. Sejam  $p$  e  $q$  dois caminhos quaisquer de  $P$ .

**Proposição 2a.**  $c^m(q) < c^m(p) \Rightarrow \neg(p \Delta q)$ .

*Prova:*

De acordo com a Condição 1, sabemos que  $\{t \in T: c(q, t) = c^m(q)\}$  não é um conjunto vazio.

Escolha-se uma qualquer combinação  $t_q^m \in \{t \in T: c(q, t) = c^m(q)\}$  (melhor caso para o caminho  $q$ ).

Então,  $c^m(p) > c^m(q) \Leftrightarrow c^m(p) > c(q, t_q^m)$ .

Como  $c(p, t_q^m) \geq c^m(p)$ , concluímos que  $c(p, t_q^m) > c(q, t_q^m)$ , o que implica  $\neg(p \Delta q)$ .  $\square$

**Proposição 2b.**  $c^M(q) < c^M(p) \Rightarrow \neg(p \Delta q)$ .

*Prova:*

De acordo com a Condição 1, sabemos que  $\{t \in T: c(p, t) = c^M(p)\}$  não é um conjunto vazio.

Escolha-se uma qualquer combinação  $t_p^M \in \{t \in T: c(p, t) = c^M(p)\}$  (pior caso para o caminho  $p$ ).

Então,  $c^M(p) > c^M(q) \Leftrightarrow c(p, t_p^M) > c^M(q)$ .

Como  $c^M(q) \geq c(q, t_p^M)$ , concluímos que  $c(p, t_p^M) > c(q, t_p^M)$ , o que implica  $\neg(p \Delta q)$ .  $\square$

**Proposição 3.**  $p \Delta q \Rightarrow p \llapprox q$ .

*Prova:*

Demostraremos o pretendido provando a proposição equivalente  $\neg(p \llapprox q) \Rightarrow \neg(p \Delta q)$ .

Tomando por verdadeira a premissa  $\neg(p \llapprox q)$ , ora  $c^m(p) > c^m(q)$ , ora  $c^M(p) > c^M(q)$ .

Logo, pelas Proposições 2a ou 2b, sabemos que  $\neg(p \Delta q)$ , i.e.,  $p$  não pode  $\Delta$ -dominar  $q$ .  $\square$

**Definição:** Definamos  $\llapprox$ -dominância da seguinte forma:

$$p \text{ é } \llapprox\text{-dominado} \Leftrightarrow \exists q \in P: q \llapprox p.$$

---

dominado por outros, e o número de comparações acabará por ser inferior a  $n_{\llapprox}(n_{\llapprox} - 1)$ .

**Proposição 4.**  $p$  é não  $\approx$ -dominado  $\Rightarrow p$  é não  $\Delta$ -dominado

*Prova:*

Esta proposição é um corolário da anterior, segundo a qual  $\exists q \in P: q \Delta p \Rightarrow \exists q \in P: q \approx p$ .

Portanto,  $\neg(\exists q \in P: q \approx p) \Rightarrow \neg(\exists q \in P: q \Delta p)$ ,

i.e.  $p$  é não  $\approx$ -dominado  $\Rightarrow p$  é não  $\Delta$ -dominado.  $\square$

Não conseguiríamos provar  $p \approx q \Rightarrow p \Delta q$ ,  $p \Delta q \Rightarrow p < q$  nem  $p \Delta q \Leftarrow p < q$ . O contra-exemplo seguinte é esclarecedor. Suponhamos que entre a origem e o destino de um determinado grafo existem três caminhos. O caminho  $p_1$  atravessa os arcos  $(a_1, b_1)$  e  $(b_1, c_1)$ , o caminho  $p_2$  atravessa os arcos  $(a_2, b_2)$  e  $(b_2, c_2)$ , enquanto o caminho  $p_3$  atravessa os arcos  $(a_3, b_3)$  e  $(b_3, c_3)$ . A Tabela III.4 apresenta os custos desses arcos segundo três combinações —  $t_1, t_2$  e  $t_3$  — associadas a três cenários.

$(i,j)$	$c_{ij}(t_1)$	$c_{ij}(t_2)$	$c_{ij}(t_3)$
$(a_1, b_1)$	5	10	15
$(b_1, c_1)$	5	10	15
$(a_2, b_2)$	5	15	15
$(b_2, c_2)$	5	15	15
$(a_3, b_3)$	10	12	20
$(b_3, c_3)$	10	12	20

**Tabela III.4.**

Para este exemplo obtemos:

$$\begin{aligned}
 c(p_1, t_1) = 10; & \quad c(p_1, t_2) = 20; & \quad c(p_1, t_3) = 30; & \quad c^m(p_1) = 10; & \quad c^M(p_1) = 30; \\
 c(p_2, t_1) = 10; & \quad c(p_2, t_2) = 30; & \quad c(p_2, t_3) = 30; & \quad c^m(p_2) = 10; & \quad c^M(p_2) = 30; \\
 c(p_3, t_1) = 20; & \quad c(p_3, t_2) = 24; & \quad c(p_3, t_3) = 40; & \quad c^m(p_3) = 20; & \quad c^M(p_3) = 40.
 \end{aligned}$$

Podemos agora reparar no seguinte:

- $p_2 \approx p_3 \wedge \neg(p_2 \Delta p_3)$  ( $p_3$  é melhor segundo  $t_2$ ), pelo que não podemos afirmar que  $p \approx q \Rightarrow p \Delta q$ ;
- $p_2 < p_3 \wedge \neg(p_2 \Delta p_3)$ , pelo que não podemos afirmar que  $p < q \Rightarrow p \Delta q$ ;
- $p_1 \Delta p_2 \wedge \neg(p_1 < p_2)$ , pelo que não podemos afirmar que  $p \Delta q \Rightarrow p < q$ .

O conjunto de resultados que provámos permite-nos diminuir o número de  $\Delta$ -testes nos casos em que se verifica a Condição 1, efectuando uma triagem dos caminhos de  $P$  que os divide em três conjuntos:

- conjunto  $P_N$  dos caminhos seguramente não  $\Delta$ -dominados — pela Proposição 4 pertencem a este conjunto todos os caminhos não  $\approx$ -dominados;
- conjunto dos caminhos seguramente  $\Delta$ -dominados — de acordo com a Proposição 1, todos os caminhos  $\ll$ -dominados pertencem a este conjunto e, como tal, devem ser excluídos.
- conjunto  $L$  dos caminhos potencialmente não  $\Delta$ -dominados — todos aqueles que são  $\approx$ -dominados mas não  $\ll$ -dominados.

Face a estes três conjuntos, é necessário apenas efectuar os  $\Delta$ -testes para saber se os caminhos de  $L$  são  $\Delta$ -dominados por algum caminho de  $P_N$  e se existem relações de  $\Delta$ -dominância entre caminhos de  $L$ . O número de  $\Delta$ -testes a efectuar pode ser ainda mais reduzido:

- pela Proposição 3,  $\forall p, q \in P, \neg(p \approx q) \Rightarrow \neg(p \Delta q)$ ;
- pela transitividade da relação de  $\Delta$ -dominância, se um caminho  $q$  for  $\Delta$ -dominado por um caminho  $p$  podemos excluí-lo de imediato, dado que os caminhos que  $q$   $\Delta$ -dominaria serão decerto  $\Delta$ -dominados por  $p$ .

De seguida, delineamos um algoritmo baseado em todas estas considerações. Este algoritmo, apresentado detalhadamente no Apêndice A (**Algoritmo 3**), baseia-se num procedimento que forneça os caminhos de  $P$  por ordem crescente do seu minorante  $c^m(\cdot)$ .<sup>9</sup> Tal como o algoritmo apresentado para o caso mais geral, o limite  $u$  é igual ao menor dos majorantes  $c^M(\cdot)$ . Um caminho cujo minorante ultrapasse este limite será, pois,  $\ll$ -dominado, logo  $\Delta$ -dominado.

Seja  $P_N$  o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados;

Seja  $L$  um conjunto de trabalho contendo caminhos candidatos a ser  $\Delta$ -dominados;

Seja  $f_m$  o valor do mínimo  $c^m(\cdot)$  do(s) caminho(s) em  $L$ ;

Seja  $f_M$  o valor do mínimo  $c^M(\cdot)$  do(s) caminho(s) em  $L$ ;

Seja  $P^=$  um conjunto de caminhos  $\approx$ -dominados mas potencialmente não  $\Delta$ -dominados, com  $c^m(\cdot)=f_m$ ;

Seja  $P^>$  um conjunto de caminhos  $\approx$ -dominados mas potencialmente não  $\Delta$ -dominados, com  $c^m(\cdot)>f_m$ ;

#### Início:

Todos os conjuntos estão inicialmente vazios.

$u$  toma o valor do menor  $c^M(\cdot)$  (após encontrar o caminho mais curto segundo esse “critério”).

#### Iteração 1:

Encontra  $p_1$ , o caminho mais curto segundo o “critério”  $c^m(\cdot)$  e coloca-o em  $L$ .

Atribui a  $f_m$  e  $f_M$  os valores  $c^m(p_1)$  e  $c^M(p_1)$ , respectivamente.

<sup>9</sup> Note-se a propósito que, sob a Condição 1, o minorante do custo de um caminho coincide com o mínimo e o majorante coincide com o máximo.

Iteração  $j (j > 1)$ :

Encontra  $p_j$ , o  $j$ -ésimo caminho mais curto segundo o “critério”  $c^m(\cdot)$ .

Se  $c^m(p_j)$  exceder  $u$  ou se não houver  $j$  caminhos em  $P$ , o algoritmo termina. Nesse caso, todos os caminhos nos conjuntos  $P_N$  e  $L$  são não  $\Delta$ -dominados, enquanto os caminhos em  $P^=$  e  $P^>$  podem ser ou não  $\Delta$ -dominados pelos caminhos em  $L$  (é necessário efectuar alguns  $\Delta$ -testes). Caso contrário, ocorre um dos seguintes casos:

Caso 1:  $c^m(p_j) = f_m$  e  $c^M(p_j) = f_M$ , o que implica que  $p_j \approx$ -domina os caminhos em  $L$  e vice-versa.

Verifica se algum caminho de  $L$   $\Delta$ -domina  $p_j$ .

Se nenhum, verifica se  $p_j$   $\Delta$ -domina algum caminho de  $L$  e faz  $L \leftarrow L \cup \{p_j\}$ .

Caso 2:  $c^m(p_j) = f_m$  e  $c^M(p_j) < f_M$ , o que implica que  $p_j \approx$ -domina os caminhos em  $L$ .

Verifica se algum caminho de  $L$   $\Delta$ -domina algum caminho em  $P^=$ . Faz  $P^= \leftarrow P^= \cup L$ .

Faz  $L \leftarrow \{p_j\}$  e  $f_M \leftarrow c^M(p_j)$ .

Caso 3:  $c^m(p_j) = f_m$  e  $c^M(p_j) > f_M$ , o que implica que os caminhos em  $L$   $\approx$ -dominam  $p_j$ .

Verifica se algum caminho de  $P_N \cup P^=$   $\Delta$ -domina o caminho  $p_j$ .

Se nenhum, verifica se  $p_j$   $\Delta$ -domina algum caminho de  $P^=$  e faz  $P^= \leftarrow P^= \cup \{p_j\}$ .

Caso 4:  $c^m(p_j) > f_m$  e  $c^M(p_j) < f_M$ , o que implica que os caminhos em  $L$  são não  $\Delta$ -dominados.

Verifica se algum caminho de  $L$   $\Delta$ -domina algum caminho em  $P^=$  ou  $P^>$ .

Faz  $P_N \leftarrow P_N \cup L \cup P^= \cup \{p \in P^> : c^m(p) < c^m(p_j)\}$ .

Faz  $P^= \leftarrow \{p \in P^> : c^m(p) = c^m(p_j)\}$  e faz  $P^> \leftarrow \emptyset$ .

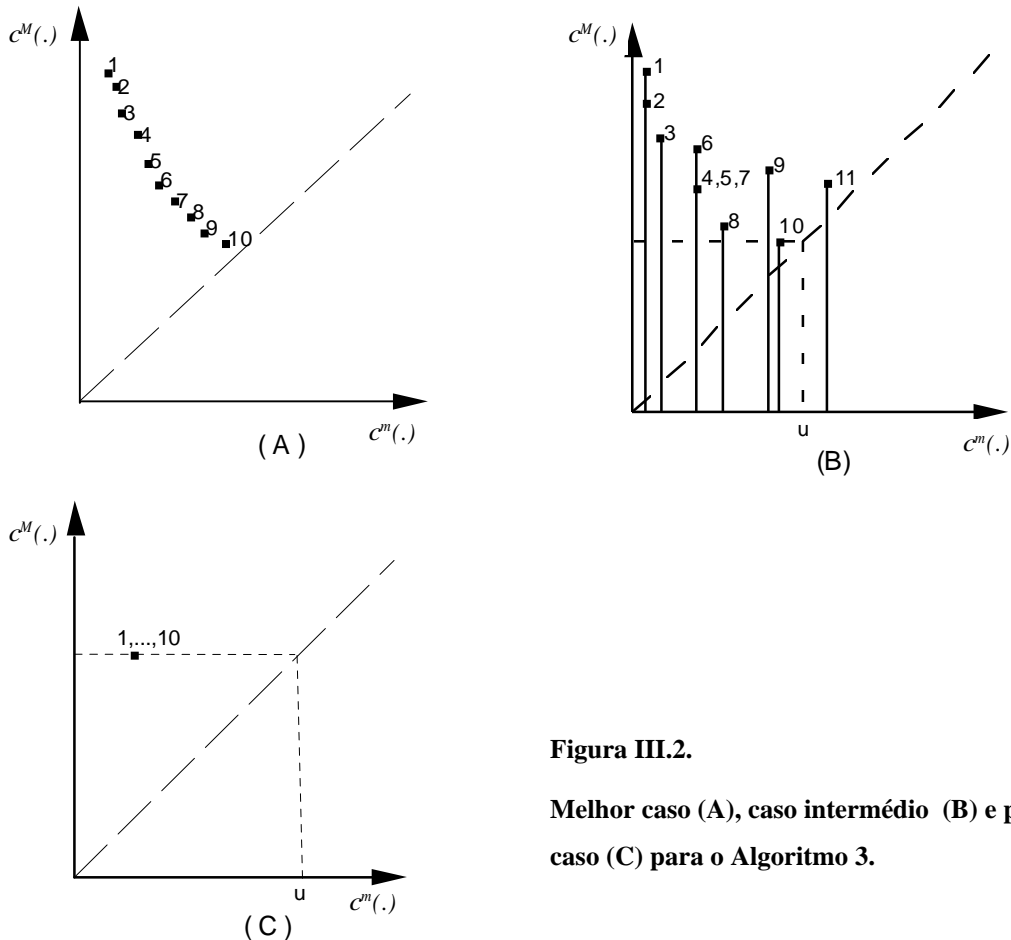
Faz  $L \leftarrow \{p_j\}$  e actualiza  $f_m$  e  $f_M$  para os valores  $c^m(p_j)$  e  $c^M(p_j)$ , respectivamente.

Caso 5:  $c^m(p_j) > f_m$  e  $c^M(p_j) \geq f_M$ , o que implica que  $p_j$  é  $\approx$ -dominado.

Verifica se algum caminho em  $P_N \cup P^= \cup P^>$   $\Delta$ -domina o caminho  $p_j$ .

Se nenhum, verifica se  $p_j$   $\Delta$ -domina algum caminho em  $P^>$  e faz  $P^> \leftarrow P^> \cup \{p_j\}$ .

NOTA: sempre que se verifica que um caminho é  $\Delta$ -dominado, elimina-se esse caminho.



**Figura III.2.**

**Melhor caso (A), caso intermédio (B) e pior caso (C) para o Algoritmo 3.**

O número mínimo de  $\Delta$ -testes efectuado pelo Algoritmo 3 é de zero, nos casos em que todos os caminhos são não  $\approx$ -dominados, como na Figura III.2 (A). O número máximo de  $\Delta$ -testes a efectuar é de  $n_{<<}(n_{<<} - 1)$ , onde  $n_{<<}$  representa o número de caminhos cujo minorante  $c^m(\cdot)$  não excede o menor majorante  $c^M(\cdot)$ . Recorde-se que este é o número de  $\Delta$ -testes efectuado pelo Algoritmo 2. Este caso extremo ocorre apenas quando todos os caminhos de  $P$  têm o mesmo minorante  $c^m(\cdot)$  e o mesmo majorante  $c^M(\cdot)$  conforme ilustra a Figura III.2 (C). Na maior parte das vezes, encontrar-nos-emos numa situação intermédia, como a representada na Figura III.2 (B). Os dois exemplos seguintes ilustram o funcionamento do Algoritmo 3.

**Exemplo 1:**

Consideremos de novo o grafo da Figura III.1, mas agora para a seguinte situação. Os custos dos arcos dependem de dois parâmetros, a saber,  $\alpha_1$  representa a evolução dos custos de combustível, que pode variar até  $\pm 5\%$  do valor corrente, e  $\alpha_2$  representa a evolução dos custos laborais, que podem aumentar até  $5\%$  do valor actual. O custo dos arcos no futuro próximo é dado por:

$$c_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) = B(i,j) + k_1(i,j) \alpha_1 + k_2(i,j) \alpha_2, \quad \alpha_1 \in [-0.05, 0.05] \text{ e } \alpha_2 \in [0, 0.05],$$

onde  $B(i,j)$ ,  $k_1(i,j)$  e  $k_2(i,j)$  são constantes associadas a cada arco. A Tabela III.5 apresenta o valor dessas constantes, bem como os valores mínimos e máximos para cada arco face à gama de variação dos dois parâmetros. A Condição 1 é satisfeita: existe uma combinação de valores para os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2) = (-0.05, 0)$  correspondente ao melhor caso (custo mínimo) para todos os arcos e existe uma outra combinação  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.05, 0.05)$  correspondente ao pior caso para todos os arcos.

O algoritmo começa por encontrar o caminho que minimiza  $c^M(\cdot)$ , neste caso BFJ ou BG, onde  $c^M(\cdot) = 68$ . O valor do limite  $u$  é colocado a 68: qualquer caminho com minorante  $c^m(\cdot)$  superior a este valor é  $\Delta$ -dominado. A Tabela III.6 mostra o decorrer do algoritmo, podendo-se observar que se evitam muitos  $\Delta$ -testes.

Arco (i,j)	B(i,j)	k <sub>1</sub> (i,j)	k <sub>2</sub> (i,j)	m <sub>ij</sub>	M <sub>ij</sub>
A	10.115	2.3	695.4	10	45
B	19.205	4.1	11.8	19	20
C	20.29	5.8	88.4	20	25
D	10.16	3.2	293.6	10	25
E	10.1	2	396	10	30
F	5.105	2.1	155.8	5	13
G	35.375	7.5	245	35	48
H	9.135	2.7	114.6	9	15
I	20.255	5.1	389.8	20	40
J	30.365	7.3	85.4	30	35

Tabela III.5.

j	Caminho p <sub>j</sub>	c <sup>m</sup> (p <sub>j</sub> )	c <sup>M</sup> (p <sub>j</sub> )	Caso	Notas
1	ADI	40	110	-	$L \leftarrow \{p_1\}; f_m \leftarrow 40; f_M \leftarrow 110; P_N \leftarrow \emptyset; P^= \leftarrow \emptyset; P^> \leftarrow \emptyset.$
2	BFHI	53	88	4	$P_N \leftarrow P_N \cup L = \{p_1\}; L \leftarrow \{p_2\}; f_m \leftarrow 53; f_M \leftarrow 88.$
3	BFJ	54	68	4	$P_N \leftarrow P_N \cup L = \{p_1, p_2\}; L \leftarrow \{p_3\}; f_m \leftarrow 54; f_M \leftarrow 68.$
4	BG	54	68	1	nem $p_3 \Delta p_4$ nem $p_4 \Delta p_3; L \leftarrow \{p_3, p_4\}.$
5	ADEDI	60	165	5	$p_1 \Delta p_5 \Rightarrow \{p_5\}$ é eliminado.
6	BCDI	69	110	-	$c^m(p_6) > u \Rightarrow$ termina ciclo; $P_N \leftarrow P_N \cup L \cup P^= \cup P^> = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}.$

Tabela III.6.

**Exemplo 2:**

Consideremos a situação ilustrada na Figura III.2 (B). Mostraremos como procederia o algoritmo se todos os caminhos, excepto o décimo primeiro, fossem não  $\Delta$ -dominados. Note-se que tal circunstância implica mais  $\Delta$ -testes do que se alguns dos caminhos fossem  $\Delta$ -dominados e consequentemente eliminados no decurso da computação. Em primeiro lugar, o algoritmo determinaria o caminho mais curto segundo o “critério”  $c^M(\cdot)$ , aquele designado pela etiqueta 10. De seguida, examinaria um caminho de cada vez, por ordem crescente do seu minorante  $c^m(\cdot)$ . Quando existem caminhos com minorantes iguais, a ordem pela qual surgem é arbitrária. Assumiremos, pois, que a ordem é definida pelas suas etiquetas. O algoritmo progrediria conforme o exposto na Tabela III.7. Nesta situação são efectuados 14  $\Delta$ -testes, em comparação com os 90 testes que seriam efectuados pelo Algoritmo 2.

$j$	caso	$P_N$	$L$	$P=$	$P>$	$f_m$	$f_M$	testes
1	-	$\emptyset$	$p_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$c^m(p_1)$	$c^M(p_1)$	nenhum
2	2	»	$p_2$	$p_1$	»	$c^m(p_2)$	$c^M(p_2)$	nenhum
3	4	$p_1, p_2$	$p_3$	$\emptyset$	»	$c^m(p_3)$	$c^M(p_3)$	$p_2 \Delta p_1?$
4	4	$p_1, p_2, p_3$	$p_4$	»	»	$c^m(p_4)$	$c^M(p_4)$	nenhum
5	1	»	$p_4, p_5$	»	»	»	»	$p_4 \Delta p_5?, p_5 \Delta p_4?$
6	3	»	»	$p_6$	»	»	»	nenhum
7	1	»	$p_4, p_5, p_7$	»	»	»	»	$p_4 \Delta p_7?, p_5 \Delta p_7?,$ $p_7 \Delta p_5?, p_7 \Delta p_4?$
8	4	$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$	$p_8$	$\emptyset$	»	$c^m(p_8)$	$c^M(p_8)$	$p_4 \Delta p_6?, p_5 \Delta p_6?, p_7 \Delta p_6?$
9	5	»	»	»	$p_9$	»	»	$p_4 \Delta p_9?, p_5 \Delta p_9?, p_7 \Delta p_9?$
10	4	$p_1, p_2, p_3, p_4,$ $p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$	$p_{10}$	»	$\emptyset$	$c^m(p_{10})$	$c^M(p_{10})$	$p_8 \Delta p_9?$
11	-	$p_1, p_2, p_3, p_4,$ $p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$	-	-	-	-	-	nenhum

Tabela III.7.

### 3.4. Notas conclusivas

A Secção 3 deste capítulo, que ora encerramos, ilustra a ligação que existe entre conceitos e algoritmos da área do apoio multicritério à decisão e a área do apoio à decisão com informação imprecisa. Esta ligação foi explorada para estudar o problema do caminho mais curto com informação imprecisa, recorrendo à adaptação de ferramentas concebidas para o caminho mais curto multicritério, em particular bicritério.

Os algoritmos desenvolvidos pretendem isolar o conjunto dos caminhos não dominados, como um primeiro passo na escolha do caminho que mais satisfaça o decisor. Considerámos primeiro o caso de um conjunto de combinações discreto, a que poderíamos chamar “cenários”, mostrando como se podem adaptar os algoritmos multicritério. Estudámos depois o caso geral, no qual o teste de dominância pode envolver a resolução de um programa matemático com algum esforço computacional. Nesses casos, o nosso objectivo foi tentar vislumbrar formas de diminuir o número desses testes. Ao introduzir algumas relações baseadas em minorantes e majorantes dos custos dos caminhos, em princípio fáceis de determinar, propusemos adaptações do algoritmo para o caminho mais curto bicritério que permitem evitar alguns testes. No caso de o problema obedecer a uma condição que se verifica em algumas circunstâncias com interesse prático, mostrámos que podem ser evitados ainda mais testes.



Embora não tenhamos programado estes algoritmos em nenhum computador, sabemos que decerto são extremamente rápidos mesmo para problemas com grandes dimensões, porquanto estes recorrem a algoritmos de ordenação de caminhos, que são muito eficientes,<sup>10</sup> e apenas efectuam algumas operações para cada um dos caminhos. Algoritmos de ordenação que forneçam apenas caminhos sem ciclos (mesmo quando o grafo apresenta ciclos) podem também ser utilizados, até porque os caminhos com ciclos de custo positivo são forçosamente dominados.<sup>11</sup>

Não aprofundámos mais esta via de investigação, uma vez que o nosso interesse é sobretudo o apoio multicritério à decisão. Todavia, pensamos que existe aqui matéria para mais investigação no futuro, sobretudo no que respeita à escolha de um caminho entre os não dominados, onde muita da investigação dedicada ao apoio multicritério à decisão pode ser valiosa. Alguns aspectos que propomos para investigação futura são os seguintes:

- pesquisa de um caminho “óptimo”, onde a condição de óptimo é relaxada (v. Vincke, 1999);
- pesquisa do caminho com o menor custo no pior dos casos quando a Condição 1 não se aplica (caso contrário o problema é trivial), conforme sugerem Kouvelis e Yu (1997);
- construção de funções que atribuam um valor a cada caminho (e.g. expressando um compromisso entre o benefício e o arrependimento potenciais na escolha de cada caminho);
- construção de relações binárias entre pares de caminhos para posterior exploração (e.g. considerando o conjunto das combinações que favorece cada um dos caminhos do par);
- desenvolvimento de protocolos de diálogo para interacção entre o modelo e o decisor.

O Capítulo V considerará um problema em que o valor de cada alternativa varia em função dos parâmetros. Trata-se, naturalmente, de uma fonte de sugestões que poderão também ser úteis no estudo do problema de caminho mais curto com informação imprecisa.

---

<sup>10</sup> Martins e Santos (2000) apresentam um algoritmo capaz de ordenar meio milhão de caminhos num grafo com dez mil nós em menos de um segundo. A página WWW de Ernesto Martins (<http://www.mat.uc.pt/~eqvm>) apresenta os códigos de computador e resultados numéricos de alguns dos seu algoritmos.

<sup>11</sup> O problema de determinar caminhos sem ciclos é considerado mais difícil, mas os progressos recentes são promissores (e.g. v. Martins et al., 1998).



# Capítulo IV

## Uma metodologia de delimitação ajustável

### 1. Algumas perspectivas sobre o apoio à decisão

---

O interesse em trabalhar com informação imprecisa, face às dificuldades identificadas na Secção 1 do capítulo anterior, sugeriu-nos encarar os modelos de apoio à decisão como uma ferramenta para delimitar progressivamente a imprecisão dos resultados. Porém, antes de expormos uma metodologia de delimitação ajustável, começaremos por rever nesta secção algumas perspectivas sobre o papel dos modelos no apoio à decisão.

A teoria da decisão divide-se tradicionalmente em dois *corpus* distintos (e.g. v. Rapoport, 1989): por um lado, as teorias descritivas propõem modelos que visam descrever o modo como as pessoas tomam decisões numa variedade de situações; por outro lado, as teorias normativas propõem modelos que indicam como deveriam as pessoas tomar decisões se quisessem ser consideradas “racionais”.

Os modelos das teorias descritivas têm um papel semelhante ao dos modelos das ciências naturais: visam representar uma realidade de forma abstracta e valem sobretudo pelo seu poder preditivo/explicativo. São, por esse motivo, falsificáveis (no sentido Popperiano do termo) através de experiências empíricas. Bell et al. (1988b) acrescentam: «it is a highly empirical and clinical activity [...]. Scholars can study this domain without any concern whatsoever of trying to modify behavior, influence behavior, or moralize about behavior.» Por sua vez, os modelos das teorias normativas constituem idealizações acerca do modo como seres racionais se deveriam comportar. Os modelos

normativos da teoria da decisão não são já falsificáveis; pretendem antes ser aceitáveis de um ponto de vista teórico e ético, na forma como definem os axiomas a que deve obedecer um decisor racional.

Quando falamos de apoio à decisão em lugar de teoria da decisão, os modelos a utilizar não se referem aos decisores em geral, mas a um decisor ou conjunto de decisores concreto. Nesse âmbito, não interessa tanto estudar a forma como todos os decisores se comportam em geral (teorias descritivas), nem a forma como o decisor ideal se devia comportar (teorias normativas): interessa sobretudo ajudar aqueles decisores em particular a ultrapassar as dificuldades que sintam na decisão que enfrentam. Bell et al. (1988b) referem-se à utilização de modelos segundo uma perspectiva prescritiva, que visa responder à questão «how can real people — as opposed to imaginary, idealized, super-rational people without psyches — make better choices in a way that does not do violence to their deep cognitive concerns?», atendendo possivelmente às limitações dos seres humanos (conhecidas das teorias descritivas) e considerando porventura alguns desideratos propostos em teorias normativas. O papel dos modelos passa, pois, a ser avaliado pelo seu valor pragmático.

Para os autores da Escola Europeia (e.g. v. Bana e Costa, 1992; Roy, 1993; Roy e Vanderpooten, 1996) a perspectiva prescritiva está, por um lado, associada a normas para prescrever referentes a um ideal que se tenta aproximar (os axiomas da teoria normativa da utilidade) e está, por outro lado, associada a uma tentativa de descrever (i.e. “extrair”, *to elicit*) a estrutura de preferências do decisor — considerada preexistente — com o intuito de verificar a forma como se enquadra naquele ideal. Roy contrapõe (v. Courbon et al., 1994): «la bonne décision est un construit» (e não uma verdade que aguarda ser descoberta), propondo uma perspectiva construtiva cujo objectivo é «to construct a ‘set of keys’ which will open doors for the actors and allow them to proceed, to progress in accordance to their objectives and systems of value» (Roy, 1993). Shafer (1988) também caracteriza a perspectiva construtiva como aquela que não pressupõe a preexistência de preferências: preferir a alternativa *a* (em detrimento de *b*) quando uma questão é colocada de uma certa forma e preferir a alternativa *b* quando a mesma questão é colocada segundo outro prisma pode não ser considerado um erro, mas sim um conflito entre argumentos para construir uma preferência. Bana e Costa sumaria as diferenças entre as perspectivas prescritiva e a construtiva da seguinte forma:

En empruntant une démarche constructive, un homme d’étude aide a construire un modèle de préférences par la quête d’hypothèses de travail pour faire des recommandations. Par une démarche descriptive / prescriptive un analyste commence par décrire et il fait des prescriptions sur base d’hypothèses normatives validées par la réalité décrite. (Bana e Costa, 1992: 67).

O mesmo autor, porém, adverte que a fronteira entre a perspectiva prescritiva e a perspectiva construtiva é subtil e as mesmas palavras são usadas por diferentes autores com significados diversos.

Qual pode ser, então, o papel de um modelo no apoio à decisão? Uma resposta sintética mas abrangente é a oferecida por Bana e Costa (1992: 63), para quem um modelo pode constituir «le schéma de représentation et d'organisation des éléments primaires d'évaluation, en servant de base de raisonnement, d'investigation, de communication et de discussion interactive avec et entre les acteurs.» Entre estes aspectos, Montgolfier e Bertier (1978: 66) privilegiam a comunicação: «Le rôle du modèle est bien de fournir à tous ces personnes [engagées dans une même processus de décision] un langage commun leur permettant un dialogue véritable.»

Mais genericamente, Roy (1990) identifica três propósitos (reiterados em Roy e Vanderpooten, 1996) para a actividade do apoio à decisão, destacando o primeiro deles como o principal:

- construir ou criar algo que possa ajudar o decisor a moldar as suas preferências e/ou a argumentar sobre as mesmas, ou a tomar uma decisão em conformidade com os seus objectivos;
- extrair da informação, ou elaborar a partir da mesma, aquilo que for realmente significativo; e
- ajudar o decisor a encontrar argumentos capazes de reforçar (ou enfraquecer) as suas convicções.

Reconhecendo que a maioria dos processos de decisão envolve múltiplos actores, Roy (1999) acrescenta:

- permitir que os participantes no processo de decisão estruturem o debate;
- facilitar a concertação, ajudando a estabelecer um clima de confiança e estabelecendo uma visão comum do problema; e
- contribuir para legitimar a decisão.

## **2. Informação imprecisa e conclusões robustas**

---

Uma vez construído um modelo — o esquema de representação e organização dos elementos de avaliação de que falava Bana e Costa — este é utilizado com o objectivo de elaborar recomendações. Todavia, perante os elementos de arbitrariedade, incerteza e imprecisão assinalados na secção 1 do Capítulo anterior, que confiança atribuirão os decisores aos resultados que obtiverem?

Frequentemente, utiliza-se uma combinação de valores para os parâmetros para obter um resultado, efectuando-se *a posteriori* uma análise para estudar o efeito da variação dos valores dos parâmetros. Um procedimento clássico é o da **análise de sensibilidade**, que visa em geral determinar a região no espaço dos parâmetros em que o resultado obtido permanece válido (e.g. Mareshal, 1988; Antunes e Clímaco 1993), ou determinar qual o resultado alternativo mais “próximo” do encontrado (e.g. Rios Insua e French, 1991). Note-se, porém, que em alguns trabalhos a expressão *análise de sensibilidade* é utilizada como sinónima de determinar quais os parâmetros mais “sensíveis”, i.e. aqueles cujo valor importa definir com mais precisão. Por exemplo, Saltelli et al. (1999) apresentam métodos para decompor a variância do output de um modelo por forma a expressar a contribuição de cada um dos parâmetros para essa variância, considerando todas as interações entre estes.

Outro procedimento possível é o apontado por Roy e Bouyssou (1993: 315-316): a hesitação do decisor conduz à adopção de uma primeira combinação “central” de valores para os parâmetros, que define um modelo “central” e permite obter um resultado de referência. Posteriormente, verifica-se como se altera esse resultado face a outras combinações aceitáveis, o que poderá até conduzir a uma nova revisão combinação central de valores para os parâmetros e a um novo resultado de referência. Esta é uma forma de efectuar uma **análise de robustez**, que visa isolar as **conclusões robustas**, i.e. válidas para as várias combinações de parâmetros que são consideradas. Em relação à análise de sensibilidade existe uma inversão da perspectiva: mais do que saber quanto poderiam variar os valores dos parâmetros para se manter uma recomendação, interessa agora saber como se poderá comportar uma recomendação face à variação dos valores dos parâmetros. Tal poderá ser muito importante se, por exemplo, a variação dos valores dos parâmetros puder acomodar as diferenças inevitáveis entre um universo modelado e um universo (futuro, incerto) onde a recomendação será colocada em prática.

Roy (1998) define análise de robustez como qualquer procedimento que apoie a elaboração de conclusões robustas num ou vários conjuntos, tão grandes quanto possível, de combinações de valores para os parâmetros, distinguindo três tipos de conclusões:

- perfeitamente robustas — asserções formalizadas que se verificam para todas as combinações;
- aproximadamente robustas — asserções formalizadas que se verificam para todas as combinações, excepto algumas (não necessariamente identificadas com clareza), que são consideradas negligenciáveis;

- pseudo-robustas — asserções mais ou menos formalizadas que se verificam para todas as combinações.

A referência à *análise de robustez* ou à *robustez* pode ainda ser encontrada no trabalho de outros autores ou mesmo na linguagem comum. Já no clássico livro *Decision and control* (Beer, 1966: 44) se referia, a propósito de um famoso problema operacional da Guerra de 1939-45, a necessidade de soluções «which are robust in a quite large variety of circumstances». Roy recorda mesmo um encontro que teve com um representante da Air France, que lhe exprimiu as suas preocupações exactamente em termos de análise de robustez, inclusivamente empregando essas palavras (Courbon et al., 1994).

Pelo seu interesse, destacaremos outras referências à *robustez*, embora com um significado diferente do definido por Roy. Para Rosenhead (1989c), a análise de robustez efectua-se para escolher uma acção (ou melhor, para efectuar uma primeira escolha numa sequência de escolhas) o mais flexível possível, medindo-se a flexibilidade pelo número de opções que a acção escolhida deixa em aberto para as decisões a tomar no futuro. Vincke (1999) define solução robusta como aquela que está sempre “próxima” (ou “não-contraditória”) da solução obtida pelo método, qualquer que seja a combinação de valores que se considere para os parâmetros *do problema*, e define método robusto como aquele que, para a mesma informação, nunca chega a soluções “contraditórias”, qualquer que sejam os valores dos parâmetros *do método* (e.g. tamanho da população num algoritmo genético). Kouvelis e Yu (1997) definem solução robusta em problemas de optimização como aquela cujo desempenho no pior caso é melhor (regra *max-min*) ou, em alternativa, aquela cuja maior diferença para a solução óptima seja menor (regra *min-max regret*). Também no contexto de problemas de optimização, Mulvey et al. (1995) distinguem *solution robust*, propriedade de uma solução cujo valor está sempre “próximo” do valor óptimo para qualquer combinação de valores para os parâmetros, de *model robust*, propriedade de uma solução que seja admissível ou “quase admissível” para qualquer destas combinações.

Quer se trate de análises de sensibilidade ou de robustez, as análises *a posteriori* possuem a desvantagem de requerer o esforço inicial da determinação de um valor exacto para cada parâmetro e de dirigir desde logo a atenção dos decisores para o primeiro resultado que obtêm, o que pode ser, em nossa opinião, prematuro. Para além disso, no caso da análise de robustez, tal como proposta por Roy e Bouyssou (1993: 315-316), a escolha das combinações de valores para os parâmetros que se testam pode ser arbitrária e pouco representativa da totalidade de combinações que os decisores considerariam aceitáveis (disso apresentaremos um exemplo no Capítulo VII). Já no caso da análise de sensibilidade,

uma lacuna comum consiste em fazer variar apenas um parâmetro de cada vez, ignorando deste modo os efeitos da interacção entre as diferentes variações.

Advogamos, como forma de favorecer o avanço do processo de decisão, a adopção explícita e *ab initio*, enquanto hipótese de trabalho, de um conjunto  $T$  de todas as combinações de valores para os parâmetros que sejam consideradas aceitáveis, baseado na informação imprecisa que os decisores possam (ou queiram) fornecer. Neste contexto, é de extremo interesse efectuar análises de robustez. Contudo, ao contrário do procedimento proposto por Roy, a análise de robustez está presente logo no início da análise, e não apenas após a obtenção de um primeiro resultado.

O objectivo da análise passa a ser a descoberta de conclusões compatíveis com a informação disponível. Aqui, por compatibilidade pretendemo-nos referir à validade da conclusão para qualquer combinação  $t \in T$ . Notemos ainda que nos referimos a conclusões e não a resultados, uma vez que estes últimos podem ser muito ricos. Por exemplo, no caso da agregação baseada numa função de valor o resultado é uma ordenação das acções que facilmente se alterará, ainda que em parte, logo que algum parâmetro varie, o que é sobretudo observável se existir um grande número de acções. Por conseguinte, é frequentemente pouco informativa qualquer análise baseada na inalterabilidade da totalidade do resultado obtido. Será porventura mais interessante entender o resultado fornecido como um conjunto de conclusões de três tipos, que passamos a definir:

- conclusões absolutas robustas referem-se à satisfação, por parte de uma dada acção  $a_i$ , de uma determinada condição independente de qualquer outra acção (e.g. o valor de  $a_i$  excede um determinado limiar), qualquer que seja  $t \in T$ ;
- conclusões (relativas) unárias robustas referem-se à satisfação, por parte de uma dada acção  $a_i$ , de uma determinada condição que depende de outras acções (e.g.  $a_i$  não é prevalectida por nenhuma outra acção, ou  $a_i$  situa-se nos três primeiros lugares de uma ordenação), qualquer que seja  $t \in T$ ;
- conclusões (relativas) binárias robustas referem-se à verificação de uma dada relação entre duas acções (e.g. uma prevalece sobre a outra, ou uma situa-se à frente da outra numa ordenação), qualquer que seja  $t \in T$ .



### 3. Modelos sob uma nova perspectiva

---

Podemos finalmente encarar os modelos e métodos de apoio à decisão sob uma nova perspectiva. Os modelos não são mais vistos como algo que se parametriza e produz um resultado, eventualmente reformulado após uma análise de sensibilidade. Nem tão pouco, são vistos como algo que transforma uma combinação de valores para os parâmetros num resultado, que por sua vez pode suscitar no decisor o desejo de experimentar uma combinação diferente num processo interactivo.

A via que defendemos aqui é encarar o método como um operador que encontra todos os resultados compatíveis com as múltiplas combinações aceitáveis pelo decisor, i.e. compatíveis com um modelo parametrizado de forma imprecisa. O método constitui, pois, uma ferramenta para explorar as consequências (em termos de conclusões robustas) legitimadas pela informação (imprecisa) fornecida. Trata-se de um operador a utilizar de uma forma interactiva: a exploração daquelas consequências será um output valioso para suscitar uma discussão entre os intervenientes, para extrair conclusões robustas, para aprender aspectos do problema e do funcionamento do método, para rever a informação utilizada e estimular o fornecimento de mais informação,<sup>1</sup> enfim, para delimitar progressivamente os contornos do modelo. Entendemos que esta via é útil, embora não se pretenda afirmar que é a única ou a melhor, nem retirar valor a outras formas de proceder. De seguida confronta-se esta com duas metodologias alternativas, às quais não negamos interesse nem validade.

#### Primazia do rigor

A metodologia mais comum consiste em apoiar o decisor com o maior rigor possível. Aí utilizam-se modelos e métodos complexos sempre que o problema o “exige”. Não há também grandes concessões na procura de informação que conduza a um valor para os parâmetros o mais adequado possível. Como exemplo, podemos imaginar uma aplicação da Teoria da Utilidade Multi-atributo, em que se utilize um modelo de agregação não-linear, porque as condições de independência necessárias ao modelo linear não são perfeitamente verificadas, e onde se despende um esforço considerável na “procura” dos valores para os coeficientes de escala.

---

<sup>1</sup> Existe aqui um paralelo com os métodos de *redução progressiva da incomparabilidade* (v. Bana e Costa e Vincke [1995] e as referências aí contidas).

A principal vantagem desta metodologia é precisamente o seu rigor, conjuntamente com os benefícios que certamente advirão do esforço do decisor ao pensar nas respostas que tem de fornecer. Contudo, há que distinguir entre rigor no sentido de coerência com rigor no sentido de aproximação à realidade. Nesta última acepção, o rigor está associado a uma perspectiva que postula a pré-existência de preferências estáveis na mente do decisor, o que é questionável. Tratar-se-ia mesmo assim de um rigor relativo, dado que qualquer modelo descritivo deve inevitavelmente simplificar aquilo a que se refere.

Por outro lado, os valores escolhidos para os parâmetros poderão enfermar de alguma arbitrariedade, seja pela ubiquidade das dificuldades apontadas na Secção 1 do Capítulo anterior, seja pela indisponibilidade de tempo ou de recursos para um estudo mais rigoroso. Consequentemente, corre-se o risco de atribuir aos resultados um rigor, conferido pela metodologia, que poderá não ser lícito perante a quase inevitável arbitrariedade com que se estabelecem os valores para os parâmetros.

### **Aproximação heróica**

Edwards e Barron (1994) acreditam que métodos e modelos simples são mais fáceis de utilizar e por isso mais propensos a serem úteis. Para além disso, consideram existir um compromisso entre o *erro de modelação* e o *erro de medição*: um modelo mais complexo pode ser mais realista, mas em contrapartida implicará maiores dificuldades e maiores erros na obtenção dos valores para os parâmetros (nestas ideias está implícita uma perspectiva de “descrever para prescrever”). Estes autores propõem uma via que designam por *strategy of heroic approximation*.

Segundo esta metodologia, utilizam-se modelos simples e exigem-se apenas juízos simples por parte do decisor. Após obter um resultado, verifica-se, geralmente através de uma análise de sensibilidade, se o erro potencial é grande *para o problema que está a ser tratado*. Por exemplo, o método SMARTER, proposto por Edwards e Barron, ignora a distinção entre valor e utilidade, utiliza uma função de valor aditiva e utiliza apenas uma ordenação da ponderação das escalas (sem requerer valores precisos para os coeficientes de escala).

A grande vantagem da metodologia da aproximação heróica é a simplicidade. Edwards et al. (1988) afirmam que a simplicidade ajuda em vários aspectos: os decisores entendem mais facilmente o processo de apoio à decisão; o processo é mais simples e mais rápido; os juízos requeridos são mais

fáceis e, sobretudo, os decisores são mais capazes de comunicar acerca do processo e de utilizar eles próprios as ferramentas desenvolvidas no âmbito do mesmo.

A principal desvantagem, apontada por exemplo por Goodwin and Wright (1998: p.44) e mesmo por Edwards e Barron (1994), é a seguinte: ao dispensar o decisor de efectuar juízos mais difíceis, encoraja-se uma consideração mais superficial do problema, colocando em causa o objectivo de aumentar o seu discernimento (*insight*) sobre a situação. Keeney e Raiffa (1976: prefácio e p. 190) consideram que o decisor deve pensar arduamente sobre os seus juízos, devendo o apoio à decisão ser efectuado sobretudo com esse intuito. Apesar de muito do discernimento que se adquire durante o processo de apoio à decisão resultar da fase de estruturação, estas críticas são importantes.

Uma desvantagem porventura menos importante é a de o resultado da análise poder ser diferente daquele que se obteria com uma metodologia que desse primazia ao rigor. A esta crítica respondem Edwards et al. (1988):

If the goal is to help the decision maker with a problem, and no more, then any approximate procedure good enough to help the decision maker make a wise decision (not necessarily the wisest one, but one that differs in expected utility from the wisest one by only a few percentage points) is good enough.

Embora num contexto particular e fazendo alusão à ilusória *wisest decision*, este argumento é-nos caro: com uma pequena fracção do esforço necessário para obter um resultado fundado numa análise absolutamente rigorosa (alegadamente), pode-se frequentemente obter um resultado tão próximo, que a diferença não compensaria os custos desse esforço.

## **Delimitação ajustável**

A via que aqui propomos poderia ser designada por *delimitação ajustável* ou *aproximação ajustável*. Nesta última designação, que se contrapõe à *aproximação heróica*, a *aproximação* não se refere a uma qualquer realidade que se visa descrever, mas sim ao desejo de nos aproximarmos do final do processo de decisão, i.e. progredir. Porém, para evitar ambiguidades, utilizaremos apenas a primeira das designações.

A delimitação ajustável é, de certo modo, um compromisso entre a primazia do rigor e a aproximação heróica. Por um lado, tal como na aproximação heróica e na IO *soft*, procura-se beneficiar da simplicidade — ao aceitar informação imprecisa, evita-se o esforço de obter um valor preciso para cada parâmetro — sem contudo deixar de utilizar métodos *conceptualmente* simples. Por

conceptualmente simples, entenda-se que o método é fácil de compreender no que respeita ao seu propósito, à natureza dos seus parâmetros e ao significado dos seus resultados. Montgolfier e Bertier (1978: 242) salientam: «[...] il faudra choisir une méthode permettant un dialogue facile entre analyste, demandeur et autres personnes intervenant dans le processus: la simplicité de la méthode et la comodité de l'exposé de ses resultats seront alors ses qualités le plus recherchés.» Todavia, tal não impede o método de ser *computacionalmente* complicado.<sup>2</sup> Por outro lado, reavalia-se constantemente até que ponto a informação é suficientemente precisa, procurando dirigir a atenção e a procura de mais rigor por parte do decisor.

Entendemos o modelo como uma plataforma para a comunicação, a concertação e, sobretudo, a aprendizagem. A premissa é a de que a aprendizagem é possível quando se trabalha com informação imprecisa, decorrendo ao observar quais são as conclusões que são robustas e ao investigar as razões pelas quais outras conclusões não o são. Essa aprendizagem, essa exploração das implicações da informação imprecisa, suscitará então a discussão que pode conduzir à revisão, frequentemente delimitação, dos valores aceitáveis para os parâmetros. Trata-se de uma estratégia de delimitação segundo duas perspectivas: por um lado delimita-se progressivamente a imprecisão associada aos valores dos parâmetros; por outro lado, delimita-se progressivamente a imprecisão dos resultados.

A estratégia de delimitação é suficientemente flexível para se ajustar às características dos decisores e dos processos de decisão, adaptando-se à maior ou menor dificuldade em fixar os valores dos parâmetros. A delimitação é também ajustável porque interactiva, no aspecto de se esperar que os resultados de uma determinada análise possam ser utilizados para rever a informação ou acrescentar informação. A delimitação é ainda ajustável porque controlada: ao explorar as implicações da informação imprecisa, o decisor pode observar se a variabilidade dos resultados legitima ou não determinada conclusão. Será este controlo de qualidade embutido na metodologia que indicará ao decisor se o esforço que despendeu é ou não suficiente.<sup>3</sup> Será também este controlo que permitirá orientar o decisor no dispêndio dos seus esforços, dirigindo a sua atenção para os aspectos que

---

<sup>2</sup> Considere-se por exemplo um método de optimização: é simples explicar o que são variáveis e restrições, bem como a noção de solução óptima, mesmo que não seja simples ensinar um algoritmo de optimização mais complicado.

<sup>3</sup> Neste aspecto, a delimitação ajustável lembra-nos a racionalidade *satisficing* de Simon, que mencionámos no Capítulo I. A noção de *suficiente* é indissociável das expectativas e intenções do decisor. Goodwin e Wright (1998: p. 17) enfatizam que «the main role of the analysis is to enable the decision maker to gain an increased understanding of his or her decision problem. If at the end of the analysis no single best course of action has been identified, this does not mean that the analysis was worthless».

realmente interessem.<sup>4</sup> Algumas afirmações de Montgolfier e Bertier (1978: 44) parecem muito próximas deste tipo de metodologia:

L'étude, dont l'objet est d'éclairer une décision, doit suivre une évolution qui **guide et reflète en même temps l'évolution de la perception** qu'a le décideur de son problème. [...] La résolution du problème, avant qu'il soit complètement posé, doit être entamée au moyen d'un premier modèle fruste. Le **modèle s'affinera au cours du dialogue** entre le chercheur et le décideur.

(Os destaques são da nossa responsabilidade)

A delimitação ajustável, ao facilitar a tarefa do decisor, pode colocar em causa o objectivo de aumentar o seu discernimento sobre a situação, conforme assinalado a propósito da aproximação heróica. Contudo, trata-se de um tipo de estratégia mais rico do que o da aproximação heróica, com o potencial de proporcionar ela própria o *insight* que advém da análise de robustez.

#### 4. Papel no apoio à decisão em grupo

---

A metodologia que propomos pode desempenhar também um papel benéfico algumas em situações com múltiplos decisores. Em concreto, consideremos um conjunto de  $K$  decisores que pretendem honestamente colaborar num processo de decisão. Assumamos que não existem fortes conflitos entre eles, de tal modo que um consenso sobre a recomendação final seja um objectivo realista, sem necessidade de mediação ou arbitragem (sobre estes conceitos v. Raiffa, 1982). Cada um destes decisores (indexados por  $k = 1, \dots, K$ ) possui um conjunto de restrições que delimita o conjunto  $T_k$  de combinações (de valores para os parâmetros) que este considera aceitáveis.

Nesta situação, podemos ter dois enquadramentos, que diferem no nível a que se agregam as perspectivas individuais: no primeiro, ao nível dos parâmetros; no segundo, ao nível dos resultados. A Figura IV.1 ilustra o primeiro caso, em que um operador  $f(\cdot)$  agrega os conjuntos individuais  $T_1, \dots, T_K$  num conjunto  $T$  de combinações aceitáveis pelo grupo, enquanto um operador  $e(\cdot)$  obtém o conjunto de resultados  $R$  do método que estiver a ser utilizado que sejam compatíveis com  $T$ . O segundo caso é ilustrado na Figura IV.2, no qual o operador  $e(\cdot)$  produz os resultados individuais  $R_k$  a partir dos

---

<sup>4</sup> Citemos, a propósito, Simon (1988): «in a world where information is attention is a major scarce resource, information may be an expensive luxury, for it may turn our attention from what is important to what is unimportant.»

conjuntos  $T_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ), sendo esses resultados agregados num conjunto  $R$  de resultados aceitáveis pelo grupo por um operador  $h(\cdot)$ .

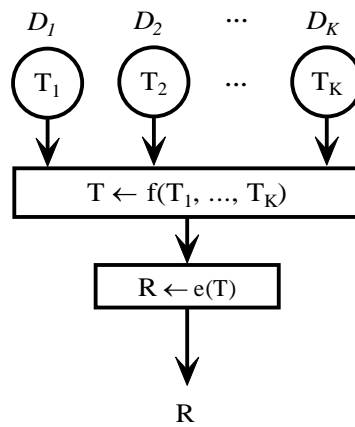


Figura IV.1. Agregação ao nível dos parâmetros

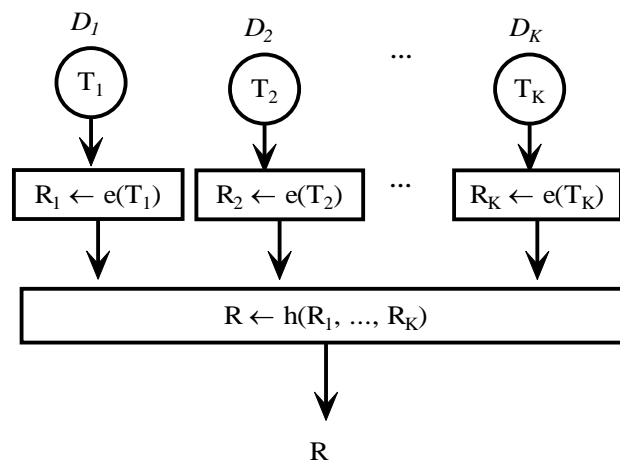


Figura IV.2. Agregação ao nível dos resultados

A agregação efectuada pelos operadores  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  pode consistir numa média, numa regra de votação, numa minimização de uma distância, etc. Por exemplo, no contexto de funções de valor aditivas, Kim e Ahn (1997) sugeriram um método de acordo com o enquadramento representado na Figura IV.2, no qual o operador  $e(\cdot)$  obtém, para cada decisor  $k$ , a diferença de valor mínima  $L_k(x,y)=\min\{V_k(a_x)-V_k(a_y)\}$  para cada par  $(a_x,a_y)$  de acções, enquanto o operador de agregação dos resultados  $h(\cdot)$  agrega os limites dos intervalos efectuando uma soma inspirada no método PROMETHEE,  $\Phi(a_x)=\sum_k \sum_{y \neq x} L_k(x,y)-L_k(y,x)$  (métodos semelhantes, com diferentes variantes do operador  $h(\cdot)$ , são propostos em Kim e Ahn, 1999; Kim et al., 1999; e Kim e Han, 1999).

No contexto da procura de um consenso acerca do que recomendar, será porventura mais apropriado considerar  $f(.)$  ou  $h(.)$  (consoante o caso) como os operadores de conjuntos  $\cap$  (intersecção) ou  $\cup$  (reunião). Ao utilizar-se a intersecção, o conjunto  $R$  irá conter os resultados que todos os decisores poderão concordar em considerar aceitáveis; ao utilizar-se a reunião, qualquer resultado no conjunto  $R$  será aceitável para pelo menos um decisor, i.e. poderá existir um consenso acerca dos resultados que *não* devem ser considerados.

No caso de se desejar um consenso acerca dos resultados a considerar (operador intersecção) e de se proceder à agregação ao nível dos parâmetros, pode suceder que o conjunto  $T = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_K$  seja vazio, embora tal não deva ser muito frequente se não existirem fortes divergências entre os decisores. Em tais situações, deve-se optar pelo operador reunião ou deve-se procurar rever os conjuntos individuais  $T_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ). Esta revisão pode ser efectuada através de uma discussão entre os decisores que coloque em questão as restrições de cada um (restrições essas que delimitam os conjuntos  $T_k$  de forma explícita ou implícita), ou pode ser efectuada de uma maneira automática que relaxe as restrições de todos os decisores de uma forma justa e igualitária.

Acreditamos que trabalhar com informação imprecisa à partida no contexto de decisão em grupo aqui apresentado é não só necessário como benéfico. Necessário, devido às dificuldades em obter informação precisa que apontámos na Secção III.1, ainda mais notórias quando existem diferenças de percepção e de preferências entre os decisores. Benéfico, porque em vez de se forçar cada decisor a escolher e defender uma combinação de valores precisos para os parâmetros, o que poderia até arruinar o seu bom relacionamento, convidam-se os decisores a formar as suas convicções de uma forma progressiva e cooperativa, à medida que interagem com o método de apoio à decisão. Citando Montgolfier e Bertier (1978: 208), «en matière de décision collective, ce que importe ce n'est pas tant une modélisation très fine, très précise pour capter les préférences du groupe à un instant donné, que la mise en place du processus même de la décision collective.»

O principal benefício será, pois, colocar o processo em marcha, evitando discussões prematuras sobre o valor preciso de alguns parâmetros, que a análise até pode mostrar terem um papel pouco importante, ou sobre alguns resultados, que a análise até pode mostrar serem robustos. Os decisores poderão concentrar-se nos resultados que mais variam face à informação imprecisa, enquanto

concordam em aceitar os restantes resultados.<sup>5</sup> De facto, a via aqui sugerida pode potencialmente conduzir os decisores a concordar com um resultado, embora não tivessem conseguido concordar em valores precisos para os parâmetros.

Nalguns casos, porventura raros, pode até acontecer que um aumento na precisão da informação possa colocar em causa um consenso que de outra forma seria obtido. Hirshleifer e Riley (1992) apresentam um curioso exemplo: duas pessoas podem concordar em apostar no cavalo *C*, porque a primeira acredita que vai chover e que o cavalo *C* é excelente quando chove, enquanto a segunda acredita que não vai chover e que o cavalo *C* é excelente em piso seco; porém, se conhecessem a previsão meteorológica para o dia da prova o acordo já não seria possível.

## **5. Implicações para os Sistemas de Apoio à Decisão**

---

Afirmámos atrás que não haverá grandes inconvenientes em utilizar um método computacionalmente complicado, desde que conceptualmente simples. Decerto, tal argumento pressupõe que a carga computacional ficará a cargo de computadores, por detrás de um interface com o utilizador que apele apenas a ideias intuitivas subjacentes ao método. Os sistemas computacionais de apoio à decisão são, por conseguinte, essenciais para a praticabilidade da metodologia da delimitação ajustável. Nesta secção, analisaremos brevemente quais as implicações desta metodologia para os SAD.

Começamos pelo subsistema de gestão de dados. No contexto da avaliação multicritério, interessa tipicamente apenas a parte da base de dados que contém os desempenhos das acções, a caracterização dos critérios e o valor de parâmetros que possam influenciar os desempenhos (e.g. uma taxa de desconto) ou o papel dos critérios (e.g. coeficientes de importância). Agora, será necessário gerir também toda a informação imprecisa que os decisores possam fornecer, quer em termos de restrições explícitas sobre o valor de parâmetros, quer em termos indirectos (e.g. a informação de que uma acção  $a_x$  é preferível a uma outra acção  $a_y$ ). As estruturas de dados deverão também suportar o

---

<sup>5</sup> Por exemplo, num contexto de agregação por uma função de valor aditiva, o método pode indicar que o valor da acção  $a_1$  se encontra entre 0,58 e 0,61, enquanto o valor da acção  $a_2$  se encontra entre 0,78 e 0,80. Neste caso, os decisores facilmente concordarão que  $a_2$  é superior a  $a_1$ : trata-se mesmo de uma conclusão robusta. Esses decisores podem então dirigir a sua atenção para a acção  $a_3$ , cujo valor varia entre 0,60 e 0,86, por exemplo.



armazenamento do conjunto de resultados compatíveis com a informação imprecisa, por forma a que possam ser pesquisadas conclusões robustas.

No que respeita ao subsistema de gestão de modelos, será necessário incluir modelos e métodos próprios para trabalhar com informação imprecisa. A análise de robustez corresponderá, do ponto de vista dos utilizadores, ao cálculo exaustivo e automático dos resultados associados a todas as combinações aceitáveis de valores para os parâmetros. Trata-se, portanto, de uma multiplicidade de análises do tipo “*e se?*”. Face à riqueza dos resultados, será ainda útil a oferta de ferramentas que os permitam analisar, em particular, no que se refere à identificação de conclusões robustas. No caso particular dos SADG, poder-se-ão incluir modelos de decisão em grupo que sigam a linha que propusemos na secção anterior, eventualmente com capacidade para propor consensos aos decisores. Adicionalmente, um SADG de nível 3 (v. Secção 5 do Capítulo II) poderá regular o processo de decisão em grupo, com base na informação que possui sobre as combinações de valores para os parâmetros que cada membro considera aceitáveis, nomeadamente o grau de sobreposição desses conjuntos (e.g. para saber se o potencial para um consenso é grande) e o seu tamanho relativo (e.g. para saber quão indeciso pode estar cada membro).

Ao nível do interface com o utilizador também encontramos algumas implicações. É necessário que, por um lado, este subsistema aceite informação imprecisa e, por outro lado, permita apresentar de forma inteligível a multiplicidade de resultados compatível com essa informação. Dessa apresentação pode depender a identificação de conclusões robustas e o discernimento que conduza à revisão da informação já inserida. Um aspecto crucial é o da interactividade, que o interface deverá favorecer. Aqui, concordamos plenamente com Courbon (v. Courbon et al., 1994), que afirma «en ce qui concerne les activités de modélisation, [...] l’interactivité ne doit pas être considéré comme une contrainte ou une préoccupation de dernière minute mais comme un outil de conception». Na delimitação ajustável, o modelo que o SAD usa vai sendo afinado de forma interactiva ao longo do processo de decisão. De certa forma, como sugere Courbon no mesmo artigo, um SAD tanto pode ajudar um decisor (porque aquele, no nosso caso, explora a imprecisão do modelo), como pode ser ajudado pelo decisor (porque este, no nosso caso, delimita a imprecisão do modelo).



# Capítulo V

## Agregação aditiva com informação imprecisa

### 1. Introdução ao problema

---

O problema de decidir perante informação imprecisa tem sido estudado, em grande parte, no contexto da agregação do desempenho de cada acção num valor de síntese.<sup>1</sup> Em particular, a atenção dos investigadores tem-se centrado na agregação através de uma função de valor aditiva,<sup>2</sup> uma técnica de apoio à decisão muito utilizada na prática, que apresentámos já no Capítulo II. Neste contexto, trabalhar com informação imprecisa assume particular relevância, pois apesar da simplicidade da função de valor aditiva, a sua utilização torna-se difícil para quem tem de fornecer os valores para os parâmetros, nomeadamente os coeficientes de escala (também designados por constantes de escala<sup>3</sup>). O valor dos coeficientes de escala está relacionado com a importância de cada critério, mas de forma indirecta e indissociável das funções de valor parcial (unicritério).

Os procedimentos rigorosos utilizados para questionar os decisores acerca dos valores para os coeficientes de escala conduzem, pela natureza compensatória do modelo de agregação aditiva, a

---

<sup>1</sup> Este capítulo baseia-se no trabalho que relatámos em Dias e Clímaco (2000c).

<sup>2</sup> Veja-se, entre outros, Antunes e Clímaco (1993), Athanassopoulos e Podinowski (1997), Bana e Costa (1988), Bana e Costa e Vincke (1995), Butler et al. (1997), Charnetski e Soland (1978), Eiselt e Laporte (1992), French e Rios Insua (1989), Hazen (1986), Kampke (1996), Kim e Ahn (1997; 1999), Kim et al. (1999), Kim e Han (1999), Kirkwood e Sarin (1985), Kmietowicz e Pearman (1984), Mareschal (1988), Park e Kim (1997), Podinowski (1999), Rios Insua e French (1991), Robinson e Soland (1997), Schneller e Sphicas (1985), Weber (1987) e Wolters e Mareschal (1995), sendo de destacar a profusão de trabalhos publicados em anos recentes.

<sup>3</sup> A designação constantes de escala será porventura mais consensual. Porém, no contexto em que estes parâmetros são variáveis, usar o vocábulo “constantes” seria dissonante. Outra designação comum, “pesos”, é falaciosa se atendermos ao significado daqueles parâmetros, distinto da metáfora da pesagem.

dificuldades na obtenção de respostas precisas. Trata-se, regra geral, de questões acerca de quanto estariam os decisores dispostos a perder na escala de valor associada a um dado critério, para obter em compensação um certo ganho noutra critério. Imaginemos, por exemplo, que se pretendia avaliar diferentes projectos para uma estrada através de múltiplos critérios, entre os quais o custo e o número de acidentes graves esperado. Segundo o método dos *trade-offs* de Keeney e Raiffa (1976), poder-se-ia colocar aos decisores a questão de quanto estariam dispostos a perder num critério para ganhar no outro. Pensamos que não seria fácil responder, pelas razões apontadas no Capítulo III: a questão interfere com os valores dos decisores; ela é indissociável da forma como se modelaram as funções de valor parcial para os dois critérios, que envolve alguma arbitrariedade; ela faz apelo a um número de acidentes previsto, logo incerto e de consequências graves mas também incertas. Em casos como este, a possibilidade de prosseguir a análise sem ter de responder logo, de forma precisa, a esta questão e, mesmo assim, obter alguns resultados, seria seguramente bem-vinda.

No presente capítulo, começaremos por rever e classificar os procedimentos existentes para trabalhar com informação imprecisa no contexto da agregação aditiva. Cada classe de procedimentos enferma de limitações, pelo que argumentaremos que é benéfico utilizar procedimentos de várias classes ao analisar uma dada situação de decisão. Consideraremos apenas o contexto da selecção da melhor alternativa, para o que proporemos uma sequência de procedimentos de diferentes classes, introduzindo um conceito de tolerância que permitirá utilizar alguns deles com maior flexibilidade. A esta proposta está subjacente uma metodologia de eliminação progressiva de acções, permitindo um estudo mais detalhado das mesmas à medida que o processo de selecção avança. Ao mesmo tempo, permite-se que os resultados de uma determinada análise possam ser utilizados para rever a informação ou acrescentar informação, bem como para legitimar algumas conclusões (robustas). O trabalho descrito neste capítulo constrói, portanto, uma primeira imagem da utilização da estratégia de aproximação ajustável proposta no capítulo anterior, combinando os benefícios de aceitar informação imprecisa com as vantagens da análise de robustez.

Na última parte deste capítulo, apresentaremos um programa informático, denominado *VIP Analysis*, que construímos para oferecer aos seus utilizadores uma forma expedita de analisar um problema através de múltiplos procedimentos e a diferentes níveis de detalhe, quando se trabalha com informação imprecisa acerca dos coeficientes de escala. A metodologia proposta é ilustrada através de exemplos de utilização do programa.

## 2. Uma taxinomia dos procedimentos existentes

---

### 2.1. Notação

Neste capítulo retomamos alguma notação de capítulos anteriores. Seja  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  um conjunto de acções (alternativas), de onde se pretende seleccionar uma. Seja  $T$  o conjunto de combinações aceitáveis de valores para os parâmetros. Designaremos por  $V(a_i, t)$  o valor (global) de uma acção  $a_i \in A$ , considerando uma combinação de valores de parâmetros  $t \in T$ :

$$V(a_i, t) = \sum_{j=1}^n k_j v_j(a_i).$$

Nesta expressão,  $v_j(a_i)$  designa a utilidade ou o valor (parcial) do seu desempenho segundo o  $j$ -ésimo critério, que é tanto maior quanto melhor for a acção nesse critério, e  $k_j$  representa o coeficiente de escala associado a essa função de valor parcial ( $j=1, \dots, n$ ).

Na maioria dos trabalhos que consultámos, a informação imprecisa refere-se apenas aos coeficientes de escala, que constituem afinal os parâmetros mais difíceis de obter com precisão. O mesmo assumimos no nosso trabalho, considerando que as combinações admissíveis  $t = k = (k_1, \dots, k_n)$  devem respeitar as restrições  $k_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) e  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ , acrescidas de algumas restrições adicionais

fornecidas pelos decisores. Essas restrições adicionais, que definem  $T$  em conjunto com as anteriores, podem incluir:

- intervalos (e.g.  $k_1 \in [0,10, 0,15]$ ), quando se consegue conceber um limite inferior e um limite superior para um coeficiente;
- uma ordenação dos coeficientes (e.g.  $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ ), frequentemente a primeira informação que se procura obter dos decisores (v. Keeney e Raiffa, 1976: 121);<sup>4</sup>
- limites a taxas de compensação (e.g.  $k_1 / k_2 \geq 1.5$ ), quando se consegue limitar inferior ou superiormente aqueles quocientes;

---

<sup>4</sup> Por exemplo, pede-se aos decisores para considerarem uma acção  $a_0$  tal  $v_j(a_0)=0$  ( $j=1, \dots, n$ ) e pergunta-se-lhes qual o critério que escolheriam para melhorar o desempenho daquela acção para o valor um da escala de valor parcial. Será esse o critério com maior coeficiente de escala. De seguida, perguntar-se-ia qual o segundo critério que escolheriam para melhorar, e assim sucessivamente. A ordenação dos coeficientes de escala constitui o input para o método SMARTER (Edwards e Barron, 1994).

- comparação do valor de um par de acções (e.g.  $V(a_1, t) \leq V(a_2, t)$ , que se transforma na restrição linear

$$\sum_{j=1}^n k_j (v_j(a_1) - v_j(a_2)) \leq 0;$$

- etc. (quaisquer restrições lineares).

Apesar de considerarmos como variáveis apenas os coeficientes de escala, a notação e o raciocínio que desenvolvemos são genéricos e extensíveis aos casos em que as características das acções ou a forma das funções de valor parcial (unicritério) são também variáveis.

Estabelecida esta notação, definem-se as noções de dominância absoluta ( $\Delta_A$ -dominância), de dominância comum ou de Bernoulli ( $\Delta$ -dominância), de acção óptima e de acção potencialmente óptima, conforme apresentadas no Capítulo III. Em particular, recordemos a definição do conjunto de combinações que tornam óptima uma dada acção  $a_x \in A$ :

$$Opt(a_x) = \{ t \in T : \forall a_y \in A \setminus \{a_x\}, V(a_x, t) \geq V(a_y, t) \}.$$

Estas definições surgem em muitos dos trabalhos sobre agregação aditiva com informação imprecisa, que apresentam os diferentes procedimentos que iremos expor.<sup>5</sup> Esses procedimentos assumem que o conjunto  $T$  de combinações admissíveis é um polítopo.<sup>6</sup> Porém, as mesmas ideias podem ser aplicadas, de forma trivial, ao caso em que  $T$  é um conjunto discreto ou, à custa de cálculos mais complexos, a um conjunto  $T$  qualquer.

Apresentaremos uma taxinomia original, que divide os procedimentos em quatro categorias, consoante a principal ideia em que se baseiam: os baseados no conceito de óptimo, os baseados em comparações entre pares de acções, os baseados na variabilidade dos resultados e os baseados em regras pessimistas ou outras regras de agregação simples. No contexto de um qualquer problema de decisão, podem usar-se vários destes procedimentos, uma vez que estes se complementam. Completaremos esta secção com uma breve menção a alguns programas informáticos desenvolvidos para apoiar a decisão nestes contextos, alguns dos quais englobam ideias de diferentes classes.

<sup>5</sup> Não é nossa intenção, porém, apresentar uma cronologia completa sobre este assunto, que poderá ser encontrada em Weber (1987), Athanassopoulos e Podinovski (1997) e Park e Kim (1997).

<sup>6</sup> Neste texto, designamos por polítopo um poliedro limitado, i.e. o conjunto das combinações convexas dos vértices de um poliedro.

## 2.2. Procedimentos baseados no conceito de óptimo

Se existisse uma acção  $a_i \in A$  tal que  $Opt(a_i) = T$ , i.e. óptima para todas as combinações em  $T$ , essa seria obviamente a acção a seleccionar. Todavia, não existe geralmente uma tal acção, a não ser numa fase em que o conjunto  $T$  das combinações admitidas seja já muito restrito. Logo, muitos dos procedimentos têm-se centrado nas acções potencialmente óptimas (recordemos que uma acção  $a_i$  é potencialmente óptima se  $Opt(a_i) \neq \emptyset$ ). Encontramos nesta classe procedimentos muito diversos.

Rios Insua e French (1991) propõem que os decisores comecem por escolher uma combinação de valores  $t^0 \in T$  para os parâmetros, encontrando a melhor acção que lhe corresponde,  $a_0$ . Só nessa altura se considera o facto de a informação ser imprecisa, efectuando-se uma análise de sensibilidade por forma a encontrar outras acções que possam ser confrontadas com  $a_0$ . Estas outras acções são aquelas, entre as potencialmente óptimas, “adjacentes” a  $a_0$ , i.e. as acções  $a_i \in A$  tais que  $Opt(a_i) \cap Opt(a_0) \neq \emptyset$ . Aqueles autores indicam como podem ser encontradas tais acções utilizando a programação matemática (eventualmente não-linear) ou resolvendo sistemas de equações lineares. No caso de se utilizar a programação matemática pode encontrar-se a acção potencialmente óptima adjacente a  $a_0$  que esteja mais próxima (considerando, por exemplo, uma distância euclidiana entre vectores de coeficientes de escala).

Segundo Rios Insua e French, procede-se a uma exploração interactiva do conjunto das acções potencialmente óptimas. Cabe aos decisores decidir em cada caso se a acção provisoriamente considerada a melhor,  $a_0$ , deve ser substituída por outra acção potencialmente óptima adjacente àquela. Esta forma de proceder não evita o esforço inicial da determinação de um valor exacto para cada parâmetro, nem evita que decisores dirijam prematuramente a sua atenção para o primeiro resultado que obtêm. Todavia, esta última crítica perde alguma relevância face à interactividade do procedimento proposto, fomentada pela utilização de um programa informático.<sup>7</sup>

Wolters e Mareschal (1995) apresentam um procedimento para ordenar todas as acções potencialmente óptimas, após encontrar um primeiro resultado com base numa combinação inicial  $t^0$ . A posição de cada acção  $a_i \in A$  nessa ordem é determinada pela “proximidade” entre a combinação  $t^0$  e uma outra combinação  $t^i$  que tornasse  $a_i$  óptima. Aqueles autores utilizam como medida da proximidade a função  $\sum_{j=1}^n w_j |t_j^i - t_j^0|$ , na qual os coeficientes de ponderação  $w_1, \dots, w_n$ , se distintos entre si, podem

ser utilizados para promover ou desencorajar uma maior variação de cada parâmetro (Wolters e Mareschal consideram como variáveis apenas os coeficientes de escala). Este procedimento, à semelhança do anterior, não evita o esforço da determinação de uma combinação inicial  $t^0$ , da qual depende irremediavelmente a ordenação das acções.

Na classe dos procedimentos baseados no conceito de óptimo incluem-se também aqueles que estudam os conjuntos de combinações correspondentes a acções potencialmente óptimas. Starr (1962) parece ter sido o primeiro a sugerir este tipo de procedimento, no contexto de decisões de escolha sob risco, face a informação imprecisa sobre as probabilidades de cada estado da natureza, tendo outros continuado o seu trabalho (v. Schneller e Sphicas, 1985).

O *domain criterion* de Starr consiste em considerar, para cada acção  $a_i \in A$ , o tamanho (volume) do domínio (conjunto convexo de combinações)  $Opt(a_i)$  que a torna óptima. Seguindo esse critério, já no contexto da agregação multicritério, Eiselt e Laporte (1992) sugerem uma partição do conjunto  $T$  de combinações admissíveis em domínios correspondentes a diferentes acções potencialmente óptimas. Estes autores consideram que o volume desses domínios (relativamente ao volume de  $T$ ) pode ser considerado uma indicação da “probabilidade” de a acção correspondente ser óptima.

O cálculo de volumes de polítopos pode ser moroso, pelo que Schneller e Sphicas (1985) sugerem uma aproximação ao critério de Starr: tomam como ponto de partida uma combinação  $t^0$  (um vector de valores para os coeficientes de escala), a que corresponde uma acção óptima  $a_0$ , e determinam o raio da maior hiperesfera, com centro em  $t^0$ , contida em  $Opt(a_x)$  (o domínio onde essa acção permanece óptima). Robinson e Soland (1997) sugerem outra aproximação: medir a estabilidade de uma acção  $a_x$  potencialmente óptima por um hiper-rectângulo contido em  $Opt(a_x)$ , através de um compromisso entre o seu perímetro, o comprimento da sua maior aresta e uma tolerância na definição de óptimo.

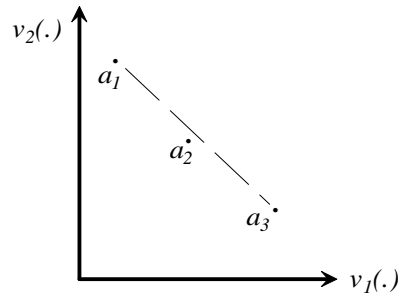
Estes procedimentos, quer os baseados em noções de distância quer os baseados na noção de volume, possuem a desvantagem de se cingirem a acções potencialmente óptimas. De facto, é fácil conceber situações em que algumas acções possam constituir um compromisso interessante entre critérios conflituosos, sem contudo serem potencialmente óptimas. A título de exemplo, a Figura V.1 apresenta um caso com dois critérios em que a acção  $a_2$  não é potencialmente óptima por ser dominada

---

<sup>7</sup> Para uma exposição mais detalhada v. Rios Insua (1990).



por combinações convexas das acções  $a_1$  e  $a_3$ . Todavia, em Robinson e Soland (1997) surge uma flexibilização da noção de óptimo e em Eiselt e Laporte (1992) são referidas outras maneiras de proceder (cf. Subsecção 2.5 *infra*).



**Figura V.I.** As acções  $a_1$  e  $a_3$  são potencialmente óptimas, enquanto a acção  $a_2$  não o é. Contudo, esta última pode constituir um compromisso interessante entre as duas primeiras.

### 2.3. Procedimentos baseados em relações binárias

Uma segunda classe de procedimentos baseia-se na definição de relações binárias entre pares de acções, como sucede nos métodos de prevalência. Em primeiro lugar, referiremos brevemente alguns em que os argumentos a favor de cada acção consistem na quantidade de combinações de  $T$  que a favorecem. Numa primeira fase, estes procedimentos determinam, para cada par ordenado de acções  $(a_x, a_y) \in A \times A$ , um valor que quantifique de algum modo a superioridade da primeira acção relativamente à segunda. O conjunto destes valores define uma relação binária difusa, que é posteriormente explorada, de modo a fornecer elementos de resposta ao problema de decisão subjacente.

Um destes procedimentos deve-se a Weber (1987), que define a “intensidade de preferência” de  $a_x \in A$  face a  $a_y \in A$  como a probabilidade de, escolhida uma combinação  $t \in T$  ao acaso,  $V(a_x, t)$  igualar ou exceder  $V(a_y, t)$ . Weber propõe que se explorem estes valores através de um ajustamento dos mesmos, que origine uma relação transitiva. Um outro procedimento é a *outweigh analysis* de Bana e Costa (1988), originalmente apresentada para o caso com três critérios. Nesta, determina-se um índice para cada par ordenado de acções  $(a_x, a_y) \in A \times A$ , igual ao volume (relativamente à totalidade de  $T$ ) do domínio de  $T$  onde  $V(a_x, t)$  iguala ou excede  $V(a_y, t)$ . Bana e Costa propõe a exploração desta relação através de diferentes limiares de corte. Este procedimento foi posteriormente alargado ao caso mais geral por Bana e Costa e Vincke (1995).

Uma ideia diferente consiste em interpretar a  $\Delta$ -dominância (ou uma relação mais fraca) como uma relação binária que pode ser explorada com o intuito de escolher uma acção ou obter uma ordenação das acções. Nesse contexto, Kirkwood e Sarin (1985) propõem a exploração da relação de  $\Delta$ -dominância para ordenar as acções, com base no número de acções que  $\Delta$ -domina cada uma. Park e Kim (1997) propõem outro procedimento, em que a  $\Delta$ -dominância é substituída pela “dominância fraca” de Kmietowicz e Pearman (1984)<sup>8</sup> e a relação resultante é explorada de uma maneira diferente. O algoritmo de exploração ordena as acções em classes de indiferença, por forma a que, se uma acção ficar na  $i$ -ésima melhor classe, então existirá uma acção na classe  $i-1$  que domina fracamente a primeira.

Os procedimentos baseados em relações binárias sobre o conjunto das acções conseguem ultrapassar a atracção (apetece-nos acrescentar “fatal”) pelo óptimo. Porém, a exploração dessas relações para apoiar a decisão pode não ser simples. Esta é uma área em que a já vasta literatura sobre métodos de prevalência (e.g. v. Roy e Bouyssou, 1993) contém muitas ideias que poderiam ser aplicadas neste contexto, inclusivamente a relações difusas.

#### 2.4. Variabilidade absoluta e relativa

Um procedimento natural, no espírito da análise de robustez, é o da determinação da variabilidade dos resultados em função da informação imprecisa, i.e. determinar a gama de variação de alguns resultados que é compatível com  $T$ . Analisando cada acção  $a_x \in A$ , independentemente das restantes, pode calcular-se o máximo e mínimo valor  $V(a_x, t)$ , sujeito a  $t \in T$ . Pode obter-se desta forma um conjunto de conclusões robustas (e.g. “o valor de  $a_x$  não é inferior a  $0,7$ ”), bem como informação sobre quais as acções mais afectadas pela imprecisão da informação (aquelas cujo valor global possua maior amplitude de variação).

Esta forma de proceder pode ser muito útil quando, na presença de um grande número de acções, se pretenda efectuar uma primeira triagem das acções mais interessantes. Se o problema contingente for a selecção da melhor acção, tal permite eliminar as acções cujo valor máximo seja inferior ao valor mínimo de uma outra acção (i.e. eliminar as acções absolutamente dominadas). A informação sobre a variabilidade do valor de cada acção pode ser ainda mais rica, conforme mostra o

---

<sup>8</sup> Segundo a definição proposta por estes autores, afirma-se que uma acção  $a_x$  domina fracamente uma acção  $a_y$  se a diferença de valores entre ambas, no caso mais favorável a  $a_x$ , for superior ou igual à

procedimento sugerido por Butler et al. (1997). Estes autores utilizam a simulação de Monte-Carlo para estimar não só a gama de variação do valor de cada acção, mas também diversos quantis, a média e o desvio padrão.

Uma ideia diferente é a de determinar a variabilidade da posição de cada acção na ordenação estabelecida pela função de valor aditiva. Neste caso, porém, já não se pode considerar cada alternativa independentemente das restantes. Kämpke (1996) considera o método UTA, no qual se tenta aproximar uma função valor aditiva a partir de julgamentos holísticos efectuados pelo decisor. A partir de  $T$ , o conjunto de combinações compatível com esses julgamentos, o UTA fornece a função de valor que minimiza determinada medida de erro (através da resolução de um problema linear). Kämpke considera a variabilidade de uma dada acção na ordenação de duas maneiras: considerando apenas os óptimos alternativos do problema linear (i.e. as diferentes funções de valor que correspondem ao erro mínimo) ou considerando também funções de valor correspondentes a soluções não óptimas. Kämpke utiliza programação inteira mista para encontrar a pior e a melhor posição na ordenação para cada acção, sujeita a  $t \in T$ .

Seja qual for a técnica escolhida, será necessário recorrer a outros procedimentos sempre que existam muitas acções interessantes cujas gamas de variação se sobreponham significativamente. Os procedimentos baseados na variabilidade serão sobretudo adequados para efectuar uma triagem inicial das acções, com vista a reduzir o seu número, antes de recorrer a procedimentos de outras classes.

## 2.5. Regras pessimistas e regras de agregação

Uma forma de conseguir sempre ordenar as acções consiste em agregar de algum modo os valores globais  $V(a_x, t)$  de cada acção  $a_x \in A$  para as várias combinações  $t \in T$  ou em seguir alguma das regras pessimistas clássicas: max-min e min-max *regret*.

No trabalho já referido de Eiselt e Laporte (1992), sugere-se considerar, para cada acção  $a_x \in A$ , o seu valor global mínimo ou, em alternativa, o seu valor global médio em  $T$ . O procedimento, também já referido, de Butler et al. (1997) permite estimar os valores mínimo e médio de cada acção através da simulação de Monte-Carlo.

---

diferença de valores no caso mais favorável a  $a_x$ , i.e.  $\max\{V(a_x, t) - V(a_y, t): t \in T\} \geq \max\{V(a_y, t) - V(a_x, t): t \in T\}$ .

A ideia da comparação das acções com base no seu valor mínimo provém provavelmente da regra max-min para a escolha, num contexto de risco, de uma acção cujo valor varia consoante o cenário futuro que vier a ocorrer. Nesse contexto, a regra max-min (escolher a acção com maior valor no seu pior cenário) e a regra min-max *regret* (escolher a acção que minimiza a maior diferença, considerando todos os cenários, à acção óptima de cada cenário), são regras pessimistas bem conhecidas. Kouvelis e Yu (1997) sugerem a adopção destas regras no contexto da optimização discreta (problemas de caminho mais curto, sequenciamento, etc.). Estes autores defendem que estas regras são especialmente adequadas a situações de decisão não-repetitivas ou a situações em que a decisão é avaliada *ex post* pelas suas consequências. Naturalmente, também se podem utilizar estas regras no contexto da agregação aditiva com informação imprecisa, embora as razões que mais justificam a utilização destes critérios (associadas a uma perspectiva pessimista) percam alguma força quando  $T$  se refere apenas aos coeficientes de escala, em vez de se referir a aspectos de incerteza relativa ao futuro.

Estas regras (em particular as max-min e min-max *regret*) são intuitivamente apelativas e permitem efectuar uma ordenação das acções. Todavia, face à quantidade de aspectos sobre o desempenho das acções que são ignorados ao utilizar cada uma delas, parece-nos que não devem ser utilizadas isoladamente.

## 2.6. Programas informáticos

Mencionámos já na Subsecção 2.2 o programa informático desenvolvido por Rios-Insua (1990) para apoiar a decisão com base na função de valor aditiva, no caso de informação imprecisa. Apresentaremos agora brevemente outros programas, mais recentes, desenvolvidos com a mesma finalidade.

Antunes e Clímaco (1993) propõem uma ferramenta computacional interactiva para o ambiente *Macintosh*, com um interface gráfico que permite visualizar o domínio associado a cada acção potencialmente óptima, para problemas com dois ou três critérios. Para além de mostrar esses domínios, aquela ferramenta também permite visualizar uma partição de  $T$  em domínios associados a comparações par-a-par ou até em domínios associados a ordenações completas.

Para o ambiente *Microsoft Windows* encontramos dois outros programas. A ferramenta PROBE (*Preference ROBustness Evaluation*), desenvolvida sob a supervisão de Bana e Costa (CISED, 1998), constrói uma tabela que mostra quais as acções  $\Delta$ -dominadas, através do uso de símbolos e de

cores. Este software também determina o intervalo de valor global para cada alternativa compatível com o conjunto  $T$  de combinações admissíveis. Outra característica que importa mencionar é a possibilidade de estruturar os critérios numa hierarquia. A ferramenta PROBE aceita, como restrições a  $T$ , apenas uma ordenação dos valores dos coeficientes de escala.<sup>9</sup>

A ferramenta DAM (*Decision Analysis Module*) de Podinovski (1999) assinala as acções  $\Delta$ -dominadas, de forma idêntica ao PROBE, e mostra quais são as acções potencialmente óptimas. A sua principal limitação consiste em aceitar, como restrições a  $T$ , apenas intervalos (limites inferiores e superiores) para os valores dos coeficientes de escala.

### 3. Metodologia

---

#### 3.1. Recurso a múltiplos procedimentos

Da revisão da literatura realizada conclui-se que nenhum dos procedimentos propostos está isento de desvantagens, não sendo possível identificar um que seja claramente superior aos restantes. Por esse motivo, acreditamos que se devem utilizar vários destes procedimentos, ou versões mais flexíveis dos mesmos, no contexto de um determinado problema de selecção.

A variedade de procedimentos que pode ser utilizada apenas terá de diminuir face à eventual emergência de dois factores: o número de acções e o tempo necessário para os cálculos. Estes dois factores estarão muitas vezes interligados: se houver milhares de acções, então alguns procedimentos podem ser demasiado morosos para fomentar uma interacção entre estes e os decisores. Porém, a análise de um grande número de acções através de determinados procedimentos pode, por si só, ser também comprometida pela quantidade de números a fornecer aos decisores, que pode tornar-se ininteligível (e.g. uma lista com centenas de valores). Quando o número de acções for de duas ou três dezenas, parece-nos que este começa a ser grande. Contudo, tal dependerá sempre da maior ou da menor tolerância dos decisores face aos factores aqui referidos.

---

<sup>9</sup> Encontra-se em desenvolvimento uma nova versão do PROBE, que aceita também como restrições limites para os valores dos coeficientes de escala.

O ideal será utilizar uma ferramenta computacional que disponibilize uma multiplicidade de técnicas para se adaptar às diferentes situações de decisão, às diferentes personalidades dos decisores e à evolução do processo de decisão. A existência de uma ferramenta computacional que implemente vários procedimentos, conferindo-lhes igual estatuto, pode fomentar uma análise do problema a diferentes níveis de detalhe e através de múltiplas perspectivas.

O nosso objectivo é o de auxiliar os decisores na escolha de uma acção, face a informação imprecisa sobre os coeficientes de escala do modelo de agregação aditivo. Estamos, portanto, a excluir as situações em que o propósito do apoio à decisão é ordenar as acções (um problema mais difícil) ou afectar as acções a categorias pré-definidas (um problema mais fácil se as categorias forem definidas à custa de níveis de referência para a função de valor). Supomos aqui que os desempenhos das acções e a forma das funções de valor local ou estão fixas, ou podem ser fixadas antes dos coeficientes de escala (o que não é muito restritivo).

O processo de decisão que idealizamos passa por várias fases. À medida que o processo avança, o número de acções vai sendo progressivamente reduzido, enquanto a variedade de ferramentas que pode ser utilizada na análise vai aumentando. Ao mesmo tempo, faculta-se aos decisores um conjunto de resultados que pode aumentar o seu discernimento sobre a situação em causa, ajudando-os a fornecer informação adicional. Começaremos por discutir como analisar um grande número de acções, discutindo posteriormente a análise de um número pequeno de acções e, por fim, o caso particular de se considerarem apenas três critérios. Na Secção 4 apresentaremos um programa informático que implementa vários procedimentos, adaptando-se aos três casos que expomos de seguida.

### **3.2. Análise de um grande número de acções**

Perante um número de acções muito grande  $m$  (possivelmente centenas), será aconselhável analisar cada uma individualmente, evitando as comparações par-a-par, cujo número cresce com o quadrado de  $m$ . Sugerimos, por esse motivo, basear a análise no cálculo da gama de variação do valor global de cada acção, compatível com  $T$ . Os cálculos podem ser efectuados através da programação linear ou por amostragem, podendo-se determinar ainda outros resultados como quantis, médias ou variâncias para o valor de cada acção.

A gama de variação do valor de cada acção permite estabelecer conclusões absolutas robustas, como “a acção  $a_i$  nunca vale menos do que  $0,6$ ” ou “a acção  $a_i$  nunca vale mais do que  $0,7$ ”. Face a

conclusões deste tipo, é pelo menos possível determinar (e excluir) as acções que sejam absolutamente dominadas. Outros critérios possíveis para diminuir o número de acções em análise incluem:

- a eliminação de acções potencialmente inaceitáveis, no sentido em que atingem um valor demasiado baixo (segundo a opinião dos decisores) em certas circunstâncias, conforme a regra max-min;
- a eliminação de acções demasiado susceptíveis de atingir um valor insatisfatório, o que se detecta através da análise dos seus quantis;
- a eliminação de acções que possuem um valor médio inferior a outra acção e simultaneamente uma variância superior, à semelhança do critério frequentemente seguido na análise de investimentos.

A determinação da gama de variação do valor das acções é igualmente útil para identificar quais as acções que mais são afectadas pelo facto de a informação sobre os parâmetros ser imprecisa. Indubitavelmente, aquelas acções cuja amplitude de variação seja maior serão aquelas cujo comportamento deverá ser analisado com mais cuidado para decidir se são ou não interessantes. Por outro lado, uma amplitude de variação grande para o valor de uma determinada acção pode dever-se a combinações de valores para os coeficientes de escala muito díspares, o que pode suscitar nos decisores o desejo de incorporar novas restrições na delimitação de  $T$ .

Os decisores poderão por vezes hesitar face ao conflito entre o desejo de prosseguir a análise com um menor número de acções e o receio de excluir uma acção interessante. Por esse motivo, a ferramenta computacional que apresentaremos na Secção 4 permite a exclusão provisória de acções, que poderão todavia vir a ser reexaminadas numa fase posterior da análise.

### 3.3. Análise de um número de acções não muito grande

Perante um número não muito grande de acções, o tipo de análise referido na Subsecção 3.2 continua a poder ser aplicado. Contudo, agora, dado o menor número de acções, torna-se possível enveredar também por procedimentos que requerem comparações entre estas.

Como procedimento fundamental propomos a construção e análise de uma matriz  $m \times m$  de comparações par-a-par, que designaremos por *matriz de confrontação* e que representaremos por  $M=(m_{ij})$ . Para cada par ordenado de acções  $(a_i, a_j) \in AXA$ ,  $m_{ij}$  representará a maior diferença de valor entre  $a_i$  e  $a_j$ , atendendo às restrições que definem  $T$ . Mais precisamente,

$$m_{ij} = \max \{V(a_i, t) - V(a_j, t) : t \in T\} \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

A partir da matriz  $M$ , que indica as diferenças de valor extremas na confrontação de pares de acções, será possível extrair diversas conclusões robustas:

- conclusões binárias como “a acção  $a_i$  nunca perde no confronto com  $a_j$  por uma diferença superior a  $m_{ji}$ ”;
- conclusões unárias como “a acção  $a_i$  nunca perde no confronto com outra acção por uma diferença superior a  $\max\{m_{ji} : j=1, \dots, m; j \neq i\}$ ”.

Notemos que, caso se pretenda seguir a regra min-max *regret*, pode afirmar-se que a maior perda de oportunidade (i.e. o máximo “arrependimento”) associada à escolha de cada acção  $a_i$  coincide com o maior elemento da coluna de  $M$  correspondente a essa acção (a  $i$ -ésima coluna), de acordo com a seguinte proposição:

**Proposição V.1.** Seja  $R_{\max}(a_i)$  a perda de oportunidade máxima (máximo *regret*) associada a uma acção  $a_i \in A$ ,

$$R_{\max}(a_i) = \max_{t \in T} \left\{ \left( \max_{j \neq i} V(a_j, t) \right) - V(a_i, t) \right\},$$

e seja  $C_{\max}(a_i)$  o maior elemento da coluna de  $M$  correspondente a essa acção (a  $i$ -ésima coluna),

$$C_{\max}(a_i) = \max \{m_{ji} : j=1, \dots, m; j \neq i\}.$$

Então,

$$C_{\max}(a_i) = R_{\max}(a_i).$$

*Prova:*

Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} R_{\max}(a_i) &= \max_{t \in T} \left\{ \left( \max_{j \neq i} V(a_j, t) \right) - V(a_i, t) \right\} = \max_{t \in T} \max_{j \neq i} \{V(a_j, t) - V(a_i, t)\} = \\ &= \max_{j \neq i} \max_{t \in T} \{V(a_j, t) - V(a_i, t)\} = \max_{j \neq i} m_{ji} = C_{\max}(a_i). \quad \square \end{aligned}$$

Assinalemos também que, determinada a matriz  $M$ , é possível descobrir facilmente se uma acção é ou não  $\Delta$ -dominada por outra:

$$a_i \text{ é } \Delta\text{-dominada por } a_j \Leftrightarrow m_{ij} \leq 0 \text{ e } m_{ji} > 0.$$

No contexto de uma problemática de selecção da melhor acção, é então lícito excluir todas as que sejam  $\Delta$ -dominadas. Acaso os decisores verificarem que, mesmo assim, subsistem demasiadas acções,



propomos uma flexibilização da relação de  $\Delta$ -dominância, por forma a acomodar uma tolerância  $\varepsilon$ , definindo uma relação de  $\Delta$ -quasidominância:

$$a_i \text{ é } \Delta\text{-quasidominada por } a_j \Leftrightarrow a_i \text{ é } \Delta\text{-dominada por } a_j \text{ (} m_{ij} \leq \varepsilon \text{ e } m_{ji} > \varepsilon \text{)}.$$

Esta noção generaliza a de  $\Delta$ -dominância, coincidindo com esta quando  $\varepsilon=0$ . Nalguns casos, os decisores podem aceitar excluir uma acção que seja  $\Delta$ -quasidominada, desde que  $\varepsilon$  seja suficientemente pequeno, e em especial se  $m_{ji}$  for significativamente maior do que  $\varepsilon$ .

Uma acção  $a_i$  será óptima se  $\max \{m_{ji} : j=1, \dots, m; j \neq i\}$  for negativo ou nulo, uma situação facilmente detectável após determinar  $M$ . Porém, raramente se verificará tal ocorrência, enquanto o volume de  $T$  não permitir conhecer os valores dos parâmetros com alguma precisão. É mais frequente suceder que não exista uma acção óptima, mas exista uma (ou até mais do que uma) acção que se destaque por nunca perder por uma diferença muito grande, qualquer que seja a sua oponente. O mesmo é dizer, pode existir uma acção  $a_i$  tal que  $\max \{m_{ji} : j=1, \dots, m; j \neq i\}$  seja um valor pequeno e positivo  $\varepsilon$ . Designaremos tais acções por *quasi-óptimas*:

$$a_i \text{ é quasi-óptima } \Leftrightarrow \max \{m_{ji} : j=1, \dots, m; j \neq i\} \leq \varepsilon.$$

Esta noção generaliza a de óptimo, coincidindo com esta quando  $\varepsilon=0$ . Analisando a matriz  $M$ , é imediato verificar se existem acções quasi-óptimas, após fixar o valor de  $\varepsilon$ , ou, em alternativa, conhecer qual o menor valor que se teria de aceitar para  $\varepsilon$  por forma a que existisse uma acção quasi-óptima. Esta última seria a melhor escolha segundo a regra min-max *regret* (de acordo com a Proposição V.1).

Acreditamos que a análise da matriz  $M$  utilizando os conceitos, acima apresentados, de  $\Delta$ -quasidominância e de quasi-óptimo, permitirá aos decisores identificar um conjunto pequeno de acções a estudar mais pormenorizadamente. Esse estudo detalhado poderá incluir o cálculo dos volumes dos domínios de  $T$  onde as acções são óptimas ou quasi-óptimas, a identificação das restrições de  $T$  que estão activas nas soluções óptimas de alguns dos programas matemáticos resolvidos (aquelas restrições que, a ser relaxadas ou reforçadas, alterariam o valor óptimo obtido) e a progressiva redefinição do conjunto  $T$ . Enfim, será da combinação dos resultados provenientes das técnicas aqui expostas que se formará o conjunto de convicções que conduzirá os decisores na indicação de nova informação e na escolha da acção que preferem.

**Nota sobre a computação da matriz  $M$ .**

Determinar o valor de todos os elementos de  $M$  requer a resolução de  $m(m-1)$  programas lineares (PLs). Por esse motivo, este procedimento pode não se tornar praticável (i.e. suficientemente expedito) para  $m$  grande, caso se pretenda interagir com os decisores em tempo real. Nesta nota referimos alguns aspectos que podem tornar a computação mais rápida, o que pode ser importante para saber a partir de que número é que  $m$  se considera grande.

Em primeiro lugar, notemos que, em termos de complexidade computacional, encontrar uma solução admissível num PL pode ser tão difícil (ou tão fácil) como encontrar a solução óptima a partir dessa solução admissível. Logo, é de esperar uma significativa redução do tempo de computação, apenas por iniciar todos os problemas (excepto o primeiro) a partir de uma solução admissível já determinada. Tal é possível, uma vez que apenas as funções objectivo variam de problema para problema, mas as restrições não se alteram. Em particular, podemos iniciar a optimização de uma nova função objectivo no ponto em que se encontrou o óptimo da função anterior. No software *VIP Analysis* (v. Secção 4) seguimos esta via com resultados bastante satisfatórios nos problemas que testámos (tempos de execução praticamente instantâneos), pelo que não chegámos, sequer, a experimentar as restantes vias propostas nesta nota. Porventura, algum cuidado na escolha das sucessivas funções objectivo, por forma a que aquela a resolver em dada altura seja próxima da anterior (em termos da orientação dos gradientes), melhoraria ainda mais os resultados. Outra alternativa, que assegura que não se visita cada vértice mais do que uma vez, embora à custa de *overheads* adicionais, consiste em pesquisar os vértices do polítopo  $T$  segundo determinada estratégia (largura-primeiro ou profundidade-primeiro), testando em cada um quais as funções objectivo que neste são óptimas. Esta alternativa será de aconselhar sobretudo quando o número de problemas a resolver for grande e o número de vértices de  $T$  for pequeno.

Em segundo lugar, assinalemos que no contexto de seleccionar uma acção, o número de PLs a resolver pode ser reduzido quando existam acções  $\Delta$ -dominadas. Assim que se detecte que uma acção é  $\Delta$ -dominada, não mais será necessário considerar os confrontos em que esta intervenha. Pode mesmo ser possível ordenar os PLs a resolver, recorrendo à informação disponível (e.g. gamas de variação do valor global), com o intuito de aumentar as probabilidades de se detectarem acções  $\Delta$ -dominadas o mais cedo possível.

Em terceiro lugar, podemos sublinhar o potencial de redução dos tempos de execução oferecido pelos computadores paralelos, onde os PLs a resolver podem ser distribuídos pelos processadores disponíveis. Nesse caso, cada processador poderia processar funções objectivo “vizinhas” (em termos da orientação dos gradientes) e explorar esse facto. Mais ainda, se os processadores comunicarem uns aos outros quais as acções que são  $\Delta$ -dominadas, poder-se-á diminuir o número de PLs a resolver, conforme assinalado acima, e até reduzir os tempos de execução numa proporção superior ao número de processadores envolvido nos cálculos.

### 3.4. O caso particular com três critérios

No caso de existirem apenas três critérios ( $m = 3$ ) torna-se possível representar graficamente o domínio de variação dos coeficientes de escala, projectando no plano o simplex definido pelas restrições

$k_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) e  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ , à semelhança do proposto por Antunes e Clímaco em vários trabalhos. Em

particular, Antunes e Clímaco (1993) sugerem a representação gráfica da partição daquele simplex em domínios associados a diferentes acções óptimas. O software que estes autores propõem permite ainda visualizar o domínio onde uma dada acção é melhor que uma outra (à escolha do utilizador) ou ainda o conjunto de combinações conducente a determinada ordenação das acções. Este tipo de procedimento possui a vantagem de facultar uma representação gráfica dos domínios, o que é porventura tão importante como conhecer a sua dimensão. Esta representação gráfica pode também, como argumentam aqueles autores, constituir uma importante ferramenta num processo de ensino/aprendizagem. Naturalmente, se o número de critérios for de apenas dois, o mesmo tipo de resultados pode continuar a ser apresentado, embora a representação do simplex passe a ser um segmento de recta, em lugar de um triângulo.

Para o caso particular com três critérios propomos a representação gráfica de  $T$ , na qual se podem representar também os domínios onde cada acção é óptima ou quasi-óptima (se os decisores aceitarem uma tolerância  $\varepsilon$ ). Decerto, será interessante e formativo (seja na análise de uma situação real, seja num contexto de ensino/aprendizagem) visualizar a forma como o domínio onde uma acção é quasi-óptima se alarga à medida que o valor da tolerância aumenta. Para além disso, não se está a excluir nenhuma acção da análise, porquanto qualquer acção pode ser quasi-óptima para um valor de  $\varepsilon$  suficientemente grande.

Existe, porém, um preço a pagar pela flexibilidade introduzida pelo conceito de quasi-óptimo. Trata-se da impraticabilidade de mostrar em simultâneo, sobre a representação gráfica de  $T$ , os domínios onde as múltiplas acções são quasi-óptimas, dado que estes inevitavelmente se sobrepõem. Por essa razão, a ferramenta computacional que desenvolvemos apresenta duas representações de  $T$ , permitindo comparar par-a-par os domínios onde as acções são quasi-óptimas, mostrando para cada par o segmento de recta que divide  $T$  em duas partes, uma onde a primeira acção é melhor do que a segunda e outra onde acontece o contrário (salvo se uma das acções for  $\Delta$ -dominada pela outra, caso em que esse o segmento de recta deixa de ter interesse). Trata-se de uma opção que cinge a análise aos casos em que se pretendam confrontar acções em pequeno número, dado que se observam apenas dois domínios de cada vez.

Apesar de serem inúmeras as situações de decisão em que apenas intervêm três critérios, haverá muitas em que o número de critérios é superior. Todavia, mesmo nessas situações, as análises propostas nesta subsecção podem ser úteis. Em primeiro lugar, notemos que uma situação pode ter muitos critérios, mas apenas três cuja importância é mais difícil de fixar. Em segundo lugar, as análises podem usar-se em situações em que exista uma estrutura arborescente de critérios e sub-critérios, no que respeita aos nós dessa árvore com três ou menos filhos. Não menos importante é o facto de cada restrição de igualdade (e.g. fixar a taxa de compensação entre dois critérios ou indicar que duas acções possuem o mesmo valor global) retirar uma dimensão a  $T$ . Na realidade, o tipo de análise descrito para o caso com três critérios pode ser aplicado sempre que o número de critérios menos o número de restrições de igualdade (incluindo  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ ) não exceda dois. Por fim, resta ainda a possibilidade de sectionar ou projectar um espaço de dimensão maior no plano, seja fixando de cada vez um subconjunto dos coeficientes de escala (à semelhança do proposto por Alves et al., 1997, para a programação linear multi-objectivo), seja efectuando uma análise dos componentes principais dos desempenhos das acções em três factores explicativos que tenham significado para os decisores.

## 4. O programa *VIP Analysis*

---

Construímos a ferramenta computacional *VIP Analysis* para facilitar aos seus utilizadores a adopção de múltiplos procedimentos sugeridos na Secção 3, no contexto da selecção de uma acção face a informação imprecisa, considerando como variáveis os coeficientes de escala.<sup>10</sup> Trata-se de um software não-comercial que corre no ambiente *Microsoft Windows 95/98*, utilizando as capacidades gráficas e cores dos computadores modernos. Os utilizadores, quiçá os próprios decisores, encontrarão numa única ferramenta vários procedimentos, evitando ter de recorrer a múltiplos programas para esse fim. Através da oferta de múltiplos procedimentos, aos quais é conferido um estatuto idêntico, aquele software fomenta uma análise da situação de decisão sob diferentes perspectivas e a diferentes níveis de detalhe. O seu propósito é permitir que os decisores aumentem o seu discernimento acerca da situação, a fim de que possam progredir o mais possível no processo de decisão sem indicar valores precisos para todos os parâmetros.

De entre os procedimentos indicados na Secção 3, o *VIP Analysis* oferece apoio para os seguintes:

- análise de um grande número de acções
  - cálculo da gama de variação do valor global de cada acção compatível com um polítopo  $T$  (admitindo quaisquer restrições lineares), utilizando programação linear;
  - acesso aos valores dos coeficientes de escala conducentes ao melhor ou ao pior caso para cada acção, bem como à lista das restrições de desigualdade cuja folga se anula para esses valores;
  - identificação das acções absolutamente dominadas;
  - exclusão provisória das acções que possam atingir um valor demasiado baixo (indicado pelos decisores), conforme a regra max-min.
- análise de um número de acções não muito grande
  - cálculo da matriz de confrontação  $M$ , através da resolução de um programa linear por cada elemento  $m_{ij}$ ,

---

<sup>10</sup> A designação *VIP* constitui uma abreviatura de *Variable Interdependent Parameters*, sublinhando que trabalha com parâmetros variáveis, cuja variação é geralmente interdependente, dadas as restrições que são indicadas pelos decisores.

- acesso aos valores dos coeficientes de escala conducentes a cada valor  $m_{ij}$ , bem como à lista das restrições de desigualdade cuja folga se anula para esses valores;
  - cálculo da máxima perda de oportunidade (*regret*) associada à escolha de cada acção e possibilidade de excluir provisoriamente as acções para as quais esse valor seja demasiado alto (segundo os decisores), conforme a regra min-max *regret*;
  - identificação das acções  $\Delta$ -dominadas e  $\Delta$ -quasidominadas (atendendo a uma tolerância  $\varepsilon$ ) e possibilidade de as excluir provisoriamente;
  - identificação das acções quasi-óptimas (atendendo a uma tolerância  $\varepsilon$ ).
- o caso particular com (dois ou) três critérios
    - representação gráfica de  $T$ , conjuntamente com os domínios onde duas acções seleccionadas são óptimas ou quasi-óptimas (face a uma tolerância  $\varepsilon$ ) e uma linha que divide  $T$  em duas partes, uma onde a primeira acção é melhor do que a segunda e outra onde acontece o contrário;
    - acesso aos valores dos coeficientes de escala correspondentes a qualquer ponto da representação gráfica de  $T$  seleccionado utilizando o rato, bem como a indicação de qual a melhor acção para essa combinação de valores;
    - possibilidade de visualizar a forma como o domínio onde uma acção é quasi-óptima se altera, em tempo real, à medida que o valor da tolerância aumenta ou diminui;
    - cálculo dos volumes relativos (em percentagem do volume de  $T$ ) dos domínios onde as acções são óptimas ou quasi-óptimas;
    - possibilidade de utilizar estes resultados mesmo em casos com mais de três critérios, desde que número de critérios menos o número de restrições de igualdade não exceda dois.

O programa permite ainda determinar um valor exacto para cada acção, logo que se estabeleçam valores precisos para os coeficientes de escala. Sempre que uma acção é provisoriamente excluída, deixa de intervir nos cálculos e de surgir nos resultados, mas permanece na lista das acções, identificada como inactiva. Pode, por esse motivo, voltar a estar activa se este for o desejo do utilizador. Pode também ser definitivamente apagada.

## 5. Exemplos ilustrativos

---

Começaremos por exemplificar a metodologia aqui proposta e a utilização da ferramenta *VIP Analysis* seguindo uma análise efectuada por Keeney e Nair (1977), tal como descrita por Roy e Bouyssou (1993: 543-572). À semelhança de Bana e Costa (1992), também utilizaremos os mesmos dados num contexto de agregação aditiva, apesar de o estudo original ter sido efectuada com um modelo de agregação multiplicativo.<sup>11</sup> O já clássico estudo efectuada por Keeney e Nair em nome da WPPSS (Washington Public Power Supply System) analisa o problema de escolher uma localização para uma central nuclear, de entre nove sítios possíveis, que designaremos por  $a_1$  a  $a_9$ . A avaliação desses sítios (as acções potenciais) foi efectuada considerando seis critérios:

- o primeiro avalia o efeito na saúde humana em condições normais e em caso de acidente;
- o segundo avalia o efeito sobre a população de salmões, causado pelo aquecimento das águas dos rios;
- o terceiro avalia todo o efeito na restante flora e fauna, exceptuando o salmão;
- o quarto avalia o efeito sobre o equilíbrio socio-económico de cada local, durante os trabalhos de construção da central;
- o quinto avalia a perturbação na estética paisagística acarretada pelas linhas de alta tensão;
- o sexto avalia os custos de investimento e exploração.

Por não serem relevantes para o nosso propósito, omitiremos os detalhes sobre o processo de avaliar cada acção em cada critério, apresentando apenas os valores finais  $v_j(a_i)$  ( $i=1,\dots,9; j=1,\dots,6$ ) (v. Figura V.2, que ilustra o programa *VIP Analysis*).

---

<sup>11</sup> Segundo estudos de simulação efectuada por Stewart (1995), a aproximação de um modelo multiplicativo por um aditivo é geralmente boa. O mesmo fora já afirmado por Edwards et al. (1988).

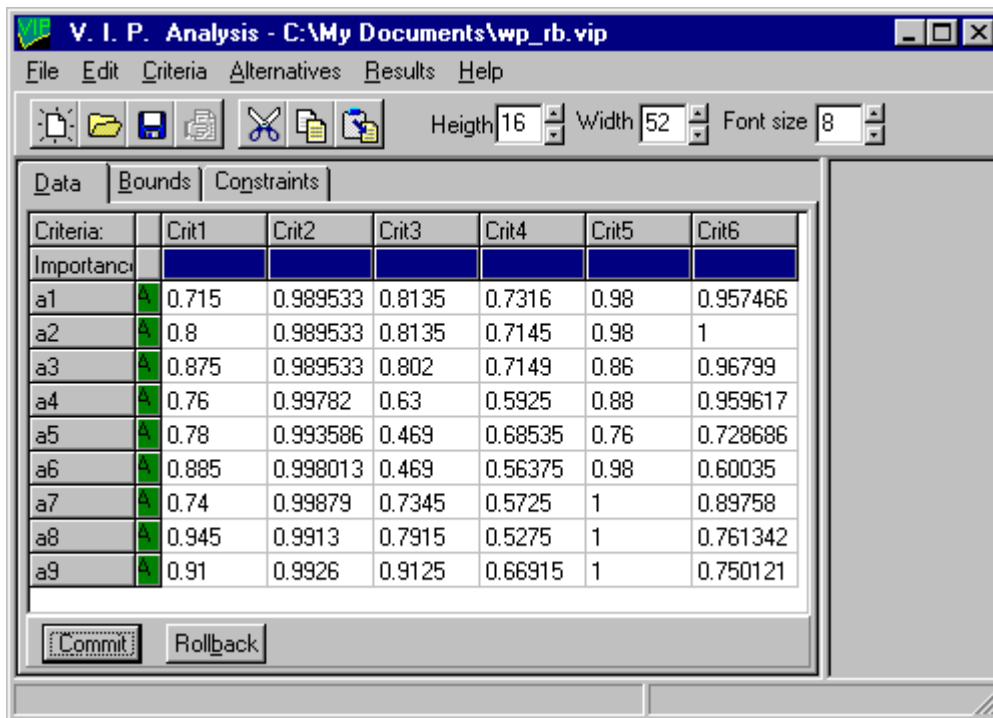


Figura V.2. Avaliação das acções de Keeney e Nair nos vários critérios.

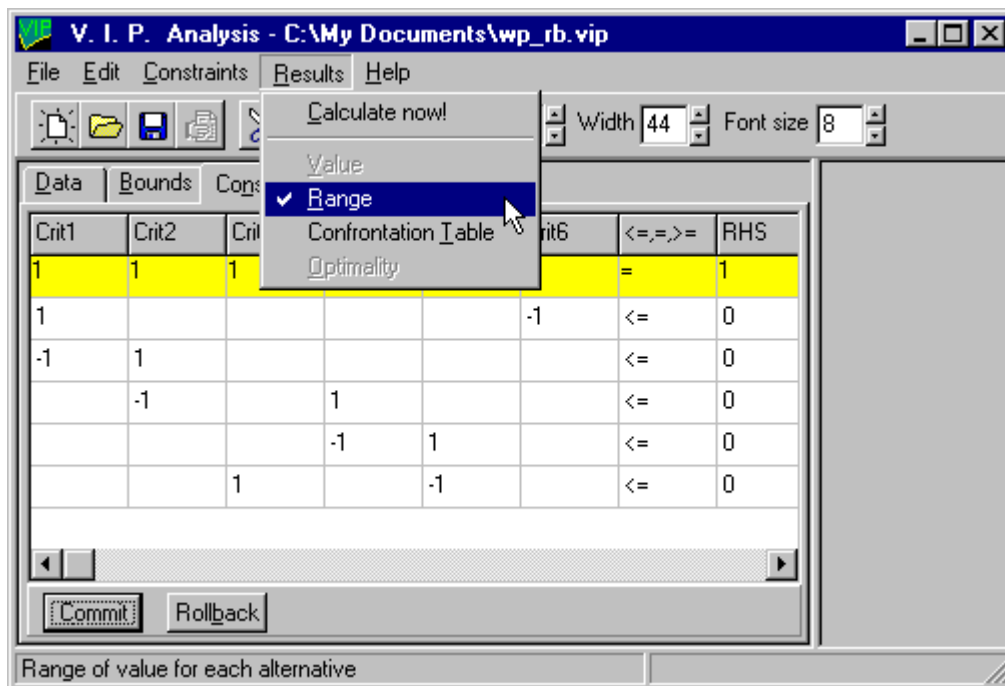


Figura V.3. Restrições que definem uma ordenação dos coeficientes de escala.

No estudo original, os analistas começaram por colocar questões do tipo “considere uma acção fictícia com a pior avaliação possível em cada critério; se tivesse a oportunidade de melhorar uma das



avaliações para o seu melhor nível, que critério escolheria?”. Das respostas que obtiveram inferiram a seguinte ordenação dos valores dos coeficientes de escala:

$$k_6 > k_1 > k_2 > k_4 > k_5 > k_3.$$

Antes de prosseguirmos a descrição do estudo de Keeney e Nair, vejamos desde já quais as conclusões robustas que podem ser descobertas a partir desta informação apenas, utilizando o *VIP Analysis* (a Figura V.3, mostra a forma genérica de introdução de restrições lineares naquele software<sup>12</sup>). Para início da análise, determinámos a gama de valor global para cada acção compatível com aquelas restrições. Os resultados, apresentados na Figura V.4, mostram que as acções  $a_2$  e  $a_3$  são as melhores segundo a regra max-min. Na mesma figura exemplifica-se como eliminar provisoriamente as acções que possam atingir um valor considerado baixo, naquele caso de  $0,8$ . As acções  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $a_8$  e  $a_9$  são por conseguinte marcadas como inactivas, o que significa que não serão consideradas nos cálculos efectuados a seguir, embora possam vir a ser reactivadas mais tarde.

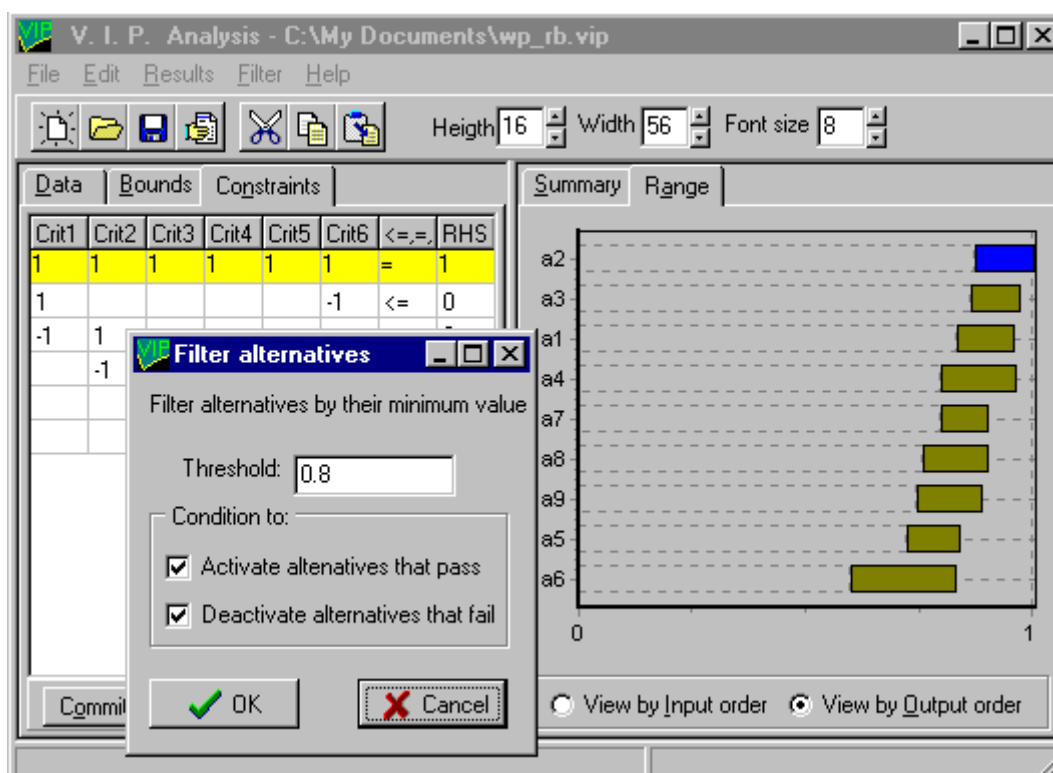


Figura V.4. Filtragem baseada no valor mínimo que cada acção pode atingir.

<sup>12</sup> Note-se que consideramos as desigualdades de forma não estrita nestes testes. Ao afirmar-se, por exemplo, que  $k_6 > k_1$ , admitimos  $k_6 \geq k_1$ . Obviamente, poderíamos estipular uma diferença mínima e colocar, por exemplo,  $k_6 \geq k_1 + 0,001$ , dado que o programa aceita quaisquer restrições lineares.

O passo seguinte na nossa análise consistiu em determinar a matriz de confrontação,  $M$ , referente ao conjunto das acções remanescentes. De acordo com a Proposição V.1, a partir daquela matriz é imediato determinar a máxima perda de oportunidade associada à escolha de cada acção. O programa *VIP Analysis* pode então mostrar-nos uma lista das acções, ordenada pela regra min-max *regret* (Figura V.5). De acordo com essa regra, as acções  $a_2$  e  $a_3$  são novamente as melhores. Aliás, essas acções são as únicas que não são  $\Delta$ -dominadas, conforme se pode verificar no écran do *VIP Analysis* que mostra a matriz de confrontação (Figura V.6). No écran da Figura V.6, os elementos da matriz surgem com uma cor diferente sempre que ocorra uma situação de  $\Delta$ -dominância (a acção na linha correspondente é  $\Delta$ -dominada pela acção da coluna correspondente):  $a_1$ ,  $a_4$  e  $a_7$  são  $\Delta$ -dominadas por  $a_2$  e  $a_3$ ;  $a_1 \Delta a_7$ . Esta figura ilustra ainda como se pode aceder aos valores dos coeficientes de escala conducentes a cada valor  $m_{ij}$ , bem como à lista das restrições de desigualdade cuja folga se anula para esses valores.

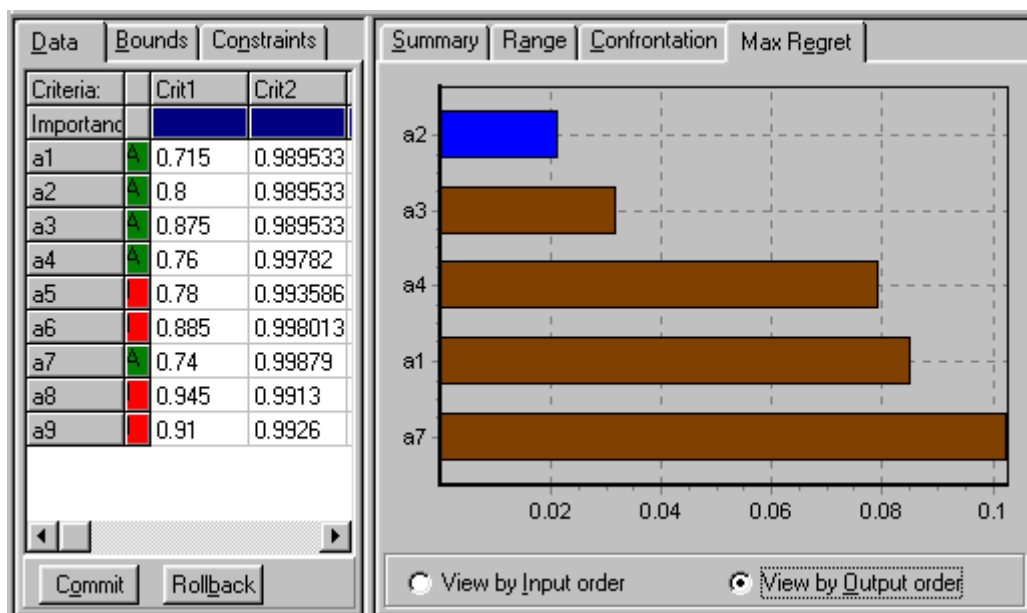


Figura V.5. Ordenação das acções pelo máximo *regret* associado à escolha de cada uma

Data							Constraints							
Crit1	Crit2	Crit3	Crit4	Crit5	Crit6	<=,=	RHS	Confrontation						
1	1	1	1	1	1	=	1	a1	a2	a3	a4	a7		
1					-1	<=	0	a1	-0.018	-0.004	0.061	0.06		
-1	1					<=	0	a2	0.064		0.032	0.08	0.102	
	-1		1			<=	0	a3	0.085	0.021		0.065	0.103	
			-1	1		<=	0	a4	0.024	-0.024	-0.008		0.062	
		1		-1		<=	0	a7	-0.009	-0.051	-0.04	0.021		
								Max Reg	0.085	0.021	0.032	0.08	0.103	

Commit Rollback

Tolerance  x10

k=( 0 0 0 0 0 1 ). [Tight: 2 3 4 5]

Figura V.6. Matriz de confrontação.

Em suma, considerando apenas a informação  $k_6 > k_1 > k_2 > k_4 > k_5 > k_3$ , é-nos possível encontrar vários argumentos a favor de  $a_2$  e de  $a_3$ : são as duas únicas acções não  $\Delta$ -dominadas, são as melhores em termos de valor mínimo e são as melhores em termos de máximo *regret*. No estudo original, estas duas acções surgiram nos dois primeiros lugares da ordenação (Tabela V.1). Também Bana e Costa (1992:268-290), no estudo que efectuou a posteriori com os dados de Keeney e Nair, mas considerando que as taxas de compensação podiam variar em intervalos, obteve uma ordenação parcial das acções na qual  $a_2$  e  $a_3$  surgiam no topo.

Posição	Acção	Valor global
1	$a_3$	0,926
2	$a_2$	0,920
3	$a_1$	0,885
4	$a_4$	0,883
5	$a_8$	0,872
6	$a_9$	0,870
7	$a_7$	0,862
8	$a_5$	0,813
9	$a_6$	0,804

Tabela V.1. Ordenação obtida por Keeney e Nair.

Imaginemos agora que se pretendia avançar no processo de decisão, introduzindo nova informação. No estudo original, considerou-se o sexto critério (custo) como padrão de comparação e fixou-se  $k_6=0,4$  através de questões relativas a uma lotaria fictícia. Os restantes coeficientes de escala foram determinados a partir de questões respeitantes a taxas de compensação (*trade-offs*) entre o critério custo e os restantes critérios. Da taxa de compensação entre o custo e a estética (quinto critério) resultou

$k_5=0,059$ , ao passo que da taxa de compensação entre o custo e o equilíbrio socio-económico (quarto critério) resultou  $k_4=0,104$ . As questões sobre as possíveis compensações entre o custo e os restantes critérios, a saber, os efeitos sobre a saúde humana, sobre os salmões e sobre a biologia em geral terão sido, a nosso ver, de bem mais difícil resposta. Tentaremos, pois, evitar colocar estas questões e prosseguir o estudo com o software *VIP Analysis*, considerando apenas a informação apresentada até agora. Reteremos, nesta fase, apenas as acções  $a_1$  a  $a_4$ , as quatro melhores em termos de valor mínimo e máximo *regret*, assim como as quatro melhores no estudo original (Figura V.7).

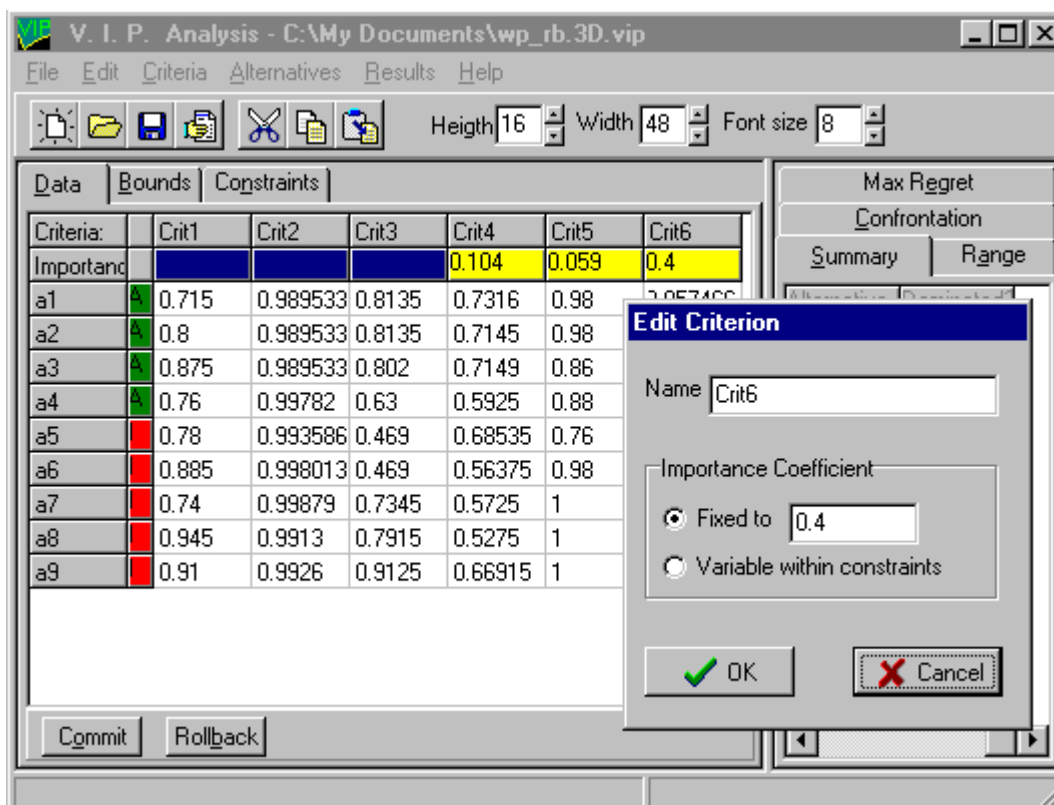


Figura V.7. Fixação de alguns coeficientes de escala.

A Figura V.8 mostra um sumário dos resultados. Nesta, podemos observar que as acções  $a_1$  e  $a_4$  são agora absolutamente dominadas, pois o melhor valor que conseguem alcançar é sempre inferior ao pior valor atingido por  $a_2$ . A acção  $a_2$  é a melhor de todas no que respeita ao valor mínimo e ao máximo *regret*.

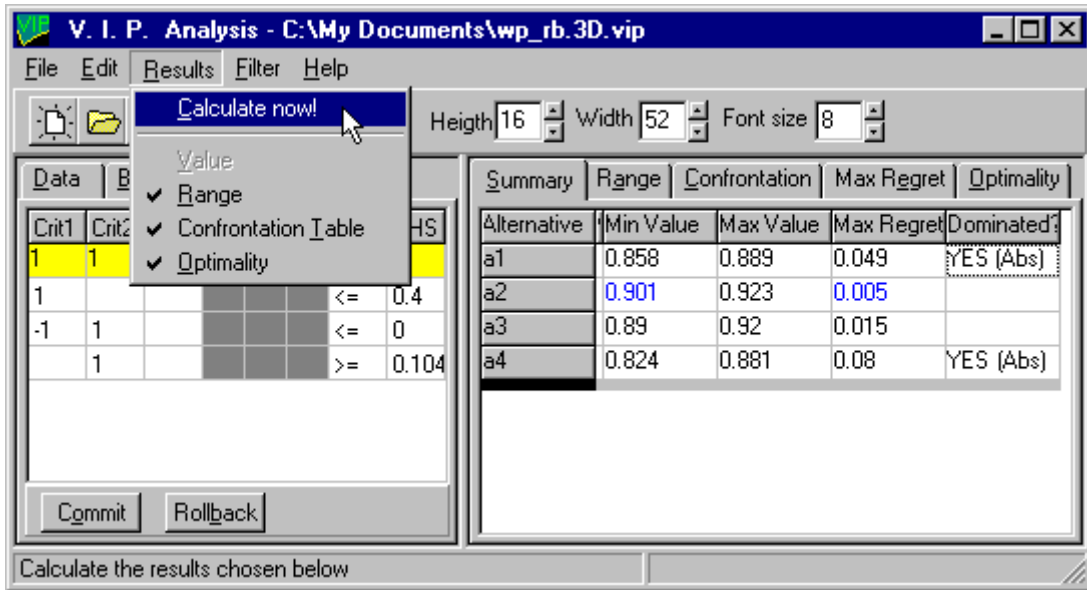


Figura V.8. Restrições e sumário dos resultados após introduzir nova informação.

Surge agora a oportunidade de utilizar as ideias propostas para o caso com três critérios, porquanto falta fixar apenas o valor de três coeficientes de escala. A Figura V.9 contém a representação gráfica dos domínios onde  $a_2$  (triângulo superior) e  $a_3$  (triângulo inferior) são óptimas. Nestas representações triangulares de  $T$ , o eixo horizontal está associado ao valor de  $k_1$ , ao passo que o eixo vertical está associado ao valor de  $k_2$ . Os triângulos exteriores representam todo o simplex definido pelas restrições  $k_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) e  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ , estando sombreados os pontos correspondentes às combinações não incluídas em  $T$ . Podemos verificar que o domínio associado a  $a_2$  é significativamente mais vasto do que o associado a  $a_3$ . Obviamente,  $a_1$  e  $a_4$  nunca serão óptimas, uma vez que são  $\Delta$ -dominadas.

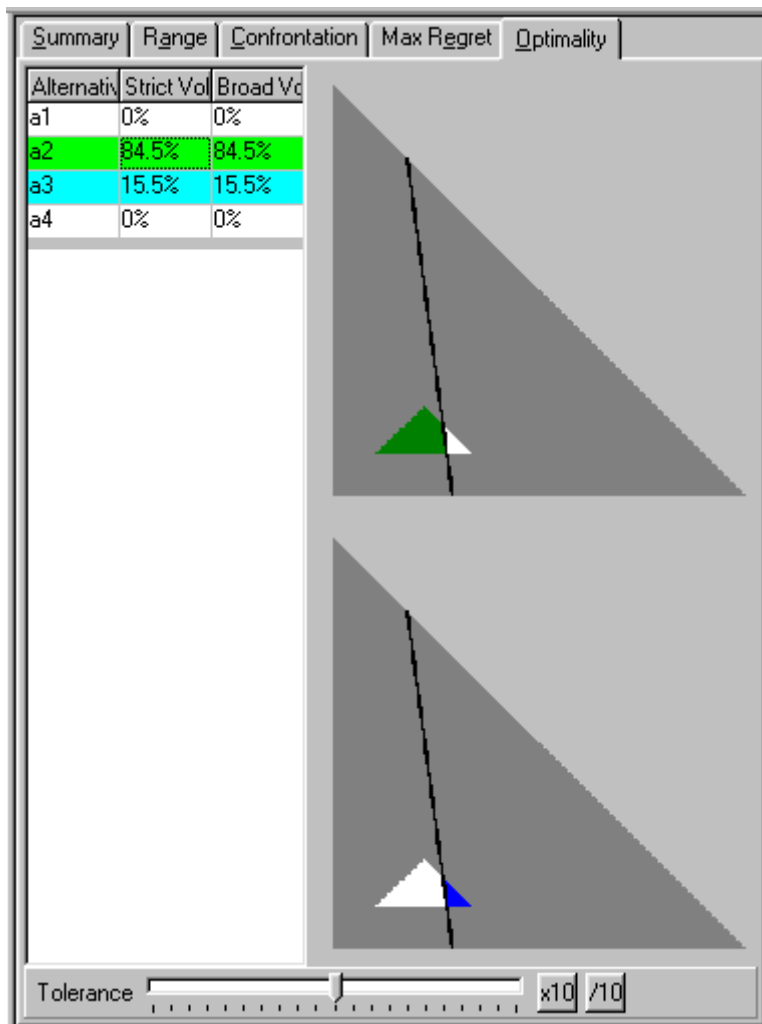


Figura V.9. Domínios onde as acções seleccionadas são óptimas.

Embora falte determinar valores precisos para três coeficientes de escala, cremos ter já encontrado bons argumentos para optar por  $a_2$ : trata-se da melhor acção segundo o *domain criterion* de Starr, segundo o mínimo valor e segundo o máximo *regret*. A partir da relação de  $\Delta$ -dominância, é ainda robusto concluir que  $a_2$  tem um valor superior a todas as restantes, excepto  $a_3$ . Confrontando esta convicção com o estudo original (Tabela V.1), verificamos que  $a_2$  foi a segunda classificada, atrás de  $a_3$ . Todavia, a diferença de valor entre as duas era muito pequena (0,06).

Consideremos outro exemplo, agora com dados inventados, apenas para ilustrar o papel do parâmetro de tolerância  $\epsilon$  e dos conceitos de  $\Delta$ -quasidominância e quasi-óptimo a este associados. Neste exemplo, avaliam-se quatro acções utilizando quatro critérios, obtendo-se os valores parciais apresentados na Figura V.10. Imaginemos que a única informação disponível referia-se a uma taxa de compensação entre dois dos critérios, a saber,  $k_4/k_3 = 1,2$  (Figura V.11).

Criteria:		Crit1	Crit2	Crit3	Crit4
Importance:					
a1	▼	0.63	0.66	0.3	0.22
a2	▼	0.23	0.4	0.57	0.82
a3	▼	0.23	0.3	0.68	0.79
a4	▼	0.52	0.58	0.49	0.57

Figura V.10. Valor parcial das acções.

Crit1	Crit2	Crit3	Crit4	<=,=>	RHS
1	1	1	1	=	1
		1.2	-1	=	0

Figura V.11. Fixação de uma taxa de compensação.

Analisámos esta situação com recurso a todas as ferramentas disponíveis no *VIP Analysis*, incluindo a representação gráfica de  $T$ , dado que a restrição  $k_4/k_3 = 1,2$  retira uma dimensão ao problema. A Figura V.12 apresenta um sumário dos resultados, onde podemos observar que  $a_4$  é a melhor acção segundo as regras max-min e min-max *regret*. Esta acção caracteriza-se ainda por ser muito pouco afectada pelo facto da informação não ser precisa, em comparação com as restantes acções, se atendermos ao intervalo de variação do valor global de cada uma.

Alternative	Value	Min Value	Max Value	Max Regret	Dominated?
a1		0.256	0.66	0.484	
a2		0.23	0.706	0.4	
a3		0.23	0.74	0.4	
a4	0.52		0.58	0.206	

Figura V.12. Sumário dos resultados para o exemplo inventado.

A matriz de confrontação para este exemplo, apresentada na Figura V.13, permite estudar a forma como as acções se comparam entre si. À partida, nenhuma das acções é  $\Delta$ -dominada, conforme se podia já observar no quadro da Figura V.12. Porém, quando a acção  $a_3$  tem maior valor do que a  $a_2$ , a diferença é sempre muito pequena (no máximo é de  $m_{32} = 0,034$ ), porventura pouco significativa. Suponhamos, pois, que os decisores consideravam uma tolerância  $\varepsilon=0,07$  (aproximadamente 10% do maior valor global que é possível alcançar). Então, tal como assinalado pelo *VIP Analysis* através do uso de uma cor diferente, a acção  $a_3$  pode ser considerada  $\Delta$ -quasidominada pela acção  $a_2$ . De facto, qualquer que seja a combinação de valores para os coeficientes de escala satisfazendo a restrição indicada, ora  $a_2$  é “significativamente melhor” do que  $a_3$  (i.e.  $V(a_2,t) - V(a_3,t) > \varepsilon$ ), ora  $a_2$  é “praticamente indiferente” a  $a_3$  (i.e.  $|V(a_2,t) - V(a_3,t)| \leq \varepsilon$ ).

	a1	a2	a3	a4
a1		0.4	0.4	0.11
a2	0.45		0.1	0.173
a3	0.484	0.034		0.206
a4	0.277	0.29	0.29	
Max Regret	0.484	0.4	0.4	0.206

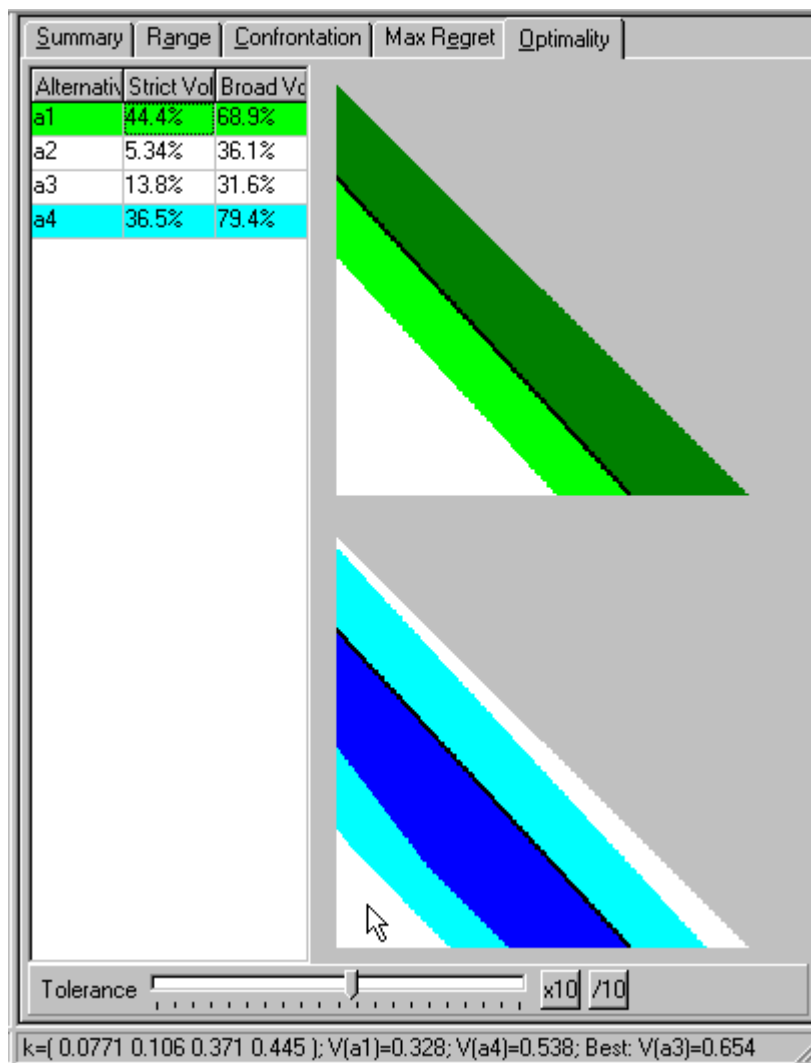
Tolerance: 0.07

Figura V.13. Ilustração de um caso de  $\Delta$ -quasidominância.

Conforme já referimos, a restrição  $k_4/k_3 = 1,2$  permite-nos representar  $T$  no plano. Na Figura V.14 pretendemos mostrar os domínios onde as acções  $a_1$  e  $a_4$ , as melhores segundo o *domain criterion* de Starr, são óptimas e quasi-óptimas (atendendo à mesma tolerância  $\varepsilon=0,07$ ). Podemos verificar que o maior domínio onde uma acção é óptima é o associado a  $a_1$  (representa 44,4% das combinações aceitáveis, correspondendo à área mais escura do triângulo superior), seguido do domínio associado a  $a_4$  (representa 36,5% das combinações aceitáveis, correspondendo à área mais escura do triângulo inferior). Contudo, se aceitarmos uma tolerância  $\varepsilon=0,07$ , os domínios onde as acções são óptimas alargam-se para constituir domínios onde estas são quasi-óptimas. Observando estes últimos, verificamos que o maior deles é agora o associado a  $a_4$  (79,4%, correspondente ao total das áreas



assinaladas no triângulo inferior). Atendendo ao tamanho deste domínio, e porventura à sua posição “central”, poderíamos concluir que a acção  $a_4$  se revela uma escolha muito interessante, contribuindo ainda para essa opinião a superioridade desta em termos de valor mínimo e de máximo *regret*, mesmo sem procurar informação mais precisa sobre os coeficientes de escala.



**Figura V.14.** Domínios onde as acções seleccionadas são quasi-óptimas.

A representação gráfica de  $T$  oferecida pela ferramenta *VIP Analysis* foi concebida para oferecer uma utilização interactiva. A título de exemplo, a Figura V.14 mostra como se pode seleccionar qualquer ponto naquela representação, acedendo de imediato à combinação de  $T$  que lhe corresponde, bem como ao valor global das acções seleccionadas e ao valor da melhor acção para essa combinação. A mesma Figura exhibe um “potenciómetro” (*trackbar*) que permite variar, de modo contínuo, o valor da tolerância. À medida que este valor aumenta (diminui), os domínios onde as acções seleccionadas são quasi-óptimas aumentam (diminuem) também. Pensamos, por estas razões, que estes gráficos

interactivos constituem uma ferramenta muito útil, seja para analisar um problema, seja para ensinar/aprender.

## 6. Notas conclusivas

---

A síntese dos desempenhos multicritério das acções num único valor, como é o caso da agregação aditiva, faz intervir alguns parâmetros, em particular os coeficientes de escala, cujo valor é difícil de fixar. As múltiplas dificuldades que surgem, em geral, na fixação dos parâmetros em métodos multicritério (apresentadas no Capítulo anterior), são, no caso dos coeficientes de escala, agravadas pela natureza das questões habitualmente colocadas aos decisores. Por seu lado, a síntese dos desempenhos num valor global por acção permite uma análise rica e multifacetada no caso da informação imprecisa, conforme atesta a literatura dedicada a esse assunto.

Começámos por apresentar neste capítulo uma taxinomia para os procedimentos desenvolvidos para trabalhar com informação imprecisa no contexto da agregação aditiva. Assinalámos que as classes em que os dividimos eram complementares, não se podendo concluir que uns dispensassem o uso de outros. Propusemos, por isso, a utilização de múltiplos procedimentos, por forma a analisar as consequências da imprecisão da informação segundo diferentes perspectivas. À medida que o número de acções candidatas à selecção final é progressivamente reduzido, alarga-se o leque dos procedimentos a usar e aumenta o detalhe da análise.

Construímos o programa informático *VIP Analysis* para facilitar, ou mesmo fomentar, o tipo de análise proposto, porquanto aquele software apoia o utilizador, através de um interface de fácil utilização, na obtenção de múltiplos resultados: o intervalo de valor global de cada acção, a matriz de confrontação, o máximo *regret* associado à escolha de cada acção e os domínios onde as acções são óptimas (caso a dimensão de  $T$  o permita). Pensamos que tanto a matriz de confrontação como a representação dos domínios onde as acções são óptimas constituem poderosas ferramentas de análise, em particular quando os decisores consideram uma tolerância  $\varepsilon$  e os respectivos conceitos de  $\Delta$ -quasidominância e de quasi-óptimo.

A versão actual do *VIP Analysis* considera como variáveis apenas os coeficientes de escala, que podem estar sujeitos a quaisquer restrições lineares. Uma via para investigação futura é a adaptação do software para trabalhar com outros parâmetros variáveis. Considerar, por exemplo, que o valor parcial (unicritério) das acções também pode ser variável não introduz novas dificuldades nos cálculos, salvo se existirem restrições matemáticas que inter-relacionem os valores parciais nos vários critérios para uma mesma acção, ou inter-relacionem estes com os coeficientes de escala. Outras características que poderiam ser acrescentadas ao *VIP Analysis* são enumeradas a seguir:

- cálculo da média, da variância e de alguns quantis para o valor global de cada acção (considerando que os parâmetros seguem uma distribuição uniforme em  $T$ );
- cálculo do volume do domínio onde cada acção é óptima (ou quasi-óptima), mesmo quando as dimensões do problema não permitam a sua representação gráfica;
- possibilidade, na representação gráfica do domínio  $T$ , de aceder facilmente às restrições que definem cada aresta (apontando com o rato) e de alterar essas restrições, observando-se imediatamente os efeitos que as alterações produzam.

O estudo de uma situação de escolha através da ferramenta *VIP Analysis* pode fomentar o discernimento dos decisores no processo de fornecer informação mais precisa, enquanto faz emergir os argumentos suficientes para os decisores isolarem uma acção interessante, ou pelo menos um pequeno subconjunto de acções interessantes, antes de fixarem valores precisos para os parâmetros.



# Capítulo VI

## Análise dos índices de credibilidade do ELECTRE com informação imprecisa

### 1. Introdução ao problema

---

Aceitar informação imprecisa no contexto dos métodos do tipo ELECTRE (que apresentámos no Capítulo II), apresenta novos desafios, relativamente aos métodos de agregação por uma função de síntese, como a função de valor aditiva estudada no capítulo anterior. Dedicamos o presente capítulo ao estudo da procura de conclusões robustas acerca do valor dos índices de credibilidade nos quais alguns desses métodos, que são representativos dos métodos de agregação por uma relação de prevalência de síntese, se baseiam.<sup>1</sup> Julgamos tratar-se de um estudo interessante por si só, dadas as muitas aplicações que esses índices podem ter:

- em métodos do tipo do ELECTRE IS (Roy e Skalka, 1984), no contexto da problemática de escolha;
- em métodos como o ELECTRE III (Roy, 1978), o *min* (Pirlot, 1995) ou o *net-flow* (Bouyssou, 1992), no contexto da problemática de ordenação;
- em métodos como o da segmentação tricotómica (Roy e Moscarola, 1977) ou o ELECTRE TRI (Yu, 1992), no contexto da problemática de afectação.

As razões para trabalhar com informação imprecisa foram já discutidas no Capítulo III. O número de parâmetros que intervêm no cálculo de índices de credibilidade é bastante elevado (mais

---

<sup>1</sup> Este capítulo baseia-se no trabalho que relatámos em Dias e Clímaco (1999).

precisamente, quatro por cada critério), pelo que será grande o interesse de avançar no processo de decisão sem exigir informação precisa sobre o valor de todos eles. Conforme veremos mais adiante neste capítulo (Secções 5.2 e 5.3), aceitar informação imprecisa no cálculo do valor de índices de credibilidade pode ainda ser particularmente útil em situações nas quais não se pretenda atribuir à partida coeficientes de importância aos critérios (em alternativa ao ELECTRE IV de Roy e Hugonnard, 1982) ou em situações de aceitação / rejeição de acções (em alternativa à segmentação tricotómica de Roy e Moscarola, 1977).

No âmbito dos métodos ELECTRE, dado um par ordenado de acções  $(a_1, a_2)$ , podemos calcular um índice de credibilidade  $\sigma(a_1, a_2)$ , que indica quão credível é a afirmação “ $a_1$  prevalece sobre (é pelo menos tão boa como)  $a_2$ ”, ao invés de nos limitarmos à dicotomia prevalece / não prevalece. Este índice pode assumir valores entre zero e um: quanto mais elevado for, mais credível é a aquela afirmação. O conjunto dos índices de credibilidade permite estabelecer uma relação de prevalência difusa (v. Roy, 1991).

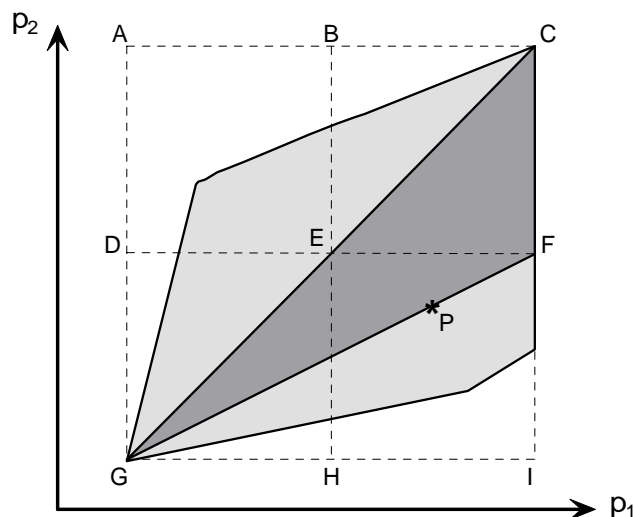
Consideraremos o índice de credibilidade como uma função de um par ordenado de acções e de uma combinação  $t$  de valores para os parâmetros, pelo que usaremos a notação  $\sigma(a_1, a_2, t)$ . Para qualquer índice de credibilidade, mostraremos como calcular o intervalo de valores que é compatível com a informação imprecisa, i.e. compatível com o domínio  $T$  das combinações aceitáveis de valores para os parâmetros (do ponto de vista do decisor). Trata-se de resolver os dois problemas seguintes, para um par genérico de acções  $(a_1, a_2)$ :

$$\min\{\sigma(a_1, a_2, t): t \in T\} \text{ e } \max\{\sigma(a_1, a_2, t): t \in T\}.$$

Os resultados deste tipo de análise podem ser muito úteis. Em primeiro lugar, desta análise é possível extrair conclusões robustas, e.g. “ $\sigma(a_1, a_2) \geq \min\{\sigma(a_1, a_2, t): t \in T\}$ ” e “ $\sigma(a_1, a_2) \leq \max\{\sigma(a_1, a_2, t): t \in T\}$ ”, cujo papel dependerá do procedimento de exploração da relação de prevalência, conforme veremos nos capítulos seguintes. Em segundo lugar, repetindo-se esta análise para diferentes pares de acções, é possível que se encontrem grandes diferenças de amplitude entre os intervalos (diferença entre o mínimo e o máximo) dos diversos índices. Para alguns pares o índice não mostra grande variabilidade, enquanto para outros o índice pode variar muito. Tal análise permite centrar a atenção dos decisores nestes últimos, que são os mais influenciados pelo facto de a informação não ser precisa. A observação das conclusões robustas e da variabilidade dos índices deverá, pois, ser útil para progredir de acordo

com a problemática de decisão em causa, assim como para estimular os decisores a fornecer informação adicional, no espírito da estratégia de delimitação ajustável.

O problema que consideramos aqui pode não ser simples no caso de  $T$  não ser discreto. Roy e Bouyssou (1993: pp. 315-317) (v. também Roy, 1998) propõem que se teste a robustez das conclusões num número finito de pontos de  $T$ . Para cada parâmetro escolhe-se um conjunto pequeno de valores (e.g. mínimo, central e máximo) e o produto cartesiano desses conjuntos constitui o conjunto de pontos a testar. Trata-se de uma abordagem de realização simples, mas que pode ser insuficiente quando na definição de  $T$  existam restrições que inter-relacionem os valores dos parâmetros. A título de exemplo, a Figura VI.1 representa nas zonas a sombreado as combinações de valores que um decisor considera aceitáveis para dois parâmetros,  $p_1$  e  $p_2$ , considerando a interdependência existente entre os mesmos. Para este exemplo, a abordagem de Roy e Bouyssou trataria os pontos  $A, B, \dots, I$  como potenciais pontos de teste, mas teria de se cingir a considerar os pontos  $C, E, F$  e  $G$ , porque os restantes não seriam admissíveis. Estes pontos definem a região interior (mais sombreada), que pode constituir uma representação insuficiente da região inicial. Mais, se a avaliação da robustez das conclusões incorporar aspectos não-lineares, como no caso dos índices de credibilidade, então os resultados para pontos não extremos, como o ponto  $P$ , podem não estar contidos no conjunto de resultados induzido pelos pontos  $C, E, F$  e  $G$ .



**Figura VI.1.** As regiões a sombreado representam  $T$ , enquanto os pontos  $A, B, \dots, I$  constituem potenciais pontos de teste.

Iremos analisar o problema com instrumentos mais sofisticados, embora conceptualmente simples. Pretendemos saber qual o mínimo e máximo valor que cada índice de credibilidade pode atingir, sujeito às combinações em  $T$ . Um processo de obter estes valores consiste em empreender com maior rigor o processo sugerido supra — proceder por “amostragem”<sup>2</sup> —, embora os resultados continuem a ser obtidos de forma apenas aproximada. Optaremos, pois, por uma via de resolução exacta, a optimização. Esta será bastante simples para alguns casos, felizmente os mais interessantes, embora possa ser mais complicada para outros casos: tudo dependerá dos parâmetros que são variáveis e da forma como estão inter-relacionados. Todavia, para os decisores, o conceito não podia ser mais simples. Uma vez apreendido o significado do índice de credibilidade, interpretando-o como uma função do valor dos parâmetros, pode entender-se facilmente a ideia de saber qual o valor mínimo e o valor máximo que o índice pode alcançar, face às combinações em  $T$ , sem a preocupação de dominar as técnicas de optimização subjacentes.

Começaremos por rever brevemente o processo de cálculo dos índices de credibilidade do ELECTRE. De seguida, tipificamos as restrições que definem o conjunto  $T$  das combinações aceitáveis, segundo as quais alguns parâmetros podem variar independentemente de outros. Entraremos então na parte onde propomos uma sequência de passos para maximizar um índice de credibilidade e outra sequência para o minimizar, seguindo-se alguns exemplos ilustrativos. Terminaremos o capítulo com algumas notas sobre o problema que aqui estudamos.

## **2. Cálculo dos índices de credibilidade**

---

Nesta secção revemos de forma sucinta a sequência de cálculos necessária a determinar um índice de credibilidade (para mais detalhe v. Roy, 1991; Roy e Bouyssou, 1993: 284-289). Consideraremos um par ordenado de acções genérico, que designaremos por  $(a_1, a_2)$ , para o qual

---

<sup>2</sup> Trata-se de uma estratégia que tem sido utilizada noutros contextos de apoio multicritério à decisão com informação imprecisa. Por exemplo, van Herwijnen et al. (1995), Charnetski e Soland (1978) e Butler et al. (1997) propõem o recurso à simulação de Monte-Carlo no contexto de modelos de agregação aditiva com informação imprecisa.



pretendemos determinar o índice  $\sigma(a_1, a_2)$ . Este índice indica a credibilidade da afirmação “ $a_1$  prevalece sobre  $a_2$ ”, abreviada pela notação  $a_1 S a_2$ .

Os critérios que intervêm no cálculo dos índices de credibilidade (seja  $n$  o seu número) são formalmente **pseudo-critérios**. Esta noção generaliza a de critério clássico, ou **verdadeiro-critério**, que está associado a uma estrutura de preferências  $(P_j, I_j)$  ( $j$  é o índice do critério), onde  $P$  representa a situação de preferência e  $I$  representa a situação de indiferença.

Para o verdadeiro-critério, se  $g_j(a_i)$  representar o **desempenho** da acção de índice  $i$  no critério de índice  $j$  e se  $\Delta_j$  representar a **vantagem** da acção  $a_1$  sobre  $a_2$  no critério de índice  $j$ , então:

$$\text{(Verdadeiro-critério:)} \quad \begin{cases} a_1 P_j a_2 \Leftrightarrow \Delta_j > 0 \\ a_1 I_j a_2 \Leftrightarrow \Delta_j = 0, \\ a_2 P_j a_1 \Leftrightarrow \Delta_j < 0 \end{cases}$$

onde

$$\Delta_j = \begin{cases} g_j(a_1) - g_j(a_2), & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a maximizar} \\ g_j(a_2) - g_j(a_1), & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a minimizar} \end{cases}$$

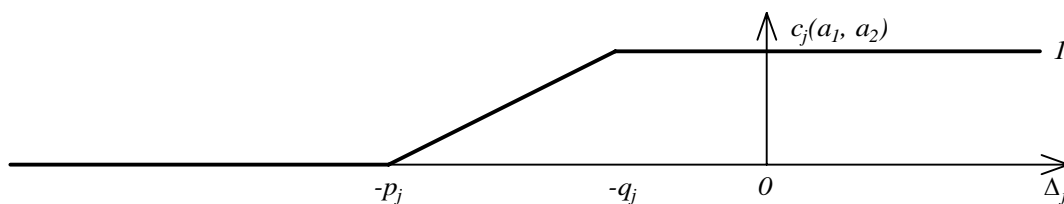
Existe no verdadeiro-critério uma mudança abrupta entre a situação de preferência e a de indiferença, bastando que  $\Delta_j$  seja não nulo, por mais pequeno que seja, para que se afirme que uma das acções é preferível à outra segundo aquele critério. O pseudo-critério pretende admitir uma transição mais gradual entre indiferença e preferência, à custa da introdução de dois parâmetros para cada critério ( $j=1, \dots, n$ ): o **limiar de indiferença**  $q_j$  e o **limiar de preferência**  $p_j$ ,<sup>3</sup> com  $p_j \geq q_j \geq 0$ . Obtém-se assim um estrutura de preferências  $(P_j, Q_j, I_j)$ , na qual  $Q$  representa a situação de preferência fraca, correspondente a uma hesitação entre as situações de preferência (estrita) e de indiferença:

$$\text{(pseudo-critério:)} \quad \begin{cases} a_1 P_j a_2 \Leftrightarrow \Delta_j > p_j \\ a_1 Q_j a_2 \Leftrightarrow \Delta_j \in ]q_j, p_j] \\ a_1 I_j a_2 \Leftrightarrow \Delta_j \in [-q_j, q_j] \\ a_2 Q_j a_1 \Leftrightarrow \Delta_j \in [-p_j, -q_j[ \\ a_2 P_j a_1 \Leftrightarrow \Delta_j < -p_j \end{cases}$$

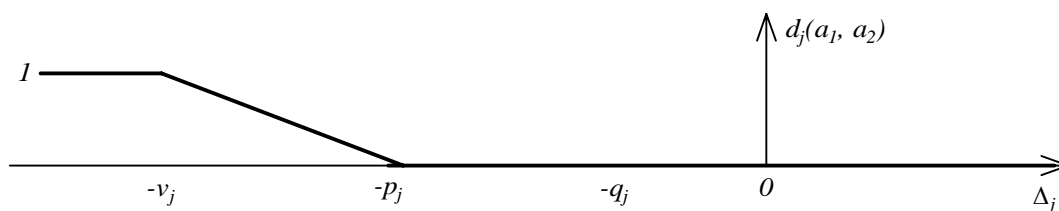
<sup>3</sup> Para simplificar a notação, consideramos que os limiares não dependem dos desempenhos, mas o raciocínio é válido para as generalizações onde se consideram limiares como funções  $q_j(g_j(\cdot))$  e  $p_j(g_j(\cdot))$ .

O valor do índice de credibilidade obtém-se a partir de índices que quantificam os argumentos a favor (concordância) e contra (discordância) a afirmação “ $a_1$  prevalece sobre  $a_2$ ”. Para cada critério calcula-se um **índice de concordância** de acordo com a seguinte expressão (v. Figura VI.2):

$$c_j(a_1, a_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta_j \geq -q_j \\ (p_j + \Delta_j) / (p_j - q_j), & \text{se } -p_j \leq \Delta_j < -q_j \\ 0, & \text{se } \Delta_j < -p_j \end{cases} \quad (2.1).$$



**Figura VI.2. Índice de concordância para o  $j$ -ésimo critério**



**Figura VI.3. Índice de discordância para o  $j$ -ésimo critério**

Estes índices são então agregados num **índice de concordância multicritério** através de uma soma ponderada que faz intervir os coeficientes de importância de cada critério:

$$c(a_1, a_2) = \frac{\sum_{j=1}^n k_j c_j(a_1, a_2)}{\sum_{j=1}^n k_j},$$

onde  $k_j$  (valor não negativo) representa o **coeficiente de importância** do critério de índice  $j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Sem perda de generalidade, iremos convencionar que  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ , o que permite simplificar esta expressão:

$$c(a_1, a_2) = \sum_{j=1}^n k_j c_j(a_1, a_2). \quad (2.2)$$

Para cada critério calcula-se igualmente um **índice de discordância** de acordo com a seguinte expressão (v. Figura VI.3):

$$d_j(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta_j \geq -p_j \\ (-\Delta_j - p_j) / (v_j - p_j), & \text{se } -p_j \geq \Delta_j \geq -v_j \\ 1, & \text{se } \Delta_j < -v_j \end{cases} \quad (2.3).$$

Por fim, a expressão seguinte combina o índice de concordância multicritério e os índices de discordância no **índice de credibilidade** da afirmação  $a_1 S a_2$ :

$$\sigma(a_1, a_2) = c(a_1, a_2) \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ d_j(a_1, a_2) > c(a_1, a_2)}} \frac{1 - d_j(a_1, a_2)}{1 - c(a_1, a_2)} \quad (2.4).$$

Nesta expressão, os índices de discordância só são considerados relevantes se forem superiores ao índice de concordância multicritério. Devemos ainda reparar que, se existir algum critério para o qual  $\Delta_j \leq -v_j$  (i.e. se existir algum critério que oponha um veto), então o índice  $\sigma(a_1, a_2)$  torna-se nulo.

Durante a exploração da relação difusa definida pelos índices de credibilidade, é habitual introduzir um limiar de corte  $\lambda$ , para definir qual o grau de credibilidade a partir do qual se aceita a existência de prevalência:

$$a_1 S a_2 \Leftrightarrow \sigma(a_1, a_2) \geq \lambda.$$

### 3. Restrições aos valores dos parâmetros

---

Suponhamos que se pretende avançar no processo de decisão utilizando informação imprecisa. O caso em que os decisores apenas consideram um número finito de combinações  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$  não apresenta nenhum desafio ao cálculo do máximo e mínimo valor de cada índice de credibilidade. Iremos portanto focar-nos no caso em que  $T$  é um conjunto contínuo, definido implicitamente através de restrições matemáticas aos valores de  $k_j, q_j, p_j$  e  $v_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) e aos desempenhos das acções.

Propomo-nos trabalhar com restrições lineares. Este tipo de restrições constitui uma linguagem suficientemente rica para modelar grande parte da informação imprecisa que um decisor queira fornecer. Note-se que o decisor não tem necessariamente de fornecer directamente estas restrições, embora possa fazê-lo. Um analista deverá estar habilitado para obter a informação que o decisor possa fornecer com convicção, recorrendo, por exemplo, a um protocolo de interrogação interactivo como o

proposto por Mousseau (1993). A utilização de restrições lineares, por outro lado, torna mais simples a resolução dos problemas de maximização e minimização dos índices de credibilidade.

A caracterização que propomos de seguida define  $T$  como um polítopo que incorpora o tipo de restrições que é razoável esperar, na qual certos grupos de parâmetros podem ser variados independentemente de outros. Por exemplo, uma restrição como  $k_1 \geq k_2$  é razoável, enquanto uma restrição como  $k_1 \geq q_1$  não o é.

Consideremos em primeiro lugar os limiares de indiferença e de preferência. Estes são “locais” a cada critério: o limiar de indiferença indica a maior diferença de desempenhos nesse critério correspondente à situação de indiferença; o limiar de preferência indica a menor diferença de desempenhos nesse critério correspondente à situação de preferência (estricta). Assumiremos, pois, que estes parâmetros surgem apenas em restrições de limite, onde o decisor fixa os intervalos de variação:

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1) \text{ e}$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2).$$

Assumiremos, o que não é muito restritivo, que os limites  $q_j^L$ ,  $q_j^U$ ,  $p_j^L$  e  $p_j^U$  são tais que:

$$v_j \geq p_j^L \geq q_j^L \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_j \geq p_j^U \geq q_j^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Eventualmente, poderão existir outras restrições para assegurar a ordem:

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3).$$

No respeitante ao desempenho das acções, consideramos que pode existir informação imprecisa acerca do modo como esses desempenhos podem estar inter-relacionados *dentro* de um mesmo critério. Excluimos, assim, restrições que inter-relacionem os desempenhos, segundo vários critérios, de uma determinada acção, dado que estaríamos a entrar num contexto diferente, mais próximo da programação matemática multiobjectivo. Para cada critério (seja  $j$  o seu índice), a informação imprecisa definirá um polítopo  $G_j$  de desempenhos admissíveis para as acções, definido à custa de restrições lineares. Por exemplo, o decisor pode afirmar que o desempenho de uma acção é superior ao de outra nesse critério, ou mesmo afirmar que a diferença de desempenhos entre elas excede  $x$  unidades. Representemos por  $a_1, \dots, a_m$  o conjunto das acções a avaliar e representemos por  $g_{ij} = g_j(a_i)$  o desempenho da acção  $a_i$  segundo o  $j$ -ésimo critério. O conjunto de restrições, independente para cada critério, é então o seguinte:

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^m, \quad j=1, \dots, n \quad (3.4).$$

Consideremos agora os coeficientes de importância. Uma vez mais, restrições razoáveis sobre este tipo de parâmetros não devem incluir outros parâmetros (salvo a situação do tipo 3 que apresentaremos mais adiante). Ao contrário dos coeficientes de escala referentes à função valor aditiva, os coeficientes de importância do ELECTRE coadunam-se com a metáfora da pesagem, segundo a qual os decisores podem afirmar, por exemplo, que um critério ou uma coligação de critérios “pesa” mais do que outro critério ou outra coligação. Assumiremos que o decisor fornece um conjunto qualquer de restrições lineares sobre os coeficientes de importância  $k_1, \dots, k_n$ , incluindo obrigatoriamente as restrições  $k_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$  (esta última restrição constitui apenas uma convenção que permite escrever  $c(a_1, a_2) = \sum_{j=1}^n k_j c_j(a_1, a_2)$ ). Define-se desta forma um polítopo  $K$ :

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{H}^n \quad (3.5)$$

Por fim, consideraremos três tipos de restrições para os limiares de veto. Em cada problema, poderão existir apenas restrições do tipo 1, ou apenas do tipo 2 (que generaliza o tipo 1), ou apenas do tipo 3:

**Tipo 1**

Os limiares de veto são considerados exclusivamente locais a cada critério, pelo que apenas são aceites restrições análogas às dos limiares de indiferença e preferência:

$$v_j \in [v_j^L, v_j^U], j = 1, \dots, n; \quad (3.6a)$$

**Tipo 2**

Os limiares de veto são considerados interdependentes, desejando-se relacionar o “poder de veto” dos diferentes critérios. Neste caso, porém, os desempenhos devem estar expressos em escalas comparáveis. Pode então existir algum significado em efectuar comparações intercritério de limiares de veto. Admitimos neste segundo tipo que os decisores possam colocar restrições lineares sobre estes parâmetros, definindo um polítopo  $V$  de combinações aceitáveis:

$$(v_1, \dots, v_n) \in V \subset \mathcal{H}^n; \quad (3.6b)$$

**Tipo 3**

Os limiares de veto são considerados dependentes dos coeficientes de importância. Quanto maior for o coeficiente de importância, mais próximo está o limiar de veto do limiar de preferência. Os decisores podem indicar limites para os factores de proporcionalidade:

$$v_j = p_j + \alpha_j/k_j, \text{ com } \alpha_j \in [\alpha_j^L, \alpha_j^U], j = 1, \dots, n. \quad (3.6c)$$

Em suma:

Assumiremos que os conjuntos  $G_j$  ( $j=1,\dots,n$ ),  $K$  e  $V$  (se aplicável) são poliedros limitados e fechados. Assim, no presente capítulo  $T$  é um polítopo definido por (3.1) a (3.6a, b ou c), conforme o tipo:

**Tipo 1:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^m, j=1, \dots, n$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n,$$

$$v_j \in [v_j^L, v_j^U], j = 1, \dots, n \}$$

**Tipo 2:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^m, j=1, \dots, n$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n,$$

$$(v_1, \dots, v_n) \in V \subset \mathcal{R}^n \}$$

**Tipo 3:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, k_1, \dots, k_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], j = 1, \dots, n$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^m, j=1, \dots, n$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n,$$

$$\alpha_j \in [\alpha_j^L, \alpha_j^U], j = 1, \dots, n \}$$

Notemos por fim que Mousseau (1993) criou um protocolo de interrogação e um programa de computador interactivo que permite obter as restrições (3.1), (3.2), (3.5) e (3.6a) a partir das respostas do decisor.

#### 4. Cálculo do intervalo de variação de índices de credibilidade

---

Nesta secção discutimos a maximização e a minimização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , sujeito a  $t \in T$ , dado um qualquer par ordenado de acções  $(a_1, a_2)$  e um qualquer polítopo  $T$  do tipo 1, 2 ou 3. Conforme vimos na Secção 3, o conjunto de restrições que define os elementos de  $T$  permite variar alguns parâmetros independentemente de outros. Iremos explorar este facto, partindo o problema de optimização em subproblemas mais simples, nos quais se vão fixando progressivamente os valores óptimos para os parâmetros, relativamente à maximização ou à minimização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ . Em particular, iremos começar por fixar os valores dos desempenhos, seguidos dos limiares de indiferença e de preferência e, por fim, dos coeficientes de importância e dos limiares de veto. Estes dois últimos conjuntos de parâmetros serão optimizados em simultâneo ou em sequência, consoante estejamos em presença de restrições do tipo 3 ou não, respectivamente.

Seja

$$\Delta_j = \begin{cases} g_{1j} - g_{2j}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a maximizar} \\ g_{2j} - g_{1j}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a minimizar} \end{cases} .$$

Referir-nos-emos às seguintes proposições, que são apresentadas com maior detalhe e demonstradas no Apêndice B:

**Proposição B.1:** Se algum parâmetro aumentar, de entre  $\Delta_j$ ,  $q_j$ ,  $p_j$  e  $v_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ), então  $\sigma(a_1, a_2, t)$  não diminui.

**Proposição B.2:** Se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância, então o índice de concordância multicritério  $c(a_1, a_2, k)$  é uma função linear destes coeficientes.

**Proposição B.4:** Se fixarmos todos os parâmetros, excepto os limiares de veto, de forma a que  $c(a_1, a_2) > 0$ , então a função  $\sigma(a_1, a_2, v)$  é estritamente quasicôncava no domínio  $U = \{v \in \mathcal{R}^n : v_j > -\Delta_j (j=1, \dots, n)\}$ .

**Proposição B.5:** Se fixarmos todos os parâmetros, excepto os limiares de veto, de forma a que  $c(a_1, a_2) > 0$ , então a função  $\ln \sigma(a_1, a_2, v)$  é côncava no domínio  $U = \{v \in \mathcal{R}^n : v_j > -\Delta_j (j=1, \dots, n)\}$ .

**Proposição B.7:** Num polítopo do tipo 3, se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância, a função  $\sigma(a_1, a_2, k)$  é estritamente quasicôncava no domínio onde esta assume valores do intervalo  $]0, 1[$ .

Consideraremos ainda os seguintes conjuntos:

Seja  $J = \{1, \dots, n\}$  o conjunto dos índices dos critérios.

Seja  $J^d = \{1, \dots, n: \Delta_j < 0\}$  o conjunto dos índices dos critérios para os quais  $a_1$  é pior do que  $a_2$ .

#### 4.1. Maximização de índices de credibilidade

Começamos por discutir a maximização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , sujeito a  $t \in T$ , pelo que iremos atribuir a cada tipo de parâmetros o valor que mais beneficia  $a_1$ , em detrimento de  $a_2$ , conforme a seguinte sequência de passos:

##### i) Determinação dos desempenhos das acções.

Se algum  $\Delta_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) aumentar então  $\sigma(a_1, a_2, t)$  não diminui (Proposição B.1). Dado que podemos variar os desempenhos de forma independente de critério para critério, basta-nos então resolver um programa linear para cada critério, por forma a maximizar as vantagens de desempenho de  $a_1$  sobre  $a_2$ :

$$(g_{1j}, g_{2j}) \leftarrow \arg \max \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \}, \quad j=1, \dots, n \quad (\text{PM}\emptyset).$$

##### ii) Determinação dos limiares de indiferença e preferência.

Se algum dos parâmetros  $q_j$  ou  $p_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) aumentar, então  $\sigma(a_1, a_2, t)$  não diminui (Proposição B.1). Na realidade, o valor de cada um destes parâmetros só influencia o valor do índice de credibilidade se  $j \in J^d$ . Logo, basta fixar os valores desses parâmetros no seu limite superior:

$$q_j \leftarrow q_j^U \text{ e } p_j \leftarrow p_j^U, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, q_j \text{ e } p_j \text{ podem assumir um valor qualquer}).$$

##### iii) Determinação dos coeficientes de importância e limiares de veto

Esta terceira etapa depende do tipo de restrições em causa.

###### Restrições do tipo 1 (3.6a):

Nestes casos, os limiares de veto variam independentemente uns dos outros e independentemente dos restantes parâmetros. De acordo com a Proposição B.1, se algum  $v_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) aumentar então  $\sigma(a_1, a_2, t)$  não diminui. Aliás, variar  $v_j$  só produz algum efeito se  $j \in J^d$ . Começemos então por fixar os limiares de veto:



$$v_j \leftarrow v_j^U, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, v_j \text{ pode assumir um valor qualquer}).$$

Neste momento, falta apenas determinar o valor óptimo dos coeficientes de importância  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , sujeito a (3.5). Uma vez que todos os restantes parâmetros estão já fixos, basta-nos maximizar a concordância multicritério  $c(a_1, a_2, k)$  para maximizar  $\sigma(a_1, a_2, t)$ . O conjunto  $K$  é um polítopo e  $c(a_1, a_2, k)$  é uma função linear dos coeficientes de importância (Proposição B.2). Por conseguinte, o problema a resolver é um simples programa linear:

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \max \{c(a_1, a_2, k): (k_1, \dots, k_n) \in K\} \quad (\text{PM1}).$$

Restrições do tipo 2 (3.6b):

Nestes casos, os limiares de veto são interdependentes, embora possam variar independentemente dos coeficientes de importância. Por este motivo, podemos encontrar separadamente as combinações desses dois conjuntos de parâmetros que mais beneficiam  $a_1$ . Em primeiro lugar, resolvemos o programa linear (PM1), por forma a obter a combinação de coeficientes de importância que maximiza  $c(a_1, a_2)$ . Se o valor óptimo da concordância multicritério obtido em (PM1) for igual a zero ou igual a um, então por (2.4) o valor óptimo do índice de credibilidade será de zero ou um, respectivamente, independentemente do valor dos limiares de veto. Em ambos os casos, não é pois necessário prosseguir.

No caso de o valor óptimo encontrado em (PM1) estar no intervalo  $]0, 1[$ , consideramos fixos os coeficientes de importância óptimos e maximizamos o índice de credibilidade como função de  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Como restrições, colocaremos  $v \in V$  acrescida de outras, com o intuito de limitar a optimização ao domínio onde  $\sigma(a_1, a_2, v)$  não se anula por situação de veto. Estas restrições adicionais são:

$$v_j \geq -\Delta_j + \varepsilon, \quad j \in J^d \quad (\text{onde } \varepsilon \text{ é um valor positivo muito pequeno}).$$

Pode suceder que não exista nenhuma combinação  $v \in V$  satisfazendo aquelas restrições adicionais. Nesse caso não continuamos: o valor máximo do índice de credibilidade tem de ser zero. Caso contrário, resolvemos o seguinte problema de programação não-linear (a não-linearidade deve-se à função objectivo, uma vez que as restrições são lineares):

$$(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \max \{\sigma(a_1, a_2, v): (v_1, \dots, v_n) \in V, v_j \geq -\Delta_j + \varepsilon (j \in J^d)\} \quad (\text{PM2}).$$

A função  $\sigma(a_1, a_2, v)$  é, nestas condições, uma função estritamente quasicôncava (Proposição B.4). Consequentemente, qualquer máximo local daquela função é um máximo global (e.g. v. Bazaraa et al., 1993:118).

Em alternativa, podíamos maximizar  $\ln \sigma(a_1, a_2, v)$ , uma função côncava (Proposição B.5), e não apenas quasicôncava. Atendendo a que a função logarítmica é estritamente crescente, a solução que maximiza  $\ln \sigma(a_1, a_2, v)$  também maximizará  $\sigma(a_1, a_2, v)$ .

#### Restrições do tipo 3 (3.6c):

Nestes casos os limiares de veto dependem do valor dos coeficientes de importância e dos parâmetros  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Os parâmetros  $\alpha_j$  estão sujeitos apenas a restrições de limite, pelo que devemos fixá-los de forma a tornar  $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$  tão grande quanto possível (Proposição B.1):

$$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^U, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, \alpha_j \text{ pode assumir um valor qualquer}).$$

Resta agora considerar a credibilidade como função dos coeficientes de importância, já que os limiares de veto também o são. Sugerimos que se comece por resolver (PM1). No caso de o valor óptimo da concordância  $c(a_1, a_2, k)$  ser igual a zero ou a um, o valor óptimo do índice de credibilidade  $\sigma(a_1, a_2, k)$  será de zero ou um, respectivamente: não é necessário prosseguir. Mesmo quando o valor óptimo de  $c(a_1, a_2, k)$  esteja no intervalo  $]0, 1[$  pode não ser necessário continuar, desde que os valores dos limiares de veto correspondentes a essa solução ( $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$ ) sejam tais que  $d_j(a_1, a_2) \leq c(a_1, a_2) \quad \forall j \in J^d$ , pois nesse caso o valor óptimo do índice de credibilidade coincide com o valor óptimo do índice de concordância multicritério.

Se, apesar de tudo, for necessário continuar, então podemos adicionar as restrições seguintes, que limitam superiormente cada coeficiente de importância, para delimitar a optimização ao domínio onde  $\sigma(a_1, a_2, k)$  não se anula por motivo de veto:

$$k_j \leq \alpha_j / (-\Delta_j - p_j) - \varepsilon, \quad j \in J^d \quad (\text{onde } \varepsilon \text{ é um valor positivo muito pequeno}).$$

Pode suceder que não exista nenhuma combinação  $k \in K$  satisfazendo aquelas restrições adicionais. Nesse caso não se continua: o valor máximo do índice de credibilidade tem de ser zero. Caso contrário, resolve-se o seguinte problema de programação não-linear (com restrições lineares):

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \max \{ \sigma(a_1, a_2, k) : (k_1, \dots, k_n) \in K, k_j \leq \alpha_j / (-\Delta_j - p_j) - \varepsilon (j \in J^d) \} \quad (\text{PM3}).$$

Pela Proposição B.7, dado que neste momento  $\sigma(a_1, a_2, k) \in ]0, 1[$ , estamos a maximizar uma função estritamente quasicôncava. Logo, qualquer máximo local terá de ser um máximo global.

### Sobre a resolução dos subproblemas

Mostrámos acima como determinar  $\max\{\sigma(a_1, a_2, t) : t \in T\}$  dividindo aquele problema em subproblemas mais simples de resolver. Os problemas (PMØ) e (PM1) podem ser otimizados de forma fácil utilizando a programação linear, ao passo que os problemas (PM2) e (PM3), por serem não-lineares, são geralmente mais difíceis de resolver. Para estes últimos, a dificuldade é acrescida pelo facto da função objectivo não ser diferenciável. Existem, porém, muitas técnicas de optimização, que utilizam generalizações da noção de gradiente,<sup>4</sup> dedicadas a este tipo de problemas. Lemaréchal (1989) apresenta uma introdução a estas técnicas, como os métodos de planos de corte ou os métodos da Escola Soviética (incluindo o conhecido método dos elipsóides, também famoso no contexto de programação linear), em conjunto com uma bibliografia extensa. Embora muitas das técnicas de optimização não-diferenciável considerem a maximização de funções côncavas (ou a minimização de funções convexas, o que é equivalente), as mesmas podem frequentemente ser generalizadas para maximizar funções quasicôncavas (e.g. v. Plastria, 1988, no que respeita aos planos de corte, ou Gromicho, 1998, no que respeita ao método dos elipsóides).

A propriedade da quasiconcavidade estrita dos índices de credibilidade é importante, na medida em que permite utilizar métodos de optimização local para o problema de maximizar esses índices, porquanto qualquer óptimo local é um óptimo global. Para além disso, devemos notar que o problema é simplificado pelo facto das restrições serem lineares. Apesar das dificuldades que esta optimização ainda assim apresenta em teoria, a nossa experiência prática (v. Secção 5 infra) mostra que o máximo do índice de credibilidade se encontra habitualmente num vértice do polítopo, coincidindo com o máximo do índice de concordância encontrado pela programação linear. Nos restantes casos, verificámos que encontramos o máximo utilizando ferramentas facilmente disponíveis, como o software LINGO.

---

<sup>4</sup> Estas noções são aprofundadas em Clarke (1983).

## 4.2. Minimização de índices de credibilidade

Nesta subsecção discutimos a minimização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , sujeito a  $t \in T$ , pelo que iremos atribuir a cada tipo de parâmetros o valor que mais beneficia  $a_2$ , em detrimento de  $a_1$ . Não repetiremos as explicações e justificações apresentadas na subsecção 4.1 — limitar-nos-emos a expor as diferenças. A sequência de passos é agora a seguinte:

### i) Determinação dos desempenhos das acções.

À semelhança do caso da maximização, basta-nos resolver um programa linear para cada critério, agora para minimizar as diferenças de desempenho a favor de  $a_1$ :

$$(g_{1j}, g_{2j}) \leftarrow \arg \min \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \}, \quad j=1, \dots, n \quad (\text{Pm}\emptyset).$$

### ii) Determinação dos limiares de indiferença e preferência.

Tal como no caso da maximização, basta-nos fixar o valor de cada um destes parâmetros (para os índices  $j \in J^d$ ), desta vez no seu limite inferior:

$$q_j \leftarrow q_j^L \text{ e } p_j \leftarrow p_j^L, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, q_j \text{ e } p_j \text{ podem assumir um valor qualquer}).$$

### iii) Determinação dos coeficientes de importância e limiares de veto

Esta terceira etapa depende do tipo de restrições em causa.

#### Restrições do tipo 1 (3.6a).

Nestes casos, começamos por fixar cada limiar de veto, agora no seu limite inferior:

$$v_j \leftarrow v_j^L, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, v_j \text{ pode assumir um valor qualquer}).$$

Falta agora determinar o valor óptimo de  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , bastando-nos minimizar a concordância multicritério  $c(a_1, a_2, k)$  para minimizar  $\sigma(a_1, a_2, t)$ . Tal como no caso da maximização, o problema a resolver é um programa linear:

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \min \{ c(a_1, a_2, k): (k_1, \dots, k_n) \in K \} \quad (\text{Pm1}).$$

#### Restrições do tipo 2 (3.6b).

Nestes casos, podemos encontrar separadamente as combinações de valores para os coeficientes de importância e para os limiares de veto que mais prejudicam  $a_1$ . Em primeiro lugar, recomendamos testar se existe possibilidade de veto, i.e. averiguar se:

$$\exists (v_1, \dots, v_n) \in V, j \in J^d: v_j \leq -\Delta_j.$$

Em caso afirmativo, então a credibilidade mínima é obviamente nula.

Se não existir possibilidade de veto, prosseguimos de forma análoga ao caso da maximização. Resolvemos primeiro o programa linear (Pm1) para encontrar a concordância mínima. Se o valor mínimo da concordância multicritério obtido em (Pm1) for igual a zero ou igual a um, então o valor mínimo do índice de credibilidade será de zero ou um, respectivamente, independentemente do valor dos limiares de veto. Em qualquer destes dois casos, não é necessário continuar.

No caso de o valor óptimo encontrado em (Pm1) estar no intervalo  $]0, 1[$ , consideramos fixos os coeficientes de importância já obtidos (óptimos) e minimizamos o índice de credibilidade como função dos limiares de veto:<sup>5</sup>

$$(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \min \{ \sigma(a_1, a_2, v) : (v_1, \dots, v_n) \in V \} \quad (\text{Pm2}).$$

A função não-linear  $\sigma(a_1, a_2, v)$  é, nestas condições, estritamente quasicôncava (Proposição B.4), pelo que pode possuir múltiplos mínimos locais. Contudo, por ser quasicôncava, sabemos que o seu mínimo global se encontra num dos vértices do polítopo  $V$  (v. Bazaraa et al., 1993:107).

#### Restrições do tipo 3 (3.6c).

Nestes casos começaremos por fixar o valor dos parâmetros  $\alpha_j$ , por forma a tornar  $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$  tão pequeno quanto possível:

$$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^L, \quad j \in J^d \quad (\text{para } j \notin J^d, \alpha_j \text{ pode assumir um valor qualquer}).$$

Seguidamente, recomendamos testar se existe possibilidade de veto, i.e. averiguar se:

$$\exists (k_1, \dots, k_n) \in K, j \in J^d: k_j \geq \alpha_j / (-A_j - p_j).$$

Em caso afirmativo, a credibilidade mínima é de zero.

Se não existir possibilidade de veto, minimizaremos a credibilidade como função dos coeficientes de importância:<sup>6</sup>

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \min \{ \sigma(a_1, a_2, k) : (k_1, \dots, k_n) \in K \} \quad (\text{Pm3}).$$

Estamos a minimizar uma função, não-linear, estritamente quasicôncava (Proposição B.7), pelo que o seu mínimo global encontrar-se-á num dos vértices do polítopo  $K$ .

<sup>5</sup> Em relação ao problema de maximização, notemos que não são necessárias as restrições adicionais, dado que foi já estabelecido, nesta altura, que não existe possibilidade de veto.

<sup>6</sup> v. nota anterior.

**Sobre a resolução dos subproblemas**

Tal como no caso da maximização, mostrámos que a determinação de  $\min\{\sigma(a_1, a_2, t): t \in T\}$  pode ser conseguida dividindo aquele problema em subproblemas mais simples de resolver. Os problemas (Pm0) e (Pm1) podem ser otimizados de forma fácil utilizando a programação linear, ao passo que os problemas (Pm2) e (Pm3), por terem funções objectivo não-lineares, são geralmente mais difíceis de resolver. Para estes últimos, a dificuldade é acrescida devido ao facto da função objectivo não ser convexa (nem sequer quasiconvexa), pelo que podem existir múltiplos mínimos locais. Entramos, assim, no domínio da optimização global (e.g. v. Rinnooy Kan e Timmer, 1989; Horst e Pardalos, 1995, Horst et al., 1995).

A propriedade da quasiconcavidade dos índices de credibilidade é também aqui importante, indicando-nos que o seu mínimo num domínio convexo (como é o caso de um polítopo) ocorre num ponto extremo desse domínio (um vértice, quando se trata de um polítopo). Existem múltiplas técnicas exactas para resolver este tipo de problemas de minimização de funções côncavas ou quasicôncavas (e.g. Horst e Tuy, 1996<sup>7</sup>), não se considerando que estes problemas sejam suficientemente difíceis para que se recorra a abordagens heurísticas.<sup>8</sup> Na prática, o polítopo não possui em geral muitos vértices, e é repetidamente utilizado para muitos problemas referentes a diferentes pares de acções, nos quais a função objectivo muda mas as restrições são sempre as mesmas. Pode então ser vantajoso enumerar (por uma vez apenas) todos os vértices do polítopo, para o que existem múltiplas técnicas disponíveis.<sup>9</sup> Uma vez determinada, a lista de vértices será então percorrida, sempre que necessário, para encontrar aquele em que cada função atinge o seu valor mínimo.

---

<sup>7</sup> Horst e Tuy apresentam métodos baseados em aproximações sucessivas (e.g. aproximar a região admissível pelo exterior usando planos de corte; aproximar a região admissível pelo interior “anexando” poliedros; ou utilizando aproximações à função a otimizar) e métodos baseados em partições e avaliações sucessivas (*branch and bound*). Alguns destes métodos podem ser adaptados ao caso em que a região admissível é um conjunto convexo qualquer, enquanto outras assumem que se trata de um polítopo (v. também Horst et al., 1995: 158ss).

<sup>8</sup> Em particular, técnicas baseadas em algoritmos genéticos, mas também pesquisa aleatória, pesquisa tabu, entre outras (v. Horst e Pardalos, 1995; Pinter, 1996).

<sup>9</sup> Para citar apenas algumas, v. Dyer e Proll, 1982; Chen et al., 1991; Avis e Fukuda, 1992; Bremner et al., 1997. O problema da enumeração dos vértices de um poliedro dada a expressão dos hiperplanos que o definem pode ser transformado no seu dual, que consiste em encontrar, para um dado conjunto de pontos, o conjunto dos hiperplanos que define o seu invólucro convexo (*convex hull*), podendo-se recorrer a algoritmos desenhados para este segundo problema para resolver o primeiro (e.g. v. Barber et al., 1996). Para uma confrontação de alguns algoritmos v. Avis et al. (1997).

### 4.3. Resumo

Apresentamos aqui dois quadros que resumem a sequência de passos que propusemos para maximizar e para minimizar índices de credibilidade. Seja dado um qualquer par ordenado de acções  $(a_1, a_2)$  e um qualquer polítopo  $T$  do tipo 1, 2 ou 3. Então, para determinar o intervalo de variação do índice de credibilidade  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , face a  $T$ , podemos seguir o seguinte processo:

Maximização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , sujeito a  $t \in T$ :

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
$(g_{1j}, g_{2j}) \leftarrow \arg \max \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \}, j=1, \dots, n$ $q_j \leftarrow q_j^U$ e $p_j \leftarrow p_j^U, j \in J^d$		
$v_j \leftarrow v_j^U, j \in J^d$ $k \leftarrow \arg \max \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \}$	$k \leftarrow \arg \max \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \}$ Se $\max \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \} \in ]0, 1[$ então $v \leftarrow \arg \max \{ \sigma(a_1, a_2, v): v \in V, v_j \geq \Delta_j + \varepsilon (j \in J^d) \}$	$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^U, j \in J^d$ Se $\max \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \} \in ]0, 1[$ $\wedge \exists j \in J^d: d_j(a_1, a_2) > c(a_1, a_2)$ então $k \leftarrow \arg \max \{ \sigma(a_1, a_2, k): k \in K, k_j \leq \alpha_j / (-\Delta_j - p_j) - \varepsilon (j \in J^d) \}$

Minimização de  $\sigma(a_1, a_2, t)$ , sujeito a  $t \in T$ :

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
$(g_{1j}, g_{2j}) \leftarrow \arg \min \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \}, j=1, \dots, n$ $q_j \leftarrow q_j^L$ e $p_j \leftarrow p_j^L, j \in J^d$		
$v_j \leftarrow v_j^L, j \in J^d$ $k \leftarrow \arg \min \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \}$	Se $\exists v \in V, j \in J^d: v_j \leq -\Delta_j$ então termina (mínimo é zero); Se não, $k \leftarrow \arg \min \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \}$ Se $\min \{ c(a_1, a_2, k): k \in K \} \in ]0, 1[$ então $v \leftarrow \arg \min \{ \sigma(a_1, a_2, v): v \in V \}$	$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^L, j \in J^d$ Se $\exists k \in K, j \in J^d: k_j \geq \alpha_j / (-\Delta_j - p_j)$ então termina (mínimo é zero); Se não, $k \leftarrow \arg \min \{ \sigma(a_1, a_2, k): k \in K \}$

## 5. Exemplos ilustrativos

---

Esta secção ilustra o procedimento que propomos, dividindo-se em três partes. Na primeira, apresentamos com algum detalhe a maximização e a minimização de um índice de credibilidade. Na segunda, mostramos o papel que o procedimento pode ter na prática, em situações onde não se pretenda atribuir coeficientes de importância aos critérios (em alternativa ao ELECTRE IV). Por fim, mostramos outra potencial aplicação prática para este procedimento: as decisões de aceitação / rejeição de acções.

### 5.1. Determinação do intervalo de variação de um índice de credibilidade

Apresentamos aqui algumas experiências numéricas para ilustrar, em detalhe, a resolução do problema de encontrar o intervalo de variação de um índice de credibilidade. Baseamo-nos num exemplo de Mousseau (1993), onde se utilizam dez critérios num contexto de avaliação de apartamentos para arrendamento. Nesse exemplo, Mousseau definiu um polítopo  $K$  de valores aceitáveis para os coeficientes de importância, a partir das respostas de um decisor a algumas questões colocadas. As restrições que definem  $K$  são as seguintes:<sup>10</sup>

$$\begin{array}{llll}
 k_1 < k_2 & k_2 < 2 k_1 & & \\
 k_3 > k_2 & k_3 < k_1 + k_2 & & \\
 k_4 > k_2 + k_3 - k_1 & k_4 > k_1 + k_3 & k_4 < k_2 + k_3 & \\
 k_5 > k_4 & k_5 < k_2 + k_3 & & \\
 k_6 > k_2 + k_3 - 2k_1 & k_6 > k_5 & k_6 < k_2 + k_3 & \\
 k_7 > k_1 + k_6 & k_7 > k_4 + k_5 - k_1 & k_7 > k_6 & k_7 < k_4 + k_5 + k_1 \\
 k_8 > k_5 + k_6 - k_1 & k_8 > k_4 + k_6 & k_8 > k_7 & k_8 < k_4 + k_7 - k_1 \\
 k_9 = k_5 & k_{10} = k_6 & & \\
 k_1, \dots, k_{10} >= 0 & & & 
 \end{array}$$

Mousseau não apresenta no seu exemplo acções reais, mas apenas acções fictícias, cada uma com o melhor desempenho possível num dos critérios e o pior desempenho possível em todos os restantes critérios. Consideramos aqui duas acções  $a_1$  e  $a_2$ , também fictícias mas mais plausíveis, cujos desempenhos (fixos) estão contidos nos intervalos de desempenho definidos em Mousseau (1993). Os desempenhos destas duas acções são apresentados na Tabela IV.1, que indica igualmente os valores que decidimos fixar para os limiares de indiferença e de preferência.

---

<sup>10</sup> No nosso exemplo consideramos que as desigualdades não são estritas.



	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$
$a_1$	-4950	64	-43	4	-580	-500	540	-5500	4	3
$a_2$	-4350	59	-32	3	-450	-460	430	-3750	1	2
$q_j$	100	3	5	0.1	50	50	20	1000	0,4	0,4
$p_j$	300	6	10	0.2	150	150	50	2000	0,5	0,5

**Tabela VI.1. Desempenhos (a maximizar, daí os desempenhos negativos) e limiares fixos.**

No seu trabalho, Mousseau (1993) sugere a utilização dos valores da Tabela VI.2, que correspondem a uma combinação “central”  $k^* \in K$ . No nosso, pretendemos maximizar e minimizar o índice de credibilidade  $\sigma(a_1, a_2)$ , quando os coeficientes de importância estão confinados ao polítopo  $K$ .

	$k_1^*$	$k_2^*$	$k_3^*$	$k_4^*$	$k_5^*$	$k_6^*$	$k_7^*$	$k_8^*$	$k_9^*$	$k_{10}^*$
Original	1	1,5	2	3,25	3,38	3,44	6,63	7,78	3,38	3,44
Normalizado	0,0279	0,0419	0,0559	0,0908	0,0944	0,0961	0,1852	0,2173	0,0944	0,0961

**Tabela VI.2. Valores “centrais” para os coeficientes de importância**

Iremos apresentar três experiências de maximização e minimização de  $\sigma(a_1, a_2)$ , em que apenas se altera a definição dos limiares de veto. Para resolver os problemas de optimização, recorreremos a software que está facilmente disponível para qualquer pessoa: utilizaremos o *add-in Solver* (Fylstra et al., 1998), incluído na popular folha de cálculo Microsoft Excel, para resolver programas lineares, utilizaremos o LINGO (Schrage, 1998)<sup>11</sup> para resolver programas não-lineares e utilizaremos o *Linear Reverse Search Algorithm* (LRS) de Avis e Fukuda (1992), disponível na Internet,<sup>12</sup> para resolver problemas de enumeração de vértices.

#### Primeira experiência

Consideremos primeiro uma situação com limiares de veto fixos (o que ocorre em problemas com restrições do tipo 1):

$$v = (700, 15, 30, 2, 500, 500, 200, 5000, 3, 3).$$

Neste caso, os problemas de maximizar e minimizar a credibilidade  $\sigma(a_1, a_2, k)$ , enquanto função dos coeficientes de importância, podem ser resolvidos pela programação linear. Utilizando o Solver do

<sup>11</sup> Mais concretamente, a versão de demonstração disponível gratuitamente em <http://www.lindo.com>.

<sup>12</sup> Existe uma implementação de domínio público deste algoritmo, elaborada por David Avis. Pode-se carregar por FTP o código fonte (em linguagem C) desse software a partir do endereço [mutt.cs.mcgill.ca](http://mutt.cs.mcgill.ca) (directório pub/C).

Excel para maximizar e minimizar a concordância  $c(a_1, a_2, k)$ , sujeita a  $k \in K$ , obtemos o seguinte intervalo de variação (valores arredondados):

$$0,653 \leq c(a_1, a_2, k) \leq 0,704.$$

Face ao valor fixado para  $v$ , o intervalo de variação do índice de credibilidade correspondente é:

$$0,653 \leq \sigma(a_1, a_2, k) \leq 0,704.$$

Dado que a credibilidade coincide com a concordância, verifica-se que não há efeitos de discordância.

A obtenção destes resultados é praticamente instantânea num computador Pentium (166 MHz).

### Segunda experiência

Consideremos agora uma situação com restrições do tipo 3, na qual os limiares de veto são função dos coeficientes de importância  $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), sendo por isso os valores admissíveis para esses limiares definidos indirectamente através do polítopo  $K$ . Escolhamos valores fixos para os parâmetros  $\alpha_j$ , por forma a que os limiares de veto estejam próximos dos considerados no exemplo anterior, quando os coeficientes de importância assumem os valores “centrais”  $k^*$  (Tabela VI.2). Concretizando, seja

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (11,2, 0,4, 1,2, 0,16, 33, 34, 10, 650, 0,25, 0,25),$$

a que corresponde, para os valores “centrais” dos coeficientes de importância,

$$v = (v_1, \dots, v_n) = (700,96, 15,5467, 31,48, 1,9625, 499,53, 503,84, 104, 4991, 3,1479, 3,1017).$$

Verificamos facilmente na folha de cálculo que, para alguns valores dos coeficientes de importância  $k$ , a diferença de desempenhos entre  $a_1$  e  $a_2$  pode ultrapassar o limiar de veto, pelo que a credibilidade mínima é de zero. Para o problema de maximizar  $\sigma(a_1, a_2, k)$ , recorreremos às capacidades de optimização não-linear do software LINGO. Trata-se de um software concebido para resolver problemas de maximização de funções côncavas (ou minimização de funções convexas) e diferenciáveis, embora seja também capaz de resolver alguns problemas que não possuam aquelas características. No nosso caso, para os problemas que testámos, o LINGO conseguiu atingir a solução óptima em tempo praticamente instantâneo (1 segundo), apesar das funções a maximizar serem (apenas) estritamente quasicôncavas e de as suas derivadas não serem contínuas em alguns pontos.<sup>13</sup> Nesta experiência em concreto, o LINGO encontra um valor máximo de credibilidade de 0,703 num ponto que não é vértice de  $K$ . O intervalo de variação do índice de credibilidade é agora o seguinte:

$$0 \leq \sigma(a_1, a_2, k) \leq 0,703.$$

Como curiosidade, os índices de credibilidade que correspondem às soluções (vértices de  $T$ ) que fornecem valores extremos para o índice de concordância ( $0,653 \leq c(a_1, a_2, k) \leq 0,704$ ), resultam num intervalo muito mais reduzido:

$$0,441 \leq \sigma(a_1, a_2, k) \leq 0,609.$$

### Terceira experiência

Por fim, mudemos o valor de  $\alpha_1$  para 16 e o valor de  $\alpha_3$  para 1,2, para que a credibilidade mínima seja positiva, e repetamos os processos de maximizar e de minimizar  $\sigma(a_1, a_2, k)$ . A credibilidade máxima é agora de 0,704, sendo facilmente encontrada num vértice de  $K$  ao maximizarmos a concordância (ausência de efeito de discordância para essa solução).

Para minimizar  $\sigma(a_1, a_2, k)$  não recorremos ao software LINGO, pois trata-se de um problema de optimização global (minimizar uma função quasicôncava) e o LINGO termina a optimização assim que encontra um óptimo local. Em primeiro lugar, verificamos se a credibilidade mínima pode ser nula, utilizando programação linear. Uma vez que não o é, recorremos ao algoritmo LRS de Avis e Fukuda (1992), para encontrar os 46 vértices de  $K$  (tempo de execução inferior a um segundo), pois sabemos que a credibilidade mínima pode ser encontrada num deles. É então fácil encontrar a solução onde a credibilidade atinge o seu mínimo, que é de 0,127. Em resumo, o intervalo de variação da credibilidade é agora:

$$0,127 \leq \sigma(a_1, a_2, k) \leq 0,704.$$

A título de curiosidade, notemos ainda que se situarmos neste intervalo o valor do índice de credibilidade correspondente aos valores “centrais” dos coeficientes de importância (Tabela VI.2), verificamos que  $\sigma(a_1, a_2, k^*) = 0,678$ , situando-se longe do centro daquele intervalo.

---

<sup>13</sup> Também experimentámos utilizar o Solver do Excel para resolver os mesmos problemas não-lineares. Porém, em algumas situações (embora raras), este terminou a optimização antes de atingir a solução óptima.

## 5.2. Conclusões robustas referentes às acções melhor posicionadas numa ordenação

Nesta subsecção apresentamos um primeiro exemplo para mostrar como a determinação do intervalo de variação de índices de credibilidade pode ser utilizada na prática. Consideraremos o já clássico estudo conduzido por Roy e Hugonnard no início dos anos 80 (v. Roy e Hugonnard, 1982 ou Roy e Bouyssou, 1993: Cap. 10), referente à avaliação de projectos de expansão da rede de metro de Paris. Este caso é particularmente relevante por não estar disponível informação relativa à importância relativa dos critérios que permita fixar o valor dos coeficientes de importância.

O estudo de Roy e Hugonnard foi conduzido utilizando o método ELECTRE IV para ordenar os projectos por ordem de prioridade. Segundo os seus autores, aquele método pode ser utilizado quando se pretende avançar no processo de decisão sem especificar coeficientes de importância para os critérios, desde que nenhum critério pese tanto que seja mais importante do que uma coligação de metade do número total dos critérios, nem pese tão pouco que possa ser removido. Trata-se, aliás, de um método propositadamente desenvolvido para aquele estudo.

O estudo original utilizou seis critérios para ordenar doze projectos. O breve estudo que efectuaremos aqui consiste em determinar os intervalos de variação dos índices de credibilidade resultantes da comparação entre pares de projectos, por forma a tentar aferir a robustez de algumas conclusões. Para efeitos desta ilustração cingir-nos-emos, contudo, ao conjunto dos cinco projectos melhor colocados no estudo original (Tabela VI.3).

Projecto	População servida ( $g_1$ : Max)	Tráfego/Km ( $g_2$ : Max)	Custo/Km ( $g_3$ : Min)	T. I. R. ( $g_4$ : Max)	Organização da rede ( $g_5$ : Min)	Efeito sobre urbanismo ( $g_6$ : Min)
5	12500	7100	110	4,6	2	2
7N	33100	11500	140	14,1	3	11
7S	24000	11200	160	12,0	12	7
8	17100	4000	40	11,8	18	3
13B	37650	10400	130	12,2	3	12

**Tabela VI.3. Desempenhos de cinco projectos.**

O estudo original considerava duas combinações possíveis de valores para os limiares de indiferença e de preferência. Segundo a lógica do nosso procedimento, consideramos esses valores como limites para esses limiares, admitindo quaisquer combinações que se situem dentro desses limites

(Tabela VI.4). Seguindo ainda o estudo original, consideramos que o limiar de veto é o dobro do limiar de preferência, pelo que ficam também definidos limites de variação para os limiares de veto.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
$q_j^L$	0,10 $g_1(\cdot)$	0,15 $g_2(\cdot)$	0,10 $g_3(\cdot)$	1,0	2	2
$p_j^L$	0,20 $g_1(\cdot)$	0,30 $g_2(\cdot)$	0,25 $g_3(\cdot)$	2,5	5	5
$q_j^U$	0,15 $g_1(\cdot)$	0,20 $g_2(\cdot)$	0,15 $g_3(\cdot)$	1,5	3	3
$p_j^U$	0,25 $g_1(\cdot)$	0,35 $g_2(\cdot)$	0,30 $g_3(\cdot)$	3,5	6	6

**Tabela VI.4. Limites para os limiares de indiferença e de preferência. Os limiares para os três primeiros critérios variam proporcionalmente com os desempenhos**

No nosso estudo, ao invés de utilizar um método que não requer coeficientes de importância (o ELECTRE IV), iremos considerar que estes são variáveis e restringi-los-emos muito pouco, considerando um polítopo admissível  $K$  definido da seguinte forma:

$$K = \{(k_1, \dots, k_6): 1/12 \leq k_j \leq 3/12 (j = 1, \dots, 6) \text{ e } k_1 + k_2 + \dots + k_6 = 1\}.$$

Deste modo, os critérios podem ter um coeficiente de importância em torno da combinação correspondente à que teriam se fossem igualmente importantes ( $k_1 = k_2 = \dots = k_6 = 1/6$ ), assegurando ainda que nenhum critério pode ter maior peso do que uma coligação de três outros critérios, tal como pressupõe o estudo original.

Encontramo-nos, portanto, numa situação com restrições do tipo 1 (3.6a), onde os coeficientes de importância podem variar em  $K$ , os limiares de indiferença podem variar em  $q_j \in [q_j^L, q_j^U]$ , os limiares de preferência podem variar em  $p_j \in [p_j^L, p_j^U]$  e os limiares de veto podem variar em  $v_j \in [2 p_j^L, 2 p_j^U]$ . Para encontrar a credibilidade máxima (mínima, respectivamente), começamos por fixar os diversos limiares no seu limite superior (inferior, respectivamente) e posteriormente maximizamos (minimizamos, respectivamente) a concordância utilizando a programação linear. Temos de resolver 40 problemas lineares, cujos resultados apresentamos na Tabela VI.5.

	5	7N	7S	8	13B
5	-	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]
7N	[0,254, 0,881]	-	[0,833, 0,972]	[0,000, 0,000]	[0,906, 1,000]
7S	[0,000, 0,778]	[0,013, 0,808]	-	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]
8	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]	[0,000, 0,000]	-	[0,000, 0,000]
13B	[0,000, 0,915]	[0,850, 0,983]	[0,750, 0,944]	[0,000, 0,000]	-

**Tabela VI.5. Intervalos de variação dos índices de credibilidade face à informação imprecisa.**

Podemos extrair agora conclusões robustas como “a credibilidade de 5 prevalecer sobre 7N é nula”, ou “a credibilidade de 7N prevalecer sobre 7S é superior a 0,8”. Se considerarmos um limiar de corte  $\lambda = 0,7$  (por exemplo) para separar a prevalência da não prevalência (existirá prevalência entre duas acções se esta tiver credibilidade igual ou superior a  $\lambda$ ), então podemos extrair as seguintes conclusões robustas:

- “7N e 13B são indiferentes (uma prevalece sobre a outra e vice-versa)”;
- “13B é preferível a 7S (prevalece e não é prevalecida)”;
- “7N prevalece sobre 7S”;
- “5 e 8 são incomparáveis (não existe relação de prevalência entre elas)”;
- “7S e 8 são incomparáveis”;
- “13B e 8 são incomparáveis”; e
- “7N e 8 são incomparáveis”.

Apesar do nosso procedimento ser muito diferente daquele utilizado por Roy e Hugonnard, é curioso verificar que todas as conclusões, excepto as duas últimas, concordam com as conclusões do estudo original.<sup>14</sup> Poderíamos concluir afirmando que existe indiferença entre os projectos 7N e 13B, podendo este último justificar a exclusão de 7S do primeiro lugar do ranking. O projecto 8 é claramente incomparável com os restantes. Quanto ao projecto 5, pouco se pode afirmar acerca do modo como se compara com os outros. Seria necessária informação mais precisa (i.e. novas restrições a  $K$  ou limites de variação mais estreitos para os limiares) se pretendêssemos esclarecer este último ponto. Aliás, um dos resultados úteis da nossa análise é precisamente a identificação das conclusões que mais são afectadas pela imprecisão da informação, conforme indicado pela amplitude do intervalo de variação. Neste exemplo, as conclusões “7N prevalece sobre 5”, “7S prevalece sobre 5”, “7S prevalece sobre 7N” e “13B prevalece sobre 5” são as conclusões mais afectadas.

### **5.3. Conclusões robustas referentes a decisões de aceitação / rejeição**

Esta subsecção apresenta um novo exemplo das potencialidades da análise aqui descrita para ser utilizada na prática, agora num contexto de decisões de aceitação vs. rejeição. Neste contexto, efectua-se frequentemente uma segmentação tricotómica das acções em três conjuntos: acções a aceitar,

acções a rejeitar e acções em que subiste a dúvida entre aceitar e rejeitar. Um exemplo, que ora retomamos, é apresentado por Hurson e Zopounidis (1997), referindo-se à avaliação de acções cotadas na Bolsa de Atenas. O estudo destes autores abrangeu vinte acções do sector comercial e outras vinte do sector industrial, avaliadas segundo seis critérios. Neste exemplo focaremos apenas a avaliação das vinte acções do sector comercial, cujos desempenhos estão patentes na Tabela VI.6, conjuntamente com a classe atribuída a cada uma.

Acção	retorno	liquidez	beta	dividendo/ preço	crescimento do dividendo	“teste ácido”	Classe
$i$	$(g_1: \text{Max})$	$(g_2: \text{Max})$	$(g_3: \text{Min})$	$(g_4: \text{Max})$	$(g_5: \text{Max})$	$(g_6: \text{Max})$	
1	0,82	0,45	0,26	-4,7	-100	0,45	a rejeitar
2	0,41	0,63	0,03	2,28	-20	2,04	?
3	0,57	0,20	0,10	6,08	-33	1,08	?
4	0,24	0,02	0,08	2,41	-54	0,62	a rejeitar
5	0	0,46	0,62	5,04	-77	3,02	?
6	0,93	0,02	0,14	2,82	6,38	0,72	?
7	0,01	0,69	0,77	7,55	-40	3,23	?
8	0,86	0,86	0,86	4,28	3,71	0,57	?
9	2,16	0,60	0,12	2,11	56,3	0,51	?
10	1,24	0,12	0,62	11,7	12,5	1,17	a aceitar
11	0,80	0,58	0,62	13,7	34,6	1,54	a aceitar
12	1,23	0,37	0,64	8,97	45,9	0,96	?
13	0,24	0,28	0,73	-1,8	0	0,72	a rejeitar
14	0,26	0,65	0,58	4,88	7,14	0,90	?
15	1,10	0,76	0,54	0,29	0	0,73	?
16	1,79	0,55	0,73	5,88	-100	2,69	a aceitar
17	1,02	1,06	0,82	5,5	6,38	0,73	?
18	1,32	1,12	0,94	12,1	-61	2,69	a aceitar
19	1,36	0,04	1,02	1,79	110	2,31	a rejeitar
20	0,57	0,17	0,23	-12	0	0,52	a rejeitar

**Tabela VI.6. Avaliação de vinte acções do sector comercial.**

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
$b^H$	1	0,70	0,25	6	10	1,1
$b^L$	0,5	0,35	0,60	2,5	0	0,7
$q_j$	0,05	0,05	0	0,1	8,72	0,05
$p_j$	0,25	0,20	0,2	0,5	10	0,25
$v_j$	2	1	1	10	180	2,75

**Tabela VI.7. Desempenho das acções de referência e limiares dos critérios.**

<sup>14</sup> Neste, 13B e 7B eram ambas consideradas preferíveis a 8.

Para efectuar a tricotomia, Hurson and Zopounidis (1997) utilizaram a variante pessimista do método ELECTRE TRI (para detalhes sobre este método v. Capítulo VIII). Cada acção a classificar foi comparada com duas acções de referência fictícias  $b^L$  e  $b^H$ , cujos desempenhos são apresentados na Tabela VI.7 (note-se que  $b^L$  é pior do que  $b^H$  em todos os critérios). Após ser definido um limiar de corte  $\lambda$ , cada acção  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 20$ ) é classificada como:

- “a aceitar”, se  $\sigma(a_i, b^H) \geq \lambda$  (o que implica também  $\sigma(a_i, b^L) \geq \lambda$ );
- “a rejeitar”, se  $\sigma(a_i, b^L) < \lambda$  (o que implica também  $\sigma(a_i, b^H) < \lambda$ );
- “interrogação”, se  $\sigma(a_i, b^H) < \lambda$  e  $\sigma(a_i, b^L) \geq \lambda$ .

Os valores utilizados para os limiares de indiferença, preferência e veto estão patentes na Tabela VI.7. Hurson e Zopounidis (1997) não nos indicam os valores dos coeficientes de importância que utilizaram no cálculo dos índices de credibilidade nem o valor do limiar de corte.

Consideremos agora uma análise baseada em informação imprecisa. Suponhamos que existe apenas uma acção de referência  $b^R$  e que a imprecisão acerca do valor dos parâmetros se cinge aos desempenhos dessa acção nos vários critérios. Para cada critério, o desempenho de  $b^R$  pode variar num intervalo,  $g_j(b^R) \in [g_j(b^L), g_j(b^H)]$ , onde os valores de  $g_j(b^L)$  e  $g_j(b^H)$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) são precisamente os patentes na Tabela VI.7. Classifiquemos agora cada acção  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 20$ ) como:

- “a aceitar”, se  $a_i S b^R$  para todas as combinações aceitáveis de valores, i.e.  $\min\{\sigma(a_i, b^R)\} \geq \lambda$ ;
- “a rejeitar”, se  $\neg(a_i S b^R)$  para todas as combinações aceitáveis de valores, i.e.

$$\max\{\sigma(a_i, b^R)\} < \lambda;$$

- “interrogação”, se nenhum dos casos anteriores se verificar.

Reparemos então que este procedimento é equivalente ao anterior. Por exemplo, ao minimizar  $\sigma(a_i, b^R)$ , colocaríamos os desempenhos de  $b^R$  no melhor valor possível, pelo que coincidiriam com  $b^H$ . Logo,

$$\min\{\sigma(a_i, b^R)\} \geq \lambda \Leftrightarrow \sigma(a_i, b^H) \geq \lambda.$$

De forma análoga se verifica a equivalência para os casos das acções “a rejeitar” e das acções “interrogação”. Não só este procedimento com informação imprecisa é equivalente ao anterior, como possui a vantagem de poder ser generalizado, porquanto para além de informação imprecisa acerca dos desempenhos da acção  $b^R$ , podemos ter informação imprecisa relativamente a outros parâmetros.

Consideremos então que os valores para os desempenhos indicados na Tabela VI.7 são os limites para o desempenho (variável) da acção  $b^R$ , enquanto tomamos como fixos os valores para os limiares de



indiferença e de preferência patentes na mesma tabela. Dado que Hurson e Zopounidis não apresentam valores para os coeficientes de importância, arbitremos que estes são variáveis que podem assumir valores num polítopo  $K$  definido como se segue:

$$K = \{(k_1, \dots, k_6): 1/12 \leq k_j \leq 3/12 \ (j = 1, \dots, 6) \text{ e } k_1 + k_2 + \dots + k_6 = 1\}.$$

Trata-se do mesmo polítopo da subsecção anterior, que constitui um domínio de variação razoável quando não possuímos informação acerca dos coeficientes de importância, mas desejamos que nenhum critério seja preponderante e que nenhum critério seja negligenciável. Por fim, para termos desta vez uma situação de programação não-linear, consideremos que os limiares de veto dependem dos coeficientes de importância:

$$v_j = p_j + \alpha_j / k_j,$$

com  $\alpha_j$  fixos de tal forma que os limiares de veto coincidem com os da Tabela VI.7 quando  $k_j = 1/6$  ( $j = 1, \dots, 6$ ).

Utilizando os processos referidos na Secção 4, verificaríamos que todas as acções são classificadas como “interrogação” (considerando  $\lambda = 0,5$ ). Neste caso, a informação é demasiado pobre para extrair conclusões mais interessantes. Verifiquemos então o que sucederia se, por exemplo, os decisores fornecessem a seguinte ordenação dos critérios por ordem de importância:

$$k_5 \geq k_4 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_6.$$

Os resultados para as duas situações surgem na Tabela VI.8. Verifica-se, conforme era de esperar, que a informação adicional (ordenação dos critérios) conduz a um menor número de acções classificadas como “interrogação”, embora estas sejam ainda muitas. Seria necessário restringir  $K$ , ou estreitar os intervalos de variação dos desempenhos e limiares de indiferença e de preferência, para reduzir mais o número de interrogações. A solicitação dessa informação seria, porventura, facilitada pela reacção dos decisores aos resultados já calculados.

Em termos computacionais, há um aspecto muito importante a assinalar. Com a excepção de dois casos, os quarenta problemas de optimização foram resolvidos utilizando apenas a programação linear. Para quase todos os casos, portanto, o óptimo da optimização da concordância ocorreu num vértice de  $K$  onde não se verificava nenhum efeito de discordância, pelo que era o óptimo também em termos de credibilidade. Nos restantes dois casos, ocorreram situações diferentes. Para o projecto  $I$ , com ordenação dos critérios, a concordância óptima foi de 0,55, a que correspondia uma credibilidade de

0,254 que, por ser inferior à concordância, indica a presença de algum efeito de discordância. Tivemos portanto que recorrer à programação não-linear para encontrar a solução (que não se situa num vértice) que otimiza a credibilidade. Para o projecto 20, com ordenação dos critérios, verificámos que não existia nenhuma combinação de valores que impedisse um veto absoluto por parte do quarto critério (o que se pôde verificar minimizando  $k_4$ ), pelo que a credibilidade é sempre nula.

	Intervalo de variação da credibilidade		Aceitação / Rejeição ( $\lambda=0,5$ )	
	sem ordenação dos critérios	com ordenação dos critérios	sem ordenação dos critérios	com ordenação dos critérios
1	[0,000, 0,750]	[0,000, 0,277]	?	a rejeitar
2	[0,144, 0,875]	[0,144, 0,750]	?	?
3	[0,137, 0,861]	[0,318, 0,722]	?	?
4	[0,003, 0,713]	[0,007, 0,481]	?	a rejeitar
5	[0,090, 0,825]	[0,011, 0,650]	?	?
6	[0,024, 0,917]	[0,230, 0,917]	?	?
7	[0,056, 0,763]	[0,261, 0,525]	?	?
8	[0,062, 0,883]	[0,360, 0,883]	?	?
9	[0,332, 0,881]	[0,583, 0,821]	?	a aceitar
10	[0,288, 0,908]	[0,663, 0,908]	?	a aceitar
11	[0,446, 0,992]	[0,594, 0,992]	?	a aceitar
12	[0,388, 0,983]	[0,592, 0,983]	?	a aceitar
13	[0,000, 0,746]	[0,000, 0,583]	?	?
14	[0,125, 0,921]	[0,318, 0,881]	?	?
15	[0,035, 0,917]	[0,059, 0,850]	?	?
16	[0,041, 0,863]	[0,102, 0,738]	?	?
17	[0,102, 0,917]	[0,500, 0,917]	?	a aceitar
18	[0,075, 0,833]	[0,543, 0,708]	?	a aceitar
19	[0,000, 0,750]	[0,118, 0,583]	?	?
20	[0,000, 0,790]	[0,000, 0,000]	?	a rejeitar

**Tabela VI.8. Resultados da tricotomia na análise com informação imprecisa.**

## 6. Notas conclusivas

Neste capítulo discutimos alguns dos benefícios que poderão advir de uma análise baseada na aceitação de informação imprecisa e na procura de conclusões robustas, no âmbito dos conhecidos métodos ELECTRE. Focámos a fase de construção de uma relação de prevalência difusa, i.e. o cálculo

dos índices de credibilidade que se encontram nos métodos ELECTRE III e ELECTRE TRI, podendo ainda ser usados como uma variante do ELECTRE IS.

Estudámos o problema de determinar o intervalo de valores para o índice de credibilidade compatível com a informação imprecisa que os decisores possam fornecer com segurança. Este intervalo é determinado através da minimização e da maximização do índice de credibilidade, sujeitas a um domínio  $T$  definido a partir da informação disponível. Assumimos que esse domínio pode ser caracterizado, de um modo razoável, através de um conjunto de restrições em que alguns parâmetros podem variar independentemente de outros.

O estudo que efectuámos permitiu-nos identificar quais as características do índice de credibilidade que facilitam (ou dificultam) os problemas de optimização a resolver. Trata-se de resolver programas lineares, quando os limiares de veto forem apenas limitados por intervalos, ou de resolver problemas não-lineares, estes apresentando potencialmente algumas dificuldades. Na prática, porém, mesmo estes últimos podem muitas vezes ser resolvidos ao otimizar-se a concordância por programação linear (problemas de maximização) ou por enumeração de vértices (problemas de minimização).

A partir dos intervalos de credibilidade é imediato extrair algumas conclusões (binárias) robustas. Considerando um par qualquer de acções  $(a_1, a_2)$  e um intervalo  $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$  para o limiar de corte  $\lambda$ , saberemos indicar que “ $a_1 S a_2$ ” é uma conclusão robusta se  $\min\{\sigma(a_1, a_2)\} \geq \lambda_{max}$ , enquanto “ $\neg(a_1 S a_2)$ ” é robusta se  $\max\{\sigma(a_1, a_2)\} \leq \lambda_{min}$ . Para além disso, esta análise indica, através da diferença entre  $\max\{\sigma(a_1, a_2)\}$  e  $\min\{\sigma(a_1, a_2)\}$ , quão influenciado é o índice de credibilidade pelo facto da informação ser imprecisa. A análise aqui descrita pode ainda ser útil em situações nas quais não se pretenda atribuir à partida importâncias distintas aos critérios ou em situações de segmentação tricotómica, conforme mostram os exemplos que apresentámos nas Secções 5.2 e 5.3.

Esta linha de investigação não se pode considerar já esgotada. Entre os temas para investigação futura, podemos destacar a construção e confrontação de algoritmos e de software para programação não-linear, dedicados às características específicas dos nossos problemas de maximização e minimização. Uma via complementar é o estudo de funções que, constituindo uma boa aproximação ao índice de credibilidade, possuam características mais propícias à optimização (nomeadamente a diferenciabilidade, ou a concavidade no lugar da quasiconcavidade). Um desafio que este capítulo deixa

em aberto é o de encontrar técnicas de exploração das relações robustas de prevalência. Sobre este aspecto, os exemplos que apresentámos nas Secções 5.2 e 5.3 deste capítulo fornecem desde já algumas pistas, que aprofundaremos nos capítulos seguintes.

# Capítulo VII

## Problemas de escolha utilizando o ELECTRE com informação imprecisa

### 1. Introdução ao problema

---

Neste capítulo, estudamos os métodos da família ELECTRE concebidos para as situações em que se pretende escolher uma acção, nomeadamente os ELECTRE I e IS, bem como uma variante que utiliza os índices de credibilidade estudados no capítulo anterior. Retomamos, pois, a problemática considerada no Capítulo V, agora considerando uma família de métodos, representativa dos procedimentos de prevalência (v. Capítulo II), bastante distinta da função de valor aditiva então estudada.

Os métodos ELECTRE concebidos para escolha começam por comparar as acções aos pares para construir, numa primeira fase, uma relação de prevalência. Aí intervêm parâmetros como os coeficientes de importância dos critérios, os seus limiares de veto e, salvo no caso do ELECTRE I, também limiares de indiferença e de preferência. Posteriormente, essa relação de prevalência é analisada, com o intuito de encontrar um subconjunto de acções, tão pequeno quanto possível, que permita justificar a exclusão de todas as outras. Nesta fase, intervém um novo parâmetro, o limiar de concordância (ou um limiar de corte). O interesse em aceitar informação imprecisa foi já sublinhado no Capítulo III. Assinalamos apenas, para o caso particular dos métodos ELECTRE, o número de parâmetros associado aos critérios e o carácter técnico do limiar de concordância (ou de corte).

Ao contrário do problema de escolha com informação imprecisa no contexto da função de valor aditiva, não existe praticamente investigação anterior no contexto dos métodos ELECTRE. Ainda assim, podemos referir a análise de robustez utilizando um conjunto discreto de combinações, num problema real em que se utilizou o ELECTRE IS (Roy e Bouyssou, 1993: 501-541), e os trabalhos de Hokkanen et al. (1998) e Miettinen e Salminen (1999), onde se apresenta um processo para encontrar (se existir) a combinação de valores para os coeficientes de importância que torna cada acção a melhor, segundo a regra *min* (Pirlot, 1995). Se esta última perspectiva de análise é completamente diferente da nossa, já a primeira está próxima daquilo que pretendemos fazer, conforme exporemos na terceira secção deste capítulo, após dedicar a segunda secção à revisão dos métodos ELECTRE I/IS.

Consideraremos definido um polítopo  $T$  de combinações aceitáveis de valores para os parâmetros, semelhante ao definido no capítulo anterior (porventura envolvendo um menor número de parâmetros, no caso do ELECTRE I). Esse conjunto  $T$  é definido pelos decisores, seja indicando explicitamente algumas restrições, seja inferindo restrições a partir das suas respostas a questões de comparação entre acções (como em Mousseau, 1993, 1995). Os objectivos da análise são, uma vez mais, encontrar conclusões robustas e identificar quais os resultados que são mais afectados pela imprecisão. Trata-se de dois tipos de resultados que poderão, no espírito da delimitação ajustável, fomentar a aprendizagem dos decisores, ajudando-os a fornecer mais informação e a construir argumentos para eleger uma das acções como a mais preferida.

Poderá acontecer que o conjunto das conclusões robustas seja relativamente pobre, pelo que apontaremos algumas formas de enriquecer esse conjunto (Secção 4), embora à custa de argumentos mais frágeis. Trata-se, conforme veremos, de considerar conceitos de tolerância análogos aos propostos quando analisávamos funções de valor. Mais adiante (Secção 5), abordaremos a questão de procurar, apesar da imprecisão, explorar a relação de prevalência com o intuito de escolher uma acção, por vezes utilizando técnicas que também seriam pertinentes se a problemática em causa fosse a de ordenação. A Secção 6 será dedicada à apresentação de alguns exemplos.

## 2. Revisão dos métodos ELECTRE para problemas de escolha

A notação que utilizaremos coincide com a do capítulo anterior.  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  representa o conjunto das acções e  $g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)$  são os critérios de avaliação. O desempenho de uma acção  $a_i$  segundo o  $j$ -ésimo critério será representado por  $g_j(a_i)$  ou por  $g_{ij}$ .

A primeira fase do ELECTRE constrói uma relação de prevalência sobre  $A$ , comparando as suas acções par a par. Para cada par ordenado de acções  $(a_x, a_y)$ , o método decide se a primeira prevalece sobre a segunda ( $a_x S a_y$ ) ou não, considerando os seguintes parâmetros:

- $\Delta_j$  — vantagem de  $a_x$  sobre  $a_y$  no  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ ):

$$\Delta_j = \begin{cases} g_{xj} - g_{yj}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a maximizar} \\ g_{yj} - g_{xj}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a minimizar} \end{cases};$$

- $k_j$  — coeficiente de importância (“peso”) do  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ ); estes parâmetros

obedecem a  $k_j \geq 0$  e, sem perda de generalidade, verificam  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ ;

- $v_j$  — limiar de veto do  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ );
- $q_j$  e  $p_j$  — respectivamente, limiares de indiferença e de preferência do  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ )<sup>1</sup> (estes parâmetros não intervêm no método ELECTRE I);
- $s$  — limiar de concordância (ou de corte).

A partir destes parâmetros, a distinção entre prevalência e não prevalência depende de método para método. A conclusão de prevalência é baseada na satisfação cumulativa de uma condição de concordância (a prevalência deve ser apoiada por uma maioria suficiente de critérios, atendendo aos seus pesos) e de uma condição de não discordância (não existe em nenhum critério uma diferença de desempenhos tão significativa, que se oponha à prevalência).

O primeiro método da família, o ELECTRE I (para mais detalhes v. Roy, 1968; Roy e Bouyssou, 1993), trabalha com verdadeiros-critérios,<sup>2</sup> pelo que não recorre a limiares de indiferença e de preferência e considera que  $a_x$  prevalece sobre  $a_y$  no  $j$ -ésimo critério se e só se  $\Delta_j \geq 0$ . Para cada critério  $g_j(\cdot)$ , define-se um índice de concordância  $c_j(a_x, a_y)$ , que é igual a um se  $\Delta_j \geq 0$  e é igual a zero

<sup>1</sup> Para simplificar a notação, consideramos que os limiares não dependem dos desempenhos, mas o raciocínio é válido quando se consideram limiares como funções  $q_j(g_j(\cdot))$ ,  $p_j(g_j(\cdot))$  ou  $v_j(g_j(\cdot))$ .

<sup>2</sup> Sobre os conceitos de verdadeiro-critério e pseudo-critério v. Secções II.3.5 e II.4.5.

caso contrário (Figura VII.1). Estes índices relativos a cada critério são agregados, através de uma soma ponderada, num *índice de concordância multicritério*  $c(a_x, a_y)$ , sendo os coeficientes de importância  $k_j$  os coeficientes de ponderação. A condição de concordância é verificada se e só o índice de concordância multicritério  $c(a_x, a_y)$  igualar ou exceder um limiar de concordância  $s$ . A condição de não discordância é verificada se e só se nenhuma diferença de desempenhos desfavorável a  $a_x$  não exceder o limiar de veto do respectivo critério. Resumindo, para o ELECTRE I:<sup>3</sup>

$$a_x S a_y \Leftrightarrow c(a_x, a_y) = \sum_{j:\Delta_j \geq 0} k_j \geq s \wedge \forall j, \Delta_j \geq -v_j.$$

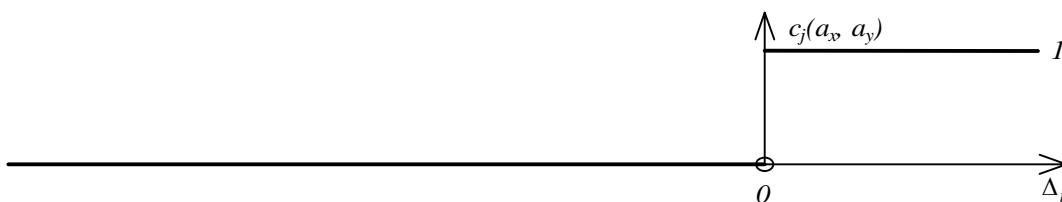


Figura VII.1. Índice de concordância para um verdadeiro critério.

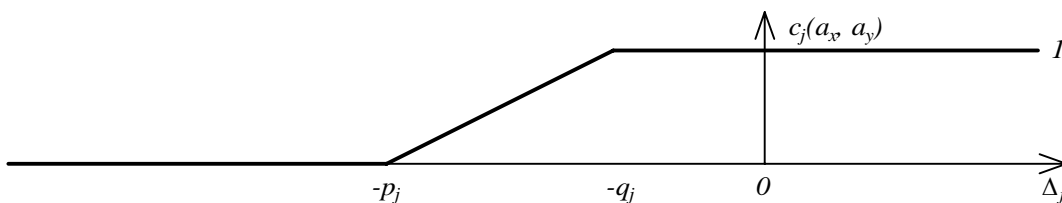


Figura VII.2. Índice de concordância para um pseudo critério.

Posteriormente, surgiu o ELECTRE IS (para mais detalhes v. Roy e Skalka 1984; Roy e Bouyssou, 1993), que já aceita pseudo-critérios. O cálculo do índice de concordância relativo a cada critério passa a ser (Figura VII.2):

$$c_j(a_x, a_y) = \begin{cases} 0 & ,se \Delta_j < -p_j \\ \frac{(p_j + \Delta_j)}{(p_j - q_j)} & ,se -p_j \leq \Delta_j < -q_j \\ 1 & ,se \Delta_j \geq -q_j \end{cases}$$

<sup>3</sup> A apresentação original deste método era diferente: os desempenhos tinham de vir expressos em escalas comparáveis (para o que se recorria a uma normalização das mesmas) e existia um limiar de veto comum a todos os critérios (limiar de discordância). Optámos por apresentar uma variante equivalente (por vezes designada por ELECTRE Iv) que, ao permitir atribuir limiares de veto distintos aos critérios, torna desnecessária a comparabilidade das escalas, assemelhando-se nesse ponto aos restantes métodos da família ELECTRE.



Tal como no ELECTRE I, estes índices relativos a cada critério são agregados, através de uma soma ponderada, num *índice de concordância multicritério*  $c(a_x, a_y)$ :

$$c(a_x, a_y) = \sum_j k_j c_j(a_x, a_y).$$

A condição de concordância é verificada se e só o índice de concordância multicritério  $c(a_x, a_y)$  igualar ou exceder um limiar de concordância  $s$ . A condição de não discordância é semelhante à do ELECTRE I, mas o efeito de veto pode ser reforçado de uma forma que depende dos coeficientes de importância dos critérios. Mais concretamente, para o ELECTRE IS:

$$a_x S a_y \Leftrightarrow c(a_x, a_y) = \sum_j k_j c_j(a_x, a_y) \geq s \wedge \forall j, \Delta_j \geq -v_j + q_j w_j(a_x, a_y),$$

onde

$$w_j(a_x, a_y) = \frac{I - c(a_x, a_y) - k_j}{I - s - k_j} \text{ (versão de Roy e Bouyssou, 1993), ou}$$

$$w_j(a_x, a_y) = \frac{I - c(a_x, a_y)}{I - s} \text{ (versão original), ou}$$

$$w_j(a_x, a_y) = 0 \text{ (se não se pretender reforçar a possibilidade de veto).}$$

Uma alternativa aos ELECTRE I e IS é a utilização dos índices de credibilidade dos ELECTRE III e TRI (trata-se dos índices que estudámos no capítulo anterior), que agregam num só número a concordância e a discordância. Neste caso, a prevalência ocorre se e só se o índice de credibilidade igualar ou exceder um limiar  $s$ :

$$a_x S a_y \Leftrightarrow \sigma(a_x, a_y) \geq s.$$

Uma vez construída a relação de prevalência  $S$ , através de um dos três métodos que apontámos, há que explorá-la com o objectivo de escolher uma acção. Essa exploração é dificultada pela eventual presença de acções incomparáveis (entre as quais não existem prevalências) e pelo facto de a relação  $S$  não ser transitiva. Por conseguinte, a exploração segundo os métodos ELECTRE prossegue de forma cautelosa e com um objectivo menos ambicioso do que o de conseguir sempre apontar uma acção vencedora: encontrar um subconjunto de acções  $N \subseteq A$ , designado por *núcleo*, tão pequeno quanto

possível, mas contendo seguramente a melhor acção.<sup>4</sup> O núcleo, se existir, define-se através de duas condições:

- estabilidade externa — as acções fora do núcleo são prevalecidas por pelo menos uma acção pertencente ao núcleo, justificando-se assim a sua exclusão;
- estabilidade interna — não se pode justificar a exclusão de nenhuma acção pertencente ao núcleo, pois não há relações de prevalência entre elas (são incomparáveis entre si).

Face a esta definição o núcleo pode não existir ou pode não ser único. Porém, existe e é único quando a relação  $S$  não possui circuitos (um exemplo de circuito é  $a_x S a_y, a_y S a_z$  e  $a_z S a_x$ ). A técnica de exploração recomendada (v. Roy e Bouyssou, 1993: 365-389) consiste, por conseguinte, na transformação de  $S$  numa relação sem circuitos, seja considerando que cada circuito corresponde a uma classe de acções indiferentes (tratando-o como se fosse uma só acção), seja removendo o elo mais frágil de cada circuito.

Perante um conjunto  $A$  de acções sobre o qual se definiu uma relação de prevalência sem circuitos, pode-se utilizar o seguinte algoritmo para determinar o núcleo  $N$ :

1. Colocar em  $N$  todas as acções de  $A$  que não sejam prevalecidas por outra acção de  $A$ ; remover essas acções de  $A$ .
2. Retirar de  $A$  todas as acções prevalecidas pelas acções em  $N$ .
3. Se  $A$  ainda contiver acções, regressar ao passo 1; caso contrário, terminar.

### **3. Procedimento no caso da informação imprecisa**

---

#### **3.1. Que tipo de conclusões robustas procurar?**

No caso com informação imprecisa, os decisores aceitam múltiplas combinações de valores para os parâmetros do modelo. Neste caso, os parâmetros podem-se referir aos desempenhos das acções (com reflexos nos  $\Delta_j$ ), aos coeficientes de importância, e aos limiares de veto, de indiferença, de

---

<sup>4</sup> Recordemos que, ao falar da melhor acção, não nos referimos a nenhuma supremacia objectiva, mas antes à acção mais preferida pelo decisor, face ao valor dos parâmetros do modelo e ao método utilizado.

preferência e de concordância. Como habitualmente,  $T$  designa o conjunto dessas combinações, num dado momento do processo de decisão.

O objectivo da análise é agora o de obter os resultados compatíveis com  $T$ , por forma a identificar as conclusões que são robustas. Todavia, hesitámos acerca do nível a que iríamos procurar conclusões robustas. Uma possibilidade consistia em procurar conclusões relativas *unárias* (v. Secção IV.2), como por exemplo “a acção  $a_x$  nunca pertence ao núcleo”; a outra possibilidade era procurar conclusões relativas *binárias*, como por exemplo “a acção  $a_x$  prevalece sempre sobre a acção  $a_y$ ”. A primeira via é a habitualmente preconizada (v. Roy e Bouyssou, 1993; Maystre et al., 1994; Roy, 1998), tendo a vantagem de se focar no resultado último do método. A segunda via é também defensável, pois enquadra-se perfeitamente no espírito da comparação das acções aos pares, subjacente ao ELECTRE. O exemplo seguinte servirá para confrontar os dois tipos de conclusões robustas e defender a nossa opção.

**Exemplo 1.** Consideremos os desempenhos apresentados na Tabela VII.1, correspondentes à avaliação de quatro acções segundo cinco critérios, todos a maximizar, utilizando o ELECTRE I. A mesma tabela mostra ainda os limiares de veto, que se consideram fixos ao longo deste exemplo.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$a_1$	40	20	20	30	30
$a_2$	30	30	30	20	10
$a_3$	20	40	20	40	20
$a_4$	20	10	40	10	40
$v_j$	40	25	15	40	40

**Tabela VII.1. Desempenhos e limiares de veto para o exemplo.**

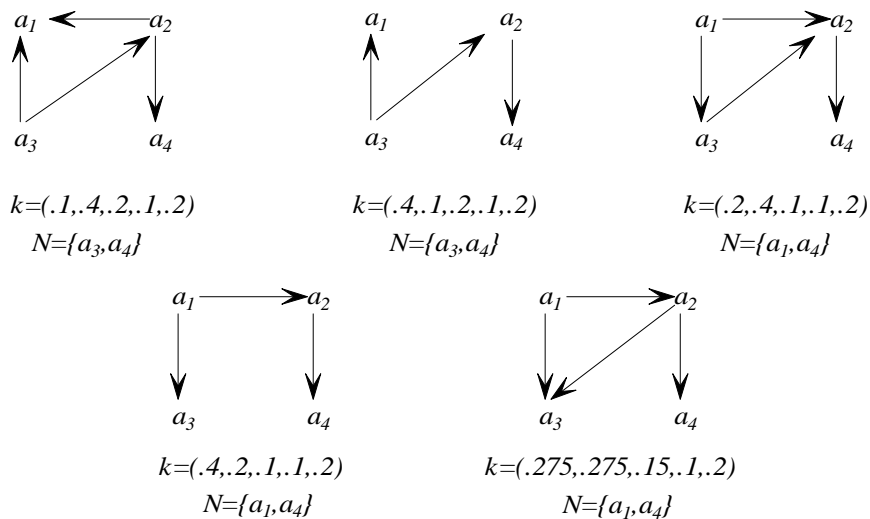
O limiar de concordância  $s$  foi fixado em  $0,55$ . Dois dos coeficientes de importância estão também fixos:  $k_4 = 0,1$  e  $k_5 = 0,2$ . Logo, a única imprecisão diz respeito à importância dos restantes três coeficientes de importância. Suponhamos que  $T$  é delimitado pelas seguintes restrições:

$$k_1 \in [0,1, 0,4], k_2 \in [0,1, 0,4], k_3 \in [0,1, 0,2], \text{ e } k_1 + k_2 + k_3 = 0,7.$$

De acordo com a sugestão de Roy (v. Roy e Bouyssou, 1993; Roy, 1998), iríamos procurar conclusões (unárias) robustas acerca das acções que compõem o núcleo, testando algumas combinações de  $T$ . O conjunto  $T_s$  que se testa seria obtido escolhendo alguns valores para cada parâmetro (e.g. mínimo, central e máximo) e combinando esses valores, removendo as combinações não admissíveis. Para o presente exemplo, podíamos considerar  $T_s = T \cap (T_1 \times T_2 \times T_3)$ , onde  $T_1 = T_2 = \{0,1, 0,25, 0,4\}$

contêm valores para  $k_1$  e  $k_2$ ;  $T_3 = \{0,1, 0,15, 0,2\}$  contém valores para  $k_3$ . Atendendo às restrições, muitas das combinações não são aceitáveis, pelo que  $T_s$  seria um conjunto muito pouco representativo para testar conclusões robustas.

Procuremos seguir ainda a sugestão de Roy de procurar conclusões robustas acerca das acções que compõem o núcleo, mas considerando que estas seriam testadas num subconjunto de  $T$  mais representativo: o dos seus pontos extremos (vértices), a que acrescentaríamos uma combinação “central”. Neste caso,  $T_s = \{(0,1, 0,4, 0,2), (0,4, 0,1, 0,2), (0,2, 0,4, 0,1), (0,4, 0,2, 0,1), (0,275, 0,275, 0,15)\}$ . A Figura VII.3 apresenta as relações de prevalência correspondentes a estas cinco combinações, bem como o núcleo que corresponde a cada uma. Esta figura utiliza a vulgar convenção de indicar prevalências através de arcos orientados: a acção de onde um arco emana prevalece sobre a acção onde esse arco incida.



**Figura VII.3. Relações de prevalência e núcleos correspondentes às cinco combinações testadas.**

Ora, se nos focássemos apenas nos diversos núcleos, conforme sugere Roy, encontraríamos apenas duas conclusões robustas: “ $a_4$  pertence ao núcleo” e “ $a_2$  não pertence ao núcleo” (são conclusões unárias robustas, na nossa terminologia). Porém, se atendêssemos às conclusões binárias respeitantes à relação de prevalência, verificaríamos que  $a_2$  prevalece sempre sobre  $a_4$  e que  $a_4$  nunca prevalece sobre  $a_2$  ! Trata-se de um aparente paradoxo, resultante da intransitividade da relação de prevalência e da definição de núcleo. Devemos afinal procurar conclusões unárias ou conclusões binárias?

Apesar deste exemplo considerar um conjunto combinações  $T_s$  que é discreto, não devemos menosprezá-lo, por duas razões. A primeira é a possibilidade de se encontrarem situações em que o

conjunto de combinações é discreto, sem contudo ser resultado de uma “amostragem”. A título de exemplo, um conjunto discreto de combinações pode corresponder a um número de cenários para o futuro ou pode corresponder à reunião de combinações de vários decisores, numa situação de decisão em grupo. A segunda razão é a exigência, cremos que razoável, de que as ideias (embora não necessariamente as técnicas) sobre a análise de robustez devem ser aplicáveis a qualquer conjunto de combinações, quer seja ou não discreto. Este exemplo revela ainda quão insuficiente se pode revelar uma amostra do conjunto de combinações obtida da forma sugerida por Roy. Mesmo a consideração dos pontos extremos de  $T$  não é garante de identificar correctamente as conclusões robustas que lhe correspondem. Se tal é verdade no caso do índice de concordância multicritério do ELECTRE I, enquanto função dos coeficientes de importância, o mesmo já não sucede quando se trabalha com índices de credibilidade não-lineares, conforme estudámos no Capítulo VI.

A nossa opção recai na procura de conclusões binárias robustas, o que está naturalmente de acordo com o espírito das comparações par a par do ELECTRE. Evita-se assim o possível embaraço apresentado no exemplo anterior, que seria eleger uma acção como vencedora ( $a_4$ ), por estar sempre no núcleo, quando alguém poderia assinalar que existia uma outra acção ( $a_2$ ), que lhe era preferível (prevalece e não é prevenida) para qualquer das combinações de valores para os parâmetros que se considerasse. Não menos importante é observar que o conceito de prevalência é mais fácil de explicar e apreender do que o conceito de núcleo, pelo que haverá vantagens em basear o diálogo entre os intervenientes no primeiro destes conceitos.

### **3.2. Técnicas para encontrar conclusões binárias robustas**

Encontrar conclusões robustas quando  $T$  é um conjunto (discreto) definido em extensão não apresenta quaisquer dificuldades. Consideremos, então, como procurar conclusões binárias robustas quando  $T$  é um conjunto de  $\mathfrak{R}^p$  (onde  $p$  é o número de parâmetros) definido através de restrições matemáticas.

Para tornar a exposição mais genérica, consideraremos que a prevalência ocorre entre duas acções  $a_x$  e  $a_y$ , de  $A$ , face a uma combinação de parâmetros  $t \in T$ , se e só se uma determinada função  $r(a_x, a_y, t)$  igualar ou exceder zero:

$$a_x S a_y \Leftrightarrow r(a_x, a_y, t) \geq 0, \quad (1)$$

onde a função  $r(\cdot)$  varia de método para método:

$$r(a_x, a_y, t) = \min\{c(a_x, a_y, k) - s, \Delta_j + v_j \ (j=1, \dots, n)\} \text{ (ELECTRE I),}$$

$$r(a_x, a_y, t) = \min\{c(a_x, a_y, k) - s, \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y) \ (j=1, \dots, n)\} \text{ (ELECTRE IS), ou}$$

$$r(a_x, a_y, t) = \sigma(a_x, a_y, t) - s \text{ (ELECTRE baseado em índices de credibilidade).}$$

Perante um conjunto  $T$  de combinações aceitáveis de valores para os parâmetros, podemos testar a robustez de conclusões binárias relativas à prevalência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{“} a_x S a_y \text{” é robusta (o que representaremos por } a_x S^R a_y) \\ \Leftrightarrow \min\{r(a_x, a_y, t): t \in T\} \geq 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{“} \neg a_x S a_y \text{” é robusta (o que representaremos por } a_x N^R a_y) \\ \Leftrightarrow \max\{r(a_x, a_y, t): t \in T\} < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Destarte, a forma de identificar este tipo de conclusões robustas consiste na minimização e na maximização (i.e. na determinação da gama de variação) da função  $r(\cdot)$  no domínio  $T$ , para os vários pares ordenados de acções de  $A$ . Importa assinalar, a propósito, que o conhecimento da gama de variação de  $r(a_x, a_y, t)$  não traz qualquer informação acerca da gama de variação de  $r(a_y, a_x, t)$ .

Maximizar e minimizar  $r(\cdot)$  através de programação matemática será, em geral, uma tarefa de realização simples utilizando um computador. Tal deve-se ao facto de  $T$  ser geralmente um polítopo do género tipificado na Secção VI.3 (omitindo alguns parâmetros, no caso do ELECTRE I), no qual a função  $r(\cdot)$  pode ser otimizada considerando separadamente os diferentes tipos de parâmetros. Noutras situações, a optimização torna-se apenas mais difícil, mas não impossível. Uma alternativa será proceder por amostragem, considerando um conjunto de pontos de  $T$  suficientemente representativo do mesmo, que será então utilizado para testar conclusões robustas para todos os pares de acções.

Apresentaremos de seguida três processos para otimizar  $r(\cdot)$ , que variam consoante a versão do ELECTRE que se utiliza, quando  $T$  for definido de acordo com a Secção VI.3.

### ELECTRE I

A situação mais simples em termos computacionais surge quando se considera o ELECTRE I, sendo razoável assumir que  $T$  tem restrições dos tipos 1 ou 2 (v. Secção VI.3). Considerando um par ordenado de acções  $(a_x, a_y)$ , maximizar-se-ia  $r(a_x, a_y, t)$  da seguinte forma:

- 1)  $(g_{xj}, g_{yj}) \leftarrow \arg \max \{A_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j\}, \ j=1, \dots, n$  ( $n$  programas lineares).
- 2)  $s \leftarrow s^L$  ( $s$  assume o papel que o limiar de corte  $\lambda$  desempenhava no Capítulo VI).

- 3)  $k=(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \max \{ \sum_{j=1}^n k_j c_j(a_x, a_y) : (k_1, \dots, k_n) \in K \}$  (programa linear).
- 4)  $v=(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \max \{ \alpha: \Delta_j + v_j \geq \alpha : (v_1, \dots, v_n) \in V, \alpha \in \mathcal{R} \}$  (programa linear).
- 5) Obter  $\max\{ r(a_x, a_y, t) : t \in T \}$  combinando as soluções óptimas dos problemas anteriores.

Para minimizar  $r(a_x, a_y, t)$  proceder-se-ia da seguinte forma:

- 1')  $(g_{xj}, g_{yj}) \leftarrow \arg \min \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}) \in G_j \}, \quad j=1, \dots, n$  ( $n$  programas lineares).
- 2')  $s \leftarrow s^U$ .
- 3')  $k=(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \min \{ \sum_{j=1}^n k_j c_j(a_x, a_y) : (k_1, \dots, k_n) \in K \}$  (programa linear).
- 4')  $v=(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \min \{ \min\{v_j: (v_1, \dots, v_n) \in V\} + \Delta_j: j \in \{1, \dots, n\} \}$  ( $n$  programas lineares).
- 5') Obter  $\min\{ r(a_x, a_y, t) : t \in T \}$  combinando as soluções óptimas dos problemas anteriores.

### ELECTRE IS

O processo de otimizar  $r(a_x, a_y, t)$  depende das funções de penalização  $w_j(\cdot)$ . Novamente, assumiremos que os coeficientes de veto estão sujeitos a restrições dos tipos 1 ou 2 (v. Secção VI.3). Se  $w_j(a_x, a_y) = 0$  (i.e. se não se pretender reforçar a possibilidade de veto), então o processo a seguir será o apresentado acima para o ELECTRE I, acrescentando um passo 2a) no qual se fixariam os valores dos limiares de indiferença e de preferência de cada critério no seu limite superior ou inferior, consoante o caso.

Se  $w_j(a_x, a_y) = \frac{1 - c(a_x, a_y)}{1 - s}$  (versão original do ELECTRE IS), o processo é semelhante,

substituindo os passos 4) e 4') por

- 4)  $(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \max \{ \alpha: \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y, k) \geq \alpha : (v_1, \dots, v_n) \in V, \alpha \in \mathcal{R} \}$  e
- 4')  $(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \min \{ \min\{v_j: (v_1, \dots, v_n) \in V\} + \Delta_j - q_j w_j(a_x, a_y, k) : j \in \{1, \dots, n\} \}$ .

Quando se chega a este passo, o melhor valor possível para  $w_j(\cdot)$  já terá sido determinado. Mais concretamente, quando se maximiza (minimiza)  $r(a_x, a_y, t)$ ,  $c(a_x, a_y, t)$  terá sido colocado ao seu valor máximo (mínimo) e  $s$  terá sido colocado no seu valor mínimo (máximo), pelo que  $w(a_x, a_y, t)$  atingirá o seu mínimo (máximo). Utiliza-se, pois, apenas programação linear.

Enfim, a situação mais complicada surge apenas quando  $w_j(a_x, a_y) = \frac{1 - c(a_x, a_y) - k_j}{1 - s - k_j}$ .

Trata-se da versão que Roy e Bouyssou (1993) defendem ser a mais correcta, embora possua, quanto a nós, uma importante limitação: impõe que nenhum coeficiente de importância possa

exceder o valor de  $I-s$  (e.g. para um valor como  $s=0,7$ , nenhum critério pode pesar mais de 30%, inclusive). Se, apesar disso, pretendermos utilizar esta função  $w_j(\cdot)$ , então podemos atender aos seguintes resultados acerca desta função não-linear.

**Proposição VII.1.** Para um valor fixo de  $s$ , a função dos índices de importância

$$w_j(a_x, a_y, k) = \frac{I - c(a_x, a_y) - k_j}{I - s - k_j}$$

é quasimonótona (i.e. simultaneamente quasicôncava e quasiconvexa).

*Prova:*

O numerador de  $w_j(\cdot)$  é igual a  $I - \sum_{i \neq j} k_i c_i(a_x, a_y)$ , uma função afim. O denominador de  $w_j(\cdot)$  é

também uma função afim. Logo, baseamos a nossa prova numa equivalente — a de que uma função  $f(x) = g(x)/h(x)$ , com  $g(x)$  e  $h(x)$  afins, é quasimonótona. Para isso, basta-nos provar (Bazaraa et al. 1993: 109) que as *superfícies de nível* desta função,  $\{x: f(x)=L\}$ , são convexas.

Sejam, para um dado nível  $L$ ,  $x$  e  $y$  tais que  $f(x)=L$  e  $f(y)=L$ . Então, qualquer para qualquer combinação convexa  $z = (1-\alpha)x + \alpha y$  ( $0 < \alpha < 1$ ) temos:

$$f(z) = \frac{g((1-\alpha)x + \alpha y)}{h((1-\alpha)x + \alpha y)} = \frac{(1-\alpha)g(x) + \alpha g(y)}{(1-\alpha)h(x) + \alpha h(y)} = \frac{(1-\alpha)h(x)L + \alpha h(y)L}{(1-\alpha)h(x) + \alpha h(y)} = L.$$

Decorre desta igualdade a convexidade de  $\{x: f(x)=L\}$  e a demonstração desta proposição.  $\square$

Com base neste resultado, podemos afirmar que tanto o máximo como o mínimo das funções  $w_j(\cdot)$  num determinado polítopo podem ser encontrados em vértices desse polítopo (Bazaraa et al. 1993: 109).

**Proposição VII.2.** A função  $r(a_x, a_y, t) = \min\{c(a_x, a_y, k)-s, \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y) \ (j=1, \dots, n)\}$  é quasicôncava.

*Prova:*

A função  $c(a_x, a_y, k)-s$  é afim e, pela proposição anterior, as funções  $\Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y)$  ( $j=1, \dots, n$ ) são quasimonótonas. Logo, todas são quasicôncavas. Basta-nos então demonstrar que o mínimo de um conjunto de funções quasicôncavas é ainda uma função quasicôncava. Uma função  $f(x)$  é quasicôncava se e só se o conjunto de nível superior  $\{x: f(x) \geq L\}$  for convexo. Seja  $f(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_N(x)\}$ , onde  $f_1(x), \dots, f_N(x)$  são funções quasicôncavas quaisquer. Dados  $x$  e  $y$  tais que  $f(x) \geq L$  e



$f(y) \geq L$  queremos mostrar que  $f(z) \geq L$ , com  $z = (1-\alpha)x + \alpha y$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Ora,  $f(z) = \min\{f_1(z), \dots, f_n(z)\} = f_k(z)$  (para um dado  $k \in \{1, \dots, N\}$ ). Uma vez que  $f_k(x) \geq f(x) \geq L$  e  $f_k(y) \geq f(y) \geq L$ , a quasiconcavidade de  $f_k(\cdot)$  implica  $f_k(z) = f(z) \geq L$ , conforme pretendíamos mostrar.  $\square$

Em suma, se pretendermos usar a versão de Roy e Bouyssou, apesar da limitação que lhe apontámos, perdemos a possibilidade de recorrer a programação linear e entramos no caso, à partida bem mais difícil,<sup>5</sup> de optimização de funções quasiconcavas, substituindo os passos 4) e 4') por

$$4) (v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \max \{ \alpha: \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y, k) \geq \alpha: (k_1, \dots, k_n) \in K, (v_1, \dots, v_n) \in V, \alpha \in \mathcal{R} \}$$

$$4') (v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \min \{ \min\{ \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y, k): (k_1, \dots, k_n) \in K, (v_1, \dots, v_n) \in V \}: j \in \{1, \dots, n\} \}.$$

O Capítulo VI refere alguns métodos para resolver problemas deste tipo.

### ELECTRE baseado em índices de credibilidade

O caso mais complicado em termos computacionais poderá ser o do ELECTRE baseado em índices de credibilidade, quando  $T$  tem restrições do tipo 1, 2 ou 3. Trata-se do caso por vezes não-linear que estudámos em detalhe no Capítulo VI, pelo que não repetiremos a exposição sobre os processos de maximizar e minimizar  $r(a_x, a_y, t) = \sigma(a_x, a_y, t) - s$ .

**Regresso ao Exemplo 1.** Neste caso, os cálculos são simples. Todos os parâmetros estão fixos salvo os coeficientes de importância, estes restringidos a um polítopo com apenas quatro vértices. A Tabela VII.2 apresenta a gama de variação do índice de concordância multicritério  $c(\cdot)$  para cada par ordenado de acções em que não se verifica veto (i.e. em que  $\Delta_j \geq -v_j, j=1, \dots, n$ ). A Tabela VII.3 traduz a mesma informação em termos da função  $r(\cdot)$ .

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	-	[0,4, 0,7]	[0,5, 0,8]	veto
$a_2$	[0,3, 0,6]	-	[0,3, 0,6]	[0,6, 0,7]
$a_3$	[0,4, 0,7]	[0,4, 0,7]	-	veto
$a_4$	[0,3, 0,4]	[0,3, 0,4]	veto	-

**Tabela VII.2. Gama de variação dos índices de concordância multicritério (Exemplo 1).**

<sup>5</sup> Porém, na prática, ao observarmos os limites de variação face a  $T$  de cada uma das funções  $f_j(k, v) = \Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y)$  ( $j=1, \dots, n$ ) e  $f_{n+1}(k, v) = c(a_x, a_y, k) - s$ , apercebemo-nos muitas vezes de que uma delas é sempre menor do que as restantes, o que facilita a optimização.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	-	[-0,15, 0,15]	[-0,05, 0,25]	[-5, -5]
$a_2$	[-0,25, 0,05]	-	[-0,25, 0,05]	[0,05, 0,15]
$a_3$	[-0,15, 0,15]	[-0,15, 0,15]	-	[-5, -5]
$a_4$	[-0,25, -0,35]	[-0,25, -0,35]	[-5, -5]	-

**Tabela VII.3. Gama de variação de  $r(\cdot)$  (Exemplo 1).**

Baseando-nos nas Tabelas VII.2 ou VII.3, é fácil encontrar as seguintes conclusões robustas, dados os limiares de veto (fixos) e o limiar de concordância  $s=0,55$  (também fixo):

- $a_1$  e  $a_3$  não prevalecem sobre  $a_4$  (devido ao veto);
- $a_2$  prevalece sobre  $a_4$  (não existe veto e a concordância mínima excede o limiar  $s$ );
- $a_4$  não prevalece sobre nenhuma outra acção (seja pela ocorrência de veto, seja porque a concordância máxima não atinge o limiar  $s$ ).

Concluindo:

As relações binárias  $S^R$  e  $N^R$ , definidas em (2) e (3), que correspondem às conclusões robustas, podem ser encontradas maximizando e minimizando as funções  $r(\cdot)$ . As relações  $S^R$  e  $N^R$  estabelecem uma relação de prevalência intervalar. De facto, se representarmos por  $S^t$  a relação correspondente a uma qualquer combinação de valores para os parâmetros  $t \in T$  e representarmos por  $\overline{N^R}$  a relação complementar de  $N^R$ , verifica-se:<sup>6</sup>

$$\forall t \in T, a_x \in A, a_y \in A, a_x S^R a_y \Rightarrow a_x S^t a_y \Rightarrow a_x \overline{N^R} a_y,$$

o que equivale a:

$$\forall t \in T, S^R \subseteq S^t \subseteq \overline{N^R}.$$

Frequentemente, as relações  $S^R$  e  $N^R$  podem ser demasiado pobres (i.e. verificam-se para poucos pares ordenados de acções), pelo que proporemos na secção seguinte algumas formas de as enriquecer.

---

<sup>6</sup> Para qualquer relação binária  $H$ , utilizamos a notação:  $a \overline{H} b \Leftrightarrow \neg(a H b)$ .

## 4. Formas de enriquecer as relações robustas

---

Enriquecer as conclusões robustas equivale a aumentar o número de pares ordenados para as quais surgem as relações  $S^R$  ou  $N^R$ , reduzindo por conseguinte o número de pares acerca dos quais a imprecisão de  $T$  não permita estabelecer uma conclusão robusta. A melhor forma de o conseguir consiste em reduzir a imprecisão de  $T$ , solicitando informação adicional aos decisores e traduzindo-a em restrições aos valores que os parâmetros podem assumir. Trata-se da metodologia da delimitação ajustável apresentada no Capítulo IV, onde os resultados da exploração da imprecisão associada a  $T$  servem para suscitar as questões que podem conduzir à sua delimitação, de uma forma interactiva. Os resultados da análise são, em cada iteração, os limites de variação de  $r(\cdot)$  e as relações  $S^R$  e  $N^R$  que lhes correspondem. Estudar estes resultados pode ser útil para solicitar mais informação:

- por um lado, conhecer os valores dos parâmetros que conduzem aos limites de  $r(\cdot)$  para um dado par de acções (e os decisores até se podem focar naquelas em que a diferença entre o mínimo e o máximo é maior — as conclusões mais afectadas pela imprecisão associada a  $T$ ) pode revelar combinações que os decisores não considerem razoáveis (e.g.  $k_1$  não devia ser inferior a  $k_2$ );
- por outro lado, atendendo aos próprios limites de  $r(\cdot)$  para alguns pares de acções, os decisores podem concluir que, afinal, a relação  $S^R$  (ou  $N^R$ ) até devia verificar-se (e.g. indicar que  $a_1$  não é pior do que  $a_2$ ), o que será traduzido em restrições sobre  $T$ .<sup>7</sup>

Uma forma de complementar estes resultados consiste em aceitar uma relaxação das condições (2) e (3) para obter mais conclusões, que agora teremos que designar por *quasirobustas*. Trata-se de introduzir uma tolerância naquelas definições, à semelhança do que propusemos quando considerávamos a agregação aditiva (cf. conceitos de quasidefiniência e quasi-óptimo no Capítulo V). As relações quasirobustas tornam-se mais ricas (ocorrem para um maior número de pares), embora mais frágeis, à medida que aumentar o valor da tolerância. Sugerimos de seguida três tipos diferentes de relaxação.

---

<sup>7</sup> Nalgumas situações, porém, como no caso do ELECTRE baseado em índices de credibilidade e com limiares de veto que não variam independentemente de outros parâmetros, estas restrições podem ser não lineares, pelo que  $T$  deixaria de ser um polítopo.

**1º tipo: Menosprezar uma fracção do volume de  $T$** 

A ideia do primeiro tipo de relaxação é a de que os decisores poderão aceitar como quasirobusta uma conclusão que seja verdadeira para quase todas as combinações de  $T$ . Expressa de uma forma mais formal, a condição para se afirmar que uma conclusão é quasirobusta é, neste caso, a sua verificação numa vasta proporção do volume de  $T$ . Assim expressa, esta condição pressupõe que o conjunto  $T$  é limitado e possui volume não nulo.

Seja  $Vol(t \in T: r(a_x, a_y, t) \geq 0)$  o volume do subconjunto de  $T$  que contém as combinações para as quais  $a_x$  prevalece sobre  $a_y$  ( $a_x$  e  $a_y$  representam duas quaisquer acções de  $A$ ). Representaremos por  $Vol(T)$  o volume de  $T$ . Por fim, seja  $\varepsilon$  um valor de tolerância ( $0 \leq \varepsilon \ll 0,5$ ) respeitante ao volume relativo das fracções de  $T$  onde cada conclusão se verifica. Então, as seguintes relações constituem uma relaxação de  $S^R$  e  $N^R$ , generalizando (2) e (3):

$$a_x S^V(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow Vol(t \in T: r(a_x, a_y, t) \geq 0) / Vol(T) \geq 1 - \varepsilon;$$

$$a_x N^V(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow Vol(t \in T: r(a_x, a_y, t) \geq 0) / Vol(T) \leq \varepsilon.$$

Podemos observar que estas relações generalizam  $S^R$  e  $N^R$ , coincidindo com estas quando  $\varepsilon=0$ :

$$S^V(\varepsilon) \supseteq S^R \quad \text{e} \quad N^V(\varepsilon) \supseteq N^R;$$

$$S^V(0) = S^R \quad \text{e} \quad N^V(0) = N^R.$$

As relações  $S^V(\varepsilon)$  e  $N^V(\varepsilon)$  tornam-se mais ricas (ocorrem para um maior número de pares) à medida que  $\varepsilon$  aumenta, embora o argumento para a aceitação das respectivas conclusões se torne cada vez mais fraco. Mesmo quando a tolerância  $\varepsilon$  é um valor pequeno, os decisores devem ter uma ideia das combinações que estão a ignorar (apresentem-se-lhes alguns exemplos), porque o volume que se menospreza, embora diminuto, pode até conter as combinações com que estes mais se identifiquem.

A determinação dos volumes, subjacente a esta relaxação, não é demasiado difícil quando  $T$  é um polítopo (v. Lasserre, 1983; Büeler et al., 1998), desde que as dimensões do problema (número de parâmetros variáveis) não sejam muito grandes. Uma alternativa é calcular volumes aproximados utilizando ferramentas de amostragem (e.g. Charnetski e Soland, 1978).

No caso de  $T$  ser um conjunto discreto de combinações, a aplicação desta relaxação basear-se-á igualmente na proporção das combinações que apoiam cada conclusão. Nesses casos, as relações  $S^V(\varepsilon)$  e  $N^V(\varepsilon)$  definem-se através de uma simples contagem das combinações de  $T$  que conduzem a cada prevalência.

**Regresso ao Exemplo 1** (v. Secção 3). Imaginemos que os decisores aceitavam que uma conclusão era quasirobusta, desde que fosse verdadeira para 95% das combinações aceitáveis; coloquemos, pois,  $\varepsilon=0,05$ . A proporção do volume de  $T$  a favor de cada prevalência encontra-se na Tabela VII.4 (e.g.  $a_1$  prevalece sobre  $a_2$  para 60% das combinações de  $T$ ). Face a esta tabela e ao valor de 5% para a tolerância, acrescentaríamos as seguintes conclusões quasirobustas à lista apresentada na secção anterior:

- $a_2$  não prevalece sobre  $a_1$ , pois a fracção de  $T$  onde tal acontece é igual ou inferior a  $\varepsilon$  ( $a_2 N^V(0,05) a_1$ );
- $a_2$  não prevalece sobre  $a_3$  pelo mesmo motivo ( $a_2 N^V(0,05) a_3$ ).

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	-	60%	80%	veto
$a_2$	5%	-	5%	100%
$a_3$	40%	60%	-	veto
$a_4$	0%	0%	veto	-

**Tabela VII.4. Percentagem de combinações que apoiam cada prevalência (Exemplo 1).**

**2º tipo: Menosprezar uma vizinhança da fronteira de  $T$**

Uma forma alternativa de relaxar (2) e (3) segue também a ideia de menosprezar uma pequena parte de  $T$ , com a vantagem de ser mais simples do que a determinação de volumes. Consideremos que  $T$  é definido por  $m = m_1 + m_2$  restrições matemáticas, sendo as primeiras  $m_1$  restrições igualdades ou desigualdades que os decisores consideram intocáveis e sendo as restantes  $m_2$  restrições desigualdades que os decisores admitem tornar mais exigentes:

$$T = \{t \in \mathcal{R}^p: f_i(t) \leq (=) b_i (i=1, \dots, m_1); f_i(t) \leq b_i (i=m_1+1, \dots, m_1+m_2)\} \quad (p \text{ é o número de parâmetros}).$$

O segundo tipo de relaxação de (2) e (3) consiste em contrair  $T$ , por forma a que existam mais conclusões que permaneçam válidas para todas as combinações desse conjunto mais restrito. A contracção de  $T$  incide apenas sobre as últimas  $m_2$  restrições, para as quais se impõe um desvio de pelo menos  $\varepsilon$ . Assim, após se definir um valor positivo e pequeno  $\varepsilon$ , o conjunto de combinações utilizado para detectar conclusões quasirobustas torna-se:

$$T^{C(\varepsilon)} = \{t \in \mathcal{R}^p: f_i(t) \leq (=) b_i (i=1, \dots, m_1); f_i(t) \leq b_i - \varepsilon (i=m_1+1, \dots, m_1+m_2)\}.$$

Por conseguinte, menosprezam-se apenas as seguintes combinações, situadas numa vizinhança da fronteira de  $T$ :

$$T^{C(\varepsilon)} = \{t \in \mathcal{R}^p: f_i(t) \leq (=) b_i \ (i=1, \dots, m_1); \ b_i - \varepsilon \leq f_i(t) \leq b_i \ (i=m_1+1, \dots, m_1+m_2)\}.$$

Para um determinado valor de  $\varepsilon$  (que deverá ser suficientemente pequeno para  $T^{C(\varepsilon)}$  não se tornar vazio), a relaxação das condições (2) e (3) conduz às relações seguintes:

$$a_x S^C(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow \min\{r(a_x, a_y, t): t \in T^{C(\varepsilon)}\} \geq 0;$$

$$a_x N^C(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow \max\{r(a_x, a_y, t): t \in T^{C(\varepsilon)}\} < 0.$$

Podemos observar que estas relações generalizam  $S^R$  e  $N^R$ , tornando-se mais ricas (embora menos convincentes) à medida que  $\varepsilon$  aumenta e coincidindo com estas quando  $\varepsilon=0$ :

$$S^C(\varepsilon) \supseteq S^R \quad \text{e} \quad N^C(\varepsilon) \supseteq N^R;$$

$$S^C(0) = S^R \quad \text{e} \quad N^C(0) = N^R.$$

É importante notar que este tipo de relaxação deverá ser utilizado com precaução, pois,

$$f_i(t) \leq b_i \Leftrightarrow \varphi f_i(t) \leq \varphi b_i, \quad \forall \varphi > 0, \ i \in \{m_1+1, \dots, m_1+m_2\},$$

mas

$$f_i(t) \leq b_i - \varepsilon \not\equiv \varphi f_i(t) \leq \varphi b_i - \varepsilon, \quad \forall \varphi > 0, \ i \in \{m_1+1, \dots, m_1+m_2\}.$$

Por exemplo, dado um valor de  $\varepsilon=0,05$ , a restrição  $k_I \leq 0,30$  torna-se  $k_I \leq 0,25$ , mas a mesma restrição codificada de uma forma diferente,  $100 k_I \leq 30$ , já se transforma em  $100 k_I \leq 29,95$ , o que equivale a  $k_I \leq 0,2995$ . Por este motivo, pensamos que a relaxação do tipo 2 só deve ser utilizada quando todas as restrições estejam codificadas de uma forma semelhante. Por exemplo, quando se refiram apenas aos coeficientes de importância, assumem tipicamente a forma de intervalos ou a forma de comparações entre a importância de duas coligações de critérios. Em alternativa, pode-se por exemplo propor que o maior coeficiente técnico de uma restrição seja sempre igual a 1, o que significa que o valor de  $\varepsilon$  se poderá interpretar como um desvio em relação ao valor da variável associada a esse coeficiente.

No caso de  $T$  ser um conjunto (discreto) de combinações definido em extensão, este tipo de relaxação não pode ser adaptado de uma forma tão óbvia quanto a do primeiro tipo. Se pretendêssemos seguir rigorosamente a definição de  $T^{C(\varepsilon)}$ , teríamos de determinar as desigualdades que definem o invólucro convexo das combinações de  $T$  e proceder de seguida à exclusão das combinações que não se encontrassem na versão contraída (face a um valor de  $\varepsilon$ ) desse invólucro convexo. Mais simples, mas

ainda no espírito de excluir combinações periféricas, seria determinar um “centro de massa” respeitante às combinações de  $T$  e excluir as combinações mais afastadas desse centro.

**Regresso ao Exemplo 1** (v. Secção 3). Suponhamos que os decisores aceitavam tornar mais exigentes os limites impostos sobre os valores de  $k_1, k_2$  e  $k_3$  e analisemos quais seriam as conclusões quasirobustas para  $\varepsilon=0,025$  e para  $\varepsilon=0,05$ . A Tabela VII.5 mostra a variação dos índices de concordância face às combinações em  $T^{C(0,025)}$  e em  $T^{C(0,05)}$ .

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	-	[0,45, 0,68]	[0,52, 0,75]	veto
$a_2$	[0,32, 0,55]	-	[0,33, 0,55]	[0,63, 0,68]
$a_3$	[0,42, 0,65]	[0,45, 0,68]	-	veto
$a_4$	[0,33, 0,38]	[0,33, 0,38]	veto	-

$\varepsilon = 0,025$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	-	[0,50, 0,65]	[0,55, 0,70]	veto
$a_2$	[0,35, 0,50]	-	[0,35, 0,50]	[0,65, 0,65]
$a_3$	[0,45, 0,60]	[0,50, 0,65]	-	veto
$a_4$	[0,35, 0,35]	[0,35, 0,35]	veto	-

$\varepsilon = 0,050$

**Tabela VII.5. Variação da concordância face a polítopos contraídos (Exemplo 1).**

Como era de esperar, podemos observar que a variação diminui quando  $\varepsilon$  aumenta. No caso de  $\varepsilon=0,025$ , não encontramos nenhuma conclusão quasirobusta para além das conclusões robustas já conhecidas (recorde-se que  $s=0,55$ ). Quando consideramos  $\varepsilon=0,05$  (o valor máximo para este problema, pois anula a variabilidade de  $k_3$ ), as relações  $S^C(0,05)$  e  $N^C(0,05)$  já se tornam mais ricas do que  $S^R$  e  $N^R$ , surgindo novas conclusões quasirobustas em relação à lista da Secção 3:

- $a_2$  não prevalece sobre  $a_1$  ( $a_2 N^C(0,05) a_1$ );
- $a_2$  não prevalece sobre  $a_3$  ( $a_2 N^C(0,05) a_3$ );
- $a_1$  prevalece sobre  $a_3$  ( $a_1 S^C(0,05) a_3$ ).

**3º tipo: Introduzir uma tolerância na comparação entre  $r(.)$  e zero**

O terceiro tipo de relaxação é o mais simples de todos. Trata-se de considerar uma pequena tolerância (positiva)  $\varepsilon$  quando se averigua se  $r(.)$  é ou não negativo, uma relaxação de aplicação imediata quer  $T$  seja ou não discreto. Qualquer que seja o caso, podemos generalizar (2) e (3) da seguinte forma:

$$a_x S^Z(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow \min\{r(a_x, a_y, t) : t \in T\} \geq -\varepsilon;$$

$$a_x N^Z(\varepsilon) a_y \Leftrightarrow \max\{r(a_x, a_y, t) : t \in T\} < \varepsilon.$$

Uma vez mais, obtemos relações que generalizam  $S^R$  e  $N^R$ , tornando-se mais ricas (embora menos convincentes) à medida que  $\varepsilon$  aumenta e coincidindo com estas quando  $\varepsilon=0$ :

$$\begin{aligned} S^Z(\varepsilon) &\supseteq S^R & \text{e} & \quad N^Z(\varepsilon) \supseteq N^R; \\ S^Z(0) &= S^R & \text{e} & \quad N^Z(0) = N^R. \end{aligned}$$

Contudo, existe agora uma importante diferença em relação aos dois primeiros tipos de relaxação:  $S^Z(\varepsilon)$  e  $N^Z(\varepsilon)$  podem não ser mutuamente exclusivas. De facto, surgirão pares ordenados de acções  $(a_x, a_y)$  para os quais se verifica simultaneamente  $a_x S^Z(\varepsilon) a_y$  e  $a_x N^Z(\varepsilon) a_y$ , logo que  $\varepsilon$  exceda o limiar seguinte:

$$\varepsilon^K = \min_{(a_x, a_y) \in A^2} \left\{ \max \left\{ -\min_{t \in T} r(a_x, a_y, t), \max_{t \in T} r(a_x, a_y, t) \right\} \right\}.$$

Em alternativa, podemos afirmar, o que é equivalente, que  $a_x S^Z(\varepsilon) a_y$  e  $a_x N^Z(\varepsilon) a_y$  se verificam em simultâneo quando a gama de variação de  $r(a_x, a_y, t)$  face a  $T$  estiver contida no intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

Este terceiro tipo de relaxação encaixa de forma natural no enquadramento de Tsoukiàs e Vincke (1997), baseado numa lógica quaternária. Dado um qualquer par ordenado de acções  $(a_x, a_y)$ , a afirmação de que  $a_x$  prevalece sobre  $a_y$  pode ser:

- “verdadeira”, se  $a_x S^Z(\varepsilon) a_y \wedge \neg(a_x N^Z(\varepsilon) a_y)$ ;
- “falsa”, se  $\neg(a_x S^Z(\varepsilon) a_y) \wedge a_x N^Z(\varepsilon) a_y$ ;
- “incógnita”, se  $\neg(a_x S^Z(\varepsilon) a_y) \wedge \neg(a_x N^Z(\varepsilon) a_y)$ ;
- “contraditória”, se  $a_x S^Z(\varepsilon) a_y \wedge a_x N^Z(\varepsilon) a_y$ .

**Regresso ao Exemplo 1** (v. Secção 3). Admitamos que os decisores colocavam  $\varepsilon=0,055$  (i.e. 10% do limiar  $s$ ). Logo, para uma prevalência ser quasirobusta, a concordância mínima não pode ser inferior a  $s-\varepsilon = 0,495$ , enquanto a negação da prevalência é quasirobusta se ocorrer veto ou a concordância máxima não atingir  $s+\varepsilon = 0,605$ . Os resultados que obteríamos, neste caso, coincidiriam com os do segundo tipo de relaxação quando  $\varepsilon$  era igual a  $0,05$  (cf. Tabela VII.3). Para este exemplo, a situação de prevalência contraditória surgiria para  $\varepsilon > \varepsilon^K = 0,15$ .



Em suma:

Apresentámos três formas diferentes para obter conclusões quasirobustas, para as situações em que não abundem as conclusões (estritamente) robustas. Não elegeremos nenhum destes três tipos de relaxação como sendo o melhor, porquanto acreditamos que são todos adequados para encontrar argumentos para aceitar ou rejeitar uma prevalência, tanto mais convincentes quanto menor for a tolerância  $\varepsilon$ .

Os dois primeiros tipos de relaxação concorrem entre si, pois ambos se baseiam na exclusão de uma parte de  $T$ , para efeitos de testar a robustez das conclusões. O primeiro tipo apresenta como vantagem o controlo sobre a proporção de combinações de  $T$  que se menospreza. O segundo tipo apresenta como vantagens o controlo sobre quais as restrições que se podem alterar, bem como uma maior simplicidade em termos computacionais (se  $T$  não for discreto). Porém, para este segundo tipo de relaxação, pode acontecer que o máximo valor para  $\varepsilon$  seja demasiado baixo. O segundo tipo também se distingue do primeiro pelo facto de considerar sempre o mesmo conjunto de combinações  $T^{C(\varepsilon)}$  para testar conclusões relativas a todos os pares de acções, ao passo que no primeiro tipo os testes baseiam-se em subconjuntos de  $T$  que variam de par para par, embora se mantenha constante o seu volume.

O primeiro tipo de relaxação é indicado para situações em que os decisores pretendam conferir igual estatuto a todas as restrições e combinações de  $T$ , desejando controlar a proporção de combinações que se ignoram. Por sua vez, o segundo tipo de relaxação atribui menos importância às combinações na fronteira de  $T$ , privilegiando as mais centrais, o que é particularmente adequado quando os decisores raciocinam em termos de desigualdades estritas (e.g.  $k_1 > k_2$ ). O terceiro tipo de relaxação é o mais simples de efectuar e enfatiza o resultado do modelo (o valor da função  $r(\cdot)$ ) em vez do seu input (o conjunto  $T$ ), permitindo ainda introduzir o conceito de prevalência contraditória. Trata-se de um tipo de relaxação que pode ser conjugado com o primeiro ou o segundo tipo.

Mais importante será notar que qualquer destes tipos de relaxação deve ser utilizado de uma forma interactiva, na qual os decisores experimentem diferentes valores de tolerância, com o objectivo de aumentar o seu discernimento e de suscitar as questões conducentes à introdução de nova informação. Assinalamos ainda que a utilização da função  $r(\cdot)$  se deve apenas ao desejo de apresentar estas relaxações de forma geral, independente do método: aplicam-se ao ELECTRE I, ao ELECTRE IS e ao ELECTRE baseado em índices de credibilidade. Um defeito desta apresentação, no que respeita aos

ELECTREs I e IS, é o de  $r(\cdot)$  representar um mínimo entre aspectos de concordância e de veto, à partida incomensuráveis, tornando o valor de  $\varepsilon$  algo difícil de interpretar no terceiro tipo de relaxação. Este defeito, que não se verifica para o ELECTRE baseado em índices de credibilidade nem tem impacto nos dois primeiros tipos de relaxação, pode no entanto ser minorado:

- as relações  $S^R$  e  $N^R$  e as suas relaxações podem ser redefinidas para considerar separadamente a concordância e a discordância, utilizando-se dois parâmetros de tolerância,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , um para a condição de concordância, outro para a de discordância;
- tal como no ELECTRE I original, pode-se proceder a uma normalização que torne as escalas comparáveis;
- a discordância pode ser definida em termos de desvio relativo, por exemplo (para o ELECTRE IS):

$$r(a_x, a_y) = \min\{c(a_x, a_y) - s, [\Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y)]/v_j (j=1, \dots, n)\}.$$

Um dos objectivos mais importantes do apoio à decisão será, porventura, o aumento do conhecimento dos decisores sobre a situação de decisão e sobre as suas próprias preferências. Nesta perspectiva, os principais benefícios advirão da descoberta de conclusões robustas (ou quasirobustas) acerca da relação de prevalência. Pode até acontecer que, no decurso desse processo de aprendizagem, a acção a escolher se torne evidente, face aos argumentos que vão sendo encontrados. Todavia, os decisores poderão sentir a necessidade de seguir um processo estruturado (um procedimento de exploração da relação de prevalência) para seleccionar a acção mais preferida. Na secção seguinte, estudaremos esse assunto.

## 5. Formas de explorar as conclusões robustas

---

A exploração das conclusões robustas acerca da relação de prevalência, se necessária, não deve ser encarada como uma actividade que se desenrola para terminar o processo de seleccionar uma acção. Os resultados da exploração devem antes suscitar novas questões, que possam conduzir à revisão do conjunto  $T$  das combinações aceitáveis, regressando à fase de construção e análise da relação de prevalência. As fases de construção e exploração da relação de prevalência alternam-se, pois, num ciclo que se reitera tantas vezes quantas as necessárias.

Aqui, não necessitamos de inovar. A literatura sobre o apoio à decisão é já bastante fecunda em métodos para escolher uma acção que, por vezes, podem também servir para ordenar as acções. Embora todos esses métodos tenham sido desenvolvidos para um contexto particular, podem ser aplicados para complementar a análise proposta neste capítulo.

Dividiremos as estratégias de exploração possíveis em três grupos: no primeiro grupo, consideramos métodos que exploram um par de relações binárias; no segundo grupo, consideramos métodos que exploram graus de credibilidade de uma única relação; no terceiro grupo, consideramos o processo habitual no ELECTRE I/IS, segundo o qual se explora apenas uma relação.

### Exploração de um par de relações sobre $A$

Consideremos em primeiro lugar uma relaxação de  $S^R$  e  $N^R$  do terceiro tipo, que origina as relações  $S^Z(\varepsilon)$  e  $N^Z(\varepsilon)$  para uma dada tolerância  $\varepsilon$ . No caso de  $\varepsilon \geq \varepsilon^K$ , a prevalência de uma dada acção sobre outra pode ser “verdadeira”, “falsa”, “incógnita” ou “contraditória”, conforme vimos na secção anterior. Para estes casos, em que o predicado da prevalência pode assumir um de quatro valores lógicos, foram já propostas algumas técnicas de exploração. Tsoukiàs e Vincke (1997) sugerem a exploração em separado, através de um método adequado, da relação “verdadeiro” (no nosso caso,  $S^Z(\varepsilon) \cap \overline{N^Z(\varepsilon)}$ ) e da relação “não falso” (no nosso caso,  $\overline{N^Z(\varepsilon)}$ ), para obter duas ordenações, que são posteriormente combinadas para produzir um resultado final. Outra sugestão é a que encontramos em Greco et al. (1997), onde se propõe o uso de um método de pontuação (*net flow*), provando-se que este é o único a satisfazer um conjunto de propriedades desejáveis. A pontuação de cada acção  $a_x \in A$  é:

$$\begin{aligned} NetFlow(a_x) = & \#\{a_y \in A: \neg(a_x N^R a_y)\} - \#\{a_y \in A: \neg(a_y N^R a_x)\} + \\ & + \#\{a_y \in A: \neg(a_y S^R a_x)\} - \#\{a_y \in A: \neg(a_x S^R a_y)\}. \end{aligned}$$

Tanto o procedimento de Tsoukiàs e Vincke como o de Greco et al. não distinguem, na fase de exploração, as situações de prevalência “incógnita” das de prevalência “contraditória”. Logo, podem ser também aplicados nos casos em que outros tipos de relaxação foram usados, ou até quando não houve relaxação de  $S^R$  e de  $N^R$ . Em qualquer destes casos, as conclusões robustas ou quasirobustas indicam se a prevalência entre uma dada acção sobre uma outra é “verdadeira” (se  $S$  for robusta), “falsa” (se  $N$  for robusta) ou “duvidosa” (se nem  $S$  nem  $R$  forem robustas). Nestas circunstâncias, estamos em presença de uma relação de prevalência intervalar, limitada por  $S^R$  (ou sua relaxação) e por  $\overline{N^R}$  (ou o complemento da relaxação de  $N^R$ ).

Se encararmos  $S^R$  (ou sua relaxação) como uma relação de prevalência “forte”, que implica uma relação de prevalência “fraca”  $\overline{N^R}$ , então podemos utilizar ainda o procedimento de exploração do ELECTRE II (v. Roy e Bouyssou, 1993: 409-415):

- Obtenção de uma pré-ordem  $Z_1$  (“ranking directo”):
  - 1) considerar que cada circuito de  $S^R$  (ou sua relaxação) corresponde a uma classe de acções indiferentes (tratando-o como se fosse uma só acção), por forma a obter uma relação  $S^R$ , sem circuitos;
  - 2) classificar em primeiro lugar segundo  $Z_1$  todas as acções que não são prevalecidas segundo  $S^R$ ; classificar em segundo lugar todas as acções que não são prevalecidas, após remover as acções da primeira classe, e assim sucessivamente.
  - 3) repetir o processo para cada classe com mais do que uma acção, agora utilizando  $\overline{N^R}$  (ou o complemento da relaxação de  $N^R$ ), por forma a tentar obter um ranking mais discriminante.
- Obtenção de outra pré-ordem  $Z_2$  (“ranking inverso”):
 

o processo é análogo ao utilizado para obter a pré-ordem  $Z_1$ , mas começa-se pelas piores acções, classificando em cada iteração aquelas que não prevaleçam sobre nenhuma outra.
- Combinação das duas pré-ordens numa pré-ordem parcial  $Z = Z_1 \cap Z_2$ :

$$a_x Z a_y \Leftrightarrow a_x Z_1 a_y \wedge a_x Z_2 a_y.$$

Notemos, por fim, que embora nos tenhamos enquadrado numa problemática de selecção da melhor acção, os três métodos acima apontados obtêm uma ordenação das acções (ordenação parcial no caso do método do ELECTRE II, completa nos outros casos).

### **Exploração de graus de credibilidade de uma relação sobre A**

Esta estratégia de exploração é adequada sobretudo para relaxações do Tipo 1, seguindo a ideia de Bana e Costa e Vincke (1995), noutro contexto, de associar volumes a graus de credibilidade de uma relação binária. Dado um par ordenado de acções  $(a_x, a_y)$ , podemos associar a credibilidade da afirmação “ $a_x$  prevalece sobre  $a_y$ ” à proporção do volume de  $T$  correspondente às combinações para as quais essa afirmação é verdadeira. Essa credibilidade varia entre um mínimo de zero (quando  $a_x \succ^R a_y$ ) e um máximo de um (quando  $a_x \succ^R a_y$ ).

Uma vez obtida uma relação difusa deste tipo, existem métodos para a explorar, inclusivamente no âmbito de problemáticas de ordenação, nomeadamente os procedimentos *net-flow* (Bouyssou, 1992) e *min* (Pirlot, 1995), bem como os algoritmos de destilação do ELECTRE III (v. Roy e Bouyssou, 1993: 415-426).

### **Exploração de uma só relação**

Uma terceira estratégia consiste em considerar uma única relação  $S^M$  para ser posteriormente explorada pelo processo habitual do ELECTRE I. Podemos optar por uma das relações  $S^R$  ou  $\overline{N^R}$ , caso seja satisfatoriamente rica na óptica de uma exploração. Em alternativa, podemos recorrer à relaxação de  $S^R$  (ou recorrer ao complementar da relaxação de  $N^R$ ), utilizando um valor de tolerância  $\varepsilon$  que, embora pequeno, permita obter uma relação suficientemente rica. No caso de se utilizar uma relaxação do primeiro tipo ou do segundo tipo, a relação  $S^M$  que se obtém ( $S^M = S^V(\varepsilon)$  ou  $S^M = S^C(\varepsilon)$ , respectivamente), será uma relação “intermédia”, porquanto  $S^R \subseteq S^M \subseteq \overline{N^R}$ . Porém, essa relação  $S^M$  poderá não corresponder a nenhuma combinação de  $T$ .

O mesmo já não sucede com outra alternativa, que consiste em escolher uma combinação “central”  $t^c \in T$  e considerar a relação de prevalência  $S^M$  correspondente a essa combinação ( $S^R \subseteq S^M \subseteq \overline{N^R}$ ). A combinação  $t^c$  pode representar, por exemplo:

- uma combinação (podem existir várias) que maximize o menor desvio relativo às desigualdades que definem  $T$  — trata-se de colocar  $S^M = S^C(\varepsilon)$  (2º tipo de relaxação) para o maior valor de  $\varepsilon$  que torna  $T$  não vazio; ou

- a centróide do polítopo  $T$  (v. Solymosi e Dombi, 1986), um valor particularmente fácil de determinar quando as restrições que definem  $T$  correspondem a uma ordenação do valor dos parâmetros (os *ROC weights* de Barron e Barret, 1996).

Concluindo:

Existem na literatura referências a múltiplas técnicas de exploração que podem ser aplicadas no nosso contexto. Não recomendaremos uma delas, embora as baseadas num par de relações pareçam ser as mais fáceis de utilizar na prática. Diferentes técnicas podem ser utilizadas, de forma complementar, no âmbito de um processo de decisão. O primeiro objectivo deverá ser o de motivar a introdução de novas restrições a  $T$  e um regresso à fase de procura de conclusões robustas acerca da relação de prevalência. Contudo, é também lícito que os decisores pretendam um resultado final para terminar a análise, recorrendo a uma técnica de exploração, particularmente quando  $S^R$  esteja já próxima de  $\overline{N^R}$ .

## 6. Exemplos ilustrativos

---

A Subsecção VI.5.2 apresentava já algumas das ideias concretizadas neste capítulo. Nesta secção apresentamos outros dois exemplos sobre a obtenção de conclusões binárias robustas acerca de prevalências, incluindo formas de as explorar. Estudaremos dois casos reais descritos na literatura, onde estava patente alguma imprecisão acerca do valor dos parâmetros, procurando antever o que poderia ser obtido caso se trabalhasse explicitamente com essa imprecisão.

### 6.1. Exemplo baseado no ELECTRE II

O primeiro caso real é retirado de Maystre et al. (1994: Cap. 17). O problema consistia em escolher uma solução, de entre oito disponíveis, para localizar instalações para descarga de detritos. Há, portanto, oito acções, que foram avaliadas segundo doze critérios numa escala qualitativa (Tabela VII.6).

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$
$a_1$	2	7	6	6	6	2	4	7	4	5	2	5
$a_2$	3	4	7	8	5	1	2	8	5	2	7	3
$a_3$	4	7	8	9	8	1	3	5	8	4	6	2
$a_4$	4	7	8	9	8	5	5	5	8	4	10	4,5
$a_5$	2,5	5,5	7,5	7	5,5	3	4	7,5	4,5	3,5	5	5
$a_6$	3	7	7	7,5	7	3,5	4	6	6	4,5	4,5	4,5
$a_7$	3	7	7	7,5	7	5	4,5	6	6	4,5	3	5
$a_8$	3	6	7	8	6,5	5	4	6,5	4,5	3,5	6,5	5
$D_1$	0,5	1,5	1,5	3	1,5	0,5	0,5	1,5	3	0,5	3	0,5
$D_2$	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Tabela VII.6. Desempenhos e limiares de veto para o exemplo de Maystre et al.

Embora se tratasse de um problema de selecção, o método utilizado foi o ELECTRE II (v. Roy e Bouyssou, 1993; Maystre et al., 1994), que procura ordenar as acções da melhor para a pior. Este método constrói duas relações de prevalência (uma forte e outra fraca) de forma análoga ao ELECTRE I, considerando três limiares de concordância  $s$  (neste exemplo,  $0,55$ ,  $0,60$  e  $0,65$ ) e dois limiares de veto por critério (linhas  $D_1$  e  $D_2$  na Tabela VII.6). Havia um total de cinco decisores, cada um dos quais propôs uma combinação de valores para os coeficientes de importância dos critérios. Com base nessa informação, impusemos os limites de variação apresentados na Tabela VII.7, a que acrescentámos a condição de a soma dos coeficientes ser igual a um (e.g. não podem ser todos simultaneamente iguais aos limites superiores).

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$
limite inferior	0,04	0,07	0,02	0,02	0,08	0,08	0,05	0,07	0,01	0,05	0,01	0,01
limite superior	0,12	0,11	0,15	0,14	0,12	0,15	0,13	0,15	0,03	0,15	0,14	0,13

Tabela VII.7. Limites de variação para os coeficientes de importância para o exemplo de Maystre et al.

Vejamos agora o que obtemos se utilizarmos o ELECTRE I para construir a relação de prevalência, numa situação de informação imprecisa. As combinações de valores para os parâmetros  $k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n, s$  devem pertencer a um polítopo  $T$  definido pelas restrições seguintes:

- a soma de  $k_1, \dots, k_n$  deve ser igual a um;
- $k_1, \dots, k_n$  devem estar nos intervalos apresentados na Tabela VII.7;
- $v_1, \dots, v_n$  devem estar nos intervalos definidos pelas linhas  $D_1$  e  $D_2$  da Tabela VII.6;
- $s \in [0,55, 0,65]$ .

Para tornar as medidas de concordância e discordância comparáveis em magnitude, consideraremos

$$r(a_x, a_y, t) = \min\{c(a_x, a_y, k) - s, [\Delta_j + v_j]/10 \ (j=1, \dots, n)\}.$$

Maximizámos e minimizámos esta função, recorrendo à programação linear, para todos os pares ordenados de acções, obtendo as gamas de variação que apresentamos na Tabela VII.8. As relações robustas correspondentes,  $S^R$  (prevalência) e  $N^R$  (ausência de prevalência), estão representadas no grafo da Figura VII.4, onde os arcos sólidos significam “prevalece sempre”, enquanto os arcos tracejados significam “pode prevalecer”; a ausência de um arco significa “nunca prevalece”.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$a_1$	-	[-.4, -.2]	[-.32, <b>-.15</b> ]	[-.7, <b>-.5</b> ]	[-.39, <b>-.05</b> ]	[-.4, <b>-.1</b> ]	[-.45, <b>-.25</b> ]	[-.4, <b>-.25</b> ]
$a_2$	[-.44, <b>-.25</b> ]	-	[-.48, <b>-.15</b> ]	[-.58, <b>-.4</b> ]	[-.5, <b>-.15</b> ]	[-.47, <b>-.2</b> ]	[-.47, <b>-.35</b> ]	[-.44, <b>-.35</b> ]
$a_3$	[-.36, <b>-.25</b> ]	[-.2, <b>-.15</b> ]	-	[-.4, <b>-.35</b> ]	[-.3, <b>-.25</b> ]	[-.36, <b>-.2</b> ]	[-.4, <b>-.35</b> ]	[-.4, <b>-.35</b> ]
$a_4$	[-.1, <b>-.05</b> ]	[-.2, <b>-.15</b> ]	[ <b>0, .05</b> ]	-	[-.15, <b>-.1</b> ]	[-.05, <b>0</b> ]	[-.08, <b>0</b> ]	[-.05, <b>0</b> ]
$a_5$	[-.15, <b>-.1</b> ]	[-.23, <b>0</b> ]	[-.44, <b>-.1</b> ]	[-.57, <b>-.27</b> ]	-	[-.47, <b>-.05</b> ]	[-.54, <b>-.15</b> ]	[-.43, <b>-.15</b> ]
$a_6$	[-.08, <b>0</b> ]	[-.15, <b>-.05</b> ]	[-.32, <b>-.05</b> ]	[-.45, <b>-.25</b> ]	[-.22, <b>0</b> ]	-	[-.15, <b>-.1</b> ]	[-.33, <b>-.1</b> ]
$a_7$	[-.05, <b>0</b> ]	[-.3, <b>-.1</b> ]	[-.32, <b>-.05</b> ]	[-.37, <b>-.4</b> ]	[-.1, <b>0</b> ]	[-.05, <b>.05</b> ]	-	[-.25, <b>-.05</b> ]
$a_8$	[-.15, <b>-.1</b> ]	[-.05, <b>0</b> ]	[-.43, <b>-.05</b> ]	[-.49, <b>-.12</b> ]	[ <b>0, .05</b> ]	[-.1, <b>-.05</b> ]	[-.19, <b>-.05</b> ]	-

Tabela VII.8. Variação de  $r(.,.)$  para o exemplo de Maystre et al. Os valores destacados são devidos a efeitos de veto.

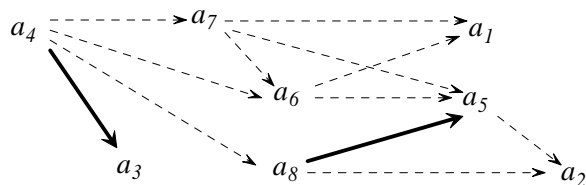


Figura VII.4. Relações “prevalece sempre” e “pode prevalecer”.

Estes são resultados que obtivemos utilizando o ELECTRE I com informação imprecisa, delimitada pelos valores dos parâmetros no estudo original, no qual se usava o ELECTRE II. Será, pois, curioso explorar estas relações robustas pelo método de ordenação do ELECTRE II (v. Secção 5). A Figura VII.5 sumaria o *ranking directo* e *ranking inverso* da nossa exploração, que são praticamente iguais aos do estudo original. A única diferença surge na posição de  $a_8$ , que no estudo original foi colocada *ex-aequo* com  $a_6$ . Este exemplo mostra bem o paralelo que podemos estabelecer entre as relações  $S^R$  e  $\overline{N^R}$ , por um lado, e as relações forte e fraca do ELECTRE II, por outro (porém, não podemos afirmar que são matematicamente equivalentes).



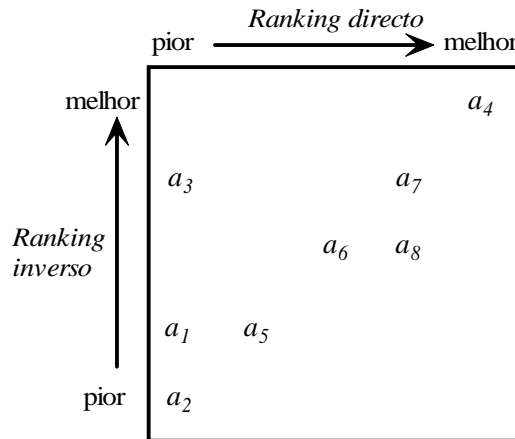


Figura VII.5. Resultados da exploração pelo ELECTRE II.

Uma análise mais cuidadosa dos resultados da Tabela VII.8 mostra que, para muitos pares de acções, a prevalência só será possível *in extremis*, pois  $\max r(.) = 0$  (devido a efeitos de veto) para esses casos. Nestas circunstâncias, uma relaxação do terceiro tipo, por exemplo, transformaria o “pode prevalecer” em “nunca prevalece”, por muito pequena que fosse a tolerância  $\varepsilon$ . Porém, neste exemplo, todos os arcos tracejados desapareceriam, excepto aquele entre  $a_7$  e  $a_6$ , o que não traria grandes argumentos contra considerar  $a_4$ ,  $a_7$  e  $a_8$  como as acções melhor posicionadas. Decerto, o interesse de efectuar relaxações será bem maior quando o efeito não for tão uniforme, i.e., quando alguns “pode prevalecer” se transformam em “prevalece sempre”, enquanto outros se transformam em “nunca prevalece” e os restantes permanecem naquele estado. Para o presente exemplo, seria porventura mais útil questionar os decisores, critério a critério, acerca dos limites escolhidos para os limiares de veto.

## 6.2. Exemplo baseado no ELECTRE IS

Roy e Bouyssou (1993: Cap. 8) apresentam um problema, vivido pelos correios de França, de selecção de máquinas para triagem de embalagens. No estudo que foi efectuado, o ELECTRE IS foi utilizado para comparar nove propostas (as acções), atendendo a doze critérios. A Tabela VII.9 apresenta os desempenhos das propostas segundo os vários critérios, todos a maximizar (daí o sinal negativo nos desempenhos segundo  $g_9$ ), bem como os valores dos parâmetros escolhidos nesse estudo.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$
$a_1$	75	69	68	70	82	72	86	74	-15,23	83	76	29
$a_2$	81	60	82	70	66	52	86	60	-15,7	83	76	71
$a_3$	77	60	82	50	66	60	86	60	-15	83	82	71
$a_4$	73	57	82	90	75	61	93	60	-15,55	83	71	29
$a_5$	76	46	55	90	48	46	93	60	-36,68	83	50	14
$a_6$	75	63	68	90	98	63	78	61	-22,9	100	68	57
$a_7$	73	63	68	70	98	86	78	61	-19,58	100	74	57
$a_8$	77	31	41	50	59	79	71	60	-15,47	67	76	86
$a_9$	96	69	41	70	49	60	57	60	-13,99	83	50	86
$q_j=p_j$	5	5	5	5	5	8	10	0	1	10	5	10
$v_j$	50	50	40	100	40	25	100	50	5	100	30	50
$k_j$	3/39	2/39	5/39	3/39	3/39	5/39	2/39	2/39	5/39	1/39	5/39	3/39

**Tabela VII.9. Desempenhos e limiares para o exemplo de Roy e Bouyssou.**

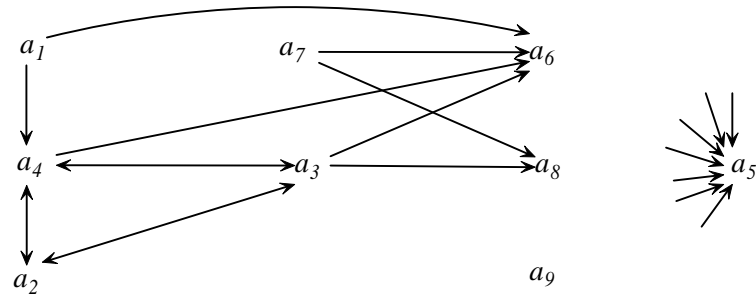
O estudo original não trabalhava explicitamente com informação imprecisa, mas esta surge implícita na descrição de Roy e Bouyssou. Estes autores descrevem como os coeficientes de importância foram fixados *a priori* num valor “central” que respeitasse o seguinte conjunto de restrições, que reflectia a opinião do decisor:

$$\begin{aligned}
 &k_{10} < k_2 = k_7 = k_8 < k_1 = k_4 = k_5 < k_3 = k_6 = k_9 = k_{11}, \\
 &k_{10} \leq k_{12} \leq k_{11}, \\
 &k_1 = k_2 + k_{10}, \\
 &k_{11} = k_1 + k_2, \\
 &k_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, 12).
 \end{aligned}$$

No estudo original, colocou-se  $s=0,7$ . Porém, nas análises de robustez *a posteriori* admitiu-se que

$$s \in [0,63, 0,73].$$

Os resultados do estudo original são os representados na Figura VII.6. Segundo o processo de exploração dos ELECTRE I/IS, o núcleo obtido foi  $N = \{a_1, a_7, a_9\}$ : a acção  $a_1$  justifica a exclusão das acções do circuito formado por  $a_2, a_3$  e  $a_4$ ; a acção  $a_7$  justifica a exclusão de  $a_8$ ; tanto  $a_1$  como  $a_7$  justificam a exclusão de  $a_5$  e  $a_6$ . No conjunto formado pelas acções  $a_1, a_7$  e  $a_9$  encontrar-se-ia a melhor. Após análises posteriores, experimentando enfraquecer o poder de veto de alguns critérios (Roy e Bouyssou não apresentam detalhes), decidiu-se excluir  $a_9$  e incluir  $a_3$  no conjunto das acções a propor para uma decisão final.



**Figura VII. 6. Relação de prevalência do estudo original ( $a_5$  é prevalectida por todas as outras, excepto  $a_8$ ).**

Podemos considerar esta situação de decisão como sendo de informação imprecisa no que diz respeito aos coeficientes de importância e ao limiar de concordância. Tentemos, pois, evitar fixar arbitrariamente o valor destes parâmetros e verificar quão diferentes serão as conclusões a que chegaremos. Uma vez que consideramos  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ , o conjunto de restrições apresentado *supra* para os coeficientes de importância é equivalente ao seguinte:

- (i)  $k_2 < k_1 < 2 k_2$ ,
- (ii)  $9 k_1 + 5 k_2 \leq 1$ ,
- (iii)  $9 k_1 + 7 k_2 \geq 1$ ,
- (iv)  $k_3 = k_1 + k_2$ ,  $k_4 = k_5 = k_1$ ,  $k_6 = k_1 + k_2$ ,  $k_7 = k_8 = k_2$ ,  $k_9 = k_1 + k_2$ ,  
 $k_{10} = k_1 - k_2$ ,  $k_{11} = k_1 + k_2$ ,  $k_{12} = 1 - 8k_1 - 6k_2$ ,
- (v)  $k_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, 12$ ),

Por outro lado, consideramos a restrição

$$(vi) \quad s \in [0,63, 0,73].$$

Por fim, mantemos os valores (fixos) do estudo original para os limiares de indiferença, preferência e veto.

Para encontrar conclusões robustas recorreremos à optimização de uma função  $r(\cdot)$  que engloba a concordância e a discordância, esta última incluindo o reforço do efeito de veto preconizado por Roy e Bouyssou. Para minorar a discrepância entre escalas no que respeita à discordância, optámos por dividir os desvios em relação aos limiares de veto pelo valor destes últimos (uma alternativa válida teria sido normalizar as escalas):

$$r(a_x, a_y) = \min\{ c(a_x, a_y) - s, [\Delta_j + v_j - q_j w_j(a_x, a_y)] / v_j \quad (j=1, \dots, n)\}.$$

Para cada par de acções  $(a_x, a_y)$ , determinámos o máximo e mínimo  $r(a_x, a_y)$ , respeitando as restrições (i-vi). As gamas de variação obtidas são apresentadas na Tabela VI.10. A partir destes resultados

podemos extrair directamente múltiplas conclusões robustas sobre a relação de prevalência. Em particular, podemos desde logo observar que a acção  $a_5$  nunca prevalece sobre nenhuma outra, ao passo que é prevalecida pelas acções  $a_1$  a  $a_7$ . A acção  $a_6$  também nunca prevalece sobre as restantes (excepto  $a_5$ ) e pode ser prevalecida por todas as outras (excepto  $a_5$ ), sendo sempre prevalecida por  $a_3$  e  $a_7$ . São argumentos muito fortes para nos persuadir a excluir estas duas acções: dificilmente alguém conseguiria argumentar que  $a_5$  (ou  $a_6$ ) poderia ser a melhor acção do grupo.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$a_1$	-	[-.08,.04]	[-.12,.01]	[.05,.18]	[.18,.31]	[-.05,.23]	[-.09,.16]	[-.23,-.14]	[-.38,-.26]
$a_2$	[-.28,.05]	-	[.13,.25]	[-.03,.12]	[.18,.31]	[-.12,.06]	[-.69,-.45]	[-.3,-.03]	[-.11,.08]
$a_3$	[-.16,.01]	[.18,.31]	-	[.1,.25]	[.08,.31]	[.01,.15]	[-.60,-.23]	[.01,.23]	[-.17,.01]
$a_4$	[-.09,.09]	[.01,.12]	[-.03,.08]	-	[.27,.37]	[-.05,.16]	[-.67,-.25]	[-.33,-.22]	[-.42,-.29]
$a_5$	[-4.34,-3.82]	[-3.95,-3.57]	[-4.29,-3.82]	[-4.18,-3.71]	-	[-2.81,-2.32]	[-3.47,-2.98]	[-3.90,-3.56]	[-4.10,-3.79]
$a_6$	[-1.21,-.8]	[-1.10,-.75]	[-1.14,-.83]	[-.81,-.59]	[.2,.33]	-	[-.57,-.17]	[-1.05,-.74]	[-1.15,-.91]
$a_7$	[-.09,.08]	[-.24,.01]	[-.48,-.17]	[-.26,0]	[.13,.25]	[.18,.31]	-	[.01,.18]	[-.48,-.24]
$a_8$	[-.23,-.07]	[-.31,-.15]	[-.38,-.19]	[-.31,-.15]	[-.09,.06]	[-.2,-.1]	[-.2,-.1]	-	[-.12,.06]
$a_9$	[-.67,-.15]	[-.31,-.14]	[-.44,-.23]	[-.38,-.19]	[-.02,.13]	[-.54,-.40]	[-1.20,-.56]	[-.42,-.03]	-

**Tabela VII.10. Variação de  $r(\cdot)$  considerando informação imprecisa. Os valores destacados resultam de efeitos de veto.**

Tal como no exemplo anterior, podemos ilustrar através de um grafo as conclusões que são robustas. A Figura VI.7 (onde  $a_5$  e  $a_6$  já não surgem) apresenta arcos sólidos que significam “prevalece sempre” (relação  $S^R$ ) e arcos tracejados que significam “pode prevalecer”; a relação “nunca prevalece” ( $N^R$ ) está implicitamente ilustrada pela ausência de arcos. A exploração destas relações poderia basear-se em qualquer das técnicas sugeridas na Secção 5. Notemos de momento que, explorando a relação “prevalece sempre” ( $S^R$ ) pelo processo habitual nos ELECTRE I/IS, obtemos um núcleo igual ao do estudo original:  $N = \{a_1, a_7, a_9\}$ . Aliás, a relação  $S^R$  é praticamente igual à relação de prevalência obtida para o estudo original (as diferenças surgem nos pares ordenados  $(a_2, a_4)$  e  $(a_4, a_3)$ ). Porém, uma vez que não fixámos valores precisos para os coeficientes de importância e para o limiar de concordância, o processo pelo qual obtivemos o mesmo núcleo parece-nos mais convincente.

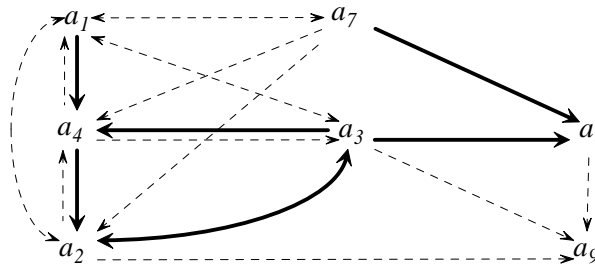


Figura VII.7. Relações “prevalence sempre” e “pode prevalecer”.

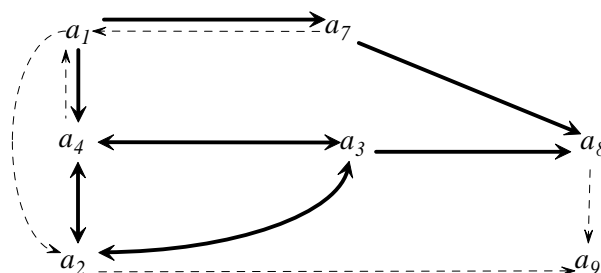
Para continuar este exemplo já temos de entrar em suposições. Imaginemos, pois, que o decisor era convidado a pensar sobre as prevalências duvidosas, por forma a saber se alguma o surpreende. Suponhamos que o decisor esperava que  $a_1$  prevalecesse sobre  $a_7$ . Era-lhe então mostrada a combinação  $k = (0,08, 0,04, 0,12, 0,08, 0,08, 0,12, 0,04, 0,04, 0,12, 0,04, 0,12, 0,12)$ ,  $s = 0,73$ , correspondente ao vértice de  $T$  onde  $r(a_1, a_7)$  é menor. Analisando esta informação, o decisor afirmava que  $k_2$  não deveria ser inferior a  $k_{12}$ , ao contrário do que sucedia naquela combinação, o que corresponde a uma nova restrição (se, mais radicalmente, o decisor impusesse  $a_1 S a_7$ , tal seria também transformável numa restrição linear). Face à redução do conjunto das combinações aceitáveis, ir-se-ia reduzir (ou pelo menos, não aumentaria) o intervalo de variação das funções  $r(\cdot)$ , de acordo com a Tabela VII.11 (onde  $a_5$  e  $a_6$  já não surgem).

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$a_1$	-	[-.04,.04]	[-.09,.01]	[.05,.17]	[.03,.16]	[-.19,-.14]	[-.34,-.26]
$a_2$	[-.28,.02]	-	[.13,.24]	[-.03,.10]	[-.69,-.47]	[-.17,-.03]	[-.06,.08]
$a_3$	[-.16,-.02]	[.18,.30]	-	[.1,.24]	[-.60,-.25]	[.07,.23]	[-.13,.01]
$a_4$	[-.09,.07]	[.06,.12]	[.01,.08]	-	[-.58,-.25]	[-.29,-.22]	[-.39,-.29]
$a_7$	[-.09,.06]	[-.18,.01]	[-.43,-.17]	[-.26,-.02]	-	[.07,.18]	[-.42,-.24]
$a_8$	[-.23,-.10]	[-.31,-.17]	[-.38,-.20]	[-.31,-.17]	[-.20,-.11]	-	[-.12,.04]
$a_9$	[-.67,-.20]	[-.31,-.16]	[-.44,-.25]	[-.38,-.20]	[-1.20,-.61]	[-.42,-.06]	-

Tabela VII.11. Variação de  $r(\cdot)$  considerando informação imprecisa após introdução da restrição  $k_2 \geq k_{12}$ . Os valores destacados resultam de efeitos de veto.

Neste momento, é já claro que  $a_1 S a_7$ , embora tal não tivesse sido imposto. Em relação às conclusões robustas que anteriormente se obtinham, emergiram as seguintes:  $a_1 S^R a_7$ ,  $a_4 S^R a_3$ ,  $a_3 N^R a_1$ ,  $a_7 N^R a_4$ . Para clarificar mais a situação, imaginemos que o decisor aceitava um desvio de 0,03 na comparação dos índices de concordância  $c(\cdot)$  com o limiar de concordância  $s$ , bem como um desvio até 3% do limiar de veto no que respeita à condição de não discordância. Trata-se de uma relaxação do

terceiro tipo com uma tolerância  $\varepsilon = 0,03$ . A Figura VII.8 representa as conclusões correspondentes às relações de quasirobustez  $S^Z(0,03)$  e  $N^Z(0,03)$ .



**Figura VII.8. Relações “prevalece sempre” e “pode prevalecer” após introdução da restrição  $k_2 \geq k_{12}$  e considerando uma relaxação.**

O processo de decisão poderia prosseguir, seja procurando obter mais informação do decisor (julgasse, por exemplo: será  $a_1$  preferível ou indiferente a  $a_4$ ?), seja explorando as relações da Figura VII.8. Se a opção fosse a da exploração pelo processo habitual, então  $a_1$  pertenceria seguramente ao núcleo, quer se considerasse a relação  $S^Z(0,03)$ , quer a relação  $N^Z(0,03)$ , embora o núcleo fosse conter outras acções. A acção  $a_1$  seria ainda a vencedora segundo a pontuação do *net flow* e segundo o método de exploração do ELECTRE II.

## 7. Notas conclusivas

---

Neste capítulo regressámos aos problemas de escolha, mas num contexto muito distinto do das funções de valor: os métodos ELECTRE. No espírito da delimitação ajustável, propusemos aceitar informação imprecisa *ab initio* e centrámo-nos na investigação das consequências da informação imprecisa, evitando a tentação de agregar. Nessa perspectiva, argumentámos que a procura de conclusões robustas ao nível da relação de prevalência parece ser uma ideia melhor do que a procura de conclusões acerca das acções que pertencem ao núcleo.

Procurar conclusões robustas acerca da relação de prevalência conduziu-nos a formular os problemas de verificar, para um dado par ordenado de acções, se a primeira prevalece sempre sobre a segunda, se nunca prevalece, ou se prevalece nalgumas vezes e não noutras, face a um conjunto de

combinações aceitáveis para os parâmetros. Quando o método em causa for o ELECTRE I ou o ELECTRE IS (este, na versão original ou sem reforço do efeito de veto), aqueles problemas poderão ser formulados como programas lineares.

Propusemos ainda algumas formas de relaxar as condições referentes às conclusões robustas, para obter conclusões quasirobustas (face a um valor de tolerância pequeno) e enriquecer, desta forma, a leitura dos resultados. Por fim, inventariámos um conjunto de técnicas para explorar as relações binárias associadas às conclusões robustas.

Os exemplos que apresentámos mostram como as conclusões robustas acerca da relação de prevalência, ou ligeiras relaxações das mesmas, eram suficientemente ricas para defender a escolha das acções mais interessantes com vista a uma selecção final. Os resultados que obtivemos eram ainda surpreendentemente semelhantes aos dos estudos originais, mas mais fáceis de justificar, porquanto evitámos arbitrar um valor preciso para cada parâmetro. Não esqueçamos, porém, que no espírito da delimitação ajustável, o interesse dos resultados é sobretudo estimular a discussão com e entre os decisores, com o intuito de obter mais informação.

As técnicas descritas possuem porventura a desvantagem de exigirem um esforço computacional por vezes elevado (optimização linear e não-linear, cálculo de volumes). Contudo, os decisores que as utilizem não deverão sentir tal desvantagem, por duas razões. Em primeiro lugar, os conceitos com que se trabalha (e.g. “prevalece sempre”, “nunca prevalece”) são fáceis de apreender por quem esteja familiarizado com os métodos ELECTRE, independentemente dos detalhes algorítmicos da computação dos resultados. Por outro lado, o poder computacional de vulgares computadores pessoais é já suficiente para resolver de forma expedita problemas de dimensões típicas.

A construção de um sistema computacional de apoio à decisão em torno daquelas técnicas surge, assim, como um desiderato inegavelmente interessante, a contemplar em investigação futura. Sobretudo, porque sentimos que nenhuma das (múltiplas) técnicas que propusemos é claramente melhor do que as restantes. Pelo contrário, cremos que a escolha da técnica a utilizar dependerá da situação de decisão concreta, podendo ser útil analisar um mesmo problema sob diferentes perspectivas recorrendo a diversas técnicas.

Poderá ainda valer a pena estudar o problema de escolha utilizando os ELECTRE segundo a perspectiva que abandonámos logo de início: a de considerar o resultado final (núcleo). Porém, face aos potenciais problemas que apresentámos, seria necessário determinar um “grau de pertença ao núcleo”

ou uma “distância ao núcleo” para todas as acções. Posteriormente, poder-se-ia justificar a escolha de uma acção que nunca estivesse muito afastada do núcleo, segundo conceitos a formalizar. Se recordarmos o Capítulo V, tratar-se-ia de criar conceitos equivalentes aos de *quasi-óptimo* ou de *min-max regret*. Notemos ainda que este tipo de análise também pode ser realizado se a exploração se processar segundo a regra *min* (Pirlot, 1995) ou *net-flow* (Bouyssou, 1992).



# Capítulo VIII

## Afectação ordenada com informação imprecisa

### 1. Introdução ao problema

---

Neste capítulo, estudamos o método ELECTRE TRI em situações de informação imprecisa.<sup>1,2</sup> Trata-se de um método da família ELECTRE que utiliza os índices de credibilidade estudados no Capítulo VI, concebido para o problema de afectar um conjunto de acções a categorias pré-definidas e ordenadas, com base em múltiplos critérios. Por exemplo, podem-se definir as categorias “risco baixo”, “risco médio” e “risco elevado” e pretender classificar um conjunto de empresas segundo aquelas designações. Aliás, a área financeira tem sido fértil em aplicações deste método (v. Schärliig, 1996: 156-157; Hurson e Zopounidis, 1997). Após termos dedicado o capítulo anterior a problemas de escolha (e ainda, indirectamente, a problemas de ordenação), entramos agora na problemática da afectação.

Uma vez que o ELECTRE TRI se baseia no cálculo de índices de credibilidade (referentes a relações de prevalência), através das expressões já apresentadas no Capítulo VI, é necessário que os decisores forneçam valores para os coeficientes de importância e limiares dos critérios, para o limiar de corte, para os desempenhos das acções a afectar, bem como para os desempenhos das acções de referência. Conforme temos assinalado, trata-se de um conjunto numeroso de parâmetros, o que contribui para as dificuldades enumeradas no Capítulo III.

---

<sup>1</sup> Este capítulo baseia-se em grande parte no trabalho que relatámos em Dias e Clímaco (2000b).

<sup>2</sup> A referência original do ELECTRE TRI é Yu (1992). Roy e Bouyssou (1993: 389-402) apresentam o método e a sua filosofia, enquanto Mousseau et al. (1999) descrevem um programa informático que facilita a utilização do mesmo.

Ao avançarmos no processo de decisão com informação imprecisa, as acções poderão ser afectadas a mais do que uma categoria, i.e. a sua afectação poderá depender da combinação de valores para os parâmetros que se considerar. Importará então determinar qual a melhor e qual a pior categoria a que cada acção pode ser afectada. Designemos por  $B(a_i)$  a melhor categoria compatível com a informação imprecisa (definida através de um conjunto  $T$  de combinações aceitáveis) e designemos por  $W(a_i)$  a pior categoria. Então, será possível encontrar conclusões robustas do tipo “a acção  $a_i$  pertence à categoria  $W(a_i)$  ou melhor”, ou “a acção  $a_i$  atinge, quando muito, a categoria  $B(a_i)$ ”. A diferença entre  $B(a_i)$  e  $W(a_i)$  indicará quão influenciada é  $a_i$  pelo facto da informação ser imprecisa. Em particular, se  $B(a_i)$  coincidir com  $W(a_i)$ , então teremos conseguido obter uma afectação (robusta) precisa, apesar da imprecisão que rodeia o valor dos parâmetros. Se, pelo contrário,  $B(a_i)$  estiver longe de  $W(a_i)$ , então a acção  $a_i$  é muito influenciada pela imprecisão do valor dos parâmetros, pelo que os decisores poderão dirigir-lhe a sua atenção. A análise que se descreve a seguir permite que se mostrem aos decisores combinações “extremas” de valores para os parâmetros, conducentes à afectação em  $B(a_i)$  ou  $W(a_i)$ , estimulando-os com isso a fornecer mais informação (e.g. incluir uma restrição adicional, se entenderem que determinado parâmetro não pode ter um valor tão diminuto ou tão elevado como o apresentado).

Neste capítulo iremos basear-nos na análise efectuada no Capítulo VI, com o intuito de determinar a melhor e a pior categoria a que uma acção pode ser afectada, face a um polítopo  $T$  de combinações aceitáveis. O intervalo de categorias assim definido coincide, regra geral, com a gama de categorias a que a acção pode ser afectada. Contudo, há que notar a possibilidade de existir uma categoria entre  $B(a_i)$  e  $W(a_i)$  à qual  $a_i$  não possa ser afectada, qualquer que seja a combinação de valores escolhida para os parâmetros (v. Apêndice C).

Começaremos por rever brevemente o método ELECTRE TRI, para depois o adaptarmos ao caso da informação imprecisa. Apresentaremos um algoritmo de afectação no qual, dependendo do resultado que se pretenda (melhor vs. pior afectação, variante pessimista vs. optimista), se efectua em cada iteração um teste cuja avaliação corresponde a um programa matemático. Os programas matemáticos a resolver serão idênticos aos estudados no Capítulo VI, existindo apenas uma alteração, num dos casos que estudaremos. Este procedimento será então ilustrado através de um exemplo. Antes de concluirmos o capítulo, iremos ainda analisar como se pode integrar este tipo de procedimento com um outro, que visa inferir os parâmetros do ELECTRE TRI a partir de exemplos fornecidos por um

decisor. É de notar que, embora nos foquemos no método ELECTRE, as mesmas ideias são também aplicáveis aos métodos baseados numa função de valor.

## 2. O MÉTODO ELECTRE TRI

---

Apresentamos aqui, de forma sucinta, o método ELECTRE TRI, nas suas variantes pessimista e optimista. O método trabalha com categorias sobre as quais existe uma ordem de preferência, da pior à melhor, como por exemplo “Muito mau”, “Mau”, “Razoável”, “Bom” e “Muito bom”. Diz-se, portanto, que é um método de afectação ordinal. O ELECTRE TRI pretende avaliar o mérito de cada acção em termos absolutos, afectando cada acção a uma categoria. A afectação de cada acção é independente das outras acções: à partida, nada impede que sejam todas afectadas à mesma categoria (e.g. as acções podem ser todas muito boas, incluindo a pior delas).

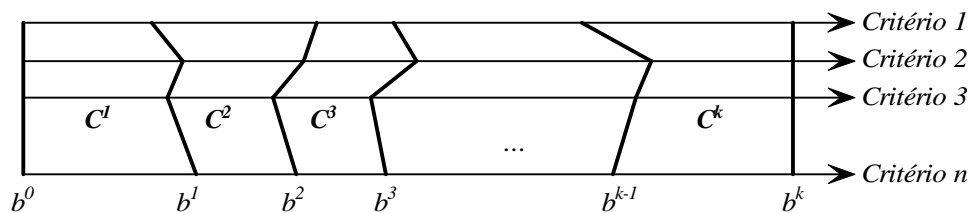
Retomaremos aqui a notação introduzida no Capítulo VI. Seja  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  um conjunto de acções avaliadas em  $n$  critérios. Designaremos por  $C = \{C^1, \dots, C^k\}$  um conjunto de  $k$  categorias por ordem de preferência, sendo  $C^1$  a pior e  $C^k$  a melhor. Cada categoria  $C^h$  ( $h=1, \dots, k$ ) é definida através de duas **acções de referência**:  $b^h$  delimita a categoria superiormente, enquanto  $b^{h-1}$  delimita a categoria inferiormente. Assim, é necessário definir as acções de referência  $b^0, \dots, b^k$ , tais que, exceptuando a primeira e a última, cada uma constitui simultaneamente o limite superior de uma categoria e o limite inferior da categoria seguinte (Figura VIII.1). Segundo os autores do método, as acções de referência devem obedecer às seguintes condições:

- $g_j(b^h)$  é melhor do que  $g_j(b^{h-1})$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$  ( $b^h$  domina  $b^{h-1}$ ), para  $h = 1, \dots, k$ ;
- $b^h P b^{h-1}$  (relação de preferência, considerando os limiares de indiferença e de preferência<sup>3</sup>), para  $h = 1, \dots, k$ ;
- $b^k P a_i, \forall a_i \in A$ ;
- $a_i S b^0, \forall a_i \in A$ ;

---

<sup>3</sup> Note-se que uma acção pode até dominar outra sem que lhe seja considerada preferível, segundo o ELECTRE: tudo depende da amplitude das diferenças de desempenho, quando comparadas com os limiares de indiferença e preferência.

- cada acção de  $A$  pode ser indiferente, no máximo, a uma acção de referência.



**Figura VIII.1.** As categorias são delimitadas por acções de referência.

A afectação de cada acção  $a_i \in A$  processa-se comparando-a às sucessivas acções de referência. Este processo difere consoante a variante que seja escolhida: pessimista (a mais utilizada na prática) ou optimista.

**ELECTRE TRI pessimista:** Esta variante afecta cada acção  $a_i \in A$  à categoria mais elevada  $C^h$  tal que  $a_i$  prevaleça sobre o seu limite inferior ( $b^{h-1}$ ). O algoritmo de afectação pode ser, por exemplo, o seguinte (Yu, 1992):

```

h ← k // melhor categoria
ENQUANTO ¬(a_i S b^{h-1}) FAZ
    decrementa h
FIM_FAZ
Afecta a_i à categoria C^h.
    
```

**ELECTRE TRI optimista:** Esta variante afecta cada acção  $a_i \in A$  à categoria mais baixa  $C^h$  tal que o seu limite superior ( $b^h$ ) seja preferível a  $a_i$ . O algoritmo de afectação pode ser, por exemplo, o seguinte (Yu, 1992):

```

h ← 1 // pior categoria
ENQUANTO ¬(b^h P a_i) FAZ
    incrementa h
FIM_FAZ
Afecta a_i à categoria C^h.
    
```

A categoria a que uma acção é afectada pela variante pessimista é sempre igual ou pior do que a categoria a que seria afectada pela variante optimista, daí estas designações. Quando a categoria que resulta da variante pessimista é diferente da que resulta da variante optimista, tal significa que a acção a afectar é incomparável a uma ou mais acções de referência.

Para verificar se  $a_i S b^h$ , bem como para verificar se  $b^h P a_i$  (o que equivale a  $b^h S a_i \wedge \neg(a_i S b^h)$ ), calculam-se os índices de credibilidade  $\sigma(\dots)$  referentes à prevalência para os pares ordenados em causa, pelo processo apresentado no Capítulo VI. A prevalência verifica-se no caso da sua credibilidade atingir (ou ultrapassar) um **limiar de corte**  $\lambda$ .

### 3. Adaptação do ELECTRE TRI para o caso de informação imprecisa

---

#### 3.1. Caracterização da informação imprecisa

À semelhança do estudo apresentado no Capítulo VI, consideraremos que pode existir informação imprecisa acerca do valor dos coeficientes de importância  $k_j$  e do valor dos limiares  $q_j, p_j$  e  $v_j$  de cada critério ( $j=1, \dots, n$ ), bem como acerca do valor dos desempenhos  $g_{ij} = g_j(a_i)$  ( $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ ) das acções a afectar. Pode existir também informação imprecisa acerca do valor dos parâmetros agora introduzidos: os desempenhos  $g'_{ij} = g_j(b^h)$  ( $h=0, \dots, k; j=1, \dots, n$ ) das acções de referência e o limiar de corte  $\lambda$ . As restrições são semelhantes às apresentadas naquele capítulo (Secção 3), a saber, intervalos de variação e restrições lineares, podendo ser de três tipos:

**Tipo 1:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, g'_{01}, \dots, g'_{kn}, k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n, \lambda) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}, g'_{0j}, g'_{1j}, \dots, g'_{kj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^{m+k+1}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n, \quad (3.5)$$

$$v_j \in [v_j^L, v_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6a)$$

$$\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \quad (3.7) \quad \}$$

**Tipo 2:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, g'_{01}, \dots, g_{kn}, k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n, \lambda) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}, g'_{0j}, g'_{1j}, \dots, g'_{kj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^{m+k+1}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n, \quad (3.5)$$

$$(v_1, \dots, v_n) \in V \subset \mathcal{R}^n \quad (3.6b)$$

$$\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \quad (3.7) \quad \}$$

**Tipo 3:**  $T = \{ t=(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, g_{11}, \dots, g_{mn}, g'_{01}, \dots, g_{kn}, k_1, \dots, k_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda) :$

$$q_j \in [q_j^L, q_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$v_j \geq p_j \geq q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$(g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}, g'_{0j}, g'_{1j}, \dots, g'_{kj}) \in G_j \subset \mathcal{R}^{m+k+1}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in K \subset \mathcal{R}^n, \quad (3.5)$$

$$\alpha_j \in [\alpha_j^L, \alpha_j^U], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6c)$$

$$\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \quad (3.7) \quad \}$$

Estas restrições podem ser directamente fornecidas pelos decisores ou ser inferidas a partir de julgamentos que estes possam efectuar de forma holística. Em qualquer dos casos, trata-se de informação mais fácil de obter do que valores precisos para os parâmetros. Consideraremos que o conjunto  $T$  das combinações de valores para os parâmetros que satisfazem estas restrições é um polítopo.

### 3.2. Adaptação dos algoritmos de afectação

Podemos adaptar os algoritmos de afectação habitualmente utilizados (Yu, 1992) para obter a melhor categoria,  $B(a_i)$ , e a pior categoria,  $W(a_i)$ , compatível com  $T$ , para cada acção  $a_i \in A$ . Introduziremos, para esse fim, a seguinte notação, em que  $t$  representa uma combinação pertencente a  $T$ :

- $a_i S(t) a_j$  indica que uma acção  $a_i$  prevalece sobre outra acção  $a_j$  quando os valores dos parâmetros são  $t$ ;
- $a_i P(t) a_j$  indica que uma acção  $a_i$  é preferível a outra acção  $a_j$  quando os valores dos parâmetros são  $t$ , com

$$a_i P(t) a_j \Leftrightarrow a_i S(t) a_j \wedge \neg(a_j S(t) a_i)$$

A ordem de dominância existente entre as acções de referência permite-nos então estabelecer o seguinte resultado, no qual se baseia a adaptação dos algoritmos de afectação:

**Proposição VIII.1.** Seja  $a_i$  uma qualquer acção de  $A$  e seja  $b^0, \dots, b^k$  o conjunto das acções de referência. Então,

$$a_i S(t) b^c \Rightarrow a_i S(t) b^{c-1} \text{ e } a_i P(t) b^c \Rightarrow a_i P(t) b^{c-1} \text{ (} c=1, \dots, k \text{);}$$

$$\neg(a_i S(t) b^c) \Rightarrow \neg(a_i S(t) b^{c+1}) \text{ e } \neg(a_i P(t) b^c) \Rightarrow \neg(a_i P(t) b^{c+1}) \text{ (} c=0, \dots, k-1 \text{).}$$

(A demonstração omite-se, por ser muito simples, v. Roy e Bouyssou, 1993: 92-93).

Os algoritmos para encontrar a melhor e a pior categoria para uma dada acção  $a_i$  podem ser, então, os seguintes:

**ELECTRE TRI pessimista:** substituímos “não prevalece” no algoritmo original por “pode não prevalecer” ou por “nunca prevalece”, consoante se trate de obter a pior categoria ou a melhor categoria, respectivamente, compatível com  $T$ .

<p><u>Para encontrar a pior categoria</u></p> <p><math>h \leftarrow k</math> // melhor categoria</p> <p>ENQUANTO <math>\exists t \in T: \neg(a_i S(t) b^{h-1})</math> FAZ</p> <p style="padding-left: 40px;">decrementa <math>h</math></p> <p>FIM_FAZ</p> <p><math>W_p(a_i) \leftarrow C^h</math>. // <math>p</math> indica variante pessimista</p>	<p><u>Para encontrar a melhor categoria</u></p> <p><math>h \leftarrow k</math> // melhor categoria</p> <p>ENQUANTO <math>\forall t \in T: \neg(a_i S(t) b^{h-1})</math> FAZ</p> <p style="padding-left: 40px;">decrementa <math>h</math></p> <p>FIM_FAZ</p> <p><math>B_p(a_i) \leftarrow C^h</math>. // <math>p</math> indica variante pessimista</p>
---	---

**ELECTRE TRI optimista:** substituímos “não é preferível” no algoritmo original por “nunca é preferível” ou por “pode não ser preferível”, consoante se trate de obter a pior categoria ou a melhor categoria, respectivamente, compatível com  $T$ .

<p><u>Para encontrar a pior categoria</u></p> <p><math>h \leftarrow 1</math> // pior categoria</p> <p>ENQUANTO <math>\forall t \in T: \neg(b^h P(t) a_i)</math> FAZ</p> <p style="padding-left: 40px;">incrementa <math>h</math></p> <p>FIM_FAZ</p> <p><math>W_o(a_i) \leftarrow C^h</math>. // <math>o</math> indica variante optimista</p>	<p><u>Para encontrar a melhor categoria</u></p> <p><math>h \leftarrow 1</math> // pior categoria</p> <p>ENQUANTO <math>\exists t \in T: \neg(b^h P(t) a_i)</math> FAZ</p> <p style="padding-left: 40px;">incrementa <math>h</math></p> <p>FIM_FAZ</p> <p><math>W_o(a_i) \leftarrow C^h</math>. // <math>o</math> indica variante optimista</p>
--	--

### 3.3. Melhoramento dos algoritmos de afectação

Nesta subsecção apresentamos versões mais eficientes dos algoritmos anteriores, na medida em que efectuam um menor número de comparações com acções de referência. Tal apresenta algum interesse face à dificuldade que pode constituir a verificação das condições de prevalência (variante pessimista) ou de preferência (variante optimista), considerando o domínio  $T$ .

Podemos começar por notar que os algoritmos anteriores procuram a categoria de afectação para o TRI pessimista começando pela melhor categoria ( $C^k$ ), ao passo que para o TRI optimista começam a pesquisa pela pior categoria ( $C^l$ ). Ora, é bem sabido que a afectação pelo TRI pessimista resulta numa categoria igual a, ou mais baixa do que, a resultante da afectação pelo TRI optimista, pelo que bastaria começar as pesquisas pela ordem inversa para efectuar menos comparações. Em qualquer dos casos, a ordem de complexidade destes algoritmos de pesquisa é linear (relativamente ao número de categorias).

Apresentamos de seguida uma versão potencialmente melhor, por ter uma ordem de complexidade logarítmica, que é particularmente mais rápida se existir um grande número de categorias. Trata-se de uma pesquisa binária: dado um intervalo de categorias, efectua-se um teste para determinar se  $a_i$  pertence à metade inferior ou à metade superior desse intervalo. Efectua-se assim, em cada iteração, uma bissecção do intervalo de categorias: com base no resultado do teste, ignora-se a metade que não interessa e continua-se a pesquisa considerando a outra metade. O algoritmo que apresentamos é geral, alterando-se apenas o teste a efectuar consoante o resultado que se pretende. Seja  $teste(T)$  uma das expressões lógicas seguintes:

$$\forall t \in T, a_i S(t) b^h, \text{ se o propósito do algoritmo for determinar } W_p(a_i);$$

$$\exists t \in T, a_i S(t) b^h, \text{ se o propósito do algoritmo for determinar } B_p(a_i);$$

$$\forall t \in T: \neg(b^h P(t) a_i), \text{ se o propósito do algoritmo for determinar } W_o(a_i);$$

$$\exists t \in T: \neg(b^h P(t) a_i), \text{ se o propósito do algoritmo for determinar } B_o(a_i).$$

Se  $teste(T)$  for verdadeiro, procurar-se-á uma afectação a uma categoria superior a  $C^h$ . Quando pretendemos saber a melhor afectação possível face a  $T$ , procuramos saber se determinada condição pode ser satisfeita *por alguma* combinação de  $T$ ; quando pretendemos saber a pior afectação, procuramos saber se determinada condição é sempre satisfeita *por todas* as combinações de  $T$ . Um algoritmo de pesquisa genérico baseado nestas ideias é o seguinte:



```

L ← limite_inferior = 1 // ou um valor superior a 1
U ← limite_superior = k // ou um valor inferior a k
ENQUANTO L < U FAZ
    h ← ⌊(L+U)/2⌋ (onde ⌊x⌋ = max{n ∈ ℕ: n ≤ x})
    SE teste(T) for verdadeiro ENTÃO L ← h+1 // procura na metade superior
    SE_NÃO U ← h // procura na metade inferior
FIM_FAZ
Resultado da afectação ← CL
// o resultado é Bp(ai), Wp(ai), Bo(ai) ou Wo(ai), consoante a expressão de teste(T)

```

Notemos ainda que, embora o algoritmo comece por considerar um intervalo de afectação da categoria  $C^l$  à categoria  $C^k$ , pode existir informação que permita começar a pesquisa num intervalo mais restrito, seja com  $limite\_inferior > 1$ , seja com  $limite\_superior < k$ , nomeadamente após ter obtido algum resultado anterior. Na verdade, sabemos que  $B_p(a_i) \geq W_p(a_i)$  e  $B_o(a_i) \geq W_o(a_i)$ , e sabemos que  $W_p(a_i) \leq W_o(a_i)$  e  $B_p(a_i) \leq B_o(a_i)$ . Logo, após determinar um destes quatro resultados, podemos restringir o intervalo de categorias em que procuramos os outros três.

Este algoritmo mostra que as conclusões robustas referentes à categoria onde uma acção é afectada equivalem a uma conjunção de conclusões robustas binárias referentes à comparação entre aquela acção e as acções de referência.

## 4. Determinação do resultado do teste

---

### 4.1. Formulação como problema de optimização

Nesta subsecção mostraremos como se pode recorrer à programação matemática para determinar se  $teste(T)$  é verdadeiro ou falso. Seja  $\sigma(x,y,t)$  o índice de credibilidade da afirmação “ $x$  prevalece sobre  $y$ ”, onde  $x$  é uma acção a afectar e  $y$  uma acção de referência, ou vice-versa, quando os parâmetros assumem a combinação de valores  $t \in T$ . Apresentamos de seguida os quatro casos possíveis, considerando uma qualquer acção  $a_i \in A$ .

**Melhor categoria pelo ELECTRE TRI pessimista -  $B_p(a_i)$ :**

$$\exists t \in T, a_i S(t) b^h \text{ se e só se } \max\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda : t \in T\} \geq 0.$$

Notemos que é possível, utilizando um algoritmo iterativo de optimização, concluir que a afirmação é verdadeira antes de atingir a solução óptima, logo que se encontre uma solução com valor não negativo.

**Melhor categoria pelo ELECTRE TRI optimista -  $B_o(a_i)$ :**

$$\exists t \in T: \neg(b^h P(t) a_i) \text{ se e só se } \min\{\sigma(b^h, a_i, t) - \lambda : t \in T\} < 0 \vee \max\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda : t \in T\} \geq 0.$$

Notemos que, se o problema de optimização resolvido em primeiro lugar verificar a condição correspondente, então a disjunção lógica é, obviamente, verdadeira, não sendo necessário resolver o segundo problema. A escolha do problema que se resolve em primeiro lugar é arbitrária.

**Pior categoria pelo ELECTRE TRI pessimista -  $W_p(a_i)$ :**

$$\forall t \in T, a_i S(t) b^h \text{ se e só se } \min\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda : t \in T\} \geq 0.$$

Notemos que é possível, utilizando um algoritmo iterativo de optimização, concluir que a afirmação é falsa antes de atingir a solução óptima.

**Pior categoria pelo ELECTRE TRI optimista -  $W_o(a_i)$ :**

$$\forall t \in T: \neg(b^h P(t) a_i) \text{ se e só se } \{t \in T : \sigma(b^h, a_i, t) - \lambda \geq 0 \wedge \sigma(a_i, b^h, t) - \lambda < 0\} = \emptyset.$$

Tal pode ser formulado através de um problema de optimização. Uma possibilidade é:

$$\forall t \in T: \neg(b^h P(t) a_i) \text{ se e só se } \min\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda : t \in T, \sigma(b^h, a_i, t) - \lambda \geq 0\} \geq 0.$$

Trata-se de um problema que pode ser difícil de resolver nos casos não-lineares (restrições do tipo 2 ou 3). O conjunto das soluções admissíveis deixa então de ser um polítopo, embora continue a ser convexo, dada a quasiconcavidade da função  $\sigma(b^h, a_i, t)$  (v. Apêndice B). Contudo, é possível evitar efectuar este teste a cada iteração, com base no resultado que se prova a seguir:

**Proposição VIII.2.** Seja  $C^o$  a categoria a que uma acção  $a_i$  é afectada pelo TRI optimista e seja  $C^m$  a categoria mais baixa tal que o seu limite superior ( $b^m$ ) prevaleça sobre  $a_i$  ( $m = \min\{h: b^h S a_i\}$ ). Então,

$$C^o = C^m \text{ ou } C^o = C^{m+1}.$$

*Prova:*

Considerando primeiro o par ordenado  $(b^m, a_i)$ , sabemos, pela definição de  $m$ , que  $b^m S a_i$ . Consideremos agora o par ordenado  $(a_i, b^m)$ .

Suponhamos primeiro que  $\neg(a_i S b^m)$ , pelo que  $b^m P a_i$ . Se assim for,  $a_i$  será afectada pelo TRI optimista à categoria  $C^m$  ou inferior. Porém, como  $m = \min\{h: b^h S a_i\}$ , a afectação tem de resultar precisamente na categoria  $C^m$ , i.e.  $C^o = C^m$ .

Suponhamos agora o contrário, ou seja,  $a_i S b^m$ , pelo que  $b^m I a_i$ . Nesse caso,  $C^o$  é superior a  $C^m$ . Consideremos, pois, a categoria  $C^{m+1}$ . Por um lado,  $b^m S a_i$  implica  $b^{m+1} S a_i$  (Proposição VIII.1). Por outro lado, uma vez que  $a_i$  não pode ser indiferente a mais do que uma acção de referência (e.g. v. Yu, 1992), então não poderá ser indiferente a  $b^{m+1}$ . Por conseguinte, tem que se verificar  $b^{m+1} P a_i$ , pelo que  $a_i$  será afectada pelo TRI optimista à categoria  $C^{m+1}$ , i.e.  $C^o = C^{m+1}$ .  $\square$

Propomos, com base neste resultado, que o algoritmo de pesquisa binária utilize a seguinte expressão para *teste(T)*:

$$\forall t \in T: \neg(b^h S(t) a_i), \text{ que é equivalente a } \max\{\sigma(b^h, a_i, t) - \lambda : t \in T\} < 0.$$

Trata-se de um teste mais simples, através do qual o algoritmo de pesquisa encontrará a categoria  $C^m$ . No fim da execução do algoritmo de pesquisa, e apenas nessa altura, será então necessário efectuar um último teste para determinar se  $C^o = C^m$  ou  $C^o = C^{m+1}$ :

$$\exists t \in T: b^m P(t) a_i, \text{ que é equivalente a } \min\{\sigma(a_i, b^m, t) - \lambda : t \in T \wedge \sigma(b^m, a_i, t) - \lambda \geq 0\} < 0.$$

Se esta expressão for verdadeira então  $W_o(a_i) = C^m$ ; caso contrário,  $W_o(a_i) = C^{m+1}$ .

#### 4.2. Sobre a determinação da melhor categoria para uma acção

Consideremos o problema de encontrar a melhor categoria à qual uma acção  $a_i$  pode ser afectada, face à informação imprecisa formalizada por  $T$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que é utilizado o algoritmo de pesquisa binária. Se a variante escolhida for o TRI pessimista, há que resolver em cada iteração daquele algoritmo o problema de optimização  $\max\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda : t \in T\}$ , até atingir uma solução de valor não negativo ou uma solução óptima. Se a variante em causa for o TRI optimista,

há que começar por resolver o mesmo problema em cada iteração, até encontrar uma solução de valor não negativo ou uma solução óptima. No caso de se atingir um valor óptimo negativo, e apenas nesse caso, é necessário resolver também na mesma iteração de pesquisa o problema  $\min\{\sigma(b^h, a_i, t) - \lambda: t \in T\}$ , até atingir uma solução de valor negativo ou uma solução óptima.

O processo de maximizar ou minimizar  $\sigma(.,.,t) - \lambda$ , sujeito a  $t \in T$ , não difere do processo de maximizar ou minimizar apenas o índice de credibilidade, já discutido em detalhe no Capítulo VI, visto que o limiar  $\lambda$  está apenas sujeito à restrição  $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ . Se os limiares de veto não dependerem uns dos outros nem do valor dos coeficientes de importância (restrição de tipo 1), o que é habitualmente o caso, os problemas podem ser resolvidos pelas técnicas da programação linear. Caso contrário, já será necessário recorrer à programação não-linear (v. Capítulo VI para mais detalhes).

### 4.3. Sobre a determinação da pior categoria para uma acção

Consideremos agora o problema de encontrar a pior categoria à qual uma acção  $a_i$  pode ser afectada, face a  $T$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que é utilizado o algoritmo de pesquisa binária. Se a variante escolhida for o TRI pessimista, há que resolver em cada iteração daquele algoritmo o problema de optimização  $\min\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda: t \in T\}$ , até atingir uma solução de valor negativo ou uma solução óptima. No caso de se tratar do TRI optimista, há que começar por resolver em cada iteração o problema  $\max\{\sigma(b^h, a_i, t) - \lambda: t \in T\}$ , até encontrar uma solução de valor não negativo ou uma solução óptima. Encontra-se por este processo a categoria  $C^m$  a que se refere a Proposição VIII.2 ( $m = \min\{h: b^h S a_i\}$ ). Terminada a pesquisa, é apenas necessário resolver um problema do tipo  $\min\{\sigma(a_i, b^m, t) - \lambda: t \in T \wedge \sigma(b^m, a_i, t) - \lambda \geq 0\}$ , até encontrar uma solução de valor negativo ou uma solução óptima, para determinar se  $W_o(a_i) = C^m$  ou  $W_o(a_i) = C^{m+1}$ .

O processo de maximizar ou minimizar  $\sigma(.,.,t) - \lambda$ , sujeito a  $t \in T$ , foi já discutido em detalhe no Capítulo VI. Resta-nos apenas acrescentar algumas palavras sobre o teste final. Trata-se de minimizar  $\sigma(a_i, b^m, t) - \lambda$ , sujeito a  $t \in T$  e à restrição adicional  $\sigma(b^m, a_i, t) - \lambda \geq 0$ . O processo que sugerimos é semelhante ao do Capítulo VI, para os três tipos de restrições sobre os limiares de veto estudados (3.6a, 3.6b e 3.6c). Referir-nos-emos às seguintes proposições, que são apresentadas com maior detalhe e demonstradas no Apêndice B:

**Proposição B.3:** Se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância, então a função a função  $\sigma(b^m, a_i, k)$  é estritamente quasicôncava e estritamente quasicôncava.

**Proposição B.6:** Num polítopo do tipo 2, se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância e os limiares de veto, a função  $\sigma(b^m, a_i, k, v)$  é estritamente quasicôncava no domínio onde esta assume valores do intervalo  $]0, 1[$ .

**Proposição B.7:** Num polítopo do tipo 3, se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância, a função  $\sigma(b^m, a_i, k)$  é estritamente quasicôncava no domínio onde esta assume valores do intervalo  $]0, 1[$ .

Representemos por  $\Delta_j$  a vantagem de  $a_i$  sobre  $b^m$  segundo  $g_j(\cdot)$ :

$$\Delta_j = \begin{cases} g_{ij} - g'_{mj}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a maximizar} \\ g'_{mj} - g_{ij}, & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a minimizar} \end{cases}.$$

Seja  $J = \{1, \dots, n\}$  o conjunto dos índices dos critérios.

Seja  $J^d = \{j \in J: \Delta_j < 0\}$  o conjunto dos índices dos critérios para os quais  $a_i$  é pior do que  $b^m$ .

**i) Determinação dos desempenhos das acções.**

Começaremos por resolver um problema de optimização para cada critério, por forma a minimizar as diferenças de desempenho a favor de  $a_i$ :

$$(g_{ij}, g'_{mj}) \leftarrow \arg \min \{ \Delta_j: (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}, g'_{0j}, g'_{1j}, \dots, g'_{kj}) \in G_j \}, \quad j=1, \dots, n.$$

Trata-se de programas lineares, uma vez que os conjuntos  $G_j$  são polítopos.

**ii) Determinação dos limiares de indiferença e preferência.**

De seguida, fixamos o valor dos limiares de indiferença e preferência, por forma a prejudicar  $a_i$  e beneficiar  $b^m$ :

$$q_j \leftarrow q_j^L \text{ e } p_j \leftarrow p_j^L, \quad j \in J^d, \text{ enquanto}$$

$$q_j \leftarrow q_j^U \text{ e } p_j \leftarrow p_j^U, \quad j \notin J^d.$$

**iii) Determinação dos coeficientes de importância e limiares de veto**

Esta terceira etapa depende do tipo de restrições em causa.

Restrições do tipo 1:

Nestes casos, os limiares de veto variam independentemente uns dos outros e independentemente dos restantes parâmetros. Começemos por fixar cada limiar de veto por forma a prejudicar  $a_i$  e beneficiar  $b^m$ :

$$v_j \leftarrow v_j^L, \quad j \in J^d, \text{ enquanto}$$

$$v_j \leftarrow v_j^U, \quad j \notin J^d.$$

Neste momento, apenas falta determinar o valor óptimo de  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , através da resolução do problema seguinte:

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \min \{c(a_i, b^m, k) - \lambda : (k_1, \dots, k_n) \in K, \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \sigma(b^m, a_i, k) - \lambda \geq 0\}.$$

Minimizamos apenas a concordância multicritério  $c(a_i, b^m, k)$ , dado que a discordância já está fixa. A função objectivo é linear, mas a restrição adicional  $\sigma(b^m, a_i, k) - \lambda \geq 0$  é não-linear. Todavia,  $\sigma(b^m, a_i, k)$  é uma função quasicôncava (Proposição B.3), pelo que a região admissível para este problema é convexa (e.g. v. Bazaraa et al., 1993: 108-109).

Restrições do tipo 2:

Nestes casos os limiares de veto são interdependentes, embora possam variar independentemente dos coeficientes de importância. Todavia, a restrição  $\sigma(b^m, a_i, t) - \lambda \geq 0$  impede que encontremos separadamente as combinações desses dois conjuntos de parâmetros, conforme propusemos no Capítulo VI. É, pois, necessário resolver o seguinte problema:

$$(k_1, \dots, k_n, v_1, \dots, v_n) \leftarrow \arg \min \{\sigma(a_i, b^m, k, v) - \lambda : k \in K, v \in V, \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \sigma(b^m, a_i, k, v) - \lambda \geq 0\}.$$

Estamos perante um problema não-linear, com uma função objectivo estritamente quasicôncava (Proposição B.6) e com uma a região admissível convexa (decorrente da quasiconcavidade do índice de credibilidade).

Restrições do tipo 3:

Nestes casos os limiares de veto dependem do valor dos coeficientes de importância e dos parâmetros  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Começaremos por fixar o valor dos parâmetros  $\alpha_j$ , por forma a prejudicar  $a_i$  e beneficiar  $b^m$ :

$$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^L, \quad j \in J^d, \text{ enquanto}$$

$$\alpha_j \leftarrow \alpha_j^U, \quad j \notin J^d.$$

Posteriormente, minimizaremos a credibilidade como função dos coeficientes de importância:

$$(k_1, \dots, k_n) \leftarrow \arg \min \{\sigma(a_i, b^m, k) - \lambda : (k_1, \dots, k_n) \in K, \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \sigma(b^m, a_i, k) - \lambda \geq 0\}.$$

Estamos novamente perante um problema não-linear, com uma função objectivo estritamente quasicôncava (Proposição B.7) e com uma região admissível convexa (decorrente da quasiconcavidade do índice de credibilidade).

Em qualquer dos três casos, este problema não é simples, devido ao facto de existir uma restrição não-linear. Felizmente, só têm de ser resolvidos por uma vez, terminada a pesquisa binária, para cada acção a afectar, e apenas quando se utiliza a variante optimista do ELECTRE TRI (a menos comum na prática). Sabemos, porém, dado que a função objectivo é linear (tipo1) ou estritamente quasicôncava (tipos 2 e 3), que o mínimo ocorre num ponto extremo da região admissível, que é convexa: ocorre, pois, num dos vértices do polítopo admissível ou num ponto onde  $\sigma(b^m, a_i, t) - \lambda = 0$ . Em Horst e Tuy (1996)<sup>4</sup> encontram-se alguns métodos para resolver este tipo de problemas (v. ainda Rinnoy Kan e Timmer, 1989, para uma visão mais geral da optimização global, que inclui heurísticas para resolver problemas de optimização mais difíceis do que os nossos, e Pinter, 1996, para uma revisão do software disponível para resolver problemas de optimização global).

Para finalizar esta secção, importa notar dois aspectos que podem diminuir significativamente o esforço computacional associado à determinação da pior (ou da melhor) categoria para afectar uma acção  $a_i$  face a  $T$ . Em primeiro lugar, nem sempre é necessário resolver cada problema de optimização até atingir a solução óptima, pois durante o processo iterativo de procura desse óptimo poderemos encontrar uma solução que torne a expressão  $teste(T)$  verdadeira ou falsa. Contudo, para usufruir deste benefício, é necessário recorrer a algoritmos de optimização que produzam uma sequência de soluções admissíveis, o que não sucede com algoritmos que convergem para a solução óptima a partir do exterior da região admissível.<sup>5</sup> Em segundo lugar, conforme constatámos nas experiências que efectuámos (embora não se tratasse de um estudo exaustivo), é muitas vezes vantajoso considerar como solução inicial para um algoritmo iterativo de optimização a solução óptima de um problema anterior. Por exemplo, imaginemos que já se resolveu o problema  $\max\{\sigma(a_i, b^h, t) - \lambda: t \in T\}$ , tendo-se terminado com uma solução de valor não negativo ou de valor óptimo (o que tiver ocorrido primeiro). Posteriormente,

<sup>4</sup> Os algoritmos de partição sucessiva apresentados nas Secções VII.1 e VII.2 desta referência parecem-nos particularmente adequados (v. também Horst et al., 1995, 177-178).

<sup>5</sup> Por exemplo, muitos dos algoritmos baseados em planos de corte (v. Eaves e Zangwill, 1971; Luenberger, 1973:305ss) produzem em cada iteração uma solução que não é admissível. A usar uma técnica deste tipo deveríamos optar antes por um método como o de Plastria (1988), onde o processo iterativo de convergência para a solução óptima vai fornecendo soluções admissíveis.

para resolver o problema  $\max\{\sigma(a_i, b^y, t) - \lambda: t \in T\}$ , com  $y \neq h$ , consideraríamos como solução inicial aquela com que terminámos o problema anterior, em vez de começar por outra solução qualquer, possivelmente nem sequer pertencente à região admissível.

## 5. Exemplo ilustrativo

---

Apresentámos já um exemplo de afectação com informação imprecisa no Capítulo VI, considerando três categorias. Apresentamos agora um pequeno exemplo, fictício, em que se consideram quatro categorias e se utiliza a variante pessimista do ELECTRE TRI. Recorreremos às mesmas ferramentas de optimização que utilizámos nos exemplos do Capítulo VI (Excel Solver, LINGO, LRS).

Imaginemos que cada acção a afectar corresponde a uma empresa, enquanto as categorias se referem ao risco de incumprimento de obrigações:  $C^1$  (“Elevado”),  $C^2$  (“Neutro”),  $C^3$  (“Baixo”) e  $C^4$  (“Muito baixo”). A afectação considera quatro critérios, que representam: um ponto de vista “finanças” (activo, passivo, etc.), um ponto de vista “história” (incidentes de crédito, reputação, etc.), um ponto de vista “macroeconomia” (região, sector de actividade, etc.), um ponto de vista “qualidade de gestão” (qualificação, risco partilhado, etc.) e um ponto de vista “posição no mercado” (competição, evolução, etc.). Todos os desempenhos estão quantificados numa escala qualitativa de 0 (pior) a 20 (melhor) pontos. Consideremos que os desempenhos de uma determinada acção  $a_i$  são os patentes na Tabela VIII.1, que caracteriza ainda as acções de referência.

	Finanças	História	Macroeconomia	Gestão	Mercado
$a_i$	12	5	5	17	13
$b^4$	20	20	20	20	20
$b^3$	15	14	14	17	16
$b^2$	11	10	10	11	12
$b^1$	5	5	5	6	6
$b^0$	0	0	0	0	0

**Tabela VIII.1. Desempenhos da acção a afectar e das acções de referência.**



	Finanças	História	Macroeconomia	Gestão	Mercado
$q_j$	2	2	2	2	2
$p_j$	4	4	4	4	4
$\alpha_j$	0,5	0,75	0,75	0,3	0,3

**Tabela VIII.2. Limiares.**

Neste exemplo consideramos limiares de indiferença e preferência fixos (Tabela VIII.2), e consideramos como limiar de corte  $\lambda = 2/3$ . Cada limiar de veto  $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$  depende dos valores de  $p_j$  e  $\alpha_j$ , que são fixos (Tabela VIII.2), e do valor de  $k_j$ , que é variável ( $j = 1, \dots, 5$ ). Trata-se, pois, de um problema com restrições do tipo 3 (3.6c). Os coeficientes de importância são, portanto, as únicas variáveis, embora tal conduza a que os limiares de veto também variem. Suponhamos que a informação dos decisores conduzia a um polítopo  $T$  definido pelas seguintes restrições:

$$\begin{array}{lll}
 k_2 \geq k_3 & k_2 \leq 2 k_3 & \\
 k_1 \geq k_2 & k_1 \leq k_2 + k_3 & \\
 k_5 \geq k_1 & k_5 \geq 2 k_2 & k_5 \leq 2 k_2 + k_3 \\
 k_4 \geq k_5 & k_4 \geq k_1 + k_2 + k_3 & k_4 \leq k_1 + k_2 + k_3 + k_5 \\
 k_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & & 
 \end{array}$$

Iremos começar por encontrar a melhor categoria para  $a_i$  segundo o TRI pessimista, compatível com  $T$ . Recorrendo ao algoritmo de pesquisa binária verificamos em primeiro lugar se  $a_i$  pode prevalecer sobre  $b^2$ , o que acontece se e só se  $\max\{\sigma(a_i, b^2, t) - \lambda: t \in T\} \geq 0$ . O LINGO encontra um valor máximo de 0,197 (os valores são arredondados), pelo que  $a_i$  pertence à categoria  $C^3$  ou melhor. De seguida,  $a_i$  é confrontada com  $b^3$ , para aferir se  $\max\{\sigma(a_i, b^3, t) - \lambda: t \in T\} \geq 0$ . A mesma solução que optimiza o problema anterior origina agora um valor de 0,015, superior a zero. Logo, mesmo sem resolver o novo problema de optimização, sabemos que  $a_i$  pode prevalecer também sobre  $b^3$ . Concluimos então que  $B_p(a_i) = C^4$ .

Para encontrar a pior categoria a que  $a_i$  pode ser afectada, começaremos novamente por compará-la com  $b^2$ , por forma a saber se  $a_i$  prevalece sempre sobre aquela acção de referência. Tal verifica-se se e só se  $\min\{\sigma(a_i, b^2, t) - \lambda: t \in T\}$  igualar ou exceder zero. Utilizando agora o algoritmo de Avis e Fukuda (1992) para enumerar os 16 vértices do polítopo  $T$ , encontramos num desses vértices a solução de valor mínimo, que é de 0,08. Portanto,  $a_i$  pertence à categoria  $C^3$  ou melhor. De seguida comparamos  $a_i$  com  $b^3$ , para determinar se  $\min\{\sigma(a_i, b^3, t) - \lambda: t \in T\} \geq 0$ . Utilizando a lista de vértices já determinada, encontramos num outro vértice a solução de valor mínimo, -0,604. Concluimos então que

$a_i$  não prevalece sempre sobre  $b^3$ , pelo que  $W_p(a_i) = C^3$ . Em suma, uma conclusão robusta acerca da afectação da acção  $a_i$  pelo ELECTRE TRI pessimista é “a categoria de risco de  $a_i$  é *Baixo* ou *Muito Baixo*”.

Imaginemos que a última restrição sobre os coeficientes de importância,  $k_4 \leq k_1 + k_2 + k_3 + k_5$ , era tornada mais exigente, transformando-se em  $k_4 \leq k_1 + k_5$ . Se repetirmos o processo de determinar a melhor categoria  $B_p(a_i)$  compatível com o novo polítopo verificamos que  $\max\{\sigma(a_i, b^2, t) - \lambda: t \in T\} = 0,175 > 0$  e, seguidamente, que  $\max\{\sigma(a_i, b^3, t) - \lambda: t \in T\} = -0,039 < 0$ . Logo, a melhor categoria que  $a_i$  pode atingir é agora  $C^3$ . No que respeita ao cálculo de  $W_p(a_i)$ , verificamos que tanto  $\max\{\sigma(a_i, b^2, t) - \lambda: t \in T\}$  como  $\max\{\sigma(a_i, b^3, t) - \lambda: t \in T\}$  não se alteram, pelo que  $W_p(a_i)$  permanece igual a  $C^3$ . Na verdade, nem necessitaríamos de efectuar os dois últimos cálculos, porquanto ao restringirmos o conjunto  $T$  a pior afectação  $W_p(a_i)$  ou permanece igual, ou melhora. Ora, como  $W_p(a_i) \leq B_p(a_i)$ , podíamos de imediato concluir que  $W_p(a_i)$  não se alteraria. Por conseguinte, neste caso pode-se afirmar que a afectação de  $a_i$  à categoria de risco *Baixo* é robusta. Apesar de se aceitar informação imprecisa, o resultado da afectação não exhibe qualquer imprecisão.

## **6. Integração com um procedimento por agregação/desagregação**

### **6.1. Nota introdutória**

Esta secção analisa a complementaridade entre o procedimento atrás descrito e um outro (Mousseau e Slowinski, 1998), desenvolvido independentemente do nosso, que parte de exemplos de afectação fornecidos pelos decisores (informação agregada) para inferir os valores para os parâmetros que reconstituem (o melhor possível) esses exemplos.<sup>6</sup> Naquele procedimento, cada exemplo fornece restrições que esses valores devem respeitar. Ora, esse conjunto de restrições pode ser precisamente o ponto de partida para o nosso procedimento de encontrar conclusões robustas acerca das afectações perante informação imprecisa. Pode-se então conceber um procedimento integrado, que é interactivo na

<sup>6</sup> Esta secção baseia-se no trabalho que divulgámos em Dias et al. (2000), de que são co-autores João Clímaco, José Figueira e Vincent Mousseau.

medida em que os resultados da análise de robustez podem guiar os decisores na alteração das restrições aos valores do parâmetros e na revisão dos exemplos de afecção.

## 6.2. Breve revisão do procedimento por inferência

O procedimento por inferência de Mousseau e Slowinski (1998) para o método ELECTRE TRI pode ser incluído no campo mais vasto de técnicas de fixação indirecta do valor dos parâmetros. Nestas incluem-se o procedimento de Mousseau (1993) para os métodos ELECTRE, o método UTA de Jacquet-Lagrèze e Siskos (1982) para o modelo de agregação aditivo, ou o método MACBETH de Bana e Costa e Vansnick (1994) para o mesmo tipo de modelo. Todos estes procedimentos solicitam aos decisores que efectuem comparações entre diferentes acções reais ou fictícias, com base em julgamentos holísticos. A partir desses julgamentos, inferem os valores para os parâmetros que melhor reconstituem esses julgamentos, de acordo com o método subjacente, minimizando uma determinada medida de erro.

O procedimento de Mousseau e Slowinski (1998) trabalha com exemplos de afecção para um subconjunto de acções  $A^* \in A$  que os decisores se sintam capazes de afectar a uma categoria ou a um intervalo de categorias. Estes autores recorrem à optimização, considerando como variáveis os valores dos parâmetros e como função objectivo a maior diferença entre um índice de credibilidade e o limiar de corte que origine um erro na reconstituição dos exemplos. Se não existir nenhum efeito de discordância (i.e. se os índices de credibilidade coincidirem com os índices de concordância), então os problemas a resolver são programas lineares. Caso contrário, trata-se de problemas não-lineares de difícil resolução, devido a poderem ter regiões admissíveis que não são convexas.

Após resolver o problema de optimização, os decisores têm acesso a uma combinação de valores para os parâmetros “ótima” e à correspondente proposta de afecção para cada acção, tornando-se imediatamente visíveis as acções de  $A^*$  que não foi possível afectar correctamente (se as houver). Os decisores podem então alterar os exemplos e repetir o processo, podendo igualmente restringir o conjunto das combinações admissíveis, através de restrições adicionais. No final do processo, que termina apenas quando estes o entenderem, os decisores terão encontrado o modelo (i.e. os valores para os parâmetros) que considerarão mais adequado.

Aquele procedimento pode constituir um processo de aprendizagem muito útil quando se pretende encontrar o valor a atribuir a cada parâmetro. Contudo, não existe nenhum tipo de controlo que

ajude os decisores a progredir no processo interactivo. Por exemplo, uma questão que pode ocorrer aos decisores é saber quão diversos podem ser os resultados quando se consideram diferentes combinações admissíveis, caso existam várias. Trata-se de uma questão típica do foro da análise de robustez: o procedimento integrado apresentado a seguir pode então ser útil.

### 6.3. O procedimento integrado

O procedimento proposto por Mousseau e Slowinski pode ser combinado com o nosso, por forma a aproveitar os pontos fortes de ambos. Para desenvolver esta ideia, consideraremos a variante pessimista do ELECTRE TRI e a ausência de discordância. Os parâmetros variáveis são os coeficientes de importância  $k_1, \dots, k_n$  e o limiar de corte  $\lambda$ . A metodologia subjacente pode servir para casos mais gerais, embora à custa de maior complexidade nos problemas de optimização a que recorreremos.

Pretende-se evitar que os decisores sejam forçados a definir um valor preciso para cada parâmetro. Para isso, propõe-se que estes progridam num processo interactivo. Em cada iteração, aceita-se informação mais fácil de obter, a saber (seja  $k$  um índice associado à iteração corrente):

- exemplos de afectação para um subconjunto de acções  $A^*$  de  $A$  que os decisores se sintam capazes de afectar a uma categoria ou a um intervalo de categorias, definindo-se assim implicitamente um conjunto  $T_k^a$  de combinações de valores para os parâmetros compatíveis com esses exemplos;
- outras restrições (explícitas) aos valores dos parâmetros (e.g.  $k_1 \geq k_2$ ) definindo um conjunto  $T_k^w$  de combinações.

Designemos por  $T_k = T_k^a \cap T_k^w$  o conjunto das combinações admissíveis para a  $k$ -ésima iteração.

Note-se que é possível que este conjunto seja vazio, ora por  $T_k^a$  ou  $T_k^w$  serem vazios, ora por a sua intersecção ser vazia. Nestes casos, podemos afirmar que a informação fornecida pelos decisores não é coerente.

Os resultados que se calculam e apresentam aos decisores dependem agora da coerência da informação fornecida por estes. Em primeiro lugar, resolve-se um problema de optimização,  $POI$ , cujas variáveis principais são os coeficientes de importância  $k=(k_1, \dots, k_n)$  e o limiar de corte  $\lambda$ . Trata-se de um programa linear, atendendo a que, na ausência de efeitos de discordância, o índice de credibilidade é igual ao índice de concordância multicritério:

**POI:**  $Max \alpha$   
 sujeito a:

$$\alpha \leq x_i, \quad \forall i: a_i \in A^* \quad // \text{desvios para os exemplos de afectação} \quad (1)$$

$$\alpha \leq y_i, \quad \forall i: a_i \in A^* \quad // \text{desvios para os exemplos de afectação} \quad (2)$$

$$\alpha \leq d, \quad // \text{desvios para as restrições adicionais} \quad (3)$$

$$\alpha \leq s_\lambda^{\min} \quad // \text{desvio para o limite inferior de } \lambda \quad (4)$$

$$\alpha \leq s_\lambda^{\max} \quad // \text{desvio para o limite superior de } \lambda \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n k_j c_j (a_i, b^{L(i)-1}) - x_i = \lambda, \quad \forall i: a_i \in A^* \quad // \text{restrições de afectação} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n k_j c_j (a_i, b^{U(i)}) + y_i = \lambda + \varepsilon, \quad \forall i: a_i \in A^* \quad // \text{restrições de afectação} \quad (7)$$

$$Ck - d \leq w \quad // \text{restrições adicionais} \quad (8)$$

$$\lambda - \lambda_{\min} - s_\lambda^{\min} = 0 \quad // \text{limite inferior de } \lambda \quad (9)$$

$$\lambda - \lambda_{\max} + s_\lambda^{\max} = 0 \quad // \text{limite superior de } \lambda \quad (10)$$

$$k_j \geq \varepsilon \text{ e } \sum_{j=1}^n k_j = 1 \quad (11)$$

Notas:

- $\varepsilon$  representa um valor positivo muito pequeno.
- As restrições (6) e (7) correspondem aos exemplos de afectação e definem  $T_k^a \cdot L(i)$  e  $U(i)$  designam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo de categorias a que os decisores afectam a acção de índice  $i$  (estes limites podem coincidir se os decisores assim o entenderem).
- O conjunto  $T_k^w$ , por sua vez, é definido pelos limites para o limiar de corte (que originam as restrições 9 e 10) e por um conjunto de desigualdades que designamos por  $Ck \leq w$ . Estas últimas originam (8) ao introduzir-se um vector de variáveis de desvio  $d$ . Note-se que estas restrições devem ser codificadas de forma uniforme (recorde-se o que afirmámos a propósito do 2º tipo de relaxação na Secção 4 do capítulo anterior).
- Assume-se que o intervalo de variação admissível para o limiar de corte respeita

$$0,5 \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq 1.$$

- A cada restrição que os parâmetros devem respeitar associou-se uma variável de desvio. Se alguma destas for negativa, então a restrição correspondente fornecida pelos decisores é violada, pelo que o objectivo do programa linear é maximizar o menor daqueles desvios.

Procede-se de seguida consoante o caso:

**Caso 1: Informação não é coerente ( $\alpha < 0$ , o que implica  $T_k = \emptyset$ )**

Neste caso não existe nenhuma combinação aceitável de valores para os parâmetros. O objectivo da interacção consiste em ajudar os decisores a detectar e corrigir a incoerência, através da remoção ou alteração de um exemplo de afectação ou de uma das restrições adicionais. Para apoiá-los nesta tarefa, podem ser disponibilizados os seguintes resultados:

- A solução óptima de *POI* indica uma combinação de valores para os parâmetros que minimiza, entre as restrições que são violadas, o maior desvio em relação ao termo independente. A esta combinação corresponde uma proposta de afectação para as acções, que permite observar quais os exemplos de afectação que não foram reconstituídos pelo processo de inferência. Estes serão os exemplos que os decisores devem considerar primeiro para eventuais modificações. Os valores das variáveis de desvio constituem um indicador de quão difícil é respeitar cada exemplo.
- A mesma combinação de valores permite saber quais são, de entre aquelas que definem  $T_k^w$ , as restrições mais difíceis de respeitar.

Esta análise pode ser enriquecida com técnicas que isolem um pequeno conjunto de restrições tais que, ao remover-se qualquer uma delas,  $T_k$  tornar-se-ia não vazio. Chinneck (1996) apresenta um método para identificar conjuntos de restrições com aquelas características (v. também as referências sobre este assunto apresentadas por Kim e Ahn, 1999).

**Caso 2: Informação é coerente ( $\alpha \geq 0$ , o que implica  $T_k \neq \emptyset$ )**

Neste caso podem existir numerosas combinações aceitáveis de valores para os parâmetros. O objectivo da interacção passa a ser o de diminuir o conjunto dessas combinações, através da alteração ou da inserção de restrições. Pode-se então utilizar o procedimento que detalhámos neste capítulo para encontrar a melhor e a pior categoria a que cada acção de *A* pode ser afectada, face à informação imprecisa formalizada por  $T_k$ . Os seguintes resultados podem ser então disponibilizados:

- $t_k^* = (k_1^*, \dots, k_n^*, \lambda^*)$ , a solução óptima de *POI* indica uma combinação “central” de valores para os parâmetros que respeita todas as restrições. A esta combinação corresponde uma proposta de afectação para as acções.

- $B_p(a_i)$  e  $W_p(a_i)$ , que indicam a melhor e a pior afectação possível para cada acção  $a_i \in A$ , bem como um valor  $t_k^B(a_i)$  que conduz à melhor afectação possível para  $a_i$  e um valor  $t_k^W(a_i)$  que conduz à pior afectação possível para  $a_i$ .

Esta informação é útil de duas formas. Em primeiro lugar, os valores de  $t_k^*$ ,  $t_k^B(a_i)$  e  $t_k^W(a_i)$  podem suscitar nos decisores o desejo de introduzir restrições explícitas aos valores dos parâmetros. Por exemplo, se em dada combinação  $k_1=0,22$  e  $k_2=0,35$ , isso pode contrariar a vontade dos decisores, segundo a qual  $k_1 \geq k_2$ . Em segundo lugar, os intervalos de categorias  $[W_p(a_i), B_p(a_i)]$ , bem como as afectações correspondentes a  $t_k^*$ , podem orientar os decisores na introdução de novos exemplos de afectação. Em particular, estes saberão que afectar uma acção  $a_i$  a uma categoria pior do que  $W_p(a_i)$  ou melhor do que  $B_p(a_i)$  conduzirá, necessariamente, a uma incoerência. Por outro lado, a amplitude dos intervalos  $[W_p(a_i), B_p(a_i)]$  indica quais as acções mais afectadas pela imprecisão da informação. Serão porventura mais relevantes os exemplos que se refiram às acções com intervalos mais amplos.

Seja qual for o caso, pretende-se que este procedimento integrado seja utilizado de uma forma interactiva, em que os resultados da iteração  $k$  suscitam a discussão conducente às modificações para a iteração seguinte. Será conveniente começar o processo apenas com a informação mais segura, minimizando o risco de incoerências. Posteriormente, os decisores deverão efectuar apenas pequenas alterações (alterar, inserir ou remover um exemplo ou uma restrição adicional) em cada iteração, a fim de controlarem melhor o desenrolar do processo. Espera-se que, à medida que o processo avança, aumente o discernimento dos decisores sobre a situação em causa, por forma a que se sintam confiantes a fornecer informação cada vez mais precisa, o que conduz a afectações também elas mais precisas. Trata-se de uma aprendizagem sobre o problema e sobre as suas preferências.

Caberá aos decisores escolher a iteração em que o processo termina. Nessa altura, terão obtido os seguintes resultados:

- um conjunto de restrições que define as combinações aceitáveis para os parâmetros ( $T_k$ );
- um conjunto de conclusões robustas acerca da pior e da melhor categoria a que cada acção pode ser afectada;

- uma combinação de valores para os parâmetros que define um modelo de preferências de forma precisa ( $t_k^*$ ), que é “central” em relação a  $T_k$ .

No Apêndice D apresentamos um exemplo que ilustra este procedimento integrado. A utilização deste procedimento é facilitada pela existência de programas informáticos que calculam os resultados necessários. O primeiro, desenvolvido por Mousseau et al. (1999), é dedicado ao problema de encontrar a combinação de valores  $t_k^*$  que melhor reconstitui os exemplos de afectação. O segundo, desenvolvido por nós, é dedicado ao cálculo da melhor e da pior categoria ( $B_p(a_i)$  e  $W_p(a_i)$ ) a que cada acção  $a_i \in A$  pode ser afectada face à informação imprecisa, indicando ainda as correspondentes combinações de parâmetros  $t_k^B(a_i)$  e  $t_k^W(a_i)$ . Este programa alerta ainda para a existência de acções que não podem ser afectadas a determinadas categorias (v. Apêndice C). Designámos o nosso programa por *VIP Sort*, sendo *VIP* as iniciais de *Variable Interdependent Parameters*, tal como no programa *VIP Analysis* apresentado no Capítulo V. Aliás, os programas apresentam um aspecto gráfico muito idêntico, conforme se pode comprovar pela Figuras VIII.2 a VIII.4. Na versão actual, o programa *VIP Sort* utiliza apenas programação linear, dado que se assume não existirem efeitos de discordância. As suas principais características são:

- aceita quaisquer restrições lineares sobre o valor dos coeficientes de importância e do limiar de corte, considerando fixos todos os restantes parâmetros;
- transforma automaticamente exemplos de afectação em restrições lineares (Figura VIII.4);
- mostra graficamente as categorias a que cada acção pode ser afectada (Figura VIII.2, à direita);
- mostra valores para os parâmetros que conduzem à melhor ou à pior afectação possível para a acção seleccionada (Figura VIII.2, à direita);
- mostra a média aritmética e a média geométrica do número de categorias associado a cada acção, bem como a variação destas estatísticas em relação ao cálculo anterior (Figura VIII.3, à direita).



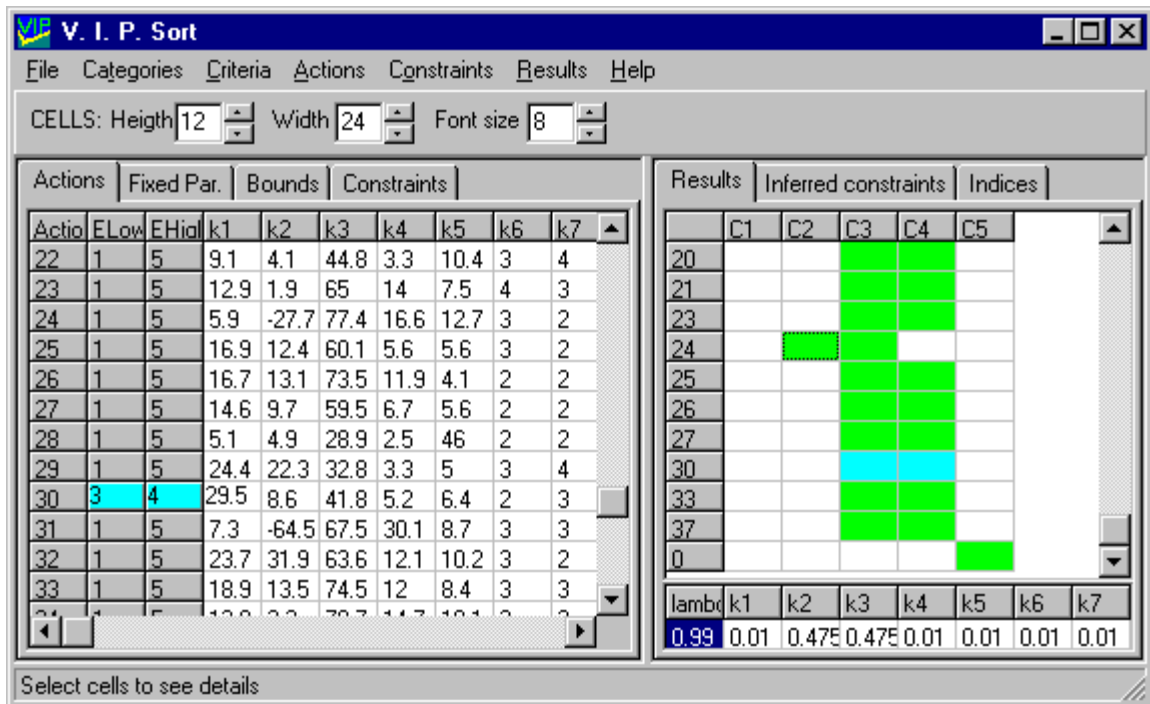


Figura VIII.2. Exemplo de utilização do programa *VIP Sort*.

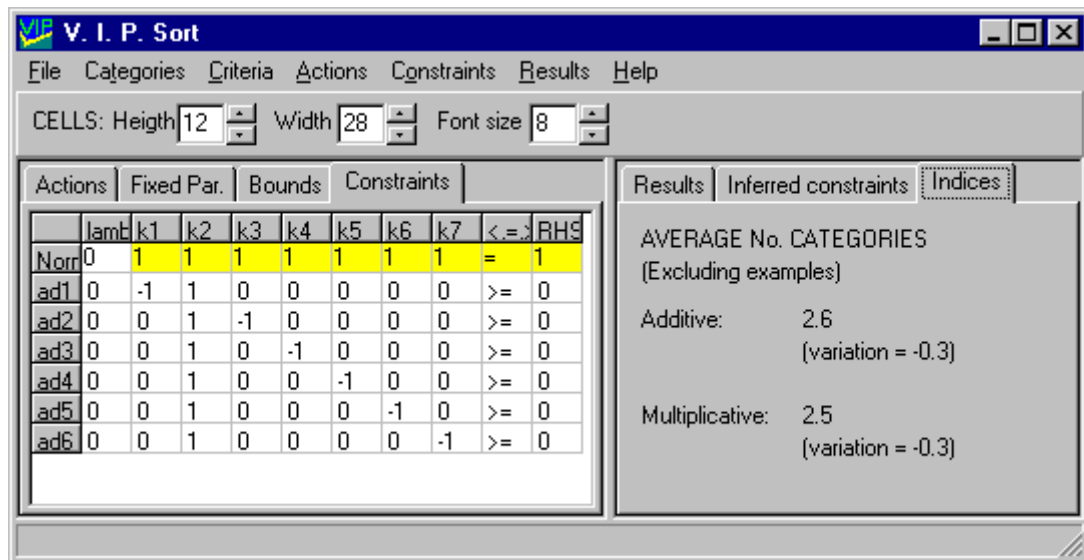


Figura VIII.3. Exemplo de utilização do programa *VIP Sort* (restrições aos valores dos parâmetros).

Results		Inferred constraints							Indices	
	lambda	k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	<.=.>	RHS
C(30)>=3	-1	1	1	1	1	1	1	1	>=	0
C(30)<=4	1	-1	0	0	-1	-1	0	0	>=	1E-5

Figura VIII.4. Exemplo de utilização do programa *VIP Sort* (restrições à afectação da 30ª acção).

## 7. Notas conclusivas

---

Propusemos neste capítulo um procedimento para o problema de afectação multicritério com informação imprecisa, baseado no método ELECTRE TRI. Parte-se de informação imprecisa para obter conclusões robustas acerca da categoria de cada acção, bem como para conhecer quais as acções cuja categoria é mais influenciada pela imprecisão. Numa situação de decisão, as conclusões robustas podem ser suficientemente precisas para evitar pedir mais informação aos decisores. Os decisores poderão chegar a um consenso acerca da categoria a que cada acção pertence, sem que tivessem facilmente chegado a consensos acerca do valor de todos os parâmetros do modelo, se o houvessem tentado.

Recomendámos uma adaptação dos algoritmos de afectação do ELECTRE TRI para o caso da informação imprecisa, mostrando que os algoritmos originais não eram os melhores. O algoritmo de pesquisa binária que propusemos é genérico, permitindo determinar a melhor ou a pior categoria para cada acção face à informação imprecisa, seja pelo TRI pessimista seja pelo TRI optimista: só é necessário utilizar um teste diferente, consoante o caso. Esse teste representa uma expressão lógica cujo valor (verdadeiro ou falso) pode ser determinado recorrendo à programação matemática. O procedimento é praticável, conforme mostram os exemplos apresentados, bem como a análise efectuada no Capítulo VI, reduzindo-se a problemas de programação linear nos casos mais habituais (para o TRI pessimista, quando os limiares de veto variam independentemente dos restantes parâmetros). Para esses casos, construímos o programa *VIP Sort*, inspirado no *VIP Analysis* que apresentámos no Capítulo V.

Uma via de investigação futura consiste precisamente em melhorar o programa, preparando-o para tratar os casos não-lineares.

Este procedimento foi pensado para ser utilizado de forma interactiva, no espírito da delimitação ajustável. A informação sobre a pior e sobre a melhor categoria a que cada acção pode ser afectada, bem como as combinações “extremas” de valores de parâmetros conducentes a essas afectações, podem constituir um valioso ponto de partida para a discussão com os decisores, com vista à incorporação de nova informação. Aqui, a integração com um procedimento de outro tipo, nomeadamente o procedimento de inferir os valores dos parâmetros proposta por Mousseau e Slowinski (1998), pode, por um lado, enriquecer o conjunto dos resultados a apresentar aos decisores e, por outro lado, ajudar a ultrapassar as situações em que a informação por estes fornecida não é coerente. A sinergia também se verifica no sentido inverso, uma vez que o nosso procedimento permite orientar os decisores na escolha dos exemplos de afectação requeridos pelo procedimento por inferência e na aferição da robustez dos resultados.



# Capítulo IX

## Conclusões e vias para investigação futura

Caminante, son tus huellas  
el camino, y nada más.  
Caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.

Antonio Machado (1875-1939)

Em termos genéricos, na presente dissertação estudámos o tema dos modelos matemáticos no apoio à decisão. Trata-se da intersecção entre o tema dos modelos matemáticos, cujo âmbito ultrapassa em muito o apoio à decisão (e.g. nas ciências naturais), e o tema do apoio à decisão, que poderia ser efectuado sem o recurso a tais modelos. O apoio à decisão com base em modelos matemáticos envolve várias dificuldades que não considerámos directamente, como a estruturação qualitativa (“de alto nível” / “grossa”) do modelo ou as situações de negociação em que exista um claro conflito de interesses. Limitámo-nos a enfrentar uma dificuldade: a atribuição de valores aos parâmetros dos modelos, i.e. a parametrização. Porém, esta é uma dificuldade importante e bem real, perante todos os factores que enumerámos no início do Capítulo III.

A prática do apoio à decisão revela frequentemente uma excessiva atracção por valores precisos para os parâmetros:

Não existe consenso entre os decisores acerca de um valor? Proceda-se a uma votação, ou determine-se uma média. Não se conhece um valor futuro? Recorra-se a uma estimativa. Um decisor hesita acerca da importância de um critério? Sejam-lhe colocadas as questões necessárias, até encontrar um valor preciso. Há um valor que é arbitrário? Seja fixado arbitrariamente. No final, realize-se uma análise de sensibilidade, para remir todas as opções efectuadas em nome da precisão.

Será sempre uma boa ideia proceder desta forma? March (1998) contrapõe: «there are arguments for moderating an unrestrained enthusiasm for precise performance measures: where contradiction and confusion are essential elements of the values, precision misrepresents them.»

Optámos por seguir outro caminho no nosso trabalho: aquele onde se aceita informação imprecisa, num quadro de apoio multicritério à decisão. Trata-se de uma concessão natural perante todos os factores de arbitrariedade, conflito, incerteza e desconhecimento que podem afectar a construção de modelos de apoio à decisão.

Começámos por mostrar uma primeira ligação que se pode estabelecer entre a área do apoio multicritério à decisão e a área do apoio à decisão com informação imprecisa: as ferramentas desenvolvidas no âmbito da primeira podem ser úteis no contexto da segunda. No entanto, a maior parte do nosso trabalho explorou outra ligação, aquela em que os modelos para o apoio multicritério à decisão são o objecto do apoio à decisão com informação imprecisa. Nesse contexto, a conjugação do apoio à decisão com informação imprecisa com a análise de robustez (na acepção de Roy), onde se procura encontrar conclusões que sejam válidas independentemente do valor que se escolha para os parâmetros, surge de forma natural. Apresentámos uma distinção entre conclusões robustas absolutas e relativas, unárias e binárias, cuja relevância fomos salientando ao longo deste texto (sendo notória sobretudo no Capítulo VII).

Balizámos o nosso percurso com duas ideias fundamentais. A primeira é colocar o ênfase da análise na exploração (no sentido de descoberta) das consequências que se podem retirar face à informação imprecisa, evitando a tentação de as agregar. Interessa-nos descobrir quais as conclusões que são robustas e saber quão afectados são os resultados, ao não se fixarem valores precisos para alguns parâmetros (ou mesmo para todos). A segunda ideia é a de explicitar a imprecisão desde o início do processo de avaliação das acções, e não apenas *a posteriori*. Pretendemos assim que a análise das consequências da imprecisão possa influenciar o curso do processo de avaliação das acções, mantendo ainda o papel de estabelecer o âmbito dos resultados (este último, o objectivo das análises *a posteriori*).

A metodologia da delimitação ajustável que defendemos no Capítulo IV baseia-se naquelas duas ideias fundamentais, acrescentando um propósito: o de delimitar progressivamente, como produto da interacção entre os decisores e as ferramentas que investigam a robustez das conclusões, a imprecisão acerca do valor dos parâmetros e, conseqüentemente, a imprecisão dos resultados. O

processo de decisão é, sob esse prisma, um processo de aprendizagem, onde os modelos e as operações sobre os mesmos são meios para fomentar a introspecção, a discussão e a concertação.

Analisámos o caso de trabalhar com informação imprecisa em métodos de agregação de preferências representativos de duas das mais importantes famílias — a das funções de valor e a dos ELECTRE. Por um lado, escolhemos métodos bem conhecidos no mundo académico e que têm sido (sobretudo a função de valor) vastamente utilizados na prática do apoio à decisão. Por outro lado, escolhemos métodos que seguem princípios bastante distintos, colocando diferentes desafios à nossa investigação. Procurámos apresentar contributos para um apoio à decisão com informação imprecisa quando se utiliza quer a função de valor aditiva quer alguns dos métodos ELECTRE, enquanto ilustrávamos as nossas ideias sobre conclusões robustas e delimitação ajustável.

No estudo da função de valor aditiva propusemos a determinação de uma matriz de confrontação extrema, associando-a aos já conhecidos conceitos de dominância e *regret*, no contexto de informação imprecisa. A análise dessa matriz pode ser enriquecida se os decisores aceitarem uma tolerância acerca dos conceitos de  $\Delta$ -dominância e de óptimo, o que nos conduziu aos conceitos de  $\Delta$ -quasidominância e de quasi-óptimo. Da sistematização que efectuámos da literatura existente sobre o assunto, concluímos que o apoio à decisão relativo à função de valor aditiva deveria realizar-se sob múltiplas perspectivas, utilizando uma diversidade de técnicas. Uma contribuição para esse tipo de apoio à decisão será porventura o programa informático que desenvolvemos, denominado *VIP Analysis*. Perante um conjunto qualquer de restrições lineares sobre o valor dos coeficientes de escala (definindo um polítopo  $T$ ), a versão actual deste programa permite obter, através de um interface de fácil utilização, o intervalo de valor global de cada acção, a matriz de confrontação extrema, o máximo *regret* associado à escolha de cada acção e os domínios onde as acções são óptimas ou quasi-óptimas (caso a dimensão de  $T$  o permita).

Analisámos igualmente os índices de credibilidade dos ELECTRE, um estudo que julgamos ser interessante por si só, dadas as aplicações que esses índices podem ter em problemáticas de escolha (em substituição do ELECTRE IS), em problemáticas de ordenação (ELECTRE III, *min*, *net-flow*) e em problemáticas de afectação (segmentação tricotómica e ELECTRE TRI). Além de assinalar esse interesse, a nossa contribuição consistiu no estudo das propriedades desses índices, com vista à sua maximização ou minimização. Mostrámos que, face a alguns pressupostos muito pouco restritivos,

aqueles índices são funções quasicôncavas dos seus parâmetros. Apesar de não serem funções côncavas nem diferenciáveis, aquela propriedade fornece já importantes pistas sobre formas de otimizar tais funções não-lineares. Acresce ainda que, segundo os testes que efectuámos, os dados das situações de decisão reais conduzem frequentemente a problemas de optimização fáceis. Se admitirmos que cada coeficiente de veto esteja fixo ou possa variar independentemente dos restantes parâmetros, então os problemas de optimização reduzem-se a programas lineares (assumimos que o conjunto  $T$  das combinações de valores para os parâmetros é um polítopo).

Ao contrário do caso da função de valor, na área dos métodos ELECTRE com informação imprecisa ainda não havia praticamente investigação anterior. No contexto da problemática de escolha, defendemos que a procura de conclusões robustas em métodos do tipo do ELECTRE I se devia centrar na relação de prevalência e não no núcleo que se obtém. Interessou-nos, pois, definir as relações binárias associadas às conclusões robustas “prevalece sempre” e “nunca prevalece”, porventura considerando uma tolerância por forma a enriquecer essas relações, para o que propusemos algumas possibilidades. Inventariámos ainda os processos de exploração dessas conclusões que nos pareceram pertinentes para encontrar novos argumentos para escolher uma das acções, caso as conclusões binárias robustas se revelem insuficientes.

No contexto da problemática de afectação, analisámos o método ELECTRE TRI (variantes pessimista e optimista), utilizando directamente os resultados que havíamos encontrado para os índices de credibilidade. Para isso, apresentámos um algoritmo de afectação genérico para encontrar a pior (ou a melhor) categoria a que cada acção pode ser afectada, de acordo com a variante pessimista (ou optimista) do ELECTRE TRI. Consoante o resultado pretendido de entre aqueles quatro, apenas se altera um teste no algoritmo, referente a uma conclusão robusta. Os problemas de optimização a resolver no âmbito da afectação reduzem-se a problemas de programação linear nos casos mais habituais (i.e. os casos em que se usa a variante pessimista e cada limiar de veto varia independentemente dos restantes parâmetros), para os quais construímos o programa *VIP Sort*. Indicámos ainda de que modo o processo de procurar conclusões robustas num quadro de informação imprecisa pode beneficiar e ser beneficiado por um procedimento de inferência de parâmetros a partir de exemplos de afectação (desenvolvido por outros).

Para os vários métodos de agregação multicritério que tratámos, procurámos ilustrar as nossas ideias com problemas reais descritos na literatura, onde muitas vezes estava implícita alguma margem



de liberdade na fixação do valor dos parâmetros. Quase sempre, apesar de trabalharmos com informação imprecisa, obtivemos resultados próximos dos obtidos nos estudos originais. Os nossos resultados, porém, foram conseguidos sem o esforço de fixar um valor preciso para cada parâmetro. Poderão, por esse motivo, ser considerados mais convincentes, porquanto a fixação do valor dos parâmetros envolve mais arbitrariedade do que a delimitação do conjunto das combinações aceitáveis para esses valores.

Embora nunca tenhamos posto de parte a possibilidade de testar a robustez de determinada conclusão através de técnicas de amostragem, a via que seguimos foi a da otimização. Em alguns casos, felizmente minoritários, os problemas de otimização são difíceis. Na maioria dos casos, os problemas podem ser resolvidos utilizando programação linear, sendo por isso mais simples. Porém, para quem não esteja minimamente familiarizado com a área da otimização, até o bem conhecido método simplex é difícil. Pensamos, por conseguinte, que o importante é que os conceitos de *conjunto das combinações aceitáveis* e de *conclusão robusta* sejam fáceis de compreender, o que não nos parece nem utópico nem dependente da compreensão dos algoritmos de otimização subjacentes.

\* \* \*

Não consideramos, de modo algum, que o nosso contributo tenha esgotado esta linha de investigação. Pelo contrário, pensamos que as ideias que propusemos trouxeram novos desafios que convidam à continuação deste trabalho. Não é difícil, portanto, enumerar vias para investigação futura, de teor bastante diverso.

Conforme sumariámos acima, neste trabalho apresentámos um enquadramento metodológico e analisámos essencialmente, além do caminho mais curto, três métodos (agregação aditiva, ELECTRE I/IS, ELECTRE TRI). A investigação futura poderá desenvolver-se a vários níveis: continuar o estudo dos métodos que escolhemos, estudar outros métodos no mesmo enquadramento e identificar as situações onde este tipo de enquadramento metodológico é mais indicado.

Acerca dos problemas que estudámos, identificámos já algumas pistas para investigação futura nos respectivos capítulos, pelo que reiteramos aqui apenas duas pistas a todos aplicáveis. Uma primeira pista consiste no estudo dos problemas de otimização a resolver. Nesse âmbito, interessará testar diferentes algoritmos de otimização, procurar software de otimização (ou construí-lo de raiz) e saber se as funções a otimizar podem ser aproximadas por outras que permitam métodos de otimização mais simples. Em paralelo, poder-se-ão estudar técnicas de amostragem que sejam adequadas a este tipo

de problemas. Uma segunda pista consiste no desenvolvimento de sistemas computacionais de apoio à decisão que fomentem a adopção de uma estratégia de delimitação ajustável. O programa mais completo que construímos, o *VIP Analysis*, pode ainda ser melhorado, conforme assinalámos no Capítulo V. O programa *VIP Sort*, construído para o ELECTRE TRI, tem ainda mais espaço para evoluir. As ideias propostas acerca dos métodos ELECTRE para problemas de escolha também poderão beneficiar da disponibilidade de um terceiro programa da família *VIP*.

A investigação futura poderá igualmente estudar novos métodos, além daqueles que escolhemos. As ideias que apresentámos para os problemas de escolha com uma função de valor aditiva são naturalmente extensíveis aos casos da função de valor multiplicativa, do integral de Choquet ou do PROMETHEE II, por exemplo, embora os detalhes técnicos sejam muito distintos. As ideias que apresentámos para os problemas de escolha com o ELECTRE I são, de forma análoga, extensíveis ao caso do TACTIC (por exemplo). As ideias que apresentámos para o ELECTRE TRI são aplicáveis, de forma imediata, ao caso da afectação com base numa função de valor. A integração com procedimentos do tipo agregação / desagregação (inferência do valor dos parâmetros), conforme ilustrada no Capítulo VIII, parece ser uma via igualmente promissora.

O estudo de outros métodos, porém, já poderá suscitar novas ideias e novos conceitos. Não tratámos explicitamente a problemática de ordenação: embora muitas das ferramentas propostas no âmbito da problemática da escolha (Capítulos V e VII) sirvam para esse propósito, e apesar de as ordenações poderem ser obtidas por escolhas sucessivas (v. exemplo de Hokkanen et al., 1998), pensamos que haverá aqui lugar para muita investigação. Por outro lado, o problema do caminho mais curto com informação imprecisa foi apenas afluído. Este e outros problemas de optimização poderão ser estudados à luz de muitas das ideias expostas neste trabalho, particularmente as propostas no Capítulo V. Outra área, também vasta, que deverá merecer a atenção de investigações futuras é a da programação matemática multiobjectivo com informação imprecisa, podendo esta imprecisão referir-se quer às restrições do programa matemático, quer às respostas sobre a importância relativa dos objectivos (nas etapas de diálogo de métodos interactivos). Por fim, há métodos para lidar com a incerteza ou a imprecisão utilizando conceitos da teoria das probabilidades e da teoria dos conjuntos difusos, que podem também ser analisados num contexto onde a caracterização das probabilidades ou dos conjuntos difusos seja imprecisa (de certa forma, tratar-se-ia de uma “meta-imprecisão”).

A um outro nível, a investigação futura poderá debruçar-se sobre a identificação das situações onde cada uma das ferramentas que propusemos é mais indicada e qual o papel que o nosso tipo de procedimento pode desempenhar. Aqui, há que considerar factores como a urgência da decisão, a atitude face aos riscos, a importância das consequências de uma má decisão, o quadro da decisão (decisão pessoal, concurso público, etc.), ou os conflitos de interesse entre os membros de um grupo de decisão, apenas para citar alguns que nos parecem importantes.

\* \* \*

Conforme atesta a lista de itens para investigação futura com base neste trabalho, as ideias que desenvolvemos são generalizáveis a muitos modelos de apoio à decisão. Para qualquer um deles, a conjugação informação imprecisa / análise de robustez pode ocorrer em três estratégias de apoio à decisão.

A primeira estratégia é a tipicamente encontrada na literatura sobre decisão com informação imprecisa, citada sobretudo no Capítulo V — escolher uma acção face a informação imprecisa, sem procurar obter nova informação. A segunda estratégia corresponde à análise de robustez *a posteriori*, após obter um primeiro resultado, com o intuito de estabelecer a validade desse resultado. Tanto num caso como no outro, as ideias que desenvolvemos podem perfeitamente ser aplicadas. A estratégia da delimitação ajustável constitui um terceira alternativa, sendo aquela que recomendamos para ultrapassar a atracção por valores precisos para os parâmetros:

Não existe consenso entre os decisores acerca de um valor? Não se conhece um valor futuro? Um decisor hesita acerca do peso de um critério? Há um valor que é arbitrário? Avance-se com a informação (imprecisa) que for possível obter, averiguando quais são as múltiplas combinações de valores aceitáveis à partida. Investiguem-se as consequências dessa imprecisão: as conclusões mais importantes do processo de decisão podem até nem depender de uma maior precisão no valor de alguns parâmetros. As questões mais difíceis, se ainda for necessário, poderão ser colocadas quando os decisores estiverem mais familiarizados com o modelo e com as suas preferências. O modelo será afinado ao longo do processo de decisão, à medida que os decisores forem descobrindo quais são as conclusões robustas e quais são os resultados mais afectados pela imprecisão. O caminho construir-se-á ao andar.



# Apêndice A

## Algoritmos para problemas de caminho mais curto com informação imprecisa

Este apêndice apresenta uma especificação dos algoritmos referidos na Secção III.3.

### ALGORITMO 1

- $P_N$  designa o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados; inicialmente,  $P_N \leftarrow \emptyset$ .
- $f_1$  e  $f_2$  designam os custos sob  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente, do último caminho considerado.
- $S$  designa um conjunto de trabalho contendo caminhos candidatos a ser não  $\Delta$ -dominados.
- $u$  designa um limite superior para o custo sob  $t_2$  de qualquer caminho não  $\Delta$ -dominado.
- $p_j$  designa o  $j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $t_2$ .

### INÍCIO

```
 $p^* \leftarrow$  caminho mais curto sob  $t_1$ ;  
 $u \leftarrow c(p^*, t_2)$ ; /* primeira estimativa para o limite */  
 $p_1 \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $t_2$ ;  
SE  $c(p_1, t_1) = c(p^*, t_1)$  ENTÃO  $u \leftarrow c(p_1, t_2)$  /*vê se a estimativa pode ser melhorada */  
FIM SE;  
 $S \leftarrow \{p_1\}$ ;  $f_1 \leftarrow c(p_1, t_1)$ ;  $f_2 \leftarrow c(p_1, t_2)$ ;  
 $j \leftarrow 1$ ;  
REPETE /* ciclo externo */  
    REPETE /* ciclo interno */  
         $j \leftarrow j + 1$ ;  
         $p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $t_2$ ; /*  $p_j \leftarrow$  NULO se não há mais caminhos */  
        SE  $p_j$  é NULO ENTÃO sai dos ciclos interno e externo  
        FIM SE;  
        SE  $c(p_j, t_1) = c(p^*, t_1)$  ENTÃO  
             $u \leftarrow \min \{u, c(p_j, t_2)\}$  /* vê se a estimativa pode ser melhorada */  
        FIM SE;  
        SE  $c(p_j, t_1) = f_1$  e  $c(p_j, t_2) = f_2$  ENTÃO  
             $S \leftarrow S \cup \{p_j\}$  /*  $p_j$  junta-se aos outros candidatos em  $S$  */  
        FIM SE;  
    ATÉ  $c(p_j, t_1) < f_1$  ou  $c(p_j, t_2) > f_2$ ;  
    SE  $c(p_j, t_1) < f_1$  ENTÃO  
         $f_1 \leftarrow c(p_j, t_1)$ ;  
    SE  $c(p_j, t_2) > f_2$  ENTÃO  
         $f_2 \leftarrow c(p_j, t_2)$ ;  
         $P_N \leftarrow P_N \cup S$  /* os candidatos em  $S$  são todos não  $\Delta$ -dominados */  
    FIM SE;  
     $S \leftarrow \{p_j\}$  /* novo candidato, de momento único */  
    FIM SE;  
    ATÉ  $c(p_j, t_2) > u$ ;  
     $P_N \leftarrow P_N \cup S$  /* contém o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados */  
FIM
```

**ALGORITMO 2**

- $P_\gamma$  designa um conjunto de trabalho contendo caminhos candidatos a ser não  $\Delta$ -dominados.
- $u$  designa um limite superior para o custo segundo  $c^m(\cdot)$  de qualquer caminho não  $\Delta$ -dominado.
- $p_j$  designa o  $j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ .

**INÍCIO**

```

 $p^* \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;
 $u \leftarrow c^m(p^*)$ ; /* limite superior: qualquer caminho  $q$  tal que  $c^m(q) > u$  é  $\Delta$ -dominado */
 $p_1 \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;
 $P_\gamma \leftarrow \{p_1\}$ ;
 $j \leftarrow 2$ ;
 $p_2 \leftarrow$  2º caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ; /*  $p_2 \leftarrow$  NULO se não houver mais caminhos */
ENQUANTO  $p_j$  não é NULO e  $c^m(p_j) \leq u$  FAZ
     $dominado \leftarrow$  Falso;
    CICLO: para todos os caminhos  $p_i \in P_\gamma$  FAZ
        SE  $\Delta$ -teste( $p_i \Delta p_j$  ?) = Falso ENTÃO
            SE  $\Delta$ -teste( $p_j \Delta p_i$  ?) = Verdadeiro ENTÃO  $P_\gamma \leftarrow P_\gamma - \{p_i\}$ 
            FIM SE
        CASO CONTRÁRIO /*  $p_j$  é  $\Delta$ -dominado */
             $dominado \leftarrow$  Verdadeiro;
            Sai do ciclo
        FIM SE
    FIM CICLO;
    SE  $dominado =$  Falso ENTÃO  $P_\gamma \leftarrow P_\gamma \cup \{p_j\}$ 
    FIM SE;
     $j \leftarrow j + 1$ ;
     $p_j \leftarrow$   $j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ; /*  $p_j \leftarrow$  NULO se não houver mais caminhos */
FIM ENQUANTO
FIM /*  $P_\gamma$  contém agora o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados */

```

**ALGORITMO 3**

- $P_N$  designa o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados;
- $L$  designa um conjunto de trabalho contendo caminhos candidatos a ser  $\Delta$ -dominados;
- $f_m$  designa o valor do mínimo  $c^m(\cdot)$  do(s) caminho(s) em  $L$ ;
- $f_M$  designa o valor do mínimo  $c^M(\cdot)$  do(s) caminho(s) em  $L$ ;
- $P^=$  designa um conjunto de caminhos  $<\approx$ -dominados mas potencialmente não  $\Delta$ -dominados, com  $c^m(\cdot)=f_m$ ;
- $P^>$  designa um conjunto de caminhos  $<\approx$ -dominados mas potencialmente não  $\Delta$ -dominados, com  $c^m(\cdot)>f_m$ ;
- $u$  designa um limite superior para o custo segundo  $c^m(\cdot)$  de qualquer caminho não  $\Delta$ -dominado.
- $p_j$  designa o  $j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ .

FUNÇÃO DominadoPor ( $q$ , conjunto\_caminhos) DEVOLVE Verdadeiro ou Falso;

/\* devolve verdadeiro se e só se  $q$  for  $\Delta$ -dominado por algum caminho em conjunto\_caminhos \*/

INÍCIO

CICLO para todos os caminhos  $p \in$  conjunto\_caminhos FAZ /\* vê se  $q$  é  $\Delta$ -dominado \*/

SE  $c^m(p) \leq c^m(q)$  e  $c^M(p) \leq c^M(q)$  ENTÃO /\* esta condição evita testes desnecessários \*/

SE  $\Delta$ -teste( $p \Delta q$  ?) = Verdadeiro

ENTÃO DEVOLVE Verdadeiro; /\* e sai da função \*/

FIM SE

FIM SE

FIM CICLO;

DEVOLVE Falso /\* se ainda não tiver saído com o resultado de Verdadeiro \*/

FIM;

FUNÇÃO ApagaDominados (*passivo*, *activo*) DEVOLVE um conjunto de caminhos;

/\* devolve o conjunto dos caminhos em *passivo* que não são  $\Delta$ -dominados por nenhum caminho em *activo* \*/

INÍCIO

CICLO para todos os pares ( $p,q$ ) tais que  $p \in$  *passivo*,  $q \in$  *activo* FAZ

SE  $c^m(p) \geq c^m(q)$  e  $c^M(p) \geq c^M(q)$  ENTÃO /\* esta condição evita testes desnecessários \*/

SE  $\Delta$ -teste( $q \Delta p$  ?) = Verdadeiro ENTÃO *passivo*  $\leftarrow$  *passivo* - { $p$ }

FIM SE

FIM SE

FIM CICLO;

DEVOLVE *passivo*

FIM;

INÍCIO

$p^* \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $c^M(\cdot)$ ; /\* variável a NULO significa que não há mais caminhos \*/

$u \leftarrow c^M(p^*)$ ; /\* limite superior: qualquer caminho  $q$  tal que  $c^m(q) > u$  é  $\Delta$ -dominado \*/

$p_1 \leftarrow$  caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;

$L \leftarrow \{p_1\}$ ;

$f_m \leftarrow c^m(p_1)$ ;

$f_M \leftarrow c^M(p_1)$ ;

$P_N \leftarrow \emptyset$ ;

$P^= \leftarrow \emptyset$ ;

$P^> \leftarrow \emptyset$ ;

$j \leftarrow 2$ ;

$p_2 \leftarrow$  2º caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;

ENQUANTO  $p_j \neq \text{NULO}$  e  $c^m(p_j) \leq u$  FAZ  
 ENQUANTO  $p_j \neq \text{NULO}$  e  $c^m(p_j) = f_m$  FAZ  
 SE  $c^M(p_j) = f_M$  ENTÃO /\* CASO 1 \*/  
 REPETE  
 SE não DominadoPor  $(p_j, L)$  ENTÃO  
 $L \leftarrow \text{ApagaDominados}(L, \{p_j\}) \cup \{p_j\}$   
 FIM SE;  
 $j \leftarrow j + 1$ ;  
 $p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;  
 ATÉ  $p_j = \text{NULO}$  ou  $c^M(p_j) \neq f_M$  ou  $c^m(p_j) > f_m$ ;  
 FIM SE;  
 SE  $p_j \neq \text{NULO}$  e  $c^m(p_j) = f_m$  e  $c^M(p_j) < f_M$  ENTÃO /\* CASO 2 \*/  
 $P^- \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^-, L) \cup L$   
 $L \leftarrow \{p_j\}$ ;  $f_M \leftarrow c^M(p_j)$  /\*  $f_m = c^m(p_j)$  \*/  
 $j \leftarrow j + 1$ ;  
 $p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;  
 FIM SE;  
 SE  $p_j \neq \text{NULO}$  e  $c^m(p_j) = f_m$  e  $c^M(p_j) > f_M$  ENTÃO /\* CASO 3: \*/  
 SE não DominadoPor  $(p_j, P_N \cup P^-)$   
 ENTÃO  $P^- \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^-, \{p_j\}) \cup \{p_j\}$   
 FIM SE;  
 $j \leftarrow j + 1$ ;  
 $p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;  
 FIM SE;  
 FIM ENQUANTO;  
 SE  $p_j \neq \text{NULO}$  e  $c^m(p_j) \leq u$  ENTÃO  
 SE  $c^M(p_j) < f_M$  ENTÃO /\* CASO 4 \*/  
 $P^- \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^-, L)$ ;  
 $P^> \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^>, L)$ ;  
 $P_N \leftarrow P_N \cup L \cup P^-$ ;  
 $P^- \leftarrow \emptyset$ ;  
 CICLO para todos os caminhos  $q \in P^>$  FAZ  
 SE  $c^m(q) < c^m(p_j)$  ENTÃO  $P_N \leftarrow P_N \cup \{q\}$  SE NÃO  $P^- \leftarrow P^- \cup \{q\}$   
 FIM SE;  
 FIM CICLO;  
 $P^> \leftarrow \emptyset$ ;  
 $L \leftarrow \{p_j\}$ ;  $f_m \leftarrow c^m(p_j)$ ;  $f_M \leftarrow c^M(p_j)$ ;  
 CASO CONTRÁRIO /\* CASO 5 \*/  
 SE não DominadoPor  $(p_j, P_N \cup P^- \cup P^>)$   
 ENTÃO  $P^> \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^>, \{p_j\}) \cup \{p_j\}$   
 FIM SE;  
 FIM SE;  
 $j \leftarrow j + 1$ ;  
 $p_j \leftarrow j$ -ésimo caminho mais curto segundo  $c^m(\cdot)$ ;  
 FIM SE;  
 FIM ENQUANTO;  
 $P^- \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^-, L)$ ;  
 $P^> \leftarrow \text{ApagaDominados}(P^>, L)$ ;  
 $P_N \leftarrow P_N \cup L \cup P^- \cup P^>$ ; /\* contém o conjunto dos caminhos não  $\Delta$ -dominados \*/  
 FIM



# Apêndice B

## Algumas propriedades dos índices de credibilidade do método ELECTRE

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados acerca dos índices de credibilidade dos métodos ELECTRE (ELECTRE III e TRI), enquanto função de uma combinação  $t$  de valores para os parâmetros, pertencente a um polítopo  $T$ . Estudaremos também, necessariamente, os índices de concordância que intervêm no cálculo dos índices de credibilidade e na condição de prevalência do método ELECTRE IS. A notação é a mesma do Capítulo VI.

Consideremos duas acções genéricas  $a_1$  e  $a_2$ . Para simplificar a notação, apresentaremos por vezes o índice de credibilidade  $\sigma(a_1, a_2, t)$  como uma função  $\sigma(t): T \rightarrow [0, 1]$ , omitindo a referência às acções  $a_1$  e  $a_2$ , o mesmo se aplicando aos índices de concordância e de discordância.

Seja  $\Delta_j$  a vantagem de  $a_1$  sobre  $a_2$  no  $j$ -ésimo critério ( $j=1, \dots, n$ ):

$$\Delta_j = \begin{cases} g_j(a_1) - g_j(a_2), & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a maximizar} \\ g_j(a_2) - g_j(a_1), & \text{se o } j\text{-ésimo critério for a minimizar} \end{cases}$$

Ao analisarmos a função

$$\sigma(t) = c(t) \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ d_j(t) > c(t)}} \frac{1 - d_j(t)}{1 - c(t)}$$

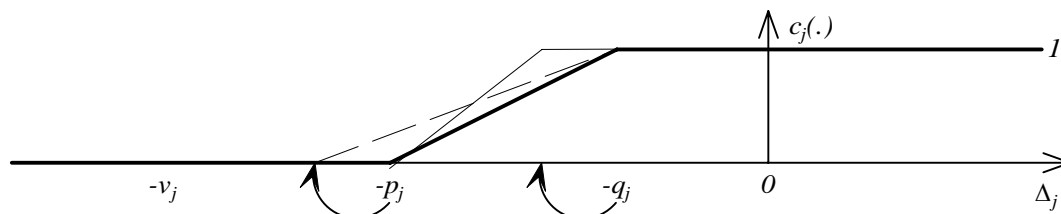
encontramos de imediato algumas das suas principais características:

- é uma função contínua (trata-se de um produto de razões onde o denominador nunca é nulo);
- pode não possuir derivada em alguns pontos de  $T$ , dado que as funções  $c_j(\cdot)$  (que são agregadas em  $c(\cdot)$ ) e  $d_j(\cdot)$  podem não possuir derivada em alguns pontos do seu domínio;
- é uma função monótona (crescente) do índice de concordância multicritério  $c(\cdot)$ ;
- é uma função que aumenta quando algum índice  $c_j(\cdot)$  aumenta e/ou algum índice  $d_j(\cdot)$  diminui.

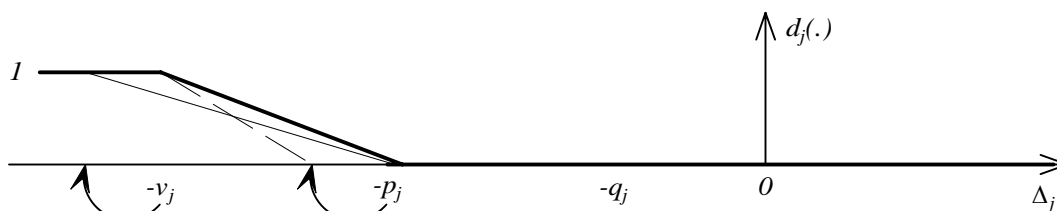
A proposição seguinte indica como varia  $\sigma(t)$  em função de alguns parâmetros:

**Proposição B.1.:** Se algum parâmetro aumentar, de entre  $\Delta_j$ ,  $q_j$ ,  $p_j$  e  $v_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ), então  $\sigma(t)$  não diminui.

Omitimos a prova, dado que é imediata a partir das expressões que definem o índice de credibilidade (v. Figuras B.1 e B.2).



**Figura B.1. O índice de concordância não diminui quando os limiares aumentam**



**Figura B.2. O índice de discordância não aumenta quando os limiares aumentam**

Consideremos de momento a restrição  $k = (k_1, \dots, k_n) \in K$  (v. Capítulo VI). A proposição seguinte estabelece que se fixarmos todos os parâmetros, excepto os coeficientes de importância, então o índice de concordância multicritério  $c(k): K \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear destes coeficientes.

**Proposição B.2:** Considerem-se fixos os parâmetros  $q_j, p_j$  e  $\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Então,

$$\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1], c((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)c(x) + \lambda c(y).$$

Omitimos a prova, dado que é imediata a partir das expressões que definem o índice de concordância.

A proposição seguinte é um corolário da anterior, atendendo ao facto de  $\sigma(\cdot)$  ser uma função que, quando não é anulada pelo veto num critério, cresce com o valor de  $c(\cdot)$ .

**Proposição B.3:** Considerem-se fixos os parâmetros  $q_j, p_j, v_j$  e  $\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Então,  $\sigma(k): K \rightarrow [0, 1]$  é estritamente quasicôncava e estritamente quasiconvexa, i.e.

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, x, y \in K, \sigma(x) \neq \sigma(y) \Rightarrow \max\{\sigma(x), \sigma(y)\} > \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) > \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}.$$

*Prova:*

Partamos da premissa  $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ , que implica  $\Delta_j > -v_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), pois caso contrário  $\sigma(x) = \sigma(y) = 0$ .

Sem perda de generalidade, consideremos  $\sigma(x) > \sigma(y)$ , o que implica, pela monotonia,  $c(x) > c(y)$ . Logo, pela proposição anterior,

$$c(x) > c((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda) c(x) + \lambda c(y) > c(y) \text{ e, de novo pela monotonia,}$$

$$\sigma(x) > \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) > \sigma(y). \quad \square$$

As proposições B.2 e B.3 assumem que todos os parâmetros estão fixos, à exceção dos coeficientes de importância. Apresentaremos de seguida algumas propriedades do índice de credibilidade quando os limiares de veto também são variáveis. Em primeiro lugar, iremos considerar o caso em que os limiares de veto variam de forma independente dos coeficientes de importância (restrições do tipo 2, conforme as designámos no Capítulo VI). Posteriormente, estudaremos o caso com restrições do tipo 3.

## **Restrições do tipo 2**

Consideremos a restrição  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$  (v. Capítulo VI). Assumiremos que os parâmetros  $q_j$ ,  $p_j$  e  $\Delta_j$  estão fixos. Trataremos em separado o caso em que os coeficientes de importância estão também fixos e o caso em que são variáveis, mas independentes dos limiares de veto.

### **A) Os coeficientes de importância $k_j$ ( $j=1, \dots, n$ ) estão fixos**

Nesta situação, apenas variam os limiares de veto. Seja  $c$  o valor (fixo) do índice de concordância multicritério para o par de acções em questão. Sabemos que se  $c = 1$  então o índice de credibilidade é igual a 1. Sabemos também que se existir algum critério para o qual  $v_j \leq -\Delta_j$ , ou se  $c = 0$ , então o índice de credibilidade é nulo. Iremos portanto centrar a nossa atenção no caso onde não sabemos qual o valor do índice de credibilidade, assumindo que  $0 < c < 1$  e  $v_j > -\Delta_j$  ( $j=1, \dots, n$ ).

Pretendemos mostrar que, nestas circunstâncias, o índice de credibilidade é uma função de  $v$  estritamente quasicôncava (Proposição B.4). Previamente, porém, iremos introduzir uma nova função e mostrar que esta é côncava. Defina-se a seguinte função (v. Figura B.3):

$$F_j^D(v_j) = \min \left\{ 1, \frac{1 - d_j(v_j)}{1 - c} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \frac{-\Delta_j - p_j}{v_j - p_j}\right) / (1-c) & , \text{se } \Delta_j < -p_j \wedge v_j < p_j - \frac{p_j + \Delta_j}{c} \\ 1 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

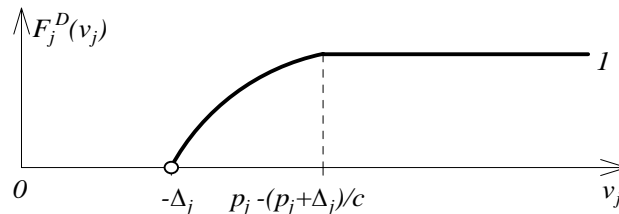


Figura B.3. Esboço da função  $F_j^D$

Podemos agora escrever

$$\sigma(v) = c \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ d_j(v_j) > c}} \frac{1 - d_j(v_j)}{1 - c} = c \prod_{j=1}^n F_j^D(v_j).$$

**Lema 1:**  $F_j^D(v_j)$  é côncava para  $v_j > -\Delta_j$ , i.e.,

$$F_j^D((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) F_j^D(x) + \lambda F_j^D(y), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

*Prova:*

Se  $\Delta_j \geq -p_j$  então  $F_j^D(v_j) = 1$  (qualquer que seja o valor de  $v_j$ ) e o lema é verdadeiro.

Caso contrário,  $\Delta_j < -p_j$ . Logo,  $F_j^D(v_j) = \min\{1, f_2(v_j)\}$ , onde  $f_2(v_j) = \left(1 - \frac{-\Delta_j - p_j}{v_j - p_j}\right) / (1-c)$ .

Uma vez que  $\frac{d^2 f_2}{dv_j^2}(v_j) = \frac{2(\Delta_j + p_j)}{1-c} \cdot \frac{1}{(v_j - p_j)^3} < 0$ ,  $f_2(v_j)$  é côncava. Por conseguinte,  $F_j^D(v_j)$  é o

mínimo entre uma constante e uma função côncava, sendo por isso côncava ela própria e logo verdadeiro o lema.  $\square$

Podemos agora provar que se fixarmos todos os parâmetros, excepto os limiares de veto, de forma a que  $c > 0$ , então a função  $\sigma(v)$  é estritamente quasicôncava no domínio onde  $v_j > -\Delta_j$  ( $j=1, \dots, n$ ):

**Proposição B.4:** Seja  $U = \{v \in \mathcal{H}^n : v_j > -\Delta_j (j=1, \dots, n)\}$ . Então, se  $c > 0$ ,  $\sigma(v)$  é estritamente quasicôncava em  $U$ , i.e.

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, x, y \in U, \sigma(x) \neq \sigma(y) \Rightarrow \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) > \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

*Prova:*

Consideremos  $\lambda \in ]0, 1[$  e  $x, y \in U$ , tais que  $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ . Sem perda de generalidade, seja  $\sigma(x) < \sigma(y)$ .

Seja  $F^D(v) = \prod_{j=1}^n F_j^D(v_j)$ , o que nos permite escrever  $\sigma(v) = c F^D(v)$ .

Uma vez que consideramos todos os parâmetros como fixos, excepto os limiares de veto, e  $c > 0$ ,

$$0 < \sigma(x) < \sigma(y) \Leftrightarrow 0 < F^D(x) < F^D(y).$$

Sabemos ainda que  $F^D((1-\lambda)x + \lambda y)$  é positivo, porque o conjunto  $U$  é convexo e estamos a considerar uma combinação convexa de dois pontos de  $U$ . É portanto lícito tomar o logaritmo desta quantidade:

$$\ln F^D((1-\lambda)x + \lambda y) = \ln \prod_{j=1}^n F_j^D((1-\lambda)x_j + \lambda y_j) = \sum_{j=1}^n \ln F_j^D((1-\lambda)x_j + \lambda y_j).$$

Mostrámos no Lema 1 que  $F_j^D(\cdot)$  é côncava. Dado que a função logarítmica também o é, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \ln F_j^D((1-\lambda)x_j + \lambda y_j) &\geq \sum_{j=1}^n \ln \left[ (1-\lambda)F_j^D(x_j) + \lambda F_j^D(y_j) \right] \\ &\geq \sum_{j=1}^n \left[ (1-\lambda) \ln F_j^D(x_j) + \lambda \ln F_j^D(y_j) \right] = (1-\lambda) \sum_{j=1}^n \ln F_j^D(x_j) + \lambda \sum_{j=1}^n \ln F_j^D(y_j), \end{aligned}$$

i.e.  $\ln F^D((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) \ln F^D(x) + \lambda \ln F^D(y)$ .

Ora, como  $F^D(x) < F^D(y)$  e a função logarítmica é estritamente crescente, obtemos

$$\ln F^D((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda) \ln F^D(x) + \lambda \ln F^D(x) = \ln F^D(x).$$

Logo,  $F^D((1-\lambda)x + \lambda y) > F^D(x)$ , o que multiplicado por  $c$  conduz a  $\sigma((1-\lambda)x + \lambda y) > \sigma(x)$ .  $\square$

NOTA: Se não assumirmos que  $c > 0$  e não nos limitarmos ao domínio  $U$ , então  $\sigma(v)$  será apenas quasicôncava (sem o ser estritamente), dado que  $x \notin U, y \notin U$  ou  $c=0$  implicam  $\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}=0$ , e  $\sigma(v)$  poderá ser superior ou igual a zero, mas nunca inferior.

Se tomarmos o logaritmo de  $\sigma(v)$ , o que só é possível no domínio onde  $\sigma(v) > 0$  (o que implica  $c > 0$ ), por forma a obter uma função separável dos limiares de veto, obtemos uma função côncava:

**Proposição B.5:**  $\ln \sigma(v)$  é uma função côncava para  $v_j > -\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

*Prova:*

$\ln \sigma(v) = \ln \left[ c \prod_{j=1}^n F_j^D(v_j) \right] = \ln c + \sum_{j=1}^n \ln F_j^D(v_j)$ . Sabemos que as funções  $F_j^D(\cdot)$  são côncavas (Lema 1), pelo que os logaritmos daquelas funções serão também funções côncavas. Uma vez que  $c$  está fixo,  $\ln \sigma(v)$  é uma soma de funções côncavas, ela própria côncava.  $\square$

### B) Os coeficientes de importância $k_j$ ( $j=1, \dots, n$ ) são variáveis

Numa situação com restrições do tipo 2, consideramos agora que não só são variáveis os limiares de veto, mas também os coeficientes de importância, e que estes dois tipos de parâmetros variam independentemente:

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in K; v = (v_1, \dots, v_n) \in V.$$

A Proposição B.6 mostrará que a função  $\sigma(k, v): K \times V \rightarrow ]0, 1[$  é estritamente quasicôncava no domínio onde assume valores em  $]0, 1[$ . Focaremos de novo apenas o caso com maior interesse, no qual desconhecemos à partida o valor do índice de credibilidade. Assumamos então que  $c(k) < 1$ , pois caso contrário já sabemos que  $\sigma(k, v) = 1$ , e consideremos que  $c(k) > 0$  e  $v_j > -\Delta_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), pois caso contrário  $\sigma(k, v) = 0$ . De seguida apresentamos uma função e alguns resultados auxiliares, com o intuito de demonstrar aquilo que pretendemos.

Uma vez que  $c(k) \neq 1$  podemos escrever:

$$\sigma(k, v) = c(k) \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ d_j(v_j) > c(k)}} \frac{1 - d_j(v_j)}{1 - c(k)} = \frac{c(k)}{(1 - c(k))^n} \prod_{j=1}^n m_j(k, v_j), \text{ onde}$$

$$m_j(k, v_j) = \min\{1 - c(k), 1 - d_j(v_j)\}.$$

Seja  $V_j = \{v_j \in \mathcal{R}: v_j > -\Delta_j\}$ . A função  $m_j(k, v_j): K \times V_j \rightarrow ]0, 1[$  pode ser referida mais simplesmente por  $m_j(x)$ , onde o argumento  $x = (k_1, \dots, k_n, v_j)$  pertence ao domínio  $K \times V_j$ .

**Lema 2:**  $m_j(x): K \times V_j \rightarrow ]0, 1[$  é uma função côncava, i.e.,

$$m_j((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) m_j(x) + \lambda m_j(y), \quad \forall \lambda \in ]0, 1[.$$

Prova:

Note-se que  $c(k)$  é linear (Proposição B.1), pelo que  $I-c(k)$  também o é. Por outro lado, na ausência de

veto,  $d_j(v_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \Delta_j \geq -p_j \\ \frac{-\Delta_j - p_j}{v_j - p_j} & , \text{ se } \Delta_j < -p_j \end{cases}$  é uma função convexa, pois a sua segunda derivada ou é

nula (caso  $p_j \geq -\Delta_j$ ) ou é  $\frac{d^2}{dv_j^2} \left( \frac{-\Delta_j - p_j}{v_j - p_j} \right) = \frac{2(-\Delta_j - p_j)}{(v_j - p_j)^3} > 0$  (caso  $p_j < -\Delta_j$ ). Logo,  $m_j(k, v_j)$  é o

mínimo entre uma função linear ( $I-c(k)$ ) e uma função côncava ( $I-d_j(v_j)$ ), pelo que ela própria é côncava.  $\square$

Nos lemas que se seguem, consideramos novamente  $U = \{v \in \mathcal{R}^n : v_j > -\Delta_j \ (j=1, \dots, n)\}$ .

**Lema 3.** Seja  $x, y \in K \times U$ , tal que  $m_j(x) > 0$  e  $m_j(y) > 0$  ( $j=1, \dots, n$ ). Então, numa vizinhança positiva de  $\lambda=0$  suficientemente pequena,

$$\exists \varepsilon \in ]0, 1[ : \forall \lambda \in ]0, \varepsilon[ , \prod_{j=1}^n m_j((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) [1 + \lambda(r-1)]^n , \text{ com } r = \left( \frac{\prod_{j=1}^n m_j(y)}{\prod_{j=1}^n m_j(x)} \right)^{1/n} .$$

Prova:

Seja  $r_j = m_j(y)/m_j(x)$  ( $j=1, \dots, n$ ). Dado que  $r_1, \dots, r_n > 0$  e  $\lambda \in ]0, 1[$ , podemos definir a seguinte função:

$$q(\lambda) = \ln \left( \frac{\prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r_j)}{\prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r)} \right) \quad (r \text{ definido acima}).$$

Derivando  $q(\lambda)$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{dq}{d\lambda} \ln \frac{\prod_{j=1}^n [1 + \lambda(r_j - 1)]}{\prod_{j=1}^n [1 + \lambda(r - 1)]} = \frac{d}{d\lambda} \sum_{j=1}^n \ln \frac{[1 + \lambda(r_j - 1)]}{[1 + \lambda(r - 1)]} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{[1 + \lambda(r_j - 1)]}{[1 + \lambda(r - 1)]} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{r_j - r}{[1 + \lambda(r - 1)] \cdot [1 + \lambda(r_j - 1)]} . \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{dq}{d\lambda}(0) = \sum_{j=1}^n (r_j - r) = \sum_{j=1}^n r_j - \sum_{j=1}^n r$ .

Recordemos agora a bem conhecida desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

dados  $r_1, \dots, r_n > 0$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_j \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n r_j} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n r_j \geq n \cdot r$ , verificando-se a igualdade se e só se

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = r.$$

Então, se nem se verificar  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$  nem  $\lambda = 0$ , casos em que este Lema 3 seria satisfeito

de forma trivial, concluímos que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{q(h) - q(0)}{h} = \frac{dq}{d\lambda}(0) > 0$ .

Nestas condições, existirá uma vizinhança positiva de zero suficientemente pequena onde  $q(\lambda) > q(0) = 0$ .

Logo, nessa vizinhança,  $\prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r_j) > \prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r)$ .

Esta desigualdade, em conjunto o Lema 2, permite-nos concluir a demonstração:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n m_j((1-\lambda)x + \lambda y) &\geq \prod_{j=1}^n ((1-\lambda)m_j(x) + \lambda m_j(y)) = \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \cdot \prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r_j) > \\ &> \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \cdot \prod_{j=1}^n (1 - \lambda + \lambda r) = \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \cdot (1 - \lambda + \lambda r)^n \cdot \square \end{aligned}$$

**Lema 4.** Sejam  $x, y \in K \times U$ , tais que  $0 < \sigma(x) < \sigma(y) < 1$ . Então, numa vizinhança positiva de zero suficientemente pequena,

$$\exists \beta \in ]0, 1[ : \forall \lambda \in ]0, \beta[, \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \sigma(x), \text{ e a desigualdade é estrita se } \lambda > 0.$$

*Prova:*

Para simplificar a notação, estabeleça-se  $k(\lambda) \equiv (1-\lambda)x + \lambda y$ .

Iremos definir uma função  $L(\lambda)$  que, pelo Lema 3, não excede  $\sigma(k(\lambda))$  numa vizinhança positiva de  $\lambda=0$  suficientemente pequena:

$$L(\lambda) = \frac{c(k(\lambda))}{[1-c(k(\lambda))]^n} \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) [1 + \lambda(r-1)]^n, \text{ onde } r = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n r_j}, \text{ com } r_j = m_j(y)/m_j(x) \text{ (} j=1, \dots, n \text{)}.$$

Por derivação obtemos:

$$\frac{dL}{d\lambda}(\lambda) = \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{c(k(\lambda))}{[1-c(k(\lambda))]^n} [1 + \lambda(r-1)]^n \right\} =$$



$$= \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \cdot \frac{c(k(\lambda))}{[1-c(k(\lambda))]^n} \cdot [I + \lambda(r-I)]^{n-1} \cdot \left\{ \left( \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{c(k(\lambda))}{[1-c(k(\lambda))]^n} \right) \cdot [I + \lambda(r-I)] + n \cdot (r-I) \right\}$$

Agora, dado que  $0 < \sigma(x) < 1$  é condição suficiente para  $0 < c(x) < 1$ , podemos definir o quociente

$$Q = c(y) / c(x), \quad \text{onde } x, y \in K \times U.$$

Dada a Proposição B.2, sabemos que o índice de concordância (que não considera os limiares de veto) é linear:

$$c((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda) \cdot c(x) + \lambda \cdot c(y),$$

pelo que podemos escrever  $c(k(\lambda)) = c(x)(1-\lambda + \lambda Q)$ .

Definamos ainda uma função  $p(\lambda) = \left( \prod_{j=1}^n m_j(x) \right) \cdot \frac{c(k(\lambda))}{[1-c(k(\lambda))]^n} \cdot [I + \lambda(r-I)]^{n-1}$  para simplificar a

expressão da derivada de  $L(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\lambda}(\lambda) &= p(\lambda) \cdot \left\{ \left( \frac{d}{d\lambda} \ln [c(x)(1-\lambda + \lambda Q)] - n \frac{d}{d\lambda} \ln [1-c(x)(1-\lambda + \lambda Q)] \right) \cdot [I + \lambda(r-I)] + n \cdot (r-I) \right\} \\ &= p(\lambda) \cdot \left\{ \left( \frac{Q-I}{1-\lambda + \lambda Q} - n \frac{-c(x)(Q-I)}{1-c(x)(1-\lambda + \lambda Q)} \right) \cdot [I + \lambda(r-I)] + n \cdot (r-I) \right\}. \end{aligned}$$

No ponto  $\lambda=0$ , onde  $p(0)=\sigma(x)$ , obtemos:

$$\frac{dL}{d\lambda}(0) = p(0) \cdot \left\{ Q - I + n \frac{c(x)(Q-I)}{1-c(x)} + n \cdot (r-I) \right\} = \sigma(x) \cdot \left\{ Q - I + n \frac{c(x)(Q-I)}{1-c(x)} + n \cdot (r-I) \right\}.$$

Reparemos agora no seguinte:

$$\sigma(x) < \sigma(y) \Leftrightarrow \frac{c(x)}{(1-c(x))^n} \prod_{j=1}^n m_j(x) < \frac{Q \cdot c(x)}{(1-Q \cdot c(x))^n} \prod_{j=1}^n [m_j(x) \cdot r_j] \Leftrightarrow r > \sqrt[n]{\frac{I}{Q} \cdot \frac{1-Q \cdot c(x)}{1-c(x)}},$$

o que conduz, atendendo ao facto de  $\sigma(x) > 0$ :

$$\frac{dL}{d\lambda}(0) > \sigma(x) \cdot \left\{ Q - I + n \frac{c(x)(Q-I)}{1-c(x)} + n \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{I}{Q} \cdot \frac{1-Q \cdot c(x)}{1-c(x)}} - I \right) \right\}.$$

Este produto tem dois termos. O primeiro é positivo; consideremos o segundo:

$$f_{aux}(Q) = Q - I + n \frac{c(x)(Q-I)}{1-c(x)} + n \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{I}{Q} \cdot \frac{1-Q \cdot c(x)}{1-c(x)}} - I \right).$$

A derivada  $\frac{d}{dQ} f_{aux}(Q) = 1 - \frac{1}{Q} \cdot n \sqrt{\frac{1}{Q}} \cdot \frac{1-Q \cdot c(x)}{1-c(x)} + n \frac{c(x)}{1-c(x)} \left( 1 - n \sqrt{\frac{1}{Q}} \right)$  é negativa para  $Q < 1$ , positiva

para  $Q > 1$  e nula para  $Q = 1$ ; logo, o valor mínimo de  $f_{aux}(Q)$  é  $f_{aux}(1) = 0$ . Constatamos assim que

$$f_{aux}(Q) \geq 0, \text{ pelo que } \frac{dL}{d\lambda}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{L(h) - L(0)}{h} > 0.$$

Em suma,

$$\exists \delta \in ]0, 1[ : \forall \lambda \in ]0, \delta[, L(\lambda) \geq L(0), \text{ verificando-se a igualdade apenas se } \lambda = 0.$$

Por fim, dado que  $L(0) = \sigma(x)$  e, pelo Lema 3,  $\exists \varepsilon \in ]0, 1[ : \forall \lambda \in ]0, \varepsilon[, \sigma(k(\lambda)) \geq L(\lambda)$ , concluímos que,

$$\text{para } \beta = \min\{\delta, \varepsilon\}, \quad \forall \lambda \in ]0, \beta[, \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \sigma(x),$$

sendo a desigualdade estrita se  $\lambda > 0$ .  $\square$

**Proposição B.6:** Seja  $I = \{(k, v) : k \in K, v \in V, \sigma(k, v) \in ]0, 1[ \}$ . Então,  $\sigma(k, v)$  é estritamente quasicôncava em  $I$ , i.e.

$$\begin{aligned} &\forall \lambda \in ]0, 1[, (k^x, v^x), (k^y, v^y) \in I, \\ &\sigma(k^x, v^x) \neq \sigma(k^y, v^y) \Rightarrow \sigma((1-\lambda)(k^x, v^x) + \lambda(k^y, v^y)) > \min\{\sigma(k^x, v^x), \sigma(k^y, v^y)\}. \end{aligned}$$

*Prova:*

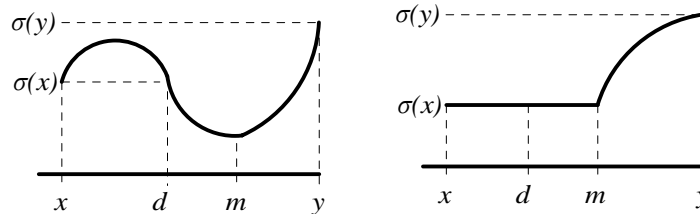
Começemos por notar que a função  $\sigma(k, v) : K \times V \rightarrow ]0, 1[$  é a mesma do Lema 4,  $\sigma(x) : K \times V \rightarrow ]0, 1[$ , onde  $x$  é um vector em  $\mathcal{H}^{2n}$  resultante da junção dos vectores  $k$  e  $v$ . Retomamos a segunda notação, por ser mais simples: seja  $x = (k^x, v^x)$  e seja  $y = (k^y, v^y)$ . Sem perda de generalidade, assumiremos que  $\sigma(x) < \sigma(y)$ .

Suponhamos que a proposição era falsa, pelo que existiria um valor  $\lambda_m \in ]0, 1[$ , associado a um vector  $m = (1-\lambda_m)x + \lambda_my$ , para o qual  $\sigma(m) \leq \sigma(x)$ . Mostraremos que tal contradiria o Lema 4.

Uma vez que  $\sigma(\cdot)$  é uma função contínua, quando o seu argumento se desloca de  $x$  para  $m$  (com  $\sigma(m) \leq \sigma(x)$ ) terá de existir um vector  $d$ , igual a  $x$  ou combinação convexa de  $x$  e  $m$ , mas distinto deste último, tal que  $\sigma(d) = \sigma(x)$  e  $\sigma(\cdot)$  não aumenta na vizinhança de  $d$  em direcção a  $m$  (v. Figura B.4). Contudo, o Lema 4, estabelece que  $\sigma(\cdot)$  deve aumentar na vizinhança de  $d$  na direcção de  $y$ , dado que  $\sigma(d) < \sigma(y)$ .

Como chegamos a uma contradição ao negar a proposição, esta é verdadeira.  $\square$

NOTA: Se não nos limitarmos ao domínio  $I$ , então  $\sigma(k,v)$  será apenas quasicôncava (sem o ser estritamente), pois fora desse domínio  $\sigma(k,v)$  é constante (igual a 1 ou igual a 0), sendo convexa a região onde  $\sigma(k,v) = 1$  (dado que o índice de concordância multicritério, que é uma função linear de  $k$ , tem de ser igual a um nessa região).



**Figura B.4. Duas funções contínuas que não são estritamente quasicôncavas: a função da esquerda não é sequer quasicôncava; a função da direita é quasicôncava mas não estritamente quasicôncava.**

**Restrições do tipo 3**

Podemos provar um resultado semelhante à Proposição B.4 para o caso com restrições  $(k_1, \dots, k_n) = k \in K$  e  $\alpha_j^U \geq \alpha_j \geq \alpha_j^L$ , quando o veto tem a seguinte dependência do coeficiente de importância:  $v_j = p_j + \alpha_j/k_j$  (Tipo 3). Consideremos que os parâmetros  $q_j, p_j, \Delta_j$  e  $\alpha_j$  estão fixos, enquanto os coeficientes  $k_j$  são variáveis ( $j=1, \dots, n$ ). Iremos novamente centrar a nossa atenção no caso para o qual sabemos que o índice de credibilidade não se anula e é menor do que um.

**Proposição B.7** - Seja  $I = \{k \in K : \sigma(k) \in ]0, 1[ \}$ . Então  $\sigma(k)$  é estritamente quasicôncava em  $I$ , i.e.

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, x, y \in I, \sigma(x) \neq \sigma(y) \Rightarrow \sigma((1-\lambda)x + \lambda y) > \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

*Prova:*

Uma vez que  $\sigma(k) \in ]0, 1[$  implica  $c(k) \in ]0, 1[$  podemos escrever:

$$\sigma(k) = c(k) \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ d_j(k_j) > c(k)}} \frac{1 - d_j(k_j)}{1 - c(k)} = \frac{c(k)}{(1 - c(k))^n} \prod_{j=1}^n m_j(k),$$

onde  $m_j(k) = \min\{1 - c(k), 1 - d_j(k_j)\}$ .

Esta função é côncava no domínio  $I$ , dado que neste não ocorre veto. De facto, nessas condições

podemos escrever  $d_j(k_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \Delta_j \geq -p_j \\ \frac{k_j}{\alpha_j}(-\Delta_j - p_j) & , \text{ se } \Delta_j < -p_j \end{cases}$ , que ou é constante ou é linear. Como

$c(k)$  também é linear (Proposição B.2),  $m_f(k)$  é o mínimo de duas funções lineares, logo é côncava. Este resultado é análogo ao Lema 2.

Por analogia, porque o raciocínio é exactamente igual, pode-se então mostrar que esta proposição é verdadeira seguindo os passos que escolhemos para demonstrar a Proposição B.6. (v. Dias e Clímaco, 1999).  $\square$

NOTA: Se não nos limitarmos ao domínio  $I$ , então  $\sigma(k)$  será apenas quasicôncava (sem o ser estritamente), pois fora desse domínio  $\sigma(k)$  é constante (igual a  $1$  ou igual a  $0$ ), sendo convexa a região onde  $\sigma(k) = 1$  (dado que o índice de concordância multicritério, que é uma função linear de  $k$ , tem de ser igual a um nessa região).

## Apêndice C

### Sobre os intervalos $[W(\cdot), B(\cdot)]$ no ELECTRE TRI

Este apêndice pretende mostrar, a propósito do ELECTRE TRI com informação imprecisa (Capítulo VIII), que o intervalo de categorias  $[W(a), B(a)]$ , para uma dada acção  $a$ , pode conter categorias às quais a acção não pode ser afectada. Verificámos que, em certas circunstâncias, se podem encontrar exemplos respeitando todos os requisitos daquele método nos quais, por exemplo, uma acção  $a$  pode ser afectada à categoria  $C^h$ , face a uma combinação de valores para os parâmetros, a mesma acção pode ser afectada à categoria  $C^{h+2}$ , face a outra combinação, mas não existe nenhuma combinação que afecte  $a$  à categoria  $C^{h+1}$ . De seguida, baseando-nos na variante pessimista do ELECTRE TRI, mostraremos que quando uma acção se compara de igual forma com duas acções de referência, então não poderá ser afectada a uma categoria delimitada por estas. Utilizamos a notação introduzida dos Capítulos VI e VIII.

Seja  $T(a \rightarrow C^h)$  o subconjunto das combinações de  $T$  que afectam  $a$  à categoria  $C^h$ .

Seja  $T(a S b^h)$  o subconjunto de combinações de  $T$  para as quais  $a$  prevalece sobre  $b^h$ .

**Proposição C.1:** Para  $h \in \{1, \dots, k\}$ , verifica-se a seguinte equivalência:

$$T(a S b^{h-1}) = T(a S b^h) \Leftrightarrow T(a \rightarrow C^h) = \emptyset.$$

*Prova:*

A acção  $a$  pertence à categoria  $C^h$  se e só se  $a S b^{h-1} \wedge \neg(a S b^h)$ .

Logo,  $T(a \rightarrow C^h) = T(a S b^{h-1}) \setminus T(a S b^h)$  e

$$T(a \rightarrow C^h) = \emptyset \Leftrightarrow T(a S b^{h-1}) \setminus T(a S b^h) = \emptyset \Leftrightarrow T(a S b^{h-1}) \subseteq T(a S b^h).$$

Porém, dado que  $b^h$  domina  $b^{h-1}$ ,  $T(a S b^{h-1}) \supseteq T(a S b^h)$ . Por conseguinte,

$$T(a S b^{h-1}) = T(a S b^h) \Leftrightarrow T(a \rightarrow C^h) = \emptyset. \quad \square$$

A proposição seguinte mostra as circunstâncias em que tal pode acontecer quando se considera que:

- (a) todos os parâmetros estão fixos, excepto os coeficientes de importância e o limiar de corte  $\lambda$ ;
- (b) os coeficientes de importância são estritamente positivos;
- (c) não existe efeito de discordância.

**Proposição C.2:** Suponhamos que, nas condições (a-c) existem dois índices  $s$  e  $i$ , com  $s > i + 1$ , tais que

$$T(a \rightarrow C^s) \neq \emptyset \text{ e } T(a \rightarrow C^i) \neq \emptyset.$$

Então, para qualquer índice  $h$  que obedeça a  $s > h > i$ , verifica-se a seguinte equivalência:

$$T(a \rightarrow C^h) = \emptyset \Leftrightarrow c_j(a, b^h) = c_j(a, b^{h-1}), \quad \forall j.$$

*Prova:*

$$T(a \rightarrow C^h) = \emptyset \Leftarrow c_j(a, b^h) = c_j(a, b^{h-1}), \quad \forall j.$$

Se  $c_j(a, b^h) = c_j(a, b^{h-1}), \quad \forall j$ , então  $T(a S b^h) = T(a S b^{h-1})$  e aplica-se a Proposição C.1.

$$T(a \rightarrow C^h) = \emptyset \Rightarrow c_j(a, b^h) = c_j(a, b^{h-1}), \quad \forall j.$$

Nas condições (a-c) podemos escrever:

$$T(a S b^h) = T \cap \{t=(k_1, \dots, k_n, \lambda) \in \mathcal{R}^{n+1}: f(a, b^h, t) = \sum_j k_j c_j(a, b^h) - \lambda \geq 0\} \text{ e}$$

$$T(a S b^{h-1}) = T \cap \{t=(k_1, \dots, k_n, \lambda) \in \mathcal{R}^{n+1}: f(a, b^{h-1}, t) = \sum_j k_j c_j(a, b^{h-1}) - \lambda \geq 0\}.$$

Uma vez que  $T(a \rightarrow C^s) \neq \emptyset$ , com  $s > h$ , então  $\exists t \in T: a S b^h \wedge a S b^{h-1}$ .

Logo,  $T(a S b^h) \neq \emptyset$  e  $T(a S b^{h-1}) \neq \emptyset$ .

Por outro lado, dado que  $T(a \rightarrow C^i) \neq \emptyset$ , com  $h > i$ , então  $\exists t \in T: \neg(a S b^h) \wedge \neg(a S b^{h-1})$ .

Logo,  $T(a S b^h) \neq T$  e  $T(a S b^{h-1}) \neq T$ .

Por conseguinte, os hiperplanos

$$H_h = \{t=(k_1, \dots, k_n, \lambda) \in \mathcal{R}^{n+1}: f(a, b^h, t) = \sum_j k_j c_j(a, b^h) - \lambda = 0\} \text{ e}$$

$$H_{h-1} = \{t=(k_1, \dots, k_n, \lambda) \in \mathcal{R}^{n+1}: f(a, b^{h-1}, t) = \sum_j k_j c_j(a, b^{h-1}) - \lambda = 0\}$$

intersectam ambos o domínio  $T$ . Sabemos ainda que os hiperplanos  $H_h$  e  $H_{h-1}$  coincidem no domínio  $T$ , porquanto  $T(a S b^h) = T(a S b^{h-1})$  (Proposição C.1). Como aqueles hiperplanos têm pelo menos um ponto em comum, então ou são idênticos ou cruzam-se nesse ponto. Porém, é impossível que se cruzem no domínio onde os coeficientes de importância são estritamente

positivos  $(k_1, \dots, k_n > 0)$ , porque  $f(a, b^h, t) \leq f(a, b^{h-1}, t)$  (por  $b^h$  dominar  $b^{h-1}$ ). Logo,  $H_h$  e  $H_{h-1}$  são necessariamente idênticos, o que se traduz por

$$f(a, b^h, t) = f(a, b^{h-1}, t), \quad \forall t = (k_1, \dots, k_n, \lambda) \in \mathcal{R}^{n+1},$$

implicando  $c_j(a, b^h) = c_j(a, b^{h-1}), \quad \forall j. \quad \square$





# Apêndice D

## Exemplo de avaliação do risco de empresas

Neste apêndice incluímos um exemplo apresentado originalmente em Dias et al. (2000), para ilustrar o procedimento da Secção 6 do Capítulo VIII. Este exemplo baseia-se em dados de uma aplicação real ao sector bancário (Dimitras et al., 1995), na qual se utilizou o ELECTRE TRI para afectar 40 acções (cada uma representando uma empresa) a três categorias de risco (no presente exemplo há cinco categorias) de acordo com os seus desempenhos em sete critérios. Os dados que se fixaram são os apresentados de seguida.

### 1. Critérios

- $g_1$ : (Rácio financeiro) Resultado Antes de Juros e Impostos / Activo Total [a maximizar].
- $g_2$ : (Rácio financeiro) Resultado Líquido / Capital Próprio [a maximizar].
- $g_3$ : (Rácio financeiro) Passivo Total / Activo Total [a minimizar].
- $g_4$ : (Rácio financeiro) Juros / Vendas [a minimizar].
- $g_5$ : (Rácio financeiro) Despesas Gerais e Administrativas / Vendas [a minimizar].
- $g_6$ : (Critério qualitativo) Experiência dos gestores [a maximizar].
- $g_7$ : (Critério qualitativo) Posição no mercado [a maximizar].

### 3. Categorias

- $C^1$ : Risco muito elevado.
- $C^2$ : Risco elevado.
- $C^3$ : Risco médio.
- $C^4$ : Risco baixo.
- $C^5$ : Risco muito baixo.

### 3. Acções de referência

- $b^1$ : Risco elevado / Risco muito elevado.
- $b^2$ : Risco médio / Risco elevado.
- $b^3$ : Risco baixo / Risco médio.
- $b^4$ : Risco muito baixo / Risco baixo.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
$b^1$	-10,0	-60,0	90,0	28,0	40,0	1,0	0,0
$b^2$	0,0	-40,0	75,0	23,0	32,0	2,0	2,0
$b^3$	8,0	-20,0	60,0	18,0	22,0	4,0	3,0
$b^4$	25,0	30,0	35,0	10,0	14,0	5,0	4,0

(Podem-se definir também as acções  $b^0$  e  $b^5$  para limitar a primeira e a última categoria, respectivamente).

## 4. Acções

Acção	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
a0	35,8	67,0	19,7	0,0	0,0	5,0	4,0
a1	16,4	14,5	59,8	7,5	5,2	5,0	3,0
a2	35,8	24,0	64,9	2,1	4,5	5,0	4,0
a3	20,6	61,7	75,7	3,6	8,0	5,0	3,0
a4	11,5	17,1	57,1	4,2	3,7	5,0	2,0
a5	22,4	25,1	49,8	5,0	7,9	5,0	3,0
a6	23,9	34,5	48,9	2,5	8,0	5,0	3,0
a7	29,9	44,0	57,8	1,7	2,5	5,0	4,0
a8	8,7	5,4	27,4	4,5	4,5	5,0	2,0
a9	25,7	29,7	46,8	4,6	3,7	4,0	2,0
a10	21,2	24,6	64,8	3,6	8,0	4,0	2,0
a11	18,3	31,6	69,3	2,8	3,0	4,0	3,0
a12	20,7	19,3	19,7	2,2	4,0	4,0	2,0
a13	9,9	3,5	53,1	8,5	5,3	4,0	2,0
a14	10,4	9,3	80,9	1,4	4,1	4,0	2,0
a15	17,7	19,8	52,8	7,9	6,1	4,0	4,0
a16	14,8	15,9	27,9	5,4	1,8	4,0	2,0
a17	16,0	14,7	53,5	6,8	3,8	4,0	4,0
a18	11,7	10,0	42,1	12,2	4,3	5,0	2,0
a19	11,0	4,2	60,8	6,2	4,8	4,0	2,0
a20	15,5	8,5	56,2	5,5	1,8	4,0	2,0
a21	13,2	9,1	74,1	6,4	5,0	2,0	2,0
a22	9,1	4,1	44,8	3,3	10,4	3,0	4,0
a23	12,9	1,9	65,0	14,0	7,5	4,0	3,0
a24	5,9	-27,7	77,4	16,6	12,7	3,0	2,0
a25	16,9	12,4	60,1	5,6	5,6	3,0	2,0
a26	16,7	13,1	73,5	11,9	4,1	2,0	2,0
a27	14,6	9,7	59,5	6,7	5,6	2,0	2,0
a28	5,1	4,9	28,9	2,5	46,0	2,0	2,0
a29	24,4	22,3	32,8	3,3	5,0	3,0	4,0
a30	29,5	8,6	41,8	5,2	6,4	2,0	3,0
a31	7,3	-64,5	67,5	30,1	8,7	3,0	3,0
a32	23,7	31,9	63,6	12,1	10,2	3,0	2,0
a33	18,9	13,5	74,5	12,0	8,4	3,0	3,0
a34	13,9	3,3	78,7	14,7	10,1	2,0	2,0
a35	-13,3	-31,1	63,0	21,2	29,1	2,0	1,0
a36	6,2	-3,2	46,1	4,8	10,5	2,0	1,0
a37	4,8	-3,3	71,1	8,6	11,6	2,0	2,0
a38	0,1	-9,6	42,5	12,9	12,4	1,0	1,0
a39	13,6	9,1	76,0	17,1	10,3	1,0	1,0

## 5. Limiares

Critério: Limiares:	$g_1$		$g_2$		$g_3$		$g_4$		$g_5$		$g_6$		$g_7$	
	$q_1$	$p_1$	$q_2$	$p_2$	$q_3$	$p_3$	$q_4$	$p_4$	$q_5$	$p_5$	$q_6$	$p_6$	$q_7$	$p_7$
$b^1$	1,0	2,0	4,0	6,0	1,0	3,0	1,0	2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$b^2$	1,0	2,0	4,0	6,0	1,0	3,0	1,0	2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$b^3$	1,0	2,0	4,0	6,0	1,0	3,0	1,0	2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$b^4$	1,0	2,0	4,0	6,0	1,0	3,0	1,0	2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Com base nestes dados, Dias et al. (2000) efectuaram um estudo, simulado, sobre como poderia decorrer o processo de afectação, segundo o procedimento que integra a inferência de parâmetros com a análise de robustez. Trata-se de uma situação hipotética, em que se supõe que os decisores conseguem definir com precisão os desempenhos das acções a afectar e das acções de referência  $b^1$ , ...,  $b^4$ , bem com os limiares de indiferença e preferência para cada critério (não se

consideram efeitos de discordância). Os valores para esses parâmetros são os apresentados *supra*, retirados de Dimitras et al. (1995). Contudo, no presente estudo supõe-se que os decisores sentem algumas dificuldades em atribuir valores precisos aos coeficientes de importância  $k_1, \dots, k_7$  e ao limiar de corte  $\lambda$ .

A informação disponível inicialmente indica apenas que o critério  $g_2$  é o mais importante, não sendo fornecido nenhum exemplo de afectação. Logo,  $T_0 = \{k, \lambda: \lambda \in [0,5, 0,99], k_2 \geq k_1, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ . Adicionalmente, consideram-se como restrições inerentes ao modelo as seguintes:  $k_j \in [\varepsilon, 0,5 - \varepsilon]$  (neste exemplo  $\varepsilon=0,01$ ) e  $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ . Resolvendo *POI* (v. Secção VIII.6) com o programa *ELECTRE TRI 2.0* (Mousseau et al., 1999), verifica-se que a informação é coerente, obtendo-se como solução óptima uma combinação  $t_0^*$  em que  $k_2=0,49, k_j=0,085 (j \neq 2)$  e  $\lambda=0,5$ . A Tabela 1 apresenta a cinzeno a gama de categorias às quais cada acção pode ser afectada face às restrições sobre o valor dos parâmetros, obtida pelo programa *VIP Sort*. Note-se que a acção  $a_{28}$  não pode ser afectada à categoria  $C^2$ , pelas razões apontadas no Apêndice C. Assinala-se com um “X” a afectação induzida por  $t_0^*$ . As acções surgem ordenadas por ordem decrescente da variabilidade do resultado da afectação, surgindo primeiro aquelas que exibem maior imprecisão.

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$		$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{28}$				X		$a_{27}$				X	
$a_{14}$				X		$a_{29}$				X	
$a_{36}$				X		$a_{30}$				X	
$a_{31}$		X				$a_{32}$					X
$a_2$					X	$a_{37}$				X	
$a_3$			X			$a_{24}$			X		
$a_4$				X		$a_{34}$				X	
$a_8$				X		$a_{38}$				X	
$a_9$					X	$a_{39}$				X	
$a_{10}$				X		$a_{35}$			X		
$a_{11}$					X	$a_1$				X	
$a_{12}$				X		$a_5$					X
$a_{13}$				X		$a_6$					X
$a_{16}$				X		$a_7$					X
$a_{18}$				X		$a_{15}$				X	
$a_{19}$				X		$a_{17}$				X	
$a_{20}$				X		$a_{23}$				X	
$a_{21}$				X		$a_{26}$				X	
$a_{22}$				X		$a_{33}$				X	
$a_{25}$				X		$a_0$					X

Tabela 1. Intervalos de afectação após a iteração 0

Os decisores, ao ser-lhes solicitado um exemplo de afectação, de preferência referente a uma das acções com mais variabilidade, escolhem afectar  $a_{28}$  à categoria  $C^1$ . Acrescenta-se então ao polítopo  $T_0$  a restrição correspondente,  $-(a_{28} \leq b^1) \Leftrightarrow c(a_{28}, b^1) - \lambda \leq -\varepsilon$ , formando  $T_1$ . A informação continua coerente: a solução óptima de POI indica agora  $k_1=0,22, k_2=0,49, k_3=k_4=k_5=k_6=k_7=0,01$  e  $\lambda=0,99$ . Os resultados são apresentados na Tabela 2.

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$		$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_2$					X	$a_{18}$			X		
$a_3$				X		$a_{19}$			X		
$a_9$			X			$a_{20}$			X		
$a_{10}$			X			$a_{21}$			X		
$a_{11}$				X		$a_{22}$				X	
$a_{32}$			X			$a_{23}$				X	
$a_{14}$			X			$a_{25}$			X		
$a_{34}$			X			$a_{26}$			X		
$a_{36}$		X				$a_{27}$			X		
$a_{38}$		X				$a_{29}$				X	
$a_{39}$		X				$a_{30}$				X	
$a_{35}$		X				$a_{33}$			X		
$a_5$				X		$a_{37}$			X		
$a_6$				X		$a_{24}$			X		
$a_7$					X	$a_{31}$	X				
$a_4$			X			$a_0$					X
$a_8$				X		$a_1$				X	
$a_{12}$			X			$a_{15}$				X	
$a_{13}$			X			$a_{17}$				X	
$a_{16}$			X			$a_{28}$	X				

Tabela 2. Intervalos de afectação após a iteração 1

Os decisores ficam agora surpreendidos por  $a_1$  ter sido afectada a  $C^4$ : segundo a sua opinião, aquela acção era uma das melhores e devia pertencer a  $C^5$ . Como esta afectação sai fora do intervalo indicado, ocorrerá uma incoerência ( $T_2=\emptyset$ ). Para a corrigir, determina-se que é necessário abdicar do exemplo anterior ( $a_{28} \rightarrow C^1$ ) ou abandonar a restrição  $k_2 \geq k_5$ . Os decisores optam por esta última possibilidade. Forma-se assim um novo conjunto de combinações admissíveis para a iteração seguinte,  $T_3$ , que conduz a uma solução  $t_3^*$  onde  $k_1=k_3=k_7=0,01, k_2=0,235, k_4=k_6=0,1225, k_5=0,49$  e  $\lambda=0,6625$ . Os intervalos de afectação são apresentados na Tabela 3.

Apesar da pouca informação introduzida até aqui, verifica-se já uma precisão das afectações robustas muito razoável, exceptuando a acção  $a_{31}$ . Os decisores acrescentam então que  $a_{31}$  deve ser

afectada a  $C^2$ . O novo polítopo,  $T_4$ , é não vazio e conduz a uma solução inferida  $t_4^*$  onde  $k_1=k_3=k_6=k_7=0,01$ ,  $k_2=0,282$ ,  $k_4=0,198$ ,  $k_5=0,48$  e  $\lambda=0,604$ . Os intervalos de afectação são apresentados na Tabela 4.

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$		$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{31}$			X			$a_{24}$			X		
$a_{10}$					X	$a_0$					X
$a_{12}$					X	$a_1$					X
$a_{13}$				X		$a_2$					X
$a_{14}$				X		$a_3$					X
$a_{15}$					X	$a_4$					X
$a_{16}$					X	$a_5$					X
$a_{17}$					X	$a_6$					X
$a_{18}$				X		$a_7$					X
$a_{19}$				X		$a_8$					X
$a_{20}$				X		$a_9$					X
$a_{21}$				X		$a_{11}$					X
$a_{22}$					X	$a_{23}$				X	
$a_{25}$				X		$a_{26}$				X	
$a_{27}$				X		$a_{33}$				X	
$a_{29}$					X	$a_{34}$				X	
$a_{30}$					X	$a_{38}$				X	
$a_{32}$					X	$a_{39}$				X	
$a_{36}$				X		$a_{35}$			X		
$a_{37}$					X	$a_{28}$	X				

Tabela 3. Intervalos de afectação após a iteração 3

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$		$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{10}$					X	$a_1$					X
$a_{12}$					X	$a_2$					X
$a_{13}$					X	$a_3$					X
$a_{14}$					X	$a_4$					X
$a_{15}$					X	$a_5$					X
$a_{16}$					X	$a_6$					X
$a_{17}$					X	$a_7$					X
$a_{19}$					X	$a_8$					X
$a_{20}$					X	$a_9$					X
$a_{21}$					X	$a_{11}$					X
$a_{22}$					X	$a_{18}$				X	
$a_{25}$					X	$a_{23}$				X	
$a_{27}$					X	$a_{26}$				X	
$a_{29}$					X	$a_{33}$				X	
$a_{30}$					X	$a_{34}$				X	
$a_{32}$					X	$a_{38}$				X	
$a_{36}$					X	$a_{39}$				X	
$a_{37}$					X	$a_{35}$			X		
$a_{24}$				X		$a_{31}$		X			
$a_0$					X	$a_{28}$	X				

Tabela 4. Intervalos de afectação após a iteração 4

Os decisores discordam de  $t_4^*$ , pois consideram que  $k_3$  não devia ser inferior a  $k_4$ . Resolvendo-se  $POI$ , com a nova restrição  $k_3 \geq k_4$ , descobre-se que a informação se torna incoerente ( $T_5 = \emptyset$ ). A solução daquele problema indica  $k_1 = k_7 = 0,01$ ,  $k_2 = k_3 = 0,16$ ,  $k_4 = k_6 = 0,166$ ,  $k_5 = 0,333$  e  $\lambda = 0,667$ . Analisando o problema, verifica-se que é necessário abdicar de uma entre as três exigências seguintes:  $a_1 \rightarrow C^5$ ,  $a_{31} \rightarrow C^2$ , ou  $k_3 \geq k_4$ . Os decisores optam por relaxar a primeira exigência para a iteração seguinte, permitindo  $a_1 \rightarrow (C^4 \text{ ou } C^5)$ .  $T_6$  é coerente e  $t_6^*$  indica  $k_1 = k_4 = k_6 = k_7 = 0,01$ ,  $k_2 = 0,396$ ,  $k_3 = 0,158$ ,  $k_5 = 0,406$  e  $\lambda = 0,743$ . Os intervalos de afectação são apresentados na Tabela 5, notando-se um aumento da imprecisão das afectações.

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_3$					X
$a_8$				X	
$a_9$					X
$a_{10}$				X	
$a_{11}$					X
$a_{12}$				X	
$a_{16}$				X	
$a_{29}$				X	
$a_{32}$					X
$a_{14}$				X	
$a_{34}$				X	
$a_{36}$				X	
$a_{38}$				X	
$a_{39}$				X	
$a_{35}$			X		
$a_5$				X	
$a_6$					X
$a_7$					X
$a_2$				X	
$a_4$				X	

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{13}$				X	
$a_{18}$				X	
$a_{19}$				X	
$a_{20}$				X	
$a_{21}$				X	
$a_{22}$				X	
$a_{23}$				X	
$a_{25}$				X	
$a_{26}$				X	
$a_{27}$				X	
$a_{30}$				X	
$a_{33}$				X	
$a_{37}$				X	
$a_{24}$			X		
$a_0$					X
$a_1$				X	
$a_{15}$				X	
$a_{17}$				X	
$a_{31}$		X			
$a_{28}$	X				

Tabela 5. Intervalos de afectação após a iteração 6

Os decisores acrescentam agora que  $a_{16}$  deve ser afectada a  $C^3$ . O novo polítopo,  $T_7$ , é não vazio e conduz aos intervalos de afectação apresentados na Tabela 6.

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_7$					X
$a_2$				X	
$a_3$				X	
$a_{11}$				X	
$a_{22}$				X	
$a_{23}$				X	
$a_{29}$				X	
$a_{30}$				X	
$a_{33}$				X	
$a_{14}$			X		
$a_{24}$			X		
$a_{34}$			X		
$a_{35}$		X			
$a_0$					X
$a_1$				X	
$a_5$				X	
$a_6$				X	
$a_{15}$				X	
$a_{17}$				X	
$a_4$			X		

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_8$			X		
$a_9$			X		
$a_{10}$			X		
$a_{12}$			X		
$a_{13}$			X		
$a_{16}$			X		
$a_{18}$			X		
$a_{19}$			X		
$a_{20}$			X		
$a_{21}$			X		
$a_{25}$			X		
$a_{26}$			X		
$a_{27}$			X		
$a_{32}$			X		
$a_{37}$			X		
$a_{31}$		X			
$a_{36}$		X			
$a_{38}$		X			
$a_{39}$		X			
$a_{28}$	X				

Tabela 6. Intervalos de afectação após a iteração 7

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{22}$				X	
$a_{29}$				X	
$a_{30}$				X	
$a_{24}$		X			
$a_{35}$		X			
$a_0$					X
$a_1$				X	
$a_5$				X	
$a_6$				X	
$a_7$				X	
$a_{15}$				X	
$a_{17}$				X	
$a_2$			X		
$a_3$			X		
$a_4$			X		
$a_8$			X		
$a_9$			X		
$a_{10}$			X		
$a_{11}$			X		
$a_{12}$			X		

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_{13}$			X		
$a_{16}$			X		
$a_{18}$			X		
$a_{19}$			X		
$a_{20}$			X		
$a_{21}$			X		
$a_{23}$			X		
$a_{25}$			X		
$a_{26}$			X		
$a_{27}$			X		
$a_{32}$			X		
$a_{33}$			X		
$a_{37}$			X		
$a_{14}$		X			
$a_{31}$		X			
$a_{34}$		X			
$a_{36}$		X			
$a_{38}$		X			
$a_{39}$		X			
$a_{28}$	X				

Tabela 7. Intervalos de afectação após a iteração 8

Por fim, os decisores acrescentam o exemplo de afectação  $a_{14} \rightarrow C^2$ . O polítopo para esta iteração ( $T_8$ ) é não vazio e  $t_8^*$  indica  $k_1=k_4=k_6=0,01$ ,  $k_2=0,295$ ,  $k_3=k_5=k_7=0,225$  e  $\lambda=0,846$ . Os

intervalos de afectação são apresentados na Tabela 7. Nesta altura, há cinco acções afectadas (de forma robusta) a um intervalo de duas categorias, sendo as afectações para as restantes acções determinadas com precisão (a uma categoria apenas). Os decisores resolvem terminar o processo. Para além das afectações robustas, obtiveram os valores para os parâmetros que definem o seu modelo de preferências, construído a partir da informação que puderam ir fornecendo ao longo do processo.

Este exemplo mostra que os decisores podem aprender, revendo as suas opiniões, durante o processo de decisão. Inicialmente, consideravam que  $g_2$  era o critério mais importante, mas aceitaram que  $g_5$  pudesse ser ainda mais importante quando tiveram que confrontar aquela convicção com outras mais fortes, respeitantes a exemplos de afectação. A sua opinião sobre a categoria de  $a_1$  foi igualmente revista durante o processo.

Outro aspecto importante a notar é o da incorporação de apenas um exemplo de afectação ou uma restrição de cada vez. Tal permite controlar melhor o processo de interacção, ajudando a compreender a origem de eventuais incoerências. Note-se que, perante a rapidez de cálculo dos programas que foram utilizados, não há razões de natureza computacional para diminuir o número de iterações, efectuando diversas alterações a  $T_k$  de cada vez.



## BIBLIOGRAFIA CITADA

- ACKOFF, R.L. (1973), Science in the systems age: beyond IE, OR and MS, *Operations Research* 21, 661-671.
- ALVES, M.J., ANTUNES, C.H. e CLÍMACO, J.N. (1997), An experimental comparison of MOLP interactive approaches based on a regional planning model, in J. CLÍMACO (ed), 428-439.
- ANTUNES, C.H., ALMEIDA, L.A., LOPES, V. e CLÍMACO, J.N. (1994), A decision support system dedicated to discrete multicriteria problems, *Decision Support Systems* 12, 327-335.
- ANTUNES, C.H. e CLÍMACO, J.N. (1992), Sensitivity analysis in MCDM using the weight space, *Operations Research Letters* 12, 187-196.
- ANTUNES, C.H. e CLÍMACO, J.N. (1993), Decision aid for discrete alternative multiple criteria problems: a visual interactive approach, *Information and Decision Technologies* 19, 185-193.
- ATHANASSOPOULOS, A.D. e PODINOVSKI, V.V. (1997). Dominance and potential optimality in MCDA with imprecise information, *Journal of the Operational Research Society* 48, 142-150.
- AVIS, D., BREMNER, D. e SEIDEL, R. (1997), How good are convex hull algorithms?, *Computational Geometry: Theory and Applications* 7, 265-302.
- AVIS, D. e FUKUDA, K. (1992), A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* 8, 295-313.
- AZEVEDO, J.A. e MARTINS, E.Q.V. (1991), An algorithm for the multiobjective shortest path problem on acyclic networks, *Investigação Operacional* 11, 52-69.
- AZEVEDO, J.A., COSTA, M.E.O.S., MADEIRA, J.J.E.R.S. e MARTINS, E.Q.V. (1993), An algorithm for the ranking of shortest paths, *European Journal of Operational Research* 69, 97-106.
- BANA E COSTA, C.A. (1988), A methodology for sensitivity analysis in three-criteria problems: a case in municipal management, *European Journal of Operational Research* 33, 159-173.
- BANA E COSTA, C.A. (1992), *Structuration, construction et exploitation d'un modèle multicritère d'aide à la décision*, Dissertação de Doutoramento em Engenharia de Sistemas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- BANA E COSTA, C.A. (ed) (1990), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin.
- BANA E COSTA, C.A. (1996), Les problématiques de l'aide à la décision: vers l'enrichissement de la trilogie choix-tri-rangement, *RAIRO Recherche Opérationnelle* 30, 191-216.

- BANA E COSTA, C.A., ENSSLIN, L., CORRÊA, E.C. e VANSNICK, J.-C. (1999), Decision Support Systems in action: integrated application in a multicriteria decision aid process, *European Journal of Operational Research* 113, 315-335.
- BANA E COSTA C.A. e VANSNICK J.-C. (1994), MACBETH – An interactive path toward the construction of cardinal value function, *International Transactions in Operational Research* 1, 489-500.
- BANA E COSTA C.A. e VANSNICK J.-C. (1995), General overview of the MACBETH approach, in PARDALOS, P.M., SISKOS, Y. e ZOPOUNIDIS, C. (eds), *Advances in multicriteria analysis*, Kluwer, Dordrecht, 93-100.
- BANA E COSTA C.A. e VINCKE, Ph. (1995). Measuring credibility of compensatory preference statements when trade-offs are interval determined, *Theory and Decision* 39, 127-155.
- BARBER, C.B., DOBKIN, D.P. e HUHDANPAA, H. (1996), The quickhull algorithm for convex hulls, *ACM Transactions on Mathematical Software* 22, 469-483.
- BARRON, F.H. e BARRET, B.E. (1996), Decision quality using ranked attribute weights, *Management Science* 42, 1515-1523.
- BAZARAA, M.S., SHERALI, H.D. e SHETTY, C.M. (1993), *Nonlinear programming: theory and algorithms*, 2nd Ed., Wiley, New York.
- BEER, S. (1966), *Decision and control: the meaning of operational research and management cybernetics*, Wiley, Chichester.
- BELL, D.E., RAIFFA, H. e TVERSKY, A. (eds) (1988), *Decision making: descriptive, normative and prescriptive approaches*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BELL, D.E., RAIFFA, H. e TVERSKY, A. (1988b), Descriptive, normative and prescriptive interactions in decision making, in BELL et al. (eds) (1988), 9-30.
- BELTON, V. (1999), Multi-criteria problem structuring and analysis in a value theory framework, in GAL, T. et al. (eds), 12.1-12.32.
- BELTON, V., ACKERMANN, F. e SHEPHERD, I. (1997), Integrated support from problem structuring through to alternative evaluation using COPE and VISA, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, 115-130.
- BENAYOUN, R., ROY, B. e SUSSMANN, B. (1966), ELECTRE: une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples, Note de travail 46, Direction Scientifique, SEMA (Metra International), Paris.
- BOURGINE, P. e LE MOIGNE, J.-L. (1991), Les “bonnes” décisions sont-elles optimales ou adéquates?, in BRADLEY, H.E. (ed), *Operational Research '90*, Pergamon Press, Oxford, 215-225.
- BOUYSSOU, D. (1992), Ranking methods based on valued preference relations: a characterization of the net-flow method, *European Journal of Operational Research* 60, 61-68.

- BOUYSSOU, D. (1993), Décision multicritère ou aide multicritère?, *Bulletin du Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision"*, Séries 2, N° 2, 1-2.
- BRANS, J.P. e VINCKE, PH. (1985), A preference ranking organisation method (the PROMETHEE method for multiple-criteria decision making), *Management Science* 31, 647-656.
- BÜELER, B., A. ENGE e K. FUKUDA (1998), Exact volume computation for polytopes: a practical study, in *Polytopes - Combinatorics and Computation*, DMV-Seminars, Birkhäuser Verlag (a publicar).
- BUTLER J., JIA, J. e DYER, J. (1997), Simulation techniques for the sensitivity analysis of multicriteria decision models, *European Journal of Operational Research* 103, 531-546.
- BREMNER, D., FUKUDA, K. e MARZETTA, A. (1997), Primal-dual methods for vertex and facet enumeration, *Proceedings of the 13<sup>th</sup> Annual ACM Symposium SCG'97*, ACM Inc., 49-56.
- CHARNETSKI, J.R. e SOLAND, R.M. (1978), Multiple-attribute decision making with partial information: the comparative hypervolume criterion, *Naval Research Logistics* 25, 278-288.
- CHECKLAND, P.B. (1981), *Systems thinking, systems practice*, Wiley, Chichester.
- CHECKLAND, P.B. (1989), Soft systems methodology, in ROSENHEAD, J. (ed), 71-100.
- CHEN, P.-C., HANSEN, P. e JAUMARD, B. (1991), On-line and off-line vertex enumeration by adjacency lists, *Operations Research Letters* 10, 403-409.
- CHEN, S.-J. e HWANG, C.-L. (1992), *Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications*, Springer, Heidelberg.
- CHINNECK J.W. (1996), An effective polynomial time heuristic for the minimum-cardinality IIS set-covering problem, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 17, 127-144.
- CISED CONSULTORES, Lda. (1998). «PROBE for Windows - User Manual», Lisboa.
- CLARKE, F.H. (1983), *Optimization and non-smooth analysis*, Wiley, New York.
- CLÍMACO (ed) (1997), *Multicriteria analysis*, Springer, Berlin.
- CLÍMACO, J., ANTUNES, C.H. e ALVES, M.J. (1996), *Programação linear multiobjetivo*, Secção de Textos da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- CLÍMACO, J.C.N. e MARTINS, E.Q.V. (1980), On the determination of the nondominated paths in a multiobjective network problem, Proc. of the V Symposium über Operations Research, Köln, in *Methods in Operations Research* 40 (Anton Hain, Königstein, 1981) 255-258.
- CLÍMACO, J.C.N. e MARTINS, E.Q.V. (1982), A bicriterion shortest path algorithm, *European Journal of Operational Research* 11, 399-404.

- CONDORCET, J.-M., MARQUÊS DE (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris.
- COSTA, J.P. (1999), *Sistemas de apoio à decisão*, Secção de Textos da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.
- COSTA, J.P., MELO, P., GODINHO, P. e DIAS, L.C. (1998) A Conceptual Description of the AGAP System: A GDSS for Project Analysis and Evaluation, Relatório de investigação, Série Métodos Científicos de Gestão, Nº1/98, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.
- COURBON, J.C., DUBOIS, D., ROY, B. e POMEROL, J.C. (1994), Autour de l'aide a la décision et de l'intelligence artificielle, Cahiers du LAFORIA 94/01, Institut Blaise Pascal, Paris.
- DAELLENBACH, H.G. (1997), Multiple criteria decision making within Checkland's Soft Systems Methodology, in J. CLÍMACO (ed), 51-60.
- DESANCTIS, G. e GALLUPE, R.B. (1987), A foundation for the study of group decision support systems, *Management Science* 33, 589-609.
- DIAS, L.C. e CLÍMACO, J.N. (1999), On computing ELECTRE's credibility indices under partial information, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 8, 74-92.
- DIAS, L.C. e CLÍMACO, J.N. (2000), Shortest path problems with partial information: models and algorithms for detecting dominance, *European Journal of Operational Research* 121, 16-31.
- DIAS, L.C. e CLÍMACO, J.N. (2000b), ELECTRE TRI for Groups with Imprecise Information on Parameter Values, *Group Decision and Negotiation* 9, 355-377.
- DIAS, L.C. e CLÍMACO, J.N. (2000c), Additive aggregation with variable interdependent parameters: the VIP Analysis software, *Journal of the Operational Research Society* 51, 1070-1082.
- DIAS, L.C., COSTA, J.P. e CLÍMACO, J.N. (1996), O processamento paralelo e o apoio multicritério à decisão: algumas experiências computacionais, *Investigação Operacional* 16, 181-199.
- DIAS, L.C., COSTA, J.P. e CLÍMACO, J.N. (1997), Conflicting criteria, cooperating processors — some experiments on implementing a multicriteria decision support method on a parallel computer, *Computers and Operations Research* 24, 805-817.
- DIAS, L., MOUSSEAU, V., FIGUEIRA, J. e CLÍMACO, J. (2000), An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusions with ELECTRE TRI, *Cahier du LAMSADE*, No. 174, Université Paris-Dauphine.
- DIMITRAS, A., ZOPOUNIDIS, C. e HURSON, C. (1995), Multicriteria decision aid method for the assessment of business failure risk, *Foundations of Computing and Decision Sciences* 20, 99-112.

- DUBOIS, D. e PRADE, H. (1989), Fuzzy sets, probability and measurement, *European Journal of Operational Research* 40, 135-154.
- DYER, M.E. e PROLL, L.G. (1982), An improved vertex enumeration algorithm, *European Journal of Operational Research* 9, 359-368.
- EAVES, B.C. e ZANGWILL, W.I. (1971), Generalized cutting plane algorithms, *SIAM Journal of Control* 9, 529-542.
- EDWARDS, W. e BARRON, F.H. (1994), SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement, *Organizational Behavior and Human Decision Processes* 60, 306-325.
- EDWARDS, W., VON WINTERFELDT, D. e MOODY, D.L. (1988), Simplicity in decision analysis: an example and an application, in BELL, D.E. et al. (eds), 443-464.
- EISELT, H.A. e LAPORTE, G. (1992), The use of domains in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research* 61, 292-298.
- FISHBURN, P.C. (1964), *Decision and value theory*, Wiley, New York.
- FISHBURN, P.C. (1988), Normative theories of decision making under risk and under uncertainty, in BELL et al. (eds) (1988), 78-98.
- FRENCH, S. (1995), Uncertainty and imprecision: modelling and analysis, *Journal of the Operational Research Society* 46, 70-79.
- FRENCH, S. e RIOS INSUA, D. (1989), Partial information and sensitivity analysis in multi-objective decision making, in LOCKETT A.G. e ISLEI, G. (eds), 424-433.
- FYLSTRA, D., LASDON, L., WATSON, J. e WAREN, A. (1998), Design and use of Microsoft Excel Solver, *Interfaces* 28:5, 29-55.
- GAL, T., STEWART, T. e HANNE, T. (1999), *Multicriteria decision making: advances in MCDM models, algorithms, theory and applications*, Kluwer, Dordrecht.
- GARDINER, L. e VANDERPOOTEN, D. (1996), Interactive multiple criteria procedures: some reflections, in CLÍMACO, J. (ed), 291-301.
- GILL, P.E., MURRAY, W. e WRIGHT, M.H. (1981), *Practical optimization*, Academic Press, New York.

- GOODWIN, P. e WRIGHT, G. (1998), *Decision analysis for management judgement*, 2ª Edição, Wiley, Chichester.
- GRABISCH, M. (1996), The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research* 89, 445-456.
- GRECO, S., MATARAZZO, B., e SLOWINSKI, R. (1999), The use of rough sets and fuzzy sets in MCDM, in GAL, T. et al. (eds), 14.1-14.59.
- GRECO, S., MATARAZZO, B., SLOWINSKI, R. e TSOUKIÀS, A. (1997), Exploitation of a rough approximation of the outranking relation, *Cahier du LAMSADE*, No. 152, Université Paris-Dauphine.
- GROMICHO, J.A.S. (1998), *Quasiconvex optimization and location theory*, Applied Optimization 9, Kluwer, Dordrecht.
- GROVE, A.S. (1999), *Only the paranoid survive: how to exploit the crisis points that challenge every company*, Doubleday, New York.
- HAZEN, G. B. (1986), Partial information, dominance and potential optimality in multiattribute utility theory, *Operations Research* 34, 297-310.
- HIRSHLEIFER, J. e RILEY, J.G. (1992), *The analytics of uncertainty and information*, Cambridge University Press, Cambridge.
- HOKKANEN, J., LAHDELMA, R., MIETTINEN, K. e SALMINEN, P. (1998), Determining the implementation order of a general plan by using a multicriteria method, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 7, 273-284.
- HOLL, J.-C. (1983), La décision: intuition, oukase ou processus, in ROY, B. (ed), *La décision: ses disciples, ses acteurs*, Presses Universitaires de Lyon (Colloque de Cerisy), Lyon, 167-174.
- HORST, R. e PARDALOS, P.M. (eds) (1995), *Handbook of global optimization*, Kluwer, Dordrecht.
- HORST, R., PARDALOS, P.M. e THOAI, N.V. (1995), *Introduction to global optimization*, Kluwer, Dordrecht.
- HORST, R. e TUY, H. (1996), *Global optimization: deterministic approaches*, 3rd Ed., Springer, Berlin.
- HURSON, Ch. e ZOPOUNIDIS, C. (1997), On the use of multicriteria decision aid methods to portfolio selection, in CLÍMACO, J. (ed), 496-507.
- JACQUET-LAGRÈZE, E. e SISKOS, J. (1982), Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making - the UTA method, *European Journal of Operational Research* 10, 151-164.

- KÄMPKE, T. (1996), Sensitivity analysis for assessing preferentially independent order relations, *Computers and Operations Research* 23, 1119-1130.
- KEENEY, R.L. (1992), *Value-focused thinking: a path to creative decisionmaking*, Harvard University Press, Cambridge (MA).
- KEENEY, R.L. e NAIR, K. (1977), Selecting nuclear power plant sites in the Pacific Northwest using decision analysis, in BELL, D.E. et al. (eds), *Conflicting objectives in decisions*, Wiley, New York, 298-322.
- KEENEY R.L. e RAIFFA, H. (1976), *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoff*. Wiley, New York.
- KELLY, G.A. (1955), *The psychology of personal constructs: a theory of personality*, Norton, New York.
- KIM, S.-H. e AHN, B.S. (1997), Group decision making procedure considering preference strength under incomplete information, *Computers and Operations Research* 24, 1101-1112.
- KIM, S.H. e AHN, B.S. (1999), Interactive group decision making procedure under incomplete information, *European Journal of Operational Research* 116, 498-508.
- KIM, S.H. CHOI, S.H. e KIM, J.K. (1999), An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information: Range-based approach, *European Journal of Operational Research* 118, 139-152
- KIM, S.H. e HAN, C.H. (1999), An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information, *Computers and Operations Research* 26, 755-772.
- KIRKWOOD, C.W, e SARIN, R.K. (1985), Ranking with partial information: a method and an application, *Operations Research* 33, 38-48.
- KMIETOWICZ, Z.W. e PEARMAN, A.D. (1984), Decision theory, linear partial information and statistical dominance, *Omega* 12, 391-399.
- KOUVELIS, P. e YU, G. (1997), *Robust discrete optimization and its applications*, Kluwer, Dordrecht.
- LASSERRE, J.B. (1983), An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in  $\mathcal{R}^n$ , *Journal of Optimization Theory and Applications* 39, 363-377.
- LEMARÉCHAL, C. (1989), Nondifferentiable optimization, in NEMHAUSER, G.L. et al. (eds) *Handbooks in Operations Research / Management Science*, Vol. 1, Elsevier, 529-572.
- LOCKETT A.G. e ISLEI, G. (eds), *Improving decision making in organisations*, Springer-Verlag, Berlin.

- LUENBERGER, D.G. (1973), *Introduction to linear and non-linear programming*, Addison-Wesley, Reading.
- MARCH, J.G. (1998), Bounded rationality, ambiguity, and the engineering of choice, in BELL, D.E. et al. (eds), 33-57.
- MARESCHAL, B. (1988), Weight stability intervals in multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research* 33, 54-64.
- MARTINS, E.Q.V., PASCOAL, M.M.B. e SANTOS, J.L.E. (1998), «A new algorithm for ranking loopless paths», Relatório de investigação, Dep. Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal.
- MARTINS, E.Q.V. e SANTOS, J.L.E. (2000), A new shortest paths ranking algorithm, *Investigação Operacional* 20, 47-61.
- MATOS, M.A. (2000), Some reflections on the multicriteria nature of risk evaluation, apresentado no 51º Encontro do Grupo Europeu “Multicriteria aid for decisions”, Madrid, 30-31 de Março de 2000.
- MAYSTRE, L.-Y., PICTET, J. e SIMOS, J. (1994), *Méthodes multicritères ELECTRE*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- MIETTINEN, K. e SALMINEN, P. (1999), Decision-aid for discrete multiple criteria decision making problems with imprecise data, *European Journal of Operational Research* 119, 50-60.
- DE MONTGOLFIER, J. e BERTIER, P. (1978), *Approche multicritère des problèmes de décision*, Hommes et Techniques, Suresnes.
- MOUSSEAU, V. (1993), **Problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision: réflexions théoriques, experimentation et implémentation informatique**, Dissertação de Doutoramento, Université Paris-Dauphine.
- MOUSSEAU V. (1995), Eliciting information concerning the relative importance of criteria, in PARDALOS, P., SISKOS, Y. e ZOPOUNIDIS, C. (eds.), *Advances in Multicriteria Decision Aid*, Kluwer, Dordrecht, 17-43.
- MOUSSEAU V. e SLOWINSKI R. (1988), Inferring an ELECTRE TRI Model from Assignment Examples, *Journal of Global Optimization* 12, 157-174.
- MOUSSEAU, V., SLOWINSKI, R. e ZIELNIEWICZ, P. (1999), ELECTRE TRI 2.0a: methodological guide and user's manual, *Document du LAMSADE*, No. 111, Université Paris-Dauphine.
- MULVEY, J.M., VANDERBEI, R.J. e ZENIOS, S.A. (1995), Robust optimization of large-scale systems, *Operations Research* 43, 264-281.



- PARK, K.S. e KIM, S.H. (1997), Tools for interactive multiattribute decisionmaking with incompletely identified information, *European Journal of Operational Research* 98, 111-123.
- PASCOAL, M. (2000), A enumeração dos k trajectos mais curtos, *Investigação Operacional* 20, 63-85.
- PAWLAK, Z. (1991), *Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data*, Kluwer, Dordrecht.
- PAWLAK, Z. e SLOWINSKI, R. (1994), Rough set approach to multi-attribute decision analysis, *European Journal of Operational Research* 72, 443-459.
- PERNY, P. e POMEROL, J.-C. (1999), Use of artificial intelligence in MCDM, in GAL, T. et al. (eds), 15.1-15.43.
- PERNY, P. e ROY, B. (1992), The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* 49, 33-53.
- PINTER, J.D. (1996), Continuous global optimization software: a brief review, *Optima* 52, 1-8.
- PIRLOT, M. (1995), A characterization of 'Min' as a procedure for exploiting valued preference relations and related results, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 4, 37-56.
- PLASTRIA, F. (1985), Lower subdifferentiable functions and their minimization by cutting planes, *Journal of Optimization Theory and Applications* 46, 37-53.
- PLASTRIA, F. (1988), The minimization of lower subdifferential functions under nonlinear constraints: an all feasible cutting plane algorithm, *Journal of Optimization Theory and Applications* 57, 463-484.
- PODINOVSKI V.V. (1999), A DSS for multiple criteria decision analysis with imprecisely identified trade-offs, *European Journal of Operational Research* 113, 261-270.
- POMEROL, J.-C. e BARBA-ROMERO, S. (1993), *Choix multicritère dans l'entreprise: principe et pratique*, Editions Hermes, Paris.
- RAIFFA, H. (1982), *The art and science of negotiation*, Harvard University Press, Cambridge (Ma).
- RAPOPORT, A. (1989), *Decision theory and decision behaviour: normative and descriptive approaches*, Kluwer, Dordrecht.
- RIBEIRO, R.A. (1996), Fuzzy multiple attribute decision making: a review and new preference elicitation techniques, *Fuzzy Sets and Systems* 78, 155-181.
- RINNOOY KAN, A.H.G. e TIMMER, G.T. (1989), Global optimization, in NEMHAUSER, G.L. et al. (eds) *Handbooks in Operations Research / Management Science*, Vol. 1, Elsevier, 631-662.
- RIOS INSUA D. (1990), *Sensitivity analysis in multiobjective decision making*, Springer, Berlin. [Dissertação de Doutoramento defendida na Universidade de Leeds em 1989].

- RIOS INSUA D. e FRENCH, S. (1991), A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making, *European Journal of Operational Research* 54, 176-190.
- ROBINSON, M.S. e SOLAND, R.M. (1997), The sensitivity analysis of "inexact" multicriteria decisions, in G. FANDEL, G. e GAL, T. (eds), *Multiple criteria decision making - Proceedings of the twelfth international conference*, Springer, Berlin.
- ROGERS, M., BRUEN, M. e MAYSTRE, L.Y. (2000), *Electre and decision support: methods and applications in engineering and infrastructure investment*, Kluwer, Dordrecht.
- ROSENHEAD, J. (ed) (1989), *Rational analysis for a problematic world: problem structuring methods for complexity, uncertainty and conflict*, Wiley, Chichester.
- ROSENHEAD, J. (1989b), Introduction: old and new paradigms of analysis, in ROSENHEAD, J. (ed), 1-20.
- ROSENHEAD, J. (1989c), Robustness analysis: keeping your options open, in ROSENHEAD, J. (ed), 193-218.
- ROSENHEAD, J. (1996), What's the problem? An introduction to problem structuring methods, *Interfaces* 26, 117-131.
- ROUBENS, M. (1997), Fuzzy sets and decision analysis, *Fuzzy Sets and Systems* 90, 199-206.
- ROY, B. (1968), Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE), *Revue Informatique et Recherche Opérationnelle*, 2e. Année, No. 8, 57-75.
- ROY, B. (1968b), Il faut désoptimiser la recherche opérationnelle, **Bulletin de l'AFIRO** (Association Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle) N°7, editorial.
- ROY, B. (1978), ELECTRE III: un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle* 20, 3-24.
- ROY, B. (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris.
- ROY, B. (1990), Decision-aid and decision-making, in BANA E COSTA, C.A. (ed), 17-35.
- ROY, B. (1991), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decision* 31, 49-73.
- ROY, B. (1993), Decision science or decision-aid science?, *European Journal of Operational Research* 66, 184-203.
- ROY, B. (1998), A missing link in OR-DA: robustness analysis, *Foundations of Computing and Decision Sciences* 23, 141-160.
- ROY, B. (1999), Decision-aiding today: what should we expect?, in GAL, T. et al. (eds), 1.1-1.35.
- ROY, B. e BERTIER, P. (1971), La méthode ELECTRE II: une méthode de classement en présence de critères multiples, Note de travail No. 142, Direction Scientifique, SEMA (Metra International), Paris.

- ROY B. e BOUYSSOU, D. (1989), Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision in decision models, *Mathematical and Computer Modelling* 12, 1245-1254.
- ROY B. e BOUYSSOU, D. (1993), *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*, Economica, Paris.
- ROY B. e HUGONNARD, J.C. (1982), Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method, *Transportation Research* 16A, 301-312.
- ROY, B. e MOSCAROLA, J. (1977), Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur une segmentation trichotomique en présence de critères multiples, *RAIRO Recherche Opérationnelle* 11, 145-173.
- ROY, B. e SKALKA, J.M. (1984), ELECTRE IS: aspects méthodologiques et guide d'utilisation, *Document du LAMSADE*, No. 30, Université Paris-Dauphine.
- ROY B. e VANDERPOOTEN, D. (1996), The European School of MCDA: basic features and current works, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 5, 22-38.
- SAATY, T. L. (1980), *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York.
- SAATY, T. L. (1996), *Decision making with dependence and feedback: the analytic network process*, RWS Publications, Pittsburg.
- SALTELLI, A., TARANTOLA, S. e CHAN, K. (1999), A role for sensitivity analysis in presenting the results from MCDA studies to decision makers, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 8, 139-145.
- SANTOS, J.L.E. (1999), Uma abordagem ao problema do trajecto óptimo multiobjectivo, *Investigação Operacional* 19, 211-226.
- SAVAGE, L.J. (1954), *The foundations of statistics*, Wiley, New York.
- SCHÄRLIG, A. (1985), *Décider sur plusieurs critères*, Collection Diriger l'Entreprise 1, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.
- SCHÄRLIG, A. (1996), *Pratiquer Electre et Prométhée*, Collection Diriger l'Entreprise 11, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.
- SCHNELLER, G.O. e SPHICAS, G. (1985), On sensitivity analysis on decision theory, *Decision Sciences* 16, 339-409.
- SCHRAGE, L. (1998), *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems Inc, Chicago.
- SHAFER, G. (1988), Savage revisited, in BELL, D.E. et al. (eds), 193-234.
- SILVER, M.S. (1991), *Systems that support decision makers: description and analysis*, Wiley, Chichester.

- SIMON, H., (1959), Theories of decision making in economics and behavioral science, *American Economical Review* XLIX(3), 253-283.
- SIMON, H., (1977), *The new science of management decision*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- SIMON, H., (1988), Rationality as a process and as a product of thought, in BELL, D.E. et al. (eds), 58-77.
- SOLYMOSI, T e DOMBI, J. (1986), A method for determining the weights of the criteria: the centralized weights, *European Journal of Operational Research* 26, 35-41.
- STARR, M.K. (1962), *Product design and decision theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- STEUER, R. (1986), *Multiple criteria optimization: theory, computation and application*, Wiley, New York.
- STEWART, T.J. (1995), Simplified approaches for multicriteria decision making under uncertainty, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 4, 246-258.
- STONER, J.A., FREEMAN, R.E. e GILBERT JR., D.A. (1995), *Management*, 6ª Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- TSOUKIÀS, A. (1997), *Sur la généralisation des concepts de concordance et de discordance en aide multicritère à la décision*, Mémoire présenté pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Dauphine.
- TSOUKIÀS, A. e VINCKE, Ph. (1997), Extended preference structures in multicriteria decision aid, in CLÍMACO, J. (ed.), *Multicriteria analysis*, Springer, 37-50.
- TURBAN, E. e ARONSON, J.E. (1998), *Decision support systems and intelligent systems*, 5ªEd., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- VANDERPOOTEN, D. (1990), The construction of prescriptions in outranking methods, in BANA E COSTA, C. A. (ed), 184-215.
- VANDERPOOTEN, D. (1990b), *L'approche interactive dans l'aide multicritère à la décision: aspects conceptuels, méthodologiques et informatiques*, Dissertação de Doutorado, Universidade de Paris - Dauphine.
- VAN HERWIJNEN, M., RIETVELD, P., THEVENET, K. e TOL, R. (1995), Sensitivity analysis with interdependent criteria for multicriteria decision making: the case of soil pollution treatment, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 4, 57-70.

- VINCKE, Ph. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Éditions de l'Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.
- VINCKE, Ph. (1999), Robust solutions and methods in decision aid, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 8, 181-187.
- VINCKE, Ph. (1999b), Outranking approach, in GAL, T. et al. (eds), 11.1-11.29.
- VLADIMIROU, H. e ZENIOS, S.A. (1997), Stochastic programming and robust optimization, in GAL, T. e GREENBERG, H.J. (eds), *Advances in sensitivity analysis and parametric programming*, Kluwer, Dordrecht, 12.1-12.53.
- VON NEUMANN, J. e MORGENSTERN, O. (1947), *Theory of games and economic behavior*, 2<sup>a</sup> Ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- VON WINTERFELDT, D. e EDWARDS, W. (1986), *Decision analysis and behavioral research*, Cambridge University Press, New York.
- WEBER, M. (1987), Decision making with incomplete information, *European Journal of Operational Research* 28, 44-57.
- WIERZBICKI, A.P. (1982), A mathematical basis for satisfying decision making, *Mathematical Modelling* 3, 391-405.
- WOLTERS, W. e MARESCHAL, B. (1995), Novel types of sensitivity analysis for additive MCDM methods, *European Journal of Operational Research* 81, 281-290.
- YU, W. (1992), ELECTRE TRI. Aspects méthodologiques et guide d'utilisation, *Document du LAMSADE*, No. 74, Université Paris-Dauphine.
- ZIMMERMANN, H.-J. (2000), An application-oriented view of modeling uncertainty, *European Journal of Operational Research* 122, 190-198.