

# **A equação do calor fraccionária**

Diogo de Castro Lobo



# A equação do calor fraccionária

Diogo de Castro Lobo

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**  
Área de Especialização em **Análise Aplicada e Computação**

## Júri

**Presidente:** José Augusto Ferreira  
**Orientador:** Ercília Sousa  
**Vogais:** Ercília Sousa  
Gonçalo Pena

**Data:** Setembro de 2016



# Resumo

A resolução numérica da equação fraccionária do calor

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2}u = 0,$$

tem sido um área de investigação muito activa nas últimas décadas. Na literatura, a mesma notação para o operador de difusão aparece associada a definições diferentes, não sendo claro se estas são equivalentes.

Neste trabalho estudamos maioritariamente duas definições para este operador: o operador de Riesz na forma integral e o operador de Riesz espectral. São apresentados métodos numéricos que convergem para a solução do problema de difusão fraccionário respectivo a cada definição. Por último, usando estes métodos comparamos as soluções numéricas dos problemas associados a cada definição.

**Palavras Chave:** Transformada de Fourier, operador de Riesz, operador de Riesz na forma integral, operador de Riesz espectral, técnica de transmissão de matriz.

# Abstract

The numerical resolution of the fractional heat equation

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2}u = 0,$$

has been a topic of great interest in the last decades. In the literature the same notation for the diffusion operator is associated with different definitions, and it is unclear if they are equivalent.

In this work we study two of the major definitions for this operator: the integral Riesz operator and the spectral Riesz operator. We introduce numerical methods that converge for the solution of the fractional diffusion problem associated with each definition. We finish by using this methods to compare the numerical solutions of each problem.

**Keywords:** Fourier transform, Riesz operator, integral Riesz operator, spectral Riesz operator, matrix transfer technique.



# Agradecimentos

*Em primeiro lugar à minha família, por tudo.*

*Aos meus amigos, pela amizade e compreensão demonstradas.*

*A todo o corpo docente e não docente do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra por me terem proporcionado uma excelente experiência de aprendizagem ao longo destes anos.*

*Por último, à Professora Ercília Sousa, pela infinita paciência e ajuda no orientar desta dissertação.*





# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Operadores fraccionários</b>	<b>3</b>
2.1	A transformada de Fourier em $L^1$ . . . . .	3
2.2	A derivada fraccionária de Riemann-Liouville . . . . .	7
2.3	O operador de Riesz . . . . .	9
2.4	O operador de Riesz na forma integral . . . . .	10
2.5	O potencial de Riesz . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Método numérico segundo diferenças centradas</b>	<b>17</b>
3.1	As diferenças centradas . . . . .	18
3.1.1	Das diferenças centradas ao operador de Riesz na forma integral	19
3.1.2	Um resultado importante e uma breve digressão pela transformada de Fourier discreta . . . . .	23
3.2	O método numérico . . . . .	26
3.2.1	Convergência do método . . . . .	27
3.2.2	Testes numéricos . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Técnica de transmissão de matriz</b>	<b>33</b>
4.1	O operador de Riesz como um operador espectral . . . . .	33
4.2	Condições de fronteira e solução analítica da equação fraccionária do calor . . . . .	34
4.3	Método numérico . . . . .	36
4.4	Operador de Riesz integral versus operador espectral . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O propósito deste trabalho é estudar a denominada equação do calor fraccionária onde o operador de difusão é representado por um operador diferencial fraccionário.

Consideremos a equação do calor usual

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Esta equação surge na modelação de uma série de fenómenos tais como a propagação do calor, a concentração de um químico ou a modelação do mercado de acções. Os pressupostos para estes modelos são válidos para meios homogéneos, mas não para meios altamente heterogéneos.

Um modelo mais geral é a equação do calor fraccionária

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0, \tag{1.1}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro entre 1 e 2, que exprime a heterogeneidade do meio. Mas como entender o operador  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ , a que chamaremos operador de Riesz? O leitor familiarizado com a teoria de Fourier sabe que para certas funções  $u$  temos

$$((-\Delta)u) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^2 \mathfrak{F}u),$$

onde  $\mathfrak{F}$  e  $\mathfrak{F}^{-1}$  representam, respectivamente, a transformada de Fourier e a inversa da transformada de Fourier. Assim, uma primeira definição poderia ser

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \mathfrak{F}u). \tag{1.2}$$

Esta definição está também associada a um profundo contexto físico associado à teoria dos saltos arbitrariamente longos.

Mas em que espaço de funções é que o operador pode ser definido? Haverá outras definições que satisfaçam esta propriedade no espaço de Fourier?

Recentemente tem sido dada grande atenção na literatura a uma nova definição para o operador  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ , baseada nos valores próprios e respectivas funções próprias associadas ao problema de valores próprios para o operador de Laplace. Juntamente

com esta nova definição, surge um método numérico que toma o nome de técnica de transmissão de matriz. Contudo, será que existe alguma equivalência entre esta definição e a dada por (1.2)?

Neste trabalho vamos apresentar a resolução numérica de dois problemas que consistem em considerar duas definições diferentes para o operador de difusão fracionário e discutimos se os problemas partilham a mesma solução.

A dissertação está organizada do seguinte modo. No capítulo 2 revemos a transformada de Fourier para funções em  $L^1(\mathbb{R})$ , discutimos a existência do operador de Riesz na forma integral e vemos se satisfaz a propriedade (1.2). No capítulo 3 apresentamos um método numérico para a equação fracionária do calor (1.1). Apresentamos ainda resultados sobre a convergência do método. No capítulo 4 discutimos o operador de Riesz na forma espectral e apresentamos um método numérico para a resolução do problema envolvendo este operador. No final, usando os métodos numéricos desenvolvidos para a resolução destes dois problemas, comparamos as suas soluções.

# Capítulo 2

## Operadores fraccionários

Neste capítulo vamos apresentar alguma teoria sobre operadores fraccionários. Precisamos para isso de definir inicialmente a transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R})$ . Discutiremos um espaço em que se pode definir o operador de Riesz através da transformada de Fourier e relacionamos esta definição com uma outra definição, que é a definição integral do operador de Riesz.

### 2.1. A transformada de Fourier em $L^1$

Relembremos o espaço de funções  $L^1(\mathbb{R})$ , o espaço de funções mensuráveis em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $u \in L^1(\mathbb{R})$  se

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < \infty.$$

Neste espaço podemos definir a norma

$$\|u\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx$$

de maneira a que o espaço seja de Banach.

Seja  $u \in L^1(\mathbb{R})$ . A transformada de Fourier de  $u$  é definida por

$$\hat{u}(\xi) = \mathfrak{F}(u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx \quad (2.1)$$

Antes de apresentar algumas propriedades imediatas que surgem da definição, definimos de seguida a operação de convolução.

**Definição 1.** *Sejam  $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ . A convolução de  $u$  e  $v$  é definida por*

$$(u * v)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x-t)v(t) dt.$$

*A função  $u * v$  está em  $L^1(\mathbb{R})$ .*

**Lema 1.** *Sejam  $u, v \in L^1(\mathbb{R})$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Então*

$$\mathfrak{F}(u(\cdot + k))(\xi) = e^{ik\xi} \hat{u}(\xi)$$

$$\mathfrak{F}(e^{-ik \cdot} u(\cdot))(\xi) = \hat{u}(\xi + k)$$

$$\mathfrak{F}(u(\cdot k))(\xi) = \frac{1}{k} \hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right)$$

$$\mathfrak{F}[(u * v)](\xi) = \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi)$$

De seguida vamos provar um resultado conhecido como Lema de Riemann-Lebesgue:

**Lema 2.** *A transformada de Fourier é uma transformação linear limitada de  $L^1(\mathbb{R})$  para  $C_0(\mathbb{R})$ , no sentido em que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

*Demonstração.* A linearidade da transformada segue imediatamente da definição. Para vermos que é limitada, veja-se que  $|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$  para todo o  $\xi \in \mathbb{R}$ . Tenhamos agora em atenção que, sendo  $u \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi + h) - \hat{u}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) (e^{-ihx} - 1) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |u(x)| |e^{-ihx} - 1| dx. \end{aligned}$$

A expressão a integrar é limitada por  $2\|u\|_1$ . Por outro lado, esta expressão tende para 0 quando  $h \rightarrow 0$ . Assim, pelo teorema de convergência de Lebesgue<sup>1</sup>, temos que  $|\hat{u}(\xi + h) - \hat{u}(\xi)| \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ , independentemente do valor de  $\xi$ . Isto implica a continuidade uniforme de  $\hat{u}$  em  $\mathbb{R}$ , que por sua vez implica  $\hat{u} \in C(\mathbb{R})$ . Por último note-se que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u\left(x - \frac{\pi}{\xi}\right) dx &= -\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx \\ &= \hat{u}(\xi), \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(u(x) - u\left(x - \frac{\pi}{\xi}\right)\right) dx,$$

o que leva a

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \|u(\cdot) - u(\cdot - \frac{\pi}{\xi})\|_1,$$

que por sua vez implica  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{u}(\xi) = 0$ . □

---

<sup>1</sup>Seja  $\{u_n\}_{\mathbb{N}}$  uma família de funções em  $L^1(\mathbb{R})$  tal que  $|u_n(x)| \leq v(x)$  quase em toda a parte para alguma função  $v \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$  q.t.p.. Então  $u \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx$

Antes de abordar a transformada de Fourier de uma derivada, vamos ver o problema da inversão da transformada de Fourier, isto é, a recuperação dos valores de  $u$  através da função  $\hat{u}$ . Esta recuperação nem sempre é possível, uma vez que a transformada de uma função  $u \in L^1(\mathbb{R})$  não tem de estar necessariamente em  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Teorema 1.** *Se  $u, \hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$  então*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

para quase todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Consideremos em primeiro lugar a função  $\phi_k(x) = e^{-kx^2}$ . Esta função pertence a  $L^1(\mathbb{R})$  e a sua transformada de Fourier tem a forma  $\hat{\phi}_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{1}{4k}\xi^2}$ , que também está em  $L^1(\mathbb{R})$ . Vê-se ainda facilmente que  $\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_k(\xi) d\xi = \sqrt{2\pi}$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \phi_k(\xi) d\xi \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-it\xi} dt e^{ix\xi} \phi_k(\xi) d\xi \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi_k(\xi) e^{-i(t-x)\xi} d\xi u(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_k(t-x) u(t) dt \end{aligned}$$

onde usámos Fubini na terceira igualdade. Tendo ainda em conta a paridade de  $\hat{\phi}_k$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_k(x-t) u(t) dt - u(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{1}{4k}(x-t)^2} u(t) dt - u(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x - 2y\sqrt{k}) dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} (u(x - 2y\sqrt{k}) - u(x)) dy. \end{aligned}$$

Observamos que a função integranda é limitada por  $2\|u\|_{L^1}$  e tende para 0 quando  $k \rightarrow \infty$ , pela continuidade da translacção em  $L^1$ . Tendo em conta a desigualdade de Hölder-Minkowski<sup>2</sup> vem

$$\|\hat{u}^\vee - u\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \|u(\cdot - 2y\sqrt{k}) - u(\cdot)\|_{L^1} dy \rightarrow 0.$$

Assim as funções concordam em quase toda a parte. □

<sup>2</sup>Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável. Se  $\|u(\cdot, y)\| \in L^1(\mathbb{R})$  então  $\|\int_{\mathbb{R}} u(\cdot, y) dy\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, y)\|_{L^1} dy$

Vamos agora ver que forma toma a transformada de Fourier da derivada de uma função que está num espaço mais restrito que  $L^1(\mathbb{R})$ , isto porque o operadorw de Riesz está ligado a estes conceitos. Para isso vamos precisar do espaço das funções absolutamente contínuas.

**Definição 2.** Dizemos que  $u$  é absolutamente contínua em  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e escrevemos  $u \in AC(\Omega)$  se para qualquer  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que para qualquer conjunto finito de intervalos disjuntos  $[a_k, b_k], k = 1, \dots, n$  que verifiquem  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$  implique  $\sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon$ .

Dizemos que  $u \in AC(\mathbb{R})$  se  $u \in AC(\Omega), \forall \Omega \subset \mathbb{R}$  e  $u$  for de variação finita em todo o  $\mathbb{R}$ . Dizemos ainda que  $u \in AC^n(\mathbb{R})$  se  $u$  e as derivadas  $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$  forem absolutamente contínuas em  $\mathbb{R}$ .

**Observação 1.** Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral de Lebesgue são equivalentes [13]:

(1)  $u \in AC(\mathbb{R})$

(2)  $u$  tem primeira derivada  $u'$  quase em toda a parte,  $u' \in L^1(\mathbb{R})$  e

$$u(x) = C + \int_{-\infty}^x u'(t)dt.$$

Provamos agora uma relação entre a transformada de Fourier da derivada de uma função e a transformada de Fourier da própria função.

**Teorema 2.** Seja  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC^{n-1}(\mathbb{R})$  e  $u^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Então

$$\mathfrak{F}[u^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \hat{u}(\xi)$$

*Demonstração.* Uma vez que  $u \in AC^{n-1}(\mathbb{R})$  os integrais iterados

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 u^{(n)}(x + x_1 + \cdots + x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

estão bem definidos. Fazendo integração por partes sucessivamente vem

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 u^{(n)}(x + x_1 + \cdots + x_n) dx_1 \cdots dx_n = \\ & = \int_0^1 \cdots \int_0^1 u^{(n-1)}(x + 1 + x_2 + \cdots + x_n) - u^{(n-1)}(x + x_2 + \cdots + c_n) dx_2 \cdots dx_n \\ & = \cdots \\ & = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u(x+k). \end{aligned}$$



Tendo em conta a lineariedade da transformada, o Lema 1 e a fórmula para o binómio de Newton, a transformada de Fourier desta expressão é

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{i\xi k} \hat{u}(\xi) = (e^{i\xi} - 1)^n \hat{u}(\xi). \quad (2.2)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 u^{(n)}(x + x_1 + \cdots + x_n) dx_1 \cdots dx_n = ((v*)^n * u^{(n)})(x),$$

onde  $v(x) = \sqrt{2\pi} \mathbb{1}_{[-1,0]}$  e  $(v*)^n$  representa a  $n$ -ésima convolução  $v * v \cdots * v$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} v(x) e^{-ix\xi} dx &= \int_{-1}^0 e^{-ix\xi} dx \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1, & \xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tendo outra vez em conta o Lema 1 vem para  $\xi \neq 0$

$$\mathfrak{F}[(v*)^n * u^{(n)}](\xi) = \left( \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} \right)^n \mathfrak{F}(u^{(n)})(\xi). \quad (2.3)$$

Juntando 2.2. e 3.3. e tendo em conta a continuidade das transformadas dada pelo Lema 2 o resultado é válido para qualquer  $\xi$  em  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## 2.2. A derivada fraccionária de Riemann-Liouville

Definamos em primeiro lugar os integrais fraccionais de Riemann-Liouville, cuja motivação vem da fórmula para integrais iterados de Cauchy, substituindo-se o operador factorial pela função gama [6]. Seja  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(z) > 0$ . Então o valor da função gama em  $z$  é dado por

$$\Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Fazendo integração por partes vê-se que para  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

**Definição 3.** *Seja  $\alpha \in (0, 1)$ . O integral fraccionário de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  à esquerda é definido por*

$$I_+^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (2.4)$$

*e o integral fraccionário de Riemann-Liouville à direita é definido por*

$$I_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{u(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt. \quad (2.5)$$

Interessa-nos saber para que funções esta representação faz sentido. Para isso recordemos algumas desigualdades.

**Teorema 3.** *Sejam  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Então*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)h(x)|dx \leq \|f\|_1 \|h\|_\infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Estas desigualdades são aa desigualdades de Hölder e de Young [4], respectivamente, aplicadas a funções em  $L^1$ . Fazendo a mudança de variável  $t = x - t$  em (2.4) escrevamos

$$I_+^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^1 t^{\alpha-1} u(x-t) dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1} u(x-t) dt \right). \quad (2.6)$$

O primeiro integral está bem definido tendo em conta a desigualdade de Young e o segundo está bem definido pela desigualdade de Hölder. Do mesmo modo se prova a existência do integral fraccionário à direita.

A definição de derivada fraccionária surge naturalmente da noção de integral fraccionário que definimos na Definição 3.

**Definição 4.** *Seja  $\alpha > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n - \alpha \in (0, 1)$ . A derivada fraccionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  à esquerda é dada por*

$$D_+^\alpha(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} (I_+^{n-\alpha} u(x)) \quad (2.7)$$

e a derivada fraccionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  à direita é dada por

$$D_-^\alpha(x) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (I_-^{n-\alpha} u(x)). \quad (2.8)$$

Queremos agora saber quando é que as derivadas fraccionais estão bem definidas. Apresentamos o resultado para o caso  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Teorema 4.** *Seja  $u \in AC(\mathbb{R})$  tal que  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Então  $D_+^\alpha(x)$  existe quase em toda a parte e está em  $L^1(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, podemos escrever  $u$  na forma

$$u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t) dt$$

com  $u' \in L^1(\mathbb{R})$  uma vez que  $u(x)$  tende para 0 para  $x \rightarrow -\infty$ . Assim vem que

$$\begin{aligned} I_+^{1-\alpha}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{-\alpha} \int_{-\infty}^t u'(s) ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^t u'(s)(t-s)^{-\alpha} dt ds. \end{aligned}$$

O segundo integral é integrável por (2.6), pelo que  $I_+^{1-\alpha}u(x)$  é absolutamente contínua e tem primeira derivada, no sentido da definição, em  $L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

Deste resultado, segue agora facilmente a existência de derivada fraccionária para qualquer  $\alpha > 0$ .

**Corolário 1.** *Seja  $\alpha > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n - \alpha \in (0, 1)$ . Se  $u \in AC^{n-1}(\mathbb{R})$  e  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow -\infty$  então  $D_+^\alpha(x)$  existe em quase toda a parte e está em  $L^1(\mathbb{R})$ .*

**Observação 2.** *O resultado anterior diz somente respeito à derivada fraccionária à esquerda. Um tratamento análogo para a derivada fraccionária à direita conduz aos mesmos resultados, tendo de se exigir que a função desvaneça agora para  $+\infty$ .*

## 2.3. O operador de Riesz

A definição do operador de Riesz é muitas vezes dada em termos da transformada de Fourier. Por exemplo, para o operador de Laplace clássico, isto é,  $-\Delta = -\frac{\partial}{\partial v^2}$ , temos

$$\mathfrak{F}((-\Delta)u)(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$$

desde que  $u \in AC^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Segue de seguida a definição para o operador de Riesz [1] [4] [20].

**Definição 5.** *Seja  $\alpha \in (1, 2)$ . O operador de Riesz é dado por*

$$((-\Delta)^{\alpha/2}u)(x) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \mathfrak{F}(u))(x).$$

Antes de vermos o espaço de funções em que este operador está bem definido precisamos do resultado que enunciamos em seguida.

**Lema 3.** *Seja  $\alpha \in (1, 2)$  e  $u \in AC^{n-1}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Então existe  $M > 0$  tal que*

$$|\mathfrak{F}(u)(\xi)| \leq (1 + |\xi|^n)^{-1} M.$$

## Capítulo 2 Operadores fraccionários

---

*Demonstração.* Pelo Lema 2 e uma vez que  $u^{(k)}$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ , temos que

$$\mathfrak{F}(u^{(k)}) \in C_0(\mathbb{R}) \implies \exists_{M_k \geq 0} |\mathfrak{F}(u^{(k)})(\xi)| \leq M_k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 2 vem que para estes valores de  $k$

$$|\xi|^k |\mathfrak{F}(u)(\xi)| \leq M_k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Então existe  $M \geq 0$  tal que

$$|(1 + |\xi|^n) \mathfrak{F}(u)(\xi)| \leq M \implies |\mathfrak{F}(u)(\xi)| \leq (1 + |\xi|^n)^{-1} M.$$

□

Estamos agora em condições de estabelecer o espaço de funções onde o operador de Riesz está bem definido:

**Teorema 5.** *Seja  $u \in AC^3(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Então, para  $x \in \mathbb{R}$ , o operador*

$$((-\Delta)^{\alpha/2} u)(x) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \mathfrak{F}(u))(x)$$

*está bem definido.*

*Demonstração.* Pelo lema anterior existe  $M > 0$  tal que

$$|\mathfrak{F}(u)(\xi)| \leq (1 + |\xi|^4)^{-1} M.$$

Uma vez que  $|\xi|^\alpha \leq 1 + |\xi|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^2$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha |\mathfrak{F}(u)(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^2 |\mathfrak{F}(u)(\xi)| d\xi \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{-2} d\xi \\ &= 2M < \infty. \end{aligned}$$

Então  $|\xi|^\alpha \mathfrak{F}(u) \in L^1(\mathbb{R})$  e podemos tomar a inversa de Fourier. □

### 2.4. O operador de Riesz na forma integral

O operador de Riesz é por vezes apresentado numa forma integral.

**Definição 6.** *Seja  $\alpha \in (1, 2)$ . O operador de Riesz na forma integral é dado por*

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = \frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{|x - t|^{\alpha-1}} dt \right).$$

Esta forma integral pode ser escrita em termos das derivadas fraccionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, ou seja

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) = \frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}(D_+^\alpha u(x) + D_-^\alpha u(x))$$

onde  $D_+^\alpha u, D_-^\alpha u$  são, respectivamente, as derivadas fraccionárias de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  de  $u$  à esquerda e à direita.

Vamos verificar que as Definições 5 e 6 são equivalentes. Para isso, precisamos primeiro de um resultado auxiliar de análise complexa, apresentado no lema que se segue.

**Lema 4.** *Seja  $\alpha \in (1, 2)$ . Então*

$$\int_0^\infty e^{-iy}y^{1-\alpha} dy = i^{\alpha-2}\Gamma(2-\alpha). \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $f(z) = z^{1-\alpha}e^{-iz}, z \in \mathbb{C}$ . Consideremos ainda a curva da Figura 2.1, orientada no sentido dos ponteiros do relógio de maneira a incluir o intervalo que desejamos. Tendo em conta que a função é holomorfa dentro

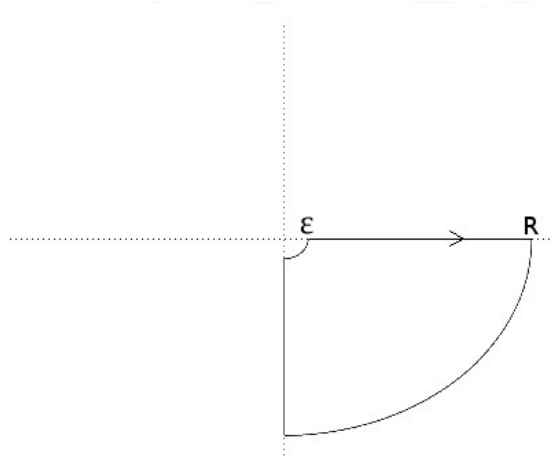


Figura 2.1: Curva anelar para o cálculo do integral 2.9.

e fora da curva, pelo Teorema de Cauchy vem

$$\int_{\Upsilon} f(z)dz = 0.$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\Upsilon} f(z)dz = \int_{\Upsilon_1} f(z)dz + \int_{\Upsilon_2} f(z)dz + \int_{\Upsilon_3} f(z)dz + \int_{\Upsilon_4} f(z)dz.$$

Ora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Upsilon_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \left| \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (Re^{i\theta})^{1-\alpha} e^{-iRe^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{2-\alpha} e^{-R\sin(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Jordan<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{2-\alpha} e^{-R\sin(\theta)} d\theta &\leq R^{2-\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}\theta} d\theta \\ &= R^{1-\alpha} \frac{\pi}{2} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Do mesmo modo temos que

$$\int_{\Upsilon_4} f(z) dz \rightarrow 0.$$

Assim,

$$0 = \int_{\epsilon}^R t^{1-\alpha} e^{-it} dt + \int_R^{\epsilon} (-it)^{1-\alpha} e^{-i(-it)} (-i) dt$$

e vem o resultado pretendido observando que

$$\begin{aligned} \int_R^{\epsilon} (-it)^{1-\alpha} e^{-i(-it)} (-i) dt &= (-i)^{2-\alpha} \int_R^{\epsilon} t^{1-\alpha} e^{-t} dt \\ &= (i^{-1})^{2-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \\ &= i^{\alpha-2} \Gamma(2-\alpha). \end{aligned}$$

□

Estamos então em condições de provar que efectivamente há uma equivalência entre as duas definições.

**Teorema 6.** Para  $\alpha \in (1, 2)$ , seja  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  o operador de Riesz na forma integral. Então se  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC^1(\mathbb{R})$  tem-se

$$\mathfrak{F}((-\Delta)^{\alpha/2} u)(\xi) = |\xi|^{\alpha} \hat{u}(\xi).$$

*Demonstração.* Devido à linearidade da transformada de Fourier, o cálculo da transformada do operador remete-se ao cálculo das transformadas das derivadas fraccionárias laterais de Riemann-Liouville. Fazemos a prova para a derivada fraccionária

---

<sup>3</sup>  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

à esquerda de ordem  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(D_+^\alpha u)(\xi) &= \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^x\frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}dt\right)(\xi) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^x\frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}dt\right)(\xi) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(i\xi)^2\mathfrak{F}\left(\int_{-\infty}^x\frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}dt\right)(\xi)\end{aligned}$$

tendo em conta o Lema 2.2. Fazendo a mudança de variável  $t = x - t$  vem

$$\int_{-\infty}^x\frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}dt = \int_0^\infty t^{1-\alpha}u(x-t)dt.$$

Aplicando a transformada de Fourier a este resultado e usando Fubini e o Lema 2.3 obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}e^{-i2\pi\xi x}\int_0^\infty t^{1-\alpha}u(x-t)dt dx &= \int_0^\infty t^{1-\alpha}\int_{\mathbb{R}}e^{-i2\pi\xi x}u(x-t)dx dt \\ &= \int_0^\infty e^{-i2\pi\xi t}t^{1-\alpha}dt\hat{u}(\xi) \\ &= \int_0^\infty e^{-it}\frac{t^{1-\alpha}}{(2\pi\xi)^{1-\alpha}}\frac{dt}{2\pi\xi}\hat{u}(\xi) \\ &= (2\pi\xi)^{\alpha-2}\int_0^\infty e^{-it}t^{1-\alpha}dt\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Tendo agora em conta o Lema anterior vem

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(D_+^\alpha u)(\xi) &= \frac{(i\xi)^2}{\Gamma(2-\alpha)}(\xi)^{\alpha-2}i^{\alpha-2}\Gamma(2-\alpha)\hat{u}(\xi) \\ &= (i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

De maneira análoga prova-se que  $\mathfrak{F}(D_-^\alpha u)(\xi) = (-i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)$ . Podemos agora escrever

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u)(\xi) &= \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}(\mathfrak{F}(D_+^\alpha u)(\xi) + \mathfrak{F}(D_-^\alpha u)(\xi)) \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}((i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi) + (-i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)) \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}|\xi|^\alpha(i^\alpha + (-i)^\alpha)\hat{u}(\xi) \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}|\xi|^\alpha(\cos(\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi)) + \\ &\quad + i\sin(\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi)) + \cos(-\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi)) + i\sin(-\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi)))\hat{u}(\xi) \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}|\xi|^\alpha(2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})) = |\xi|^\alpha\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

□

## 2.5. O potencial de Riesz

Vamos introduzir o potencial de Riesz que vai ser mencionado na teoria desenvolvida na secção 3.1.1 sobre diferenças centradas.

**Definição 7.** *Seja  $\alpha > -1$ . O potencial de Riesz é dado por*

$$P^\alpha u(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{\mathbb{R}} u(t) |x - t|^{-\alpha-1} dt.$$

Este integral está bem definido para valores de  $\alpha \in (-1, 0)$ , por (2.6). Notamos ainda para estes valores de  $\alpha$  a relação com o integral fraccionário de Riemann-Liouville pela fórmula

$$P^\alpha u(x) = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \left( I_+^\alpha u(x) + I_-^\alpha u(x) \right),$$

que nos faz lembrar a fórmula integral para o operador de Riesz. Para valores de  $\alpha > 0$  não conseguimos garantir a convergência deste integral como fizemos para 2.6, uma vez que as funções integrandas já não satisfazem as condições do Teorema 3. Contudo, se considerarmos este integral no sentido de Hadamard conseguimos estabelecer um paralelismo entre o potencial de Riesz com  $\alpha > 0$  e operador de Riesz que temos considerado.

É este tratamento que fazemos de seguida. Começamos por definir o integral segundo Hadamard.

**Definição 8.** *Seja  $\phi(t)$  uma função integrável num intervalo  $\epsilon < t < T$  para qualquer  $T > 0$  e  $0 < \epsilon < T$ . Dizemos que  $\phi$  tem a propriedade de Hadamard no ponto  $t = 0$  se existirem constantes  $a_k, \lambda_k > 0, k = 1, \dots, N$  e  $b$  tais que*

$$\int_{\epsilon}^T \phi(t) dt = \sum_{k=1}^N a_k \epsilon^{-\lambda_k} + b \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + J_0(\epsilon),$$

onde  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_0(\epsilon)$  existe e é finito. A

$$p.f. \int_0^T \phi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_0(\epsilon)$$

chamamos integral no sentido de Hadamard. Se  $\phi$  é integrável para  $T \rightarrow \infty$ , escrevemos ainda

$$p.f. \int_0^\infty \phi(t) dt = p.f. \int_0^T \phi(t) dt + \int_T^\infty \phi(t) dt.$$

Finalizamos este capítulo com um resultado cuja demonstração omitimos por ser extensa.



**Teorema 7.** *Seja  $\alpha \in (1, 2)$  e  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m - 1 < \alpha < m$ . Seja ainda  $u \in C^m$  tal que  $u^{(m)}$  é localmente contínua à Hölder com ordem  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ . Então*

$$D_+^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} p.f. \int_{-\infty}^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}$$

e

$$D_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} p.f. \int_x^\infty \frac{u(t)}{(t-x)^{\alpha+1}}.$$



## Capítulo 3

# Método numérico segundo diferenças centradas

O objectivo deste capítulo é apresentar um método numérico de segunda ordem para a resolução da equação fraccionária do calor em que o operador de difusão é representado pelo operador de Riesz integral que já vimos anteriormente.

A formulação de um problema de difusão em  $\mathbb{R}$  será da forma

$$u_t(x, t) = -k(-\Delta)^{\alpha/2}u(x, t) + s(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \quad (3.1)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Suponhamos que queremos definir este problema num  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , com  $\Omega = (a, b)$ . Como o operador de Riesz é não-local, o problema é definido pela equação (3.1), a condição inicial 3.2 e está sujeito à condição de fronteira dada por

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}/\Omega.$$

Esta condição de fronteira é usualmente interpretada fisicamente como a existência de um bloco sólido que absorve as partículas, já que pela natureza dos saltos arbitrariamente longos as partículas poderiam saltar a fronteira e não ser absorvidas. Outras condições de fronteira que não as nulas não podem ser associadas tão facilmente a este tipo de problemas devido à sua não-localidade.

Podemos reformular o problema apresentado para um problema equivalente, definindo o operador de Riesz integral em  $\Omega = (a, b)$  por

$$(-\Delta)_{a,b}^{\alpha/2}u(x) = \frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \int_{\Omega} \frac{u(x)}{|x-t|^{\alpha-1}} dt \right). \quad (3.3)$$

Queremos agora determinar  $u$  que satisfaça

$$u_t(x, t) = -k(-\Delta)^{\alpha/2}u(x, t) + s(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+, \quad (3.4)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.5)$$

com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

Para a resolução numérica desta equação necessitamos de discretizar o operador  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ . O método que vamos utilizar é apresentado em [18], inspirado no trabalho de diferenças fraccionárias desenvolvido em [14].

### 3.1. As diferenças centradas

Começamos por apresentar o conceito de diferenças centradas e a sua ligação com o operador de Riesz já referido no último capítulo. Este capítulo incide fortemente sobre a área de análise complexa, por motivos que irão surgir ao longo do texto. É óbvio que os resultados considerados para qualquer  $z \in \mathbb{C}$  são também válidos para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Começemos portanto por relembrar algumas definições:

**Definição 9.** *Uma função diz-se holomorfa num aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$  se for diferenciável em todos os pontos  $z \in A$ .*

Relembremos que se uma função é holomorfa num aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ , então para qualquer  $z \in A$  o valor da função em  $z$  pode ser descrito por uma série de potências convergente em torno desse ponto.

Seja  $u$  uma função de variável complexa e  $h > 0$  e consideremos o operador de diferenças centradas

$$\Delta u(z) = u\left(z + \frac{h}{2}\right) + u\left(z - \frac{h}{2}\right)$$

que, aplicado  $n$  vezes, dá origem a

$$\Delta^n u(z) = \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{n}{2}-k} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} + k\right)! \left(\frac{n}{2} - k\right)!} u(z - kh).$$

Tendo em conta a extensão natural do factorial para os reais com recurso à função gamma, que já explorámos anteriormente, definimos de seguida a diferença fraccionária centrada.

**Definição 10.** *Seja  $u$  uma função real de variável complexa,  $\alpha > -1$  não inteiro e  $h > 0$ . Chamamos diferença fraccionária centrada de ordem  $\alpha$  a*

$$\Delta_h^\alpha u(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + k + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k + 1\right)} u(z - kh).$$

Averiguemos a convergência desta série. Para simplificar a notação definamos

$$g_k = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + k + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k + 1\right)}. \quad (3.6)$$

Temos que  $g_k = g_{-k}$ . É fácil de ver que  $g_0 > 0$  e que podemos escrever

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+2)\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k)} \\ &= \frac{-(-1)^k\Gamma(\alpha+1)(\frac{\alpha}{2}-k)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+k+1)\Gamma(\frac{\alpha}{2}-k+1)(\frac{\alpha}{2}+k+1)} \\ &= -\frac{\frac{\alpha}{2}-k}{\frac{\alpha}{2}+k+1}g_k. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado.

**Lema 5.** *Seja  $\alpha > -1$  não inteiro. Então*

$$g_0 > 0,$$

$$g_k < 0, \quad k \geq 1.$$

Obtemos agora o resultado final da convergência deste série.

**Teorema 8.** *Seja  $u$  uma função real de variável complexa limitada e  $\alpha > -1$  não inteiro. Então a série dada pela definição 2 é absolutamente convergente.*

*Demonstração.* Temos o seguinte resultado [4]:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{z^k} + O(z^{-N-1}) \right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

válido para  $|\arg(z+a)| < \pi$ . Relembremos ainda a fórmula de reflexão de Euler [3]:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (3.8)$$

Fazendo  $\beta = \frac{\alpha}{2} - k$  temos

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} \\ &= \frac{\sin((\beta-\alpha)\pi)\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)} \\ &\rightarrow \frac{\sin((\beta-\alpha)\pi)\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \beta^{-\alpha-1} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\beta^k} + O(\beta^{-N-1}) \right) \end{aligned}$$

e portanto  $g_k = O(k^{-\alpha-1})$ . □

### 3.1.1. Das diferenças centradas ao operador de Riesz na forma integral

A ideia desta secção é considerar os termos do somatório como os resíduos de uma função holomorfa em todo o plano complexo excepto nos pontos  $x = nh, n \in \mathbb{Z}$ , onde terá pólos simples. Para conseguirmos isto, vejamos onde é que a função gamma não é holomorfa no plano complexo e construamos uma função a partir desse estudo. Começamos por enunciar o Teorema dos Resíduos:

**Teorema 9.** *Seja  $u$  uma função holomorfa dentro e ao longo de um ciclo  $C$  orientado positivamente excepto num número finito de pólos  $a_1, \dots, a_N$  localizados dentro do ciclo  $C$ . Então*

$$\int_C u(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}\{u(z), a_k\}.$$

Consideremos a função  $v$  definida, com  $z \in \mathbb{C}$  fixo, por

$$v(w) = u(z + w) \frac{\Gamma(\frac{w}{h})\Gamma(-\frac{w}{h} + 1)}{\Gamma(\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)\Gamma(-\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)}.$$

Se considerarmos  $u$  holomorfa em  $\mathbb{C}$ , os resíduos desta função surgirão da função gamma. É sabido que a função é holomorfa para  $\text{Re}(z) > 0$ . Vejamos o que acontece quando  $\text{Re}(z) \leq 0$ . Para isso, fixemos  $z_0$  tal que  $\text{Re}(z_0) \leq 0$  e seja  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Re}(z_0 + m) > 0$ . Tendo em conta que  $\Gamma(z_0 + 1) = z_0\Gamma(z_0)$  vem

$$\Gamma(z_0 + m) = (z_0 + m - 1)\Gamma(z_0 + m - 1) = (z_0 + m - 1) \cdots (z_0 + 1)z_0\Gamma(z_0)$$

e temos

$$\Gamma(z_0) = \frac{\Gamma(z_0 + m)}{P_m(z_0)}.$$

Se tivermos  $P_m(z_0) \neq 0$ , para  $z$  próximo de  $z_0$  a expressão

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z + m)}{P_m(z)}$$

define uma função holomorfa. Como o polinómio  $P_m(z)$  tem raízes  $0, -1, \dots, -m$  concluímos que a função gamma é holomorfa para todo o  $z \in \mathbb{C}$  excepto nos inteiros não positivos. Precisamos agora de calcular os resíduos desta função nestes pontos. Para isso veja-se que, pela expressão obtida acima,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -m} (z + m)\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -m} (z + m) \frac{\Gamma(z + m + 1)}{P_m(z)(z + m)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-1) \cdots (-m + 1)(-m)} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \end{aligned}$$

pelo que a função gamma tem um pólo simples para  $z = -m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , com resíduo  $\frac{(-1)^m}{m!}$ .

Visto isto, temos

$$\text{Res}_{w=nh} v(w) = u(z + nh) \frac{(-1)^n}{\Gamma(\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)\Gamma(-\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)}$$

Tendo então em conta o teorema dos resíduos podemos dar uma expressão integral para estas diferenças centradas:

**Definição 11.** *Seja  $u$  holomorfa em todo o plano complexo e  $\alpha > -1$ . Então*

$$\Delta^\alpha u(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i h} \int_C u(z + w) \frac{\Gamma(\frac{w}{h})\Gamma(-\frac{w}{h} + 1)}{\Gamma(\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)\Gamma(-\frac{w}{h} + \frac{\alpha}{2} + 1)} dw,$$

onde  $C$  é uma curva que contenha todos os polos simples da função  $v$  vistos anteriormente. Consideraremos tal curva como duas rectas infinitamente perto do eixo real e que se encontrem nos infinitos, como um ciclo de Hankel estendido. A representação deste ciclo pode ser vista na Figura 3.1.

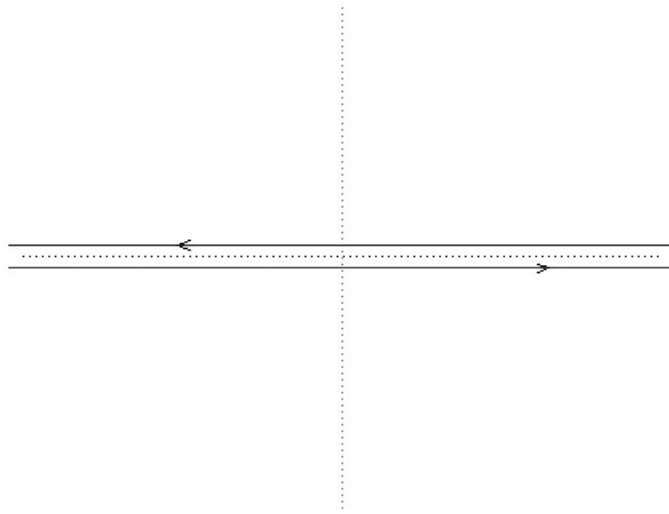


Figura 3.1: Ciclo de Hankel estendido a toda a linha real.

A definição de derivada surge agora da forma habitual, dividindo a expressão para as diferenças fraccionárias por  $h^\alpha$  e fazendo  $h \rightarrow 0$ . Tendo em conta a propriedade (3.1),

$$\frac{\Gamma(\frac{w}{h} + a)}{\Gamma(\frac{w}{h} + b)} \rightarrow \left(\frac{w}{h}\right)^{a-b} \left(1 + hf\left(\frac{w}{h}\right)\right)$$

quando  $h \rightarrow 0$ , sendo  $f$  inteira para valores de  $h$  próximos da origem.

**Definição 12.** *Seja  $u$  uma função de variável complexa analítica perto do eixo real e  $\alpha \in (-1, 0)$ . A representação integral para a derivada fraccionária considerada é*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha u(x)}{h^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \int_C u(x + w) \frac{1}{(w)^{\frac{\alpha}{2} + 1} (-w)^{\frac{\alpha}{2}}} dw,$$

onde  $C$  é a curva de integração referida na definição anterior.

Vamos agora calcular este integral de maneira a obter o potencial de Riesz que nos permite chegar à definição do operador de Riesz, como vimos na secção 2.4. Para isto, vamos dividir a curva  $C$  em 4 curvas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  separadas pelos eixos do plano complexo, correspondendo  $C_1$  ao quadrante inferior esquerdo e percorrendo-se o plano no sentido directo. No que se segue consideramos as rectas da curva infinitamente próximas.

Para a curva  $C_1$  fazemos a parametrização  $w = e^{-i\pi}t$ ,  $t \in (0, \infty)$  (com consequente inversão dos extremos de integração), de onde vem  $(-w) = t$ , pelo que este integral toma a forma

$$-\int_0^\infty u(x-t) \frac{1}{t^{\alpha+1} e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}}} dt$$

Do mesmo modo, para  $C_2$  temos a parametrização  $w = t$ , de onde vem  $(-w) = e^{i\pi}t$ , para  $C_3$  parametrizamos por  $w = t$  e temos  $(-w) = e^{-i\pi}t$  e para  $C_4$  parametrizamos com  $w = e^{i\pi}t$  e surge  $(-w) = t$ . Temos então os integrais respectivos

$$\int_0^\infty u(x+t) \frac{1}{t^{\alpha+1} e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}} dt$$

$$-\int_0^\infty u(x-t) \frac{1}{t^{\alpha+1} e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}}} dt$$

$$\int_0^\infty u(x+t) \frac{1}{t^{\alpha+1} e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}} dt$$

onde o primeiro corresponde à curva  $C_2$ , o segundo à curva  $C_3$  e o terceiro à curva  $C_4$ .

Posto isto e aplicando estes resultados à definição 2.3 vem

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha u(x)}{h^\alpha} &= -\frac{\Gamma(\alpha+1)(e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} - e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}})}{2\pi i} \int_0^\infty u(x-t) \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha+1)(e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} - e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}})}{2\pi i} \int_0^\infty u(x+t) \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \\ &= -\frac{\Gamma(\alpha+1) \sin(\frac{\alpha\pi}{2})}{\pi} \left( \int_0^\infty u(x-t) \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt + \int_0^\infty u(x+t) \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \right) \\ &= -\frac{\Gamma(\alpha+1) \sin(\frac{\alpha\pi}{2})}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt. \end{aligned}$$

Tendo agora em conta que  $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$  e a fórmula de reflexão de



Euler dada por (3.8) podemos reescrever

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha u(x)}{h^\alpha} &= -\frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\frac{\alpha\pi}{2})}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt \\
 &= -\frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\alpha\pi)}{2\pi \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt \\
 &= -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt \\
 &= -\frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \Gamma(\alpha) (-\alpha) \Gamma(-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt \\
 &= \frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \Gamma(-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} dt = P^\alpha u(x).
 \end{aligned}$$

O potencial de Riesz relaciona-se com o operador de Riesz na forma integral pelo Teorema 7 do capítulo anterior.

### 3.1.2. Um resultado importante e uma breve digressão pela transformada de Fourier discreta

Nesta secção vamos mostrar um resultado essencial que nos ajudará a provar a convergência do método numérico. Para isso precisaremos de considerar a transformada de Fourier discreta.

**Definição 13.** *Seja  $u[n]$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , um conjunto discreto que toma valores em  $\mathbb{C}$ . Chamamos Transformada de Fourier Discreta à função periódica*

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-i\omega n}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

A ideia será tratar os coeficientes  $g_k$  definidos em (3.6) como um conjunto discreto. Contudo, precisamos de mais alguma teoria antes de avançar. Começamos pela propriedade multiplicativa da convolução, aplicada agora à transformada discreta.

**Lema 6.** *Sejam  $u[n], v[n]$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , dois conjuntos discretos que tomam valores em  $\mathbb{C}$ . Chamamos a*

$$(u \star v)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] v[k-n]$$

*convolução discreta de  $u$  com  $v$ . É ainda válida a seguinte relação:*

$$\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}(u) \mathcal{F}(v).$$

*Demonstração.* Temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(u \star v)(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u \star v)[n]e^{-i\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[m]v[n-m] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega m} u[m]e^{-i\omega(n-m)} v[n-m] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega m} u[m] \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(n-m)} v[n-m] \right) \\
 &= \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega m} u[m] \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega k} v[k] \right) \\
 &= \mathcal{F}(u)(\omega)\mathcal{F}(v)(\omega)
 \end{aligned}$$

□

Vamos introduzir o conceito de autocorrelação.

**Definição 14.** *Seja  $u[n]$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , um conjunto discreto que toma valores em  $\mathbb{C}$ .*

A

$$\mathcal{R}_u(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]u[n+k]$$

chamamos autocorrelação de  $u$  com atraso  $k$ .

Existe uma relação extremamente interessante entre estes conceitos recentemente introduzidos, que enunciamos de seguida:

**Lema 7.** *Seja  $u[n]$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , um conjunto discreto que toma valores em  $\mathbb{C}$ . Então*

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_u)(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega)\mathcal{F}(u)(-\omega)$$

*Demonstração.* Notemos que fazendo  $v[n] := u[-n]$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 (v \star u)[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v[n]u[k-n] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[-n]u[k-n] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]u[k+n] = \mathcal{R}_u(k)
 \end{aligned}$$

pelo que pelo Lema anterior vem imediatamente o resultado, vendo somente que

$$\mathcal{F}(v)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[-n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]e^{i\omega n} = \mathcal{F}(u)(-\omega).$$

□

Estamos agora em condições de provar o resultado de que falámos no início desta secção e cuja importância voltamos a realçar: é o passo fulcral na prova da convergência numérica do nosso método para a derivada espacial considerada na equação do calor fraccionária.

**Teorema 10.** *Seja  $\alpha > -1$  não inteiro. Então para todo o  $\omega \in \mathbb{R}$ ,*

$$|2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)|^\alpha = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)} e^{-ik\omega}.$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $h[n] = (-1)^n \binom{\alpha/2}{n}$ ,  $n \geq 0$ . A transformada de Fourier discreta obtém-se imediatamente:

$$\mathcal{F}(h)(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha/2}{n} e^{-i\omega n} = (1 - e^{-i\omega})^{\alpha/2}$$

pela teoria do desenvolvimento em série de potências de  $(1 - z)^\alpha$ .

Calculemos agora  $R_h$ :

$$\begin{aligned} R_h(k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} h[n]h[n+k] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha/2}{n} (-1)^{n+k} \binom{\alpha/2}{n+k} \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha/2}{n} \binom{\alpha/2}{n+k} \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\binom{\alpha/2}{n} = \frac{(-1)^n (-\alpha/2)_n}{n!}$$

onde  $(-\alpha/2)_n = (-\alpha/2)(-\alpha/2+1)\dots(-\alpha/2+n-1)$  é o símbolo de Pochhammer [6] vem

$$\begin{aligned} R_h(k) &= (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha/2}{n} \binom{\alpha/2}{n+k} \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-\alpha/2)_n}{n!} \frac{(-1)^{n+k} (-\alpha/2)_{n+k}}{(n+k)!} \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-\alpha/2)_n (-\alpha/2)_k (-\alpha/2+k)_n}{n! (k+1)_n k!} \\ &= (-1)^k \binom{\alpha/2}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha/2)_n (-\alpha/2+k)_n}{(k+1)_n n!} \\ &= (-1)^k \binom{\alpha/2}{k} F(-\alpha/2, -\alpha/2+k; k+1, 1) \end{aligned}$$

onde  $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$  é a chamada função hipergeométrica de Gauss, convergente para  $|z| \leq 1$  se  $c - a - b > 0$  e que possui a propriedade [4])

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_h(k) &= (-1)^k \binom{\alpha/2}{k} F(-\alpha/2, -\alpha/2 + k; k + 1, 1) \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha/2 + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha/2 - k + 1)} \frac{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1 + \alpha/2)\Gamma(1 + \alpha/2)} \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha/2 + k + 1)\Gamma(\alpha/2 - k + 1)}. \end{aligned}$$

Visto isto vem

$$\mathcal{F}(R_h)(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)} e^{-ik\omega}.$$

Mas pelo Lema anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R_h)(\omega) &= \mathcal{F}(h)(\omega)\mathcal{F}(h)(-\omega) \\ &= (1 - e^{-i\omega})^{\alpha/2} (1 - e^{i\omega})^{\alpha/2} \\ &= |2 \sin(\frac{\omega}{2})|^\alpha. \end{aligned}$$

□

**Observação 3.** Notamos que tendo em conta o Lema 4 e fazendo  $\omega = 0$  no Teorema 10 vem que  $g_0 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |g_k|$

### 3.2. O método numérico

Apresentamos agora o método numérico que tem como base estas diferenças centradas e estudamos a sua convergência.

Seja  $\Omega = (a, b)$ . Fixemos  $N \geq 2$  e seja  $h = \frac{1}{N}$  o passo espacial. A malha será constituída pelos pontos  $x_i = a + nh, n = 1, \dots, N - 1$ . A aproximação ao operador diferencial espacial será

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-N+n}^n g_k u_{n-k},$$

Discretizamos no tempo com Crank-Nicolson, fixando um tecto  $T > 0$ , definindo um número de passos  $M \geq 1$  e considerando o passo temporal  $\tau = \frac{T}{M}$ , Com  $t_m = \tau m$ ,

$u_n^m = u(x_n, t_m)$  e  $s_n^m = s(x_n, t_m)$ , para  $m = 0, \dots, M$  e  $n = 1, \dots, N-1$ , temos o método numérico

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} = -\frac{1}{2h^\alpha} k \left( \sum_{k=-N+n}^n g_k u_{n-k}^{m+1} + \sum_{k=-N+n}^n g_k u_{n-k}^m \right) + s_n^{m+\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Sejam  $U^m = (u_1^m, \dots, u_{N-1}^m)^T$ ,  $S^{m+\frac{1}{2}} = (s_1^{m+\frac{1}{2}}, \dots, s_{N-1}^{m+\frac{1}{2}})^T$  e

$$R = \frac{\tau k}{2h^\alpha} \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & g_{-2} & & g_{-N+1} \\ g_1 & g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-N+2} \\ g_2 & g_1 & g_0 & & g_{-N+3} \\ & \vdots & & \ddots & \\ g_{N-1} & g_{N-2} & g_{N-3} & & g_0 \end{bmatrix}.$$

O método na forma matricial é dado por

$$(I + R)U^{m+1} = (I - R)U^m + \tau S^{m+\frac{1}{2}}.$$

### 3.2.1. Convergência do método

Nesta secção vamos discutir a convergência do método numérico.

Antes de provarmos a estabilidade do método, é conveniente lembrar o Teorema de Gershgorin.

**Teorema 11.** *Seja  $A$  uma qualquer matriz complexa  $n \times n$ . Seja  $\lambda$  um valor próprio da matriz  $A$ , com entradas  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Então*

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n |a_{rk}|.$$

Comecemos então a avaliar o método em si:

**Teorema 12.** *O método (3.9) é incondicionalmente estável.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior e pela observação 3 temos que um valor próprio  $\lambda$  da matriz  $R$  é tal que

$$\left| \lambda - \frac{\tau k}{2h^\alpha} g_0 \right| \leq \frac{\tau k}{2h^\alpha} \sum_{\substack{k=-N+n \\ k \neq 0}}^n |g_k| < \frac{\tau k}{2h^\alpha} g_0$$

para qualquer  $n = 1, \dots, N-1$ . Concluimos assim que os valores próprios da matriz  $R$  são todos positivos. Assim, os valores próprios  $\xi$  da matriz de iteração  $(I + R)^{-1}(I - R)$  são tais que

$$|\xi| \leq \frac{|1 - \lambda|}{|1 + \lambda|} < 1.$$

□

Provamos em seguida o facto de que esta aproximação ao operador de Riesz é efectivamente válida.

**Teorema 13.** *Seja  $u \in AC^4(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  e  $\alpha \in (1, 2)$ . Seja ainda*

$$\Delta_h^\alpha u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1) \Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)} u(x - kh).$$

Então

$$\frac{\Delta_h^\alpha u(x)}{h^\alpha} = (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) + O(h^2),$$

onde  $(-\Delta)^*$  é o operador de Riesz.

*Demonstração.* Começamos por notar que tendo em conta o Lema 1 do capítulo anterior e o Teorema 10, se aplicarmos a transformada de Fourier a  $\Delta_h^\alpha u$  temos

$$\mathfrak{F}(\Delta_h^\alpha u)(\xi) = |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Dividindo por  $h^\alpha$  e somando e subtraindo  $|\xi|^\alpha \hat{u}(\xi)$  obtemos

$$\frac{\mathfrak{F}(\Delta_h^\alpha u)(\xi)}{h^\alpha} = |\xi|^\alpha \hat{u}(\xi) + |\xi|^\alpha (|\xi h|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha - 1) \hat{u}(\xi). \quad (3.10)$$

Notemos o factor  $|\xi h|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha$  e façamos  $y = \xi h$  para vermos que pela fórmula de Taylor para a função seno e atendendo à expansão em série da função  $(1 - z)^\alpha$  temos

$$\begin{aligned} |y|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{y}{2})|^\alpha &= |\frac{2}{y}|^\alpha |\sin(\frac{y}{2})|^\alpha = |\frac{2}{y}|^\alpha \left| \frac{y}{2} - \left(\frac{y}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{y}{2}\right)^5 \frac{1}{5!} - \dots \right|^\alpha \\ &= \left| 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} + \left(\frac{y}{2}\right)^4 \frac{1}{5!} - \dots \right|^\alpha \leq \left( 1 + \left| \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} + \dots \right| \right)^\alpha \\ &\leq 1 + \alpha \left| \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} + \dots \right| + \binom{\alpha}{2} \left| \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} + \dots \right|^2 \\ &\leq 1 + C_1 x^2, \end{aligned}$$

com  $C_1 = \frac{\alpha}{12}$ . Aplicando agora a inversa da transformada de Fourier a (2) surge

$$\frac{\Delta_h^\alpha u(x)}{h^\alpha} = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) + v(x, h),$$

com  $v(x, h) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\alpha (|\xi h|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha - 1) \hat{u}(\xi))$ . Mas tendo em conta o Lema 3 do capítulo anterior

$$\begin{aligned} |v(x, h)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} |\xi|^\alpha (|\xi h|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha - 1) \hat{u}(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha |\xi h|^{-\alpha} |2 \sin(\frac{\xi h}{2})|^\alpha - 1 \|\hat{u}(\xi)\| d\xi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha |C_1 \xi h|^2 C_0 (1 + |\xi|)^{-5} d\xi \\ &\leq \frac{C_1^2 C_0 h^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{\alpha-3} d\xi \\ &= Ch^2, \end{aligned}$$

com  $C = \frac{2C_1^2 k C_0}{(2-\alpha)\sqrt{2\pi}}$ . □

Apresentamos por último a prova da convergência do método.

**Teorema 14.** *Seja  $\tilde{u}(x, t) \in AC^4(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R})$  a solução da equação do calor fraccionária num domínio fechado com condições de fronteira homogêneas e  $u$  a solução obtida numericamente a partir do método descrito por (3.9). Então  $u$  converge para  $\tilde{u}$  quando  $h$  e  $\tau$  tendem para zero.*

*Demonstração.* Tendo em conta o teorema de Taylor obtemos

$$\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{\tau} = \tilde{u}_t(x_n, m + \frac{1}{2}) + O(\tau^2).$$

Pelo teorema 6 segue que

$$\frac{1}{2h^\alpha} \left( \sum_{k=-N+n}^n g_k \tilde{u}_{n-k}^{m+1} + \sum_{-N+n}^n g_k \tilde{u}_{n-k}^m \right) = (-\Delta)^{\alpha/2} \tilde{u}(x_n, m + \frac{1}{2}) + O(h^2).$$

Seja dado o erro  $e_n^m$  em cada ponto da grelha  $(x_n, t_m)$  por  $e_n^m = u_n^m - \tilde{u}_n^m$ . Substituindo  $u_n^m$  em (3.4) e tendo em conta as aproximações anteriores temos

$$e_n^{m+1} + \frac{k\tau}{2h^\alpha} \sum_{k=-N+n}^n g_k e_{n-k}^{m+1} = e_n^m - \frac{k\tau}{2h^\alpha} \sum_{k=-N+n}^n g_k e_{n-k}^m + \tau O(\tau^2 + h^2).$$

Matricialmente, temos

$$(I + R)E^{m+1} = (I - R)E^m + \tau O(\tau^2 + h^2), \quad E^0 = 0,$$

onde  $m = 0, 1, \dots, M-1$ . Ora fazendo  $S = (I + R)^{-1}(I - R)$  e  $U = \tau O(\tau^2 + h^2)(I + R)^{-1}$  temos

$$E^{m+1} = (S^m + S^{m-1} + \dots + I)U.$$

Tendo em conta o teorema 5, sabemos que  $\|S^*\|_2 < 1$ , onde tomámos a norma espectral. Assim

$$\|E^{m+1}\|_2 \leq M\|U\|_2,$$

Por outro lado, como vimos no teorema 5

$$\|U\|_2 < \tau O(\tau^2 + h^2) \left(1 + \frac{\tau k}{h^\alpha} g_0\right) < C_1 O(\tau^2 + h^2).$$

Temos então  $\|E^{m+1}\|_2 \leq C_2 O(\tau^2 + h^2) \rightarrow 0$ . □

### 3.2.2. Testes numéricos

Para testar a validade do método que descrevemos, resolvamos numericamente o problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) + s(x, t), & x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, t) = u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}/(0, 1), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = x^2(1-x)^2, & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.11)$$

onde

$$s(x, t) = -e^{-t} x^2(1-x)^2 + \frac{e^{-t}}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \left( \frac{x^{2-\alpha} + (1-x)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{6(x^{3-\alpha} + (1-x)^{3-\alpha})}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{12(x^{4-\alpha} + (1-x)^{4-\alpha})}{\Gamma(5-\alpha)} \right).$$

que tem a solução exacta

$$u(x, t) = e^{-t} x^2(1-x)^2. \quad (3.12)$$

Nas Tabelas 3.1 a 3.4 apresentamos o erro máximo em módulo para diferentes valores de  $\alpha$ , fixando ora o passo temporal ora o passo espacial. As ordens de convergência foram calculadas para o passo espacial fazendo  $\sigma_h = \frac{\log(\frac{\epsilon_h}{\epsilon_{h/2}})}{\log(2)}$  e de modo análogo para o passo temporal obtivemos  $\sigma_\tau$ .

$\alpha$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$\sigma_h$
1.2	$4.7588 \times 10^{-6}$	$1.3740 \times 10^{-6}$	1.7922
1.4	$5.4728 \times 10^{-6}$	$1.3849 \times 10^{-6}$	1.9834
1.6	$8.0114 \times 10^{-6}$	$1.8910 \times 10^{-6}$	2.0829
1.8	$1.2222 \times 10^{-5}$	$2.9395 \times 10^{-6}$	2.0558

Tabela 3.1: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para diferentes valores de  $\alpha$  quando  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$  e para  $\tau = 0.001$ .



$\alpha$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.005$	$\sigma_\tau$
1.2	$3.8222 \times 10^{-7}$	$6.9998 \times 10^{-8}$	2.4490
1.4	$4.1240 \times 10^{-7}$	$8.1877 \times 10^{-8}$	2.3325
1.6	$4.3492 \times 10^{-7}$	$8.5014 \times 10^{-8}$	2.3550
1.8	$4.3722 \times 10^{-7}$	$6.2281 \times 10^{-8}$	2.8115

Tabela 3.2: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para diferentes valores de  $\alpha$  quando  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$  e para  $h = 0.001$ .

$\alpha$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$\sigma_h$
1.2	$4.7015 \times 10^{-6}$	$1.3242 \times 10^{-6}$	1.8280
1.4	$5.0189 \times 10^{-6}$	$1.4328 \times 10^{-6}$	1.8085
1.6	$7.5140 \times 10^{-6}$	$1.5075 \times 10^{-6}$	2.3174
1.8	$1.1683 \times 10^{-5}$	$2.3997 \times 10^{-6}$	2.2835

Tabela 3.3: Máximo dos módulos dos erros para diferentes valores de  $\alpha$  quando  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 10)$  e para  $\tau = 0.01$ .

$\alpha$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.05$	$\sigma_\tau$
1.2	$4.1763 \times 10^{-5}$	$1.0384 \times 10^{-5}$	2.0079
1.4	$4.6128 \times 10^{-5}$	$1.1441 \times 10^{-5}$	2.0114
1.6	$5.0516 \times 10^{-5}$	$1.2526 \times 10^{-5}$	2.0118
1.8	$5.5700 \times 10^{-5}$	$1.3581 \times 10^{-5}$	2.0361

Tabela 3.4: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para diferentes valores de  $\alpha$  quando  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 10)$  e para  $h = 0.01$ .



## Capítulo 4

# Técnica de transmissão de matriz

Neste capítulo vamos resolver numericamente a equação do calor fraccionária, onde o operador de difusão é representado pelo operador de Riesz espectral.

Começamos por descrever este operador e algumas das suas propriedades. Apresentamos de seguida o método numérico conhecido como a técnica de matriz de transmissão, associado ao operador de Riesz na espectral. No final, discutimos a relação entre as soluções para a equação do calor fraccionária quando o operador de Riesz é dado na forma integral e na forma espectral.

### 4.1. O operador de Riesz como um operador espectral

Consideremos o problema de valores próprios para o operador de Laplace em  $(a, b)$ :

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$$

É sabido que existem uma infinidade de valores próprios  $\lambda_k > 0$  e correspondentes  $v_k$  que satisfazem esta equação. Mais interessante ainda, o conjunto  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma base ortonormada de  $L^2(a, b)$ . Assim, para qualquer  $f \in L^2(a, b)$ , temos

$$f = \sum_{\mathbb{N}} (f, v_k) v_k$$

e

$$-\Delta f = \sum_{\mathbb{N}} \lambda_k (f, v_k) v_k$$

Visto isto, muitos autores consideram que o operador  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  pode ser definido da forma que se segue.

Suponhamos que o operador de Laplace  $(-\Delta)$  tem um conjunto de vectores próprios  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que formam uma base ortonormada em  $L^2$  para uma região limitada  $\Omega \subset \mathbb{R}$  tais que  $v_k = 0$  em  $\partial\Omega$  e um conjunto de valores próprios correspondentes  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Seja

$$U_\alpha = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, c_n = (u, v_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 |\lambda_n|^{\frac{\alpha}{2}} < \infty \right\}$$

(onde  $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ ). Então para toda a função  $u \in U_{\alpha}$ ,  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  é definido por

$$(-\Delta)_S^{\alpha/2} u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}} v_n. \quad (4.1)$$

Contudo, a relação entre esta definição e as apresentadas nos capítulos anteriores não é clara na literatura onde é introduzida e muitas vezes parecem ser tratadas como a mesma. Em alguns artigos iniciais são dadas como equivalentes [11] [12]. Posteriormente o discurso alterou-se para "apesar de matematicamente não equivalente, pode ser usada para obter aproximações numéricas úteis" [16]. Instaurou-se a confusão na literatura, havendo por um lado mistura entre as duas definições [30] [28] [25] [29] [19], e por outro dando-se a esta nova definição uma interpretação física que não lhe está necessariamente inerente [23] [17].

Servadei e Valdinoci [26] comparam este operador com o da definição para o operador de Riesz dada por

$$((-\Delta)_R^{\alpha/2} u)(x) = c(\alpha) p v \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\alpha+1}} dy$$

(onde  $c(\alpha)$  é uma constante normalizante) e chegaram a um resultado interessante que vale a pena enunciar:

**Teorema 15.** *Os operadores  $(-\Delta)_S^{\alpha/2}$  e  $(-\Delta)_R^{\alpha/2}$  são diferentes, na medida em que:*

- *O primeiro valor próprio de  $(-\Delta)_R^{\alpha/2}$  é estritamente inferior ao primeiro valor próprio de  $(-\Delta)_S^{\alpha/2}$ .*
- *As funções próprias de  $(-\Delta)_R^{\alpha/2}$  são no máximo contínuas à Hölder até à fronteira, enquanto que as funções próprias de  $(-\Delta)_S^{\alpha/2}$  são tão suaves quanto a fronteira o permitir.*

Não vamos trabalhar com o operador dado por  $(-\Delta)_R^*$ , mas para situar o leitor referimos apenas que este é o potencial de Riesz visto no capítulo 2 normalizado [4]. Este operador partilha a propriedade que provámos no Teorema 6 para o operador de Riesz na forma integral [20].

## 4.2. Condições de fronteira e solução analítica da equação fraccionária do calor

A definição do operador de Riesz neste sentido spectral tem uma característica importante que a distingue das apresentadas nos capítulos anteriores. Enquanto que

## 4.2 Condições de fronteira e solução analítica da equação fraccionária do calor

o operador de Riesz definido pelo tratamento de Fourier, na forma integral ou como potencial de Riesz, exige uma função definida para todos os valores de  $x \in \mathbb{R}$ , este está definido num intervalo limitado, o que permite definir condições de fronteira de Dirichlet e até outras. Como o nosso objectivo é comparar esta definição com as dadas anteriormente, mantemos as condições de Dirichlet homogéneas.

A obtenção de solução analítica é relativamente simples. Recorremos ao método de separação de variáveis. Queremos resolver o problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -k(-\Delta)^{\alpha/2}u(x, t) + s(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos a equação diferencial homogénea. e façamos  $u(x, t) = N(t)M(x)$ . Substituindo vem

$$N'(t)M(x) = -kN(t)(-\Delta)^{\alpha/2}M(x).$$

Queremos resolver então os problemas

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}M(x) = \lambda M(x), & x \in \Omega \\ M(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad N'(t) = -k\lambda N(t).$$

Atendendo ao exposto anteriormente, as soluções do problema de valores próprios são as funções  $v_n, n \in \mathbb{N}$ , que satisfazem o problema de valores próprios associado ao operador de Laplace e os valores próprios são os valores próprios associados a este problema agora elevados a  $\frac{\alpha}{2}$ . Atendendo às condições de fronteira temos:

$$\begin{cases} v_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{|\Omega|}\right) \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{|\Omega|}\right)^\alpha \end{cases}$$

Substituindo na separação de variáveis surge

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n e^{-kt\left(\frac{n\pi}{|\Omega|}\right)^\alpha} \sin\left(\frac{n\pi x}{|\Omega|}\right)$$

obtendo-se os coeficientes  $w_n$  fazendo

$$w_n = \frac{2}{|\Omega|} \int_{\omega} u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{|\Omega|}\right) dx.$$

Para obter a solução exacta para a equação com termo fonte aplicamos o princípio

de Duhamel. Fixamos  $\tau > 0$  e resolvemos

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -k(-\Delta)^{\alpha/2}u(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (\tau, +\infty) \\ u(x, \tau) = s(x, \tau), & x \in \Omega \\ u(x, \tau) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Atendendo ao exposto anteriormente, a solução deste problema é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n e^{-k(t-\tau)(\frac{n\pi}{|\Omega|})^\alpha} \sin(\frac{n\pi x}{|\Omega|}),$$

com

$$y_n = \frac{2}{|\Omega|} \int_{\omega} s(x, \tau) \sin(\frac{n\pi x}{|\Omega|}) dx.$$

Assim, a solução do problema original será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n e^{-kt(\frac{n\pi}{|\Omega|})^\alpha} \sin(\frac{n\pi x}{|\Omega|}) + \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} y_n e^{-k(t-\tau)(\frac{n\pi}{|\Omega|})^\alpha} \sin(\frac{n\pi x}{|\Omega|}) d\tau.$$

### 4.3. Método numérico

Apresentamos agora o método numérico para resolver a equação fraccionária do calor quando o operador de Riesz é definido na forma espectral. A técnica que vamos apresentar toma o nome de técnica de transmissão de matriz (TTM).

Queremos resolver a equação diferencial

$$u_t(x, t) = -k(-\Delta)^{\alpha/2}u(x, t) + s(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_0^+,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (a, b)$$

e sujeito a condições de fronteira de Dirichlet homogéneas.

Seja  $N \geq 2$  e seja  $h = \frac{1}{N}$  o passo espacial. A malha será constituída pelos pontos  $x_i = a + nh, n = 1, \dots, N-1$ . Consideremos a matriz de discretização espacial associada ao operador de Laplace clássico

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Relembramos que por  $A$  ser real simétrica admite a fatorização  $A = PDP^{-1}$ , com  $P$  ortogonal e  $D$  diagonal. A técnica de transmissão de matriz consiste em aproximar o operador de Riesz pela matriz  $A^{\alpha/2} = PD^{\alpha/2}P^{-1}$ .

Discretizamos no tempo com Crank-Nicolson. Fixando um tecto  $T > 0$  e definindo um número de passos  $M \geq 1$  obtemos o passo temporal  $\tau = \frac{T}{M}$ . Com  $t_m = \tau m$ ,  $u_n^m = u(x_n, t_m)$  e  $s_n^m = s(x_n, t_m)$ , para  $m = 0, \dots, M$  e  $n = 1, \dots, N - 1$ , definamos

$$U^m = \begin{bmatrix} u(x_1, m\tau) \\ \vdots \\ u(x_n, m\tau) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}, m\tau) \end{bmatrix}, \quad S^{m+1/2} = \begin{bmatrix} s(x_1, (m + \frac{1}{2})\tau) \\ \vdots \\ s(x_n, (m + \frac{1}{2})\tau) \\ \vdots \\ s(x_{N-1}, (m + \frac{1}{2})\tau) \end{bmatrix},$$

e obtemos o método na forma matricial

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\tau} = -k \left( \frac{1}{2} A^{\alpha/2} U^{m+1} + \frac{1}{2} A^{\alpha/2} U^m \right) + S^{m+1/2}. \quad (4.2)$$

Podemos provar a estabilidade deste método numérico, resultado que enunciamos de seguida.

**Teorema 16.** *O método numérico (4.1) é incondicionalmente estável.*

*Demonstração.* Para  $m = 0, \dots, M - 1$ , cada iteração do método é dada por

$$U^{m+1} = \left( I + \frac{k\tau}{2} A^{\alpha/2} \right)^{-1} \left( \left( I - \frac{k\tau}{2} A^{\alpha/2} \right) U^m + \tau S^{m+1/2} \right).$$

Como a matriz  $A$  é real simétrica, todos os seus valores próprios são reais positivos. Concluimos que os valores próprios da matriz  $A^{\alpha/2}$  também são reais positivos. Seja  $\lambda$  um qualquer valor próprio desta matriz. Para a matriz de iteração  $\left( I + \frac{k\tau}{2} A^{\alpha/2} \right)^{-1} \left( I - \frac{k\tau}{2} A^{\alpha/2} \right)$  o valor próprio associado satisfaz

$$\left| \frac{1 - \frac{k\tau}{2} \lambda}{1 + \frac{k\tau}{2} \lambda} \right| < 1.$$

Por outro lado, para a matriz de iteração  $\left( I + \frac{k\tau}{2} A^{\alpha/2} \right)^{-1}$  também temos que o valor próprio associado satisfaz

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{k\tau}{2} \lambda} \right| < 1.$$

□

Tanto quanto sabemos, a convergência da técnica de transmissão de matriz para o operador de Riesz na forma espectral ainda não foi provada. Houve uma tentativa

de prova [15] que acabou por não ser publicada. No entanto, resultados numéricos indicam uma ordem de convergência igual à ordem de convergência da discretização de base.

Consideremos em primeiro lugar um problema sem termo fonte.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -\frac{1}{2}(-\Delta u)^{\alpha/2}u(x, t), & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x), & x \in (0, \pi) \end{cases} \quad (4.3)$$

A solução exacta é obtida pelo método descrito na secção anterior e é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1} - 4}{n^3} \sin(nx)e^{-\frac{n^\alpha t}{2}}, \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^+. \quad (4.4)$$

Nas Tabelas 4.1 e 4.2 apresentamos o erro máximo em módulo para diferentes valores de  $\alpha$  da resolução numérica do problema (4.2). As ordens de convergência foram calculadas para o passo espacial fazendo  $\sigma_h = \frac{\log(\frac{e_h}{e_{h/2}})}{\log(2)}$  e de modo análogo para o passo temporal obtém-se  $\sigma_\tau$ .

$\alpha$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$\sigma_h$
1.3	$1.5252 \times 10^{-5}$	$2.0086e \times 10^{-6}$	2.9247
1.5	$1.6358 \times 10^{-5}$	$2.1236e \times 10^{-6}$	2.9454
1.7	$1.7110 \times 10^{-5}$	$2.1146 \times 10^{-6}$	3.0164

Tabela 4.1: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para o problema (4.2) em  $t = 1$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\tau = 0.005$ .

$\alpha$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.005$	$\sigma_\tau$
1.3	$6.1422 \times 10^{-6}$	$2.0086 \times 10^{-6}$	1.6126
1.5	$7.5835 \times 10^{-6}$	$2.1236 \times 10^{-6}$	1.8364
1.7	$8.9311 \times 10^{-6}$	$2.1146 \times 10^{-6}$	2.0785

Tabela 4.2: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para o problema (4.2) em  $t = 1$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $h = 0.005$ .

Consideremos agora um problema com termo fonte.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -(-\Delta u)^{\alpha/2}u(x, t) + x^2, & x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = x^2(1 - x)^2, & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (4.5)$$



A solução exacta é dada, para  $(x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ , por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\pi^2 n^2 - 12)((-1)^n - 1)}{n^5 \pi^5} \sin(n\pi x) e^{-t(n\pi)^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - 4\pi^2 n^2)(-1)^n}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x) \frac{1 - e^{-t(n\pi)^\alpha}}{(n\pi)^\alpha}. \quad (4.6)$$

À semelhança do que fizemos para o problema (4.2), apresentamos nas Tabelas 4.3 e 4.4 o erro máximo em módulo e taxas de convergência para diferentes valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$\sigma_h$
1.3	$1.1840 \times 10^{-4}$	$4.7321 \times 10^{-5}$	1.3231
1.5	$4.2907 \times 10^{-5}$	$1.4868 \times 10^{-5}$	1.5290
1.7	$1.3522 \times 10^{-5}$	$3.9746 \times 10^{-6}$	1.7664

Tabela 4.3: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para o problema (4.3) em  $t = 1$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\tau = 0.001$ .

$\alpha$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.005$	$\sigma_h$
1.3	$2.9484 \times 10^{-5}$	$7.6456 \times 10^{-6}$	1.9472
1.5	$2.6363 \times 10^{-5}$	$6.9620 \times 10^{-6}$	1.9209
1.7	$3.2245 \times 10^{-5}$	$7.4018 \times 10^{-6}$	2.1231

Tabela 4.4: Máximo dos módulos dos erros e ordens de convergência observadas para o problema (4.3) em  $t = 1$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $h = 0.001$ .

## 4.4. Operador de Riesz integral versus operador espectral

Nesta secção vamos verificar se os problemas de difusão que envolvem o operador de Riesz integral e o operador de Riesz espectral partilham a mesma solução usando os métodos numéricos apresentados nos capítulos anteriores. Relembramos que as diferenças centradas aproximam a equação que envolve o operador de Riesz na forma integral e a técnica de transmissão de matriz a equação que envolve o operador de Riesz espectral.

Especificamente consideramos os dois problemas que consistem nas equações diferenciais

$$u_t(x, t) + (-\Delta)_{a,b}^{\alpha/2} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (4.7)$$

$$u_t(x, t) + (-\Delta)_S^{\alpha/2} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (4.8)$$

ambos com condição inicial  $u(x, 0) = \delta(x)$ ,  $x \in \Omega$  e condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, para um  $\Omega = [-L, L]$ ,  $L > 0$ , e onde  $(-\Delta)_{a,b}^{\alpha/2}$  é o operador diferencial definido por (3.3) e  $(-\Delta)_S^{\alpha/2}$  é definido por (4.1). A função de Dirac  $\delta$  é uma função que toma o valor 0 para todo o  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$  e que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1.$$

Temos de ter algum cuidado a implementar numericamente uma aproximação a esta função. Consideremos um intervalo  $[-L, L]$  e definamos a função

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{x^2}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}.$$

Dada uma malha com  $N > 0$  pontos usamos  $\delta_\epsilon$  com  $\epsilon \ll 1$  como aproximação à função  $\delta$  desde que  $N\epsilon \geq 2L$ .

Nas Figuras 4.1 a 4.3 estão representadas as soluções obtidas para ambos os problemas, resolvidos numericamente com os métodos desenvolvidos nos capítulos 3 e 4, com  $\epsilon = 50^{-1}$  e  $N = 1500$ .

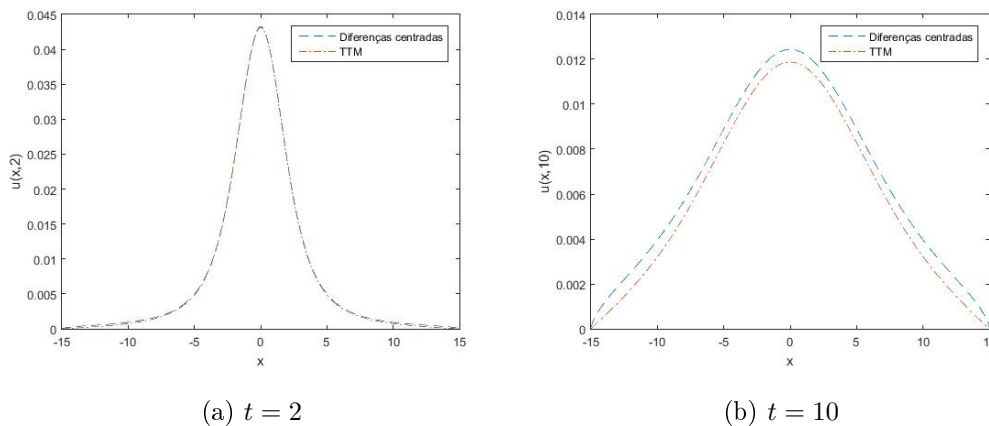


Figura 4.1: Solução obtida para o problema (4.7) pelo método numérico segundo diferenças centradas e para o problema (4.8) pela TTM para  $\alpha = 1.3$  em  $t = 2$  e  $t = 10$ .

Os resultados numéricos levam-nos a crer que os problemas têm soluções diferentes. Para reforçar esta observação vamos determinar a solução numérica do problema

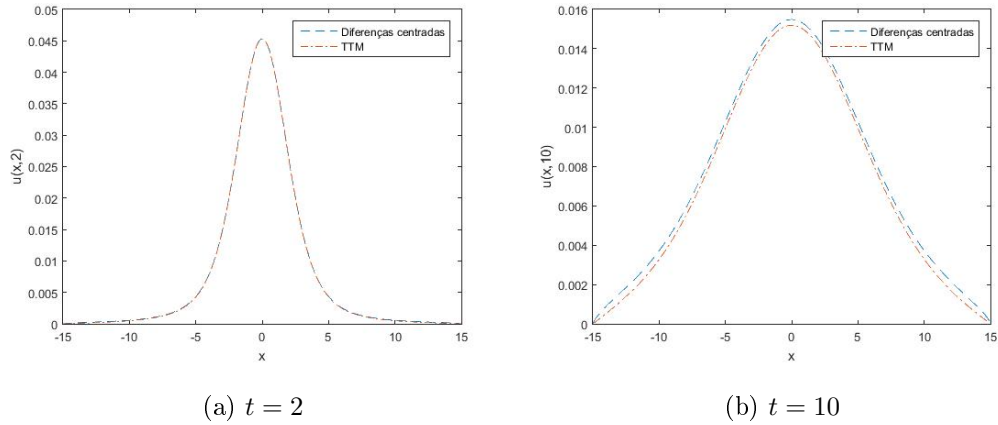


Figura 4.2: Solução obtida para o problema (4.7) pelo método numérico segundo diferenças centradas e para o problema (4.8) pela TTM para  $\alpha = 1.5$  em  $t = 2$  e  $t = 10$ .

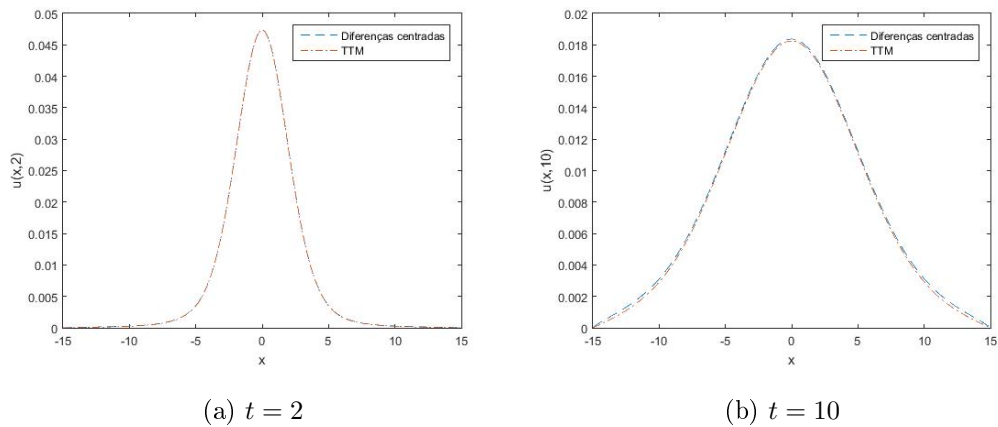
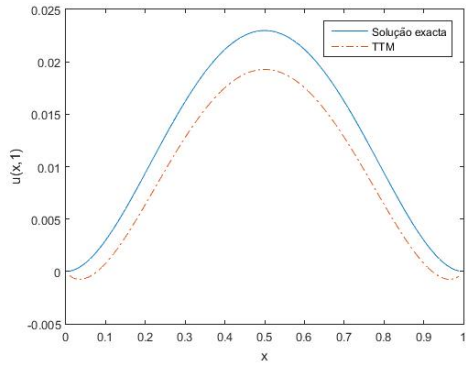


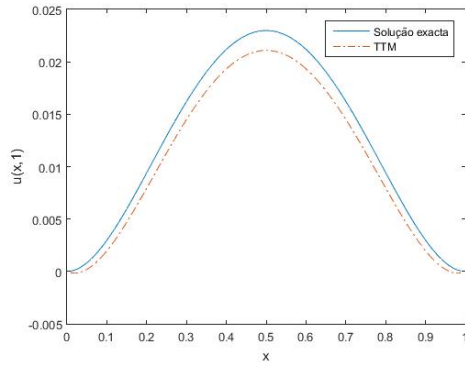
Figura 4.3: Solução obtida para o problema (4.7) pelo método numérico segundo diferenças centradas e para o problema (4.8) pela TTM para  $\alpha = 1.7$  em  $t = 2$  e  $t = 10$ .

(3.11) usando a TTM. Notemos que temos a solução exacta deste problema se o operador de difusão for o operador de Riesz na forma integral e é dada por (3.12). Os resultados obtidos encontram-se na Figura 4.4, onde notamos que a solução numérica obtida pela TTM não é a mesma que a solução exacta do problema, considerado o operador diferencial como o operador de Riesz integral.

Por último vamos comparar a solução numérica para o problema (4.5) dada pelo método numérico segundo diferenças centradas com a solução exacta dada por (4.6), quando o operador de difusão é o operador de Riesz na forma espectral. Os resultados obtidos encontram-se na Figura 4.5. De novo, notamos que a solução numérica



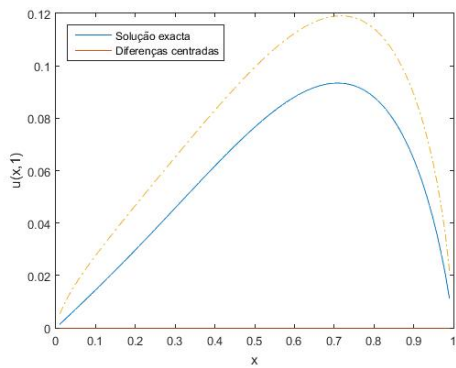
(a)  $\alpha = 1.3$



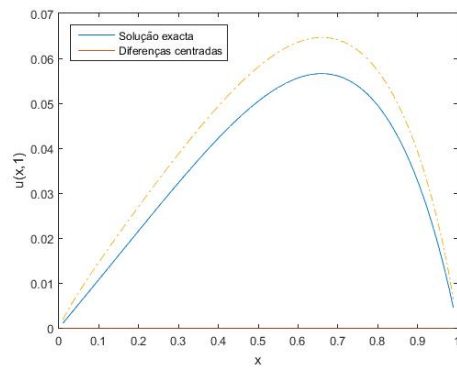
(b)  $\alpha = 1.7$

Figura 4.4: Solução exacta para o problema (3.6) dada pelo operador de Riesz na forma integral e solução numérica para o problema (3.6) usando a TTM para  $\alpha = 1.3$  e  $\alpha = 1.7$  quando  $t = 1$ .

obtida pelo método das diferenças centradas é diferente da solução exacta, quando o operador diferencial fraccionário é o operador de Riesz na forma espectral.



(a)  $\alpha = 1.3$



(b)  $\alpha = 1.7$

Figura 4.5: Solução exacta para o problema (4.3) dada pelo operador de Riesz espectral e solução numérica para o problema (3.6) dada pelo método numérico segundo diferenças centradas para  $\alpha = 1.3$  e  $\alpha = 1.7$  quando  $t = 1$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho apresentámos o estado de arte relativamente a um problema de formulação simples, que envolve um operador fraccionário de difusão. Estes problemas continuam a envolver questões pertinentes relacionadas com a não localidade dos operadores diferenciais envolvidos, tais como como definir condições de fronteira não nulas correctamente, tanto do ponto de vista físico como matemático.

Em suma, começámos por trabalhar o espaço de Fourier e as derivadas fraccionárias de Riemann-Liouville no capítulo 2, de onde derivámos uma primeira definição para o operador de difusão fraccionário, a que chamámos o operador de Riesz na forma integral. No capítulo 3 apresentámos um método numérico para esta definição, e derivámos alguns resultados de convergência. No capítulo 4, apresentámos a definição do operador de Riesz na forma espectral, e vimos um método numérico que converge para a solução do problema da equação do calor fraccionária quando o operador de difusão é definido deste modo. Finalizámos comparando a solução numérica para o problema de difusão fraccionário quando o operador de difusão é o operador de Riesz na forma integral com a solução numérica para o problema quando o operador é agora o operador de Riesz espectral.

Os resultados numéricos indicam que estes problemas não partilham as mesmas soluções.

De referir por último que um problema em aberto directamente relacionado com este trabalho é a demonstração teórica da convergência do método numérico apresentado no capítulo 4.



# Bibliografia

- [1] E. M. Stein, Singular integrals and Differentiability properties of functions, Princeton University Press, (1970).
- [2] P. L. Butzar, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation - Volume 1 One-Dimensional Theory, Academic Press, Inc., (1971).
- [3] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, (1972).
- [4] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers S.A.,(1993).
- [5] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck, Discrete-time Signal Processing, Prentice-Hall, Inc, (1998).
- [6] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, (1999).
- [7] M. D. Ortigueira, Introduction to fractional signal processing. Part 2: Discrete-time systems, IIE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing, vol. 147, n.1, pp 71-78, (2000).
- [8] H. A. Priestley, Introduction to Complex Analysis, Oxford University Press, (2003).
- [9] M. D. Ortigueira, F. Coito, From differences to differintegrations, Fractional Calculus & Applied Analysis, vol. 7, n.4, pp , (2004).
- [10] A. Loverro, Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer, Rapport technique, University of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering, (2004).

- [11] M. Ilic, F. Liu, I. Turner, V. Anh, Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation I, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 8, n.3, pp 323-341, (2005).
- [12] M. Ilic, F. Liu, I. Turner, V. Anh, Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation II, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 9, n.4, pp 333-349, (2006).
- [13] K. B. Athreya, S.N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [14] M. D. Ortigueira, Fractional central differences and derivatives, *Journal of Vibration and Control*, vol.14, n.9-10, pp 1255-1266, (2008).
- [15] D. P. Simpson, I. W. Ian, M. Ilic, A generalised matrix transfer technique for the numerical solution of fractional-in-space partial differential equations, (2009).
- [16] Q. Yang, F. Liu, I. Turner, Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, n. 1, pp200-218, (2010).
- [17] Q. Yang, I. Turner, F. Liu, M. Ilic, Novel numerical methods for solving the time-space fractional diffusion equation in two dimensions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 33, n. 3, pp 1159-1180, (2011).
- [18] C. Çelik, D. Melda, Crank–Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative, *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n.4, pp 1743-1750, (2012).
- [19] K. Burrage, N. Hale, D. Kay, An efficient implicit FEM scheme for fractional-in-space reaction-diffusion equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 34, n. 4, pp 2145-2172, (2012).
- [20] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci. Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 136, n. 5, pp 521-573 (2012).
- [21] G. Di Blasio, B. Volzone, Comparison and regularity results for the fractional Laplacian via symmetrization methods, *Journal of Differential Equations*, vol. 253, n. 9, pp 2593-2615, (2012).



- [22] E. Valdinoci, From the long jump random walk to the fractional Laplacian, preprint ArXiv:0901.3261 1, (2009).
- [23] Q. Yu, F. Liu, I. Turner, K. Burrage, Numerical investigation of three types of space and time fractional Bloch-Torrey equations in 2D, *Central European Journal of Physics*, vol. 11, n. 6, pp 646-665, (2013).
- [24] R. Stern, F. Effenberger, H. Fichtner, T. Schäfer, The space-fractional diffusion-advection equation: Analytical solutions and critical assessment of numerical solutions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 17, n. 1, pp.171-190, (2014).
- [25] A. Bueno-Orovio, D. Kay, K. Burrage, Fourier spectral methods for fractional-in-space reaction-diffusion equations, *BIT Numerical Mathematics*, vol. 54, n. 4, pp 937-954, (2014).
- [26] R. Servadei, E. Valdinoci, On the spectrum of two different fractional operators, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, vol. 144, n. 4, pp 831-855, (2014).
- [27] R. H. Nochetto, E. Otárola, A. J. Salgado, A PDE Approach to Fractional Diffusion in General Domains: A Priori Error Analysis, *Foundations of Computational Mathematics*, vol.15, pp 733-791, (2015).
- [28] P. N. Vabishchevich, Numerically solving an equation for fractional powers of elliptic operators, *Journal of Computational Physics*, vol. 282, pp 289-302 (2015).
- [29] A. Bonito, J. Pasciak, Numerical approximation of fractional powers of elliptic operators, *Mathematics of Computation*, vol. 84, n. 295, pp 2083-2110, (2015).
- [30] P. N. Vabishchevich, Numerical solving unsteady space-fractional problems with the square root of an elliptic operator, *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21, n. 2, pp 220-238, (2016).