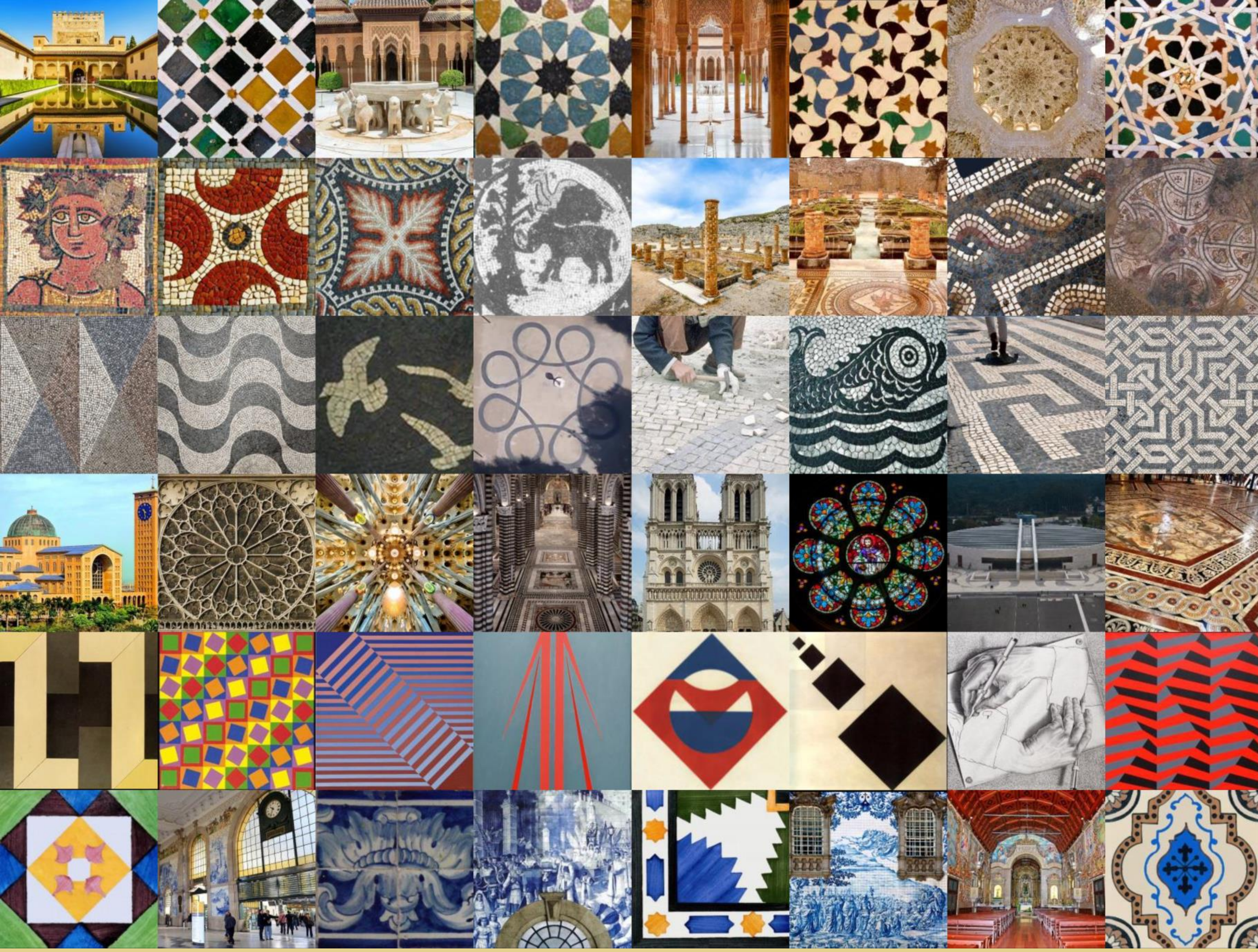


Cleber Gouvêa Fernandes

Simetrias: da presença na arte, na cultura e no património para a formação docente

Tese de doutoramento em Ciências da Educação, especialidade em Organização do Ensino, Aprendizagem e Formação de Professores, orientada pela Professora Doutora Piedade Vaz Rebelo e pela Professora Doutora Carlota Simões e apresentada à Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Maio de 2018

· U C ·

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação
Universidade de Coimbra

Cleber Gouvêa Fernandes

Simetrias: da presença na arte, na cultura e no património para a formação docente

Tese de doutoramento em Ciências da Educação, especialidade em Organização do Ensino, Aprendizagem e Formação de Professores, orientada pela Professora Doutora Piedade Vaz Rebelo e Professora Doutora Carlota Simões e apresentada à Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Coimbra | Maio de 2018

Ilustrações da capa

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**

1. Disponível em http://naturanda.com/eng/product/granada-and-la-alhambra/#. Acesso em 04 abr. 2018.
2. Disponível em https://www.flickr.com/photos/juan-antonio-capo/4434768598/in/photostream/. Acesso em 04 abr. 2018.
3. Disponível em https://www.ticketea.pt/bilhetes/alhambra-granada-acesso-prioritario-visita-guiada/. Acesso em 04 abr. 2018.
4. Disponível em http://www.lanubeartistica.es/Dibujo_Tecnico_Primero/UD6/DT1_U6_T4_Contenidos_v01/13_el_mosaico_nazar.html. Acesso em 04 abr. 2018.
5. Disponível em https://www.forbes.com/sites/geoffreymorrison/2015/10/15/exploring-the-alhambra-palace-granada-spain/#5349e5048f17. Acesso em 04 abr. 2018.
6. Disponível em http://kurt-komoda.blogspot.pt/2010/05/tesselations-by-kurt-komoda-taken-from.html. Acesso em 04 abr. 2018.
7. Disponível em https://www.flickr.com/photos/mezzoblue/297444144/in/photostream/. Acesso em 04 abr. 2018.
8. Disponível em https://www.trekearth.com/gallery/photo1264550.htm. Acesso em 04 abr. 2018.
9. Pessoa, M. (2005, p.392).
10. Disponível em https://www.noticiasdecoimbra.pt/projeto-quer-tirar-mosaico-romano-conimbriga-da-vitrina-torna-lo-vivo/. Acesso em 04 abr. 2018.
11. Disponível em https://guiastecnicos.turismodeportugal.pt/pt/museus-monumentos/ver/Museu-Monografico-de-Conimbriga. Acesso em 04 abr. 2018.
12. Cardoso, J. L. (0492). Um camelídeo de Conimbriga. *Conimbriga*. 31, p. 181-187.
13. Disponível em http://cm-condeixa.pt/turismo/patrimonio/museus/poros/. Acesso em 04 abr. 2018.
14. Disponível em https://www.vortexmag.net/ruinas-de-conimbriga-entre-as-mais-belas-do-mundo/. Acesso em 04 abr. 2018.
15. Disponível em https://institutodehistoriadaarte.wordpress.com/2015/09/24/actas-encontro-mosaicos-romanos/. Acesso em 04 abr. 2018.
16. Oliveira, C. (2006).
17. Disponível em http://www.jffprv.eu/webo/galleries/ws9139gbk/orgfinal/simetria/frisos/07_infx/content/JFFD109867_trunc_large.html. Acesso em 04 abr. 2018.
18. Disponível em http://www.jffprv.eu/webo/galleries/ws9139gbk/orgfinal/simetria/padroes/12_22ast/content/JFFD107981_large.html. Acesso em 04 abr. 2018.
19. Teixeira, R. C. (2014).
20. Disponível em https://www.google.com/maps/place/Pra%C3%A7a+da+Rep%C3%BAblica,+3000-400+Coimbra/@40.2095193,-8.4199837,79m/data=!3m1!1e3!4m5!3m4!1s0xd22f90b1124daef:0xf1c8199a84ecc6a4!8m2!3d40.2096366!4d-8.4201443. Acesso em 04 abr. 2018.
21. Disponível em https://www.tamegasousa.pt/calceteiro-lanca-

peticao-online-para-elevar-calcada-portuguesa-a-patrimonio-mundial/. Acesso em 04 abr. 2018.
22. Disponível em https://pt.slideshare.net/jignaciobl/calada-portuguesa-26316634. Acesso em 04 abr. 2018.
23. Disponível em http://www.jffprv.eu/webo/galleries/ws9139gbk/orgfinal/simetria/frisos/03_2astinf/content/JFFC085384_large.html. Acesso em 04 abr. 2018.
24. Disponível em http://lh6.ggpht.com/_R3DdHae0b0Y/TTY2pEUPNPI/AAAAAAAAGro/0H-OJ01F9QI/s800/Joao_Ferrand_Restauradores.jpg. Acesso em 04 abr. 2018.
25. Disponível em https://www.casosincriveis.com/paroquia-nossa-senhora-aparecida/. Acesso em 04 abr. 2018.
26. Disponível em https://sites.google.com/site/lugaresdareligiao/arquiteturasreligiosas/arqcatol. Acesso em 04 abr. 2018.
27. Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sagrada_Familia_nave_roof_detail.jpg. Acesso em 04 abr. 2018.
28. Disponível em http://www.italy24.ilsole24ore.com/print/ABIyhG5C/0?refresh_ce=1. Acesso em 04 abr. 2018.
29. Disponível em https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5:Notre_Dame_de_Paris_DSC_0846w.jpg. Acesso em 04 abr. 2018.
30. Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vitral_em_Igreja_Santa_Efigenia_2.jpg. Acesso em 04 abr. 2018.
31. Disponível em http://www.santuario-fatima.pt/pt/news/igreja-santissima-trindade-vence-premio-internacional-santuario-felicita-eng-mota-freitas-equipa-projectista. Acesso em 04 abr. 2018.
32. Disponível em https://www.keviagem.com/catedral-de-siena-uma-visita-obrigatoria/. Acesso em 04 abr. 2018.W
33. Disponível em https://comunicacaoeartes20122.wordpress.com/2013/01/24/neoconcretismo/. Acesso em 04 abr. 2018.
34. Disponível em http://benshimolart.com/luis-benshimol/luis-benshimol-sacilotto-a-great-artist/. Acesso em 04 abr. 2018.
35. Disponível em http://www.bolsadearte.com/artistas/cotacoes/artista/198/#. Acesso em 04 abr. 2018.
36. Disponível em https://www.cml.pt/cml.nsf/artigos/15604D3579BCDF0380257987005F0524. Acesso em 04 abr. 2018.
37. Disponível em https://www.cm-vfxira.pt/uploads/writer_file/document/3182/20130722112223399173.pdf. Acesso em 04 abr. 2018.
38. Disponível em https://serurbano.wordpress.com/2010/06/20/theo-van-doesburg/. Acesso em 04 abr. 2018.
39. Disponível em http://www.wbur.org/artery/2018/02/08/mfa-mc-escher. Acesso em 04 abr. 2018.
40. Disponível em https://www.wikiart.org/pt/luiz-sacilotto. Acesso em 04 abr. 2018.
41. Disponível em http://redeazulejo.fl.ul.pt/pesquisa-az/padrao.aspx?id=1281. Acesso em 04 abr. 2018.
42. Disponível em http://www.movenoticias.com/2016/10/estacao-de-sao-bento-comemora-100-anos-de-existencia/. Acesso em 04 abr. 2018.
43. Disponível em http://redeazulejo.fl.ul.pt/pesquisa-az/padrao.aspx?id=987. Acesso em 04 abr. 2018.
44. Disponível em https://www.douro.com.pt/blog/regiao-do-douro/a-estacao-de-sao-bento. Acesso em 04 abr. 2018.
45. Disponível em http://redeazulejo.fl.ul.pt/pesquisa-az/padrao.aspx?id=1289. Acesso em 04 abr. 2018.
46. Disponível em https://desenvolturasedesacatos.blogspot.pt/2015/05/os-5-mais-belos-paineis-de-azulejos-de.html. Acesso em 04 abr. 2018.
47. Disponível em https://desenvolturasedesacatos.blogspot.pt/2015/05/os-5-mais-belos-paineis-de-azulejos-de.html. Acesso em 04 abr. 2018.
48. Disponível em http://redeazulejo.fl.ul.pt/pesquisa-az/padrao.aspx?id=1134. Acesso em 04 abr. 2018.

Dedicatória

Dedico este estudo a dois grandes homens:

Mário Teixeira Fernandes e **Claudio Roberto Costa Mota**

Agradecimentos

A Deus por me fazer acreditar na possibilidade deste feito, estando comigo a cada barreira enfrentada.

À minha esposa e companheira por permanecer ao meu lado nessa caminhada repleta de desafios muito além dos académicos. Sem ela ao meu lado este percurso seria extremamente mais complicado. Muito obrigado, ***Mirelle***…

Ao meu filho Arthur que, apesar de seus 12 anos de idade, acompanhou de perto toda esta trajetória, sempre companheiro, compreensível e amoroso.

Aos meus filhos João Maurício e Theo pelo simples fato de me permitirem participar de suas alegrias diárias.

À minha mãe, minha dinda e minha sogra pela credibilidade diante os meus esforços, sem mesmo se darem conta da dimensão desta conquista. Suas palavras mais simples foram, para mim, um combustível e um acalento.

Ao meu irmão Rafael Galego, que administrou muitos afazeres na minha ausência com tamanha maestria que lhe é peculiar.

À minha irmã Mariângela pelo apoio em muitas de minhas conquistas até aqui.

À minha cunhada Cláudia, minha cunhada Letícia e meu concunhado Daniel pela força transmitida durante as vídeo-chamadas envolventes.

Aos amigos Fábio Bernardo, Fernando Oliveira, Bruno Menezes, Bruno Ribeiro e Lynk Cardia que, caminhando paralelamente na busca desta conquista, sempre me incentivaram muito.

Às amigas Jana e Esperança pelos amparos nos momentos mais tristes e pelos sorrisos nos momentos mais alegres deste percurso.

Ao amigo Djalma pelo suporte psicográfico (psicológico + gráfico) e à amiga Rari pelo apoio de sempre à nossa família.

À Dona Rosa pela receptividade e pelo carinho durante os primeiros momentos em Coimbra.

A todos os amigos que animaram encontros e mais encontros na “Nossa Casa” em Coimbra.

À Doutora Piedade Vaz Rebelo pelas incansáveis colaborações durante horas e horas em seu gabinete. Suas orientações foram fundamentais para a realização desta pesquisa e dos artigos ao longo destes anos.

À Doutora Carlota Simões pelo primeiro atendimento, determinante para o encaminhamento deste estudo, e pelos demais encontros tão produtivos e intensos.

À Doutora Jéssica Cabrera por me receber durante a mobilidade pelo Programa Erasmus+, na Facultad de Formación de Profesorado y Educación da Universidad Autónoma de Madrid. Os ajustes sugeridos foram muito importantes para o despertar das primeiras páginas da redação desta tese.

À Dra. Isabel Veiga Simão, à Dra. Georgina Dinis e ao Dr. João Janicas pelos encaminhamentos para que a Ação de Formação acontecesse. Toda a competência, receptividade e cordialidade foram fundamentais.

Aos nobres docentes que participaram da Ação de Formação pela boa vontade diante das demandas da mesma. A dedicação de todos deu mais graça a esta pesquisa. Muito obrigado!

Aos docentes da Universidade de Coimbra, Professores Doutores e Professoras Doutoras Isabel Festas, António Gomes Ferreira, Albertina Lima de Oliveira, Ana Amélia Carvalho, Bruno de Sousa, Carlos Barreira, Cristina Vieira, Graça Bidarra, Luís Alcoforado, Maria Augusta Nascimento, Teresa Pessoa e todos os outros que contribuíram de alguma forma durante este estudo.

À Dra. Teresa Urbano pelas soluções apresentadas diante de tantas demandas ao longo do doutoramento.

À Doutora Cláudia Maia pelas preciosas ajudas em relação aos conhecimentos científicos e didático-pedagógicos, diante das dúvidas que surgiram, e pela generosa contribuição na elaboração de alguns questionários.

Ao Doutor Virgílio Hipólito Correia e a todos do Museu Monográfico de Conimbriga pela receptividade e interesse demonstrado por este estudo, facilitando a realização do mesmo.

Resumo

O reconhecimento da importância e dos benefícios consequentes da aprendizagem de simetrias remontam há mais de um século, sendo estas consideradas uma via para a análise de demais situações matemáticas, envolvendo a visualização como aliada na consolidação da compreensão, para além de favorecer o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia, da sensibilidade e da criatividade. Porém o ensino e a aprendizagem da matemática, e em particular da geometria e de simetrias, continuam a constituir-se como um desafio, tendo em conta as dificuldades evidenciadas pelos alunos na aprendizagem de conceitos geométricos ou o evitamento dos professores em ensinar este tema. A contextualização emerge como estratégia educativa alternativa, particularmente, em relação às simetrias, nomeadamente através da utilização de recursos provenientes da arte, da cultura e do património. No entanto, apesar da diversidade de recursos que podem ser usados para o efeito, é ainda rara a sua utilização em contexto educativo, justificando o interesse de, com os professores e através da sua formação, potenciar essa abordagem. Neste contexto, foi planificada, implementada e avaliada uma Oficina de Formação Docente dedicada a desenvolver uma proposta de ensino de simetrias com base na utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Esta Oficina foi desenvolvida através de uma dinâmica colaborativa e o envolvimento ativo dos participantes. Trata-se de uma investigação-ação, envolvendo docentes e discentes do 1º ciclo do ensino básico. No sentido de caracterizar o potencial dos referidos recursos para o ensino e aprendizagem de simetrias, foram formulados três objetivos gerais: o primeiro visa caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico; o segundo incidiu em planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e o terceiro visa avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente. Foram vários os instrumentos de recolha de dados, nomeadamente inquéritos por questionário, entrevistas individuais e em *focus* grupo, observação direta participante e não participante e teste de conhecimentos. Os dados obtidos foram analisados primordialmente através de análise de conteúdo. Os resultados evidenciam que o ensino de simetrias pode ser vantajosamente realizado quando se faz uso de recursos artísticos, culturais e patrimoniais, proporcionando maior satisfação docente, e também promovendo a sua aprendizagem, nomeadamente aos níveis do conhecimento científico, didático-pedagógico e curricular. Os resultados evidenciam também que os estudantes junto de quem os professores participantes no estudo implementaram as atividades obtiveram níveis mais elevados de satisfação e aprendizagem do que os estudantes cujos processos de ensino e aprendizagem não usaram os referidos recursos, levando-nos a concluir o potencial e vantagem da sua utilização.

Palavras chave:

Formação de Professores; Investigação-Ação; Simetrias; Ensino e Aprendizagem; recursos artísticos, culturais e patrimoniais

Abstract

The recognition of the importance and the consequent benefits of the learning of symmetries dates back more than a century, being considered a way for the analysis of other mathematical situations, involving the visualization as ally in the consolidation of the understanding, besides favoring the development of the thought critical, autonomy, sensitivity and creativity. However, the teaching and learning of mathematics, and in particular of geometry and symmetry, continue to be a challenge, taking into account the difficulties evidenced by students in learning geometric concepts or avoiding teachers in teaching this subject. Contextualization emerges as an alternative educational strategy, particularly in relation to symmetries, namely through the use of resources from art, culture and heritage. However, despite the diversity of resources that can be used for this purpose, it is still rare to use it in an educational context, justifying the interest of teachers and through their training to promote this approach. In this context, a Teacher Training Workshop dedicated to developing a symmetry teaching proposal based on the use of artistic, cultural and patrimonial resources was planned, implemented and evaluated. This Workshop was developed through a collaborative dynamic and the active involvement of the participants. This is an action research, involving teachers and students of the 1st cycle of basic education. In order to characterize the potential of these resources for the teaching and learning of symmetries, three general objectives were formulated: the first aims to characterize the previous knowledge, on symmetries, of the participants of the Teacher Training Workshop, at the scientific, curricular and didactic-pedagogical; the second focused on planning, implementing and analyzing a proposal of symmetry teaching in the 1st Cycle of Basic Education (CEB) using artistic, cultural and patrimonial resources, and the third aims to evaluate teacher and student satisfaction and learning. Several data collection instruments were included, namely questionnaire surveys, individual and focus group interviews, direct participant and non-participant observation, and knowledge test. The data obtained were analyzed primarily through content analysis. The results show that the teaching of symmetries can be advantageously realized when using artistic, cultural and heritage resources, providing higher teacher satisfaction, and also promoting their learning, namely at the levels of scientific, didactic-pedagogical and curricular knowledge. The results also show that the students with whom the teachers participating in the study implemented the activities obtained higher levels of satisfaction and learning than the students whose teaching and learning processes did not use these resources, leading us to conclude the potential and advantage of its use.

Key words:

Teacher Training; Research-Action; Symmetries; Teaching and Learning; artistic, cultural and heritage resources.

Resumen

El reconocimiento de la importancia y de los beneficios consecuentes del aprendizaje de simetrías se remontan desde hace más de un siglo, siendo estas consideradas una vía para el análisis de otras situaciones matemáticas, envolviendo la visualización como aliada en la consolidación de la comprensión, además de favorecer el desarrollo del pensamiento crítico, de la autonomía, de la sensibilidad y de la creatividad. Pero la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la geometría y de las simetrías, siguen constituyendo un desafío, teniendo en cuenta las dificultades evidenciadas por los alumnos en el aprendizaje de conceptos geométricos o el evitamiento de los profesores en enseñar este tema. La contextualización emerge como estrategia educativa alternativa, particularmente, en relación a las simetrías, en particular a través de la utilización de recursos provenientes del arte, de la cultura y del patrimonio. Sin embargo, a pesar de la diversidad de recursos que se pueden utilizar para ello, es rara su utilización en un contexto educativo, justificando el interés de, con los profesores y a través de su formación, potenciar este enfoque. En este contexto, se planificó, implementó y evaluó una Oficina de Formación Docente dedicada a desarrollar una propuesta de enseñanza de simetrías con base en la utilización de recursos artísticos, culturales y patrimoniales. Este Taller fue desarrollado a través de una dinámica colaborativa y la participación activa de los participantes. Se trata de una investigación-acción, involucrando docentes y discentes del primer ciclo de la enseñanza básica. En el sentido de caracterizar el potencial de los referidos recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las simetrías, se formularon tres objetivos generales: el primero pretende caracterizar el conocimiento previo, sobre simetrías, de los participantes del Taller de Formación Docente, a los niveles científico, curricular y didáctico-enseñanza; el segundo se centró en planificar, implementar y analizar una propuesta de enseñanza de simetrías en el 1º Ciclo de la Enseñanza Básica (CEB) utilizando recursos artísticos, culturales y patrimoniales y el tercero busca evaluar la satisfacción y el aprendizaje docente y discente. Los diversos instrumentos de recopilación de datos, en particular encuestas por cuestionario, entrevistas individuales y en grupo de grupo, observación directa participante y no participante y prueba de conocimientos. Los datos obtenidos fueron analizados primordialmente a través del análisis de contenido. Los resultados evidencian que la enseñanza de simetrías puede ser ventajosa realizada cuando se hacen uso de recursos artísticos, culturales y patrimoniales, proporcionando mayor satisfacción docente, y también promoviendo su aprendizaje, en particular a los niveles del conocimiento científico, didáctico-pedagógico y curricular. Los resultados evidencian también que los estudiantes de quienes los profesores participantes en el estudio implementaron las actividades obtuvieron niveles más altos de satisfacción y aprendizaje que los estudiantes cuyos procesos de enseñanza y aprendizaje no usaron los referidos recursos, llevándonos a concluir el potencial y ventaja de su utilización.

Palabras clave:

Formación de Profesorado; Investigación-Acción; Simetrías; Enseñanza y Aprendizaje; Recursos artísticos, culturales y patrimoniales

Índice

Siglas e Acrónimos

ACPA – Áreas de Competências do Perfil dos Alunos

AGD – Ambientes de Geometria Dinâmica

APM – Associação de Professores de Matemática

BA – Banco de atividades

CEB – Ciclo do Ensino Básico

CNEB – Competências Essenciais do Ensino Básico

CoCiP – Conhecimento Científico Prévio

CoCuP – Conhecimento Curricular Prévio

CoDiPeP – Conhecimento Didático-pedagógico prévio

CoDiPeP/e – Conhecimento Didático-pedagógico prévio - ensino

CoDiPeP/p-r – Conhecimento Didático-pedagógico prévio – planificações e recursos

DC – Diário de campo

DEB – Departamento da Educação Básica

DGE – Direção-Geral da Educação

EI – Entrevista individual

FG1 – Entrevista em *focus* grupo 1

FG2 – Entrevista em *focus* grupo 2

Imp - Implementações

IMUK – Interbationale Mathematische Unterrichskommission

ISC – International Study Center

LLECE – Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación

ME – Ministério da Educação

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NACOME – National Advisory Committee on Mathematical Education

NCSM – National Council of Supervisors of Mathematics

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

ODNP – Observação direta não participante

OFD – Oficina de Formação Docente

PA – Planificação anterior

PAFC – Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular

PISA – Programme for International Student Assessment

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

PP – Planificação personalizada

Q1 – Questionário Q1

Q2 – Questionário Q2

QO – Questionário *Online*

RACP – recursos artísticos, culturais e patrimoniais

SADis – Satisfação e Aprendizagem Discente

SADoc – Satisfação e Aprendizagem Docente

SERCE – Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo

TALIS – Teaching and Learning International Survey

TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study

UNESCO – United Nations Educational Scientifc and Cultural Organazation

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Gráficos

Introdução

O presente estudo apresenta referenciais teórico e metodológico e os resultados de uma pesquisa que objetivou verificar os benefícios da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais para o ensino e para a aprendizagem de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB). Através de uma Oficina de Formação Docente (OFD) com nove docentes durante todas as etapas, e posterior implementação de atividades a setenta e quatro discentes, dedicamo-nos a caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos docentes, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico, assim como suas considerações a partir destes conhecimentos; desenvolver, planificar, implementar e analisar uma uma proposta de ensino de simetrias no 1º CEB através de uma OFD utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e avaliar a satisfação e a aprendizagem docentes e discentes.

Tanto em Portugal quanto em outros países, desde a década de 80 do século passado, pode-se notar alguns avanços significativos em relação aos estudos sobre o professor de matemática, nomeadamente na caracterização do conhecimento profissional docente. Muitos destes estudos foram apoiados nos estudos de Lee Shulman com o objetivo de identificar que conhecimentos são mobilizados pelos docentes ao ensinar um determinado conteúdo, de onde provinham estes conhecimentos docentes e qual o motivo pelo qual estes conhecimentos se alteram durante a sua formação (Maia, 2014).

Em resposta a uma questão que surgira durante sua pesquisa – "*Como podemos pensar sobre o conhecimento que cresce nas mentes dos professores, com ênfase especial no conteúdo?*" (Shulman, 1986, p. 9) –, Shulman classificou três categorias de conhecimento docente do conteúdo: o conhecimento científico, o conhecimento pedagógico e o conhecimento curricular. Apesar da identificação de outros níveis de conhecimento profissional docente, os atrás referidos são considerados fundamentais, base do conhecimento para o ensino, e são retomados no presente estudo.

Visando caracterizar a vantagem da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais para o ensino e para a aprendizagem de simetrias no 1º CEB, a investigação desenvolvida tem por objetivos gerais:

- Caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico (ensino e planificações e recursos) e as considerações docentes a partir destes conhecimentos.
- Planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) através de uma Oficina de Formação Docente utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.
- Em relação ao ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais, avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente.

Visando responder a estes objetivos, estruturou-se a pesquisa iniciando pela exposição do problema de investigação, incluindo as justificações, perguntas orientadoras, objetivos gerais e pressupostos. Em seguida, esta investigação se divide em duas partes – estudos teóricos e estudos empíricos – onde estão alocados cinco capítulos, três na primeira parte e dois na segunda.

O capítulo I, primeiro capítulo da primeira parte, apresenta uma contextualização histórica sobre as simetrias ao longo dos tempos e possíveis conexões deste conceito com outrs áreas do saber, assim como definições, teoremas e notas a serem consideradas no estudo desta temática, necessários à compreensão de todos os conceitos utilizados durante a pesquisa, como por exemplo, transformações geométricas, isometrias, simetrias, rosáceas, friso, padrões, entre outros. Também há uma variedade de fluxogramas e imagens relacionadas, a maioria com apelo a recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Assim, pretendemos facilitar a compreensão da proposta realizada ao leitor que detenha alguma limitação acerca deste conhecimento.

O capítulo II aborda os conhecimentos didático-pedagógico e curricular. São apresentados argumentos que fomentam a importância do ensino e da aprendizagem de simetrias, estratégias de ensino de simetrias, tendências mais recentes no ensino da matemática, algumas dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem da geometria, tendências recentes no ensino das simetrias, o construtivismo e o socioconstrutivismo, o ensino de simetrias através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais e alguns estudos que revelam o uso destes recursos no ensino. Além disso, apresentamos o lugar das transformações geométricas, das isometrias e das simetrias nos currículos mais recentes e as respectivas orientações metodológicas nestes documentos. Também apresentamos os movimentos reformistas que influenciaram as oscilações destes temas nestes documentos, bem como alguns programas de ensino de matemática de Portugal com as suas peculiaridades, até ao Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular, ainda em implementação em Portugal.

O capítulo III encerra a primeira parte refletindo sobre formação de professores e investigação-ação. Trazemos modelos, desafios e dinâmicas de formação de professores e ampliamos a nossa opção: a investigação-ação, enquanto estratégia de formação docente, apresentando aspectos históricos, conceitos e características, finalidades, modelos, paradigmas e validade e o procedimentos desempenhados durante a Ação de Formação realizada.

A segunda parte, os estudos empíricos, se inicia pela apresentação do nosso posicionamento epistemológico.

Em seguida, no capítulo IV, se inicia com a retomada das perguntas orientadoras e dos objetivos gerais e específicos. Também são apresentadas as opções metodológicas deste estudo, com as características, a função, o desenho, os métodos de recolha e de análise de dados, os participantes, o plano de trabalho, os aspectos éticos e as limitações e debilidades.

O capítulo V traz a apresentação e análise interpretativa dos resultados obtidos. As categorias, subcategorias e indicadores inerentes à matriz conceitual, presente no início do capítulo, são apresentados e analisados um a um, dispostos sequencialmente associados a cada um dos objetivos específicos da investigação. Também são apresentadas as sínteses relativas a cada uma dessas categorias.

Terminamos com as conclusões finais, onde nos reportamos ao referencial teórico e aos resultados obtidos, estando, estes últimos, relacionados com cada um dos objetivos gerais da investigação. Concluímos com a resposta à pergunta central da investigação, seguido de suas limitações e sugestões de futuras pesquisas.

PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Exposição do problema

O conhecimento proporcionado pela matemática é parte importante no desenvolvimento de uma consciência cidadã e na emancipação dos indivíduos em função da necessidade de aquisição de conhecimentos emanados da ciência (Leseux, Neto & Darsie, 2017). Para esses autores,

> A matemática por um lado, deve estar ao alcance de todos, pois ela desempenha papel decisivo no processo de compreender o meio ambiente natural e social, o sistema político, as novas tecnologias, as outras ciências e valores em que se fundamenta a sociedade. Por outro, essa ciência interfere fortemente na formação intelectual e social, na construção e estruturação do pensamento lógico e na agilização do raciocínio dedutivo do ser humano (p. 2).

Muito além das restrições de utilidade dos conceitos matemáticos a ações como formulação, interpretação e resolução de situações problema em seus contextos, sua utilidade abrange “um amplo envolvimento pessoal por meio do comunicar, relacionar, avaliar e apreciar e gostar da matemática” (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2013, p. 174).

A presente investigação assenta no interesse em explorar o potencial dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais no ensino e na aprendizagem de simetrias. Percebemos que, apesar da diversidade de recursos que podem ser usados para o efeito, é rara a sua utilização em contexto educativo, justificando o interesse de, com os professores e através da sua formação, potenciar essa abordagem, alcançando melhorias na qualidade da educação, ensino e aprendizagem do tema.

Assim, considerando a sequência relativa ao processo de investigação que envolve uma ideia que se constituiu como problema de investigação, isto é, “tudo aquilo que se converte em objeto de reflexão e sobre o qual se percebe a necessidade de conhecer e, portanto, de estudar” (Torres, 2010, p. 88), percebemos a importância de conhecer mais a fundo esta ideia, que se tranfigura facilmente em problema e, consequentemente em objeto de reflexão, que trazemos nesta investigação.

Além disso, importa considerar que os resultados de avaliações internacionais, em geral, apresentam o fracasso do ensino e da aprendizagem em matemática como um desafio atual. As minhas experiências de vida, enquanto estudante e professor, me revelaram que muitas ações educativas se poderiam realizar de forma diferente da que até hoje se pratica em maioria. Parece-me ainda faltar contexto, sentido e propósito n*o quê*, *para quê* e *como* se ensina. É verdade que o currículo sofreu diversas tentativas de adequações ao longo dos anos, mas este documento orientador muitas vezes não é posto em prática. As suas sugestões de abordagem e orientações didáticas muitas vezes não saem do papel. E o elo de ligação entre o que é proposto neste documento e a aprendizagem é o local onde se aloca a Formação Docente. Este é o elo, e que por vezes me parece perdido. É neste elo que nos propusemos atuar, de forma a debater e encontrar colaborativamente um caminho adequado de acordo com as vozes dos verdadeiros autores do ensino e pôr em prática as indicações dos documentos orientadores viabilizando uma aprendizagem holística.

São – e realmente foram – previstas dificuldades inerentes a uma renovação através de Formação Docente. Mesmo assim, entendemos que o conjunto de ações previamente planejadas e adaptadas ao longo do seu desenvolvimento pudesse gerar relevantes melhorias, ainda que pontuais, no ensino e na aprendizagem do conteúdo matemático em análise. Desta forma, pretendemos preencher parte das lacunas na Formação Docente a nível de um ensino contextualizado e significativo, convidando docentes e discentes ao conhecimento matemático de simetrias com recurso à arte, cultura e património como elemento contextualizador.

Justificações

Dividiremos a apresentação da justificação deste estudo em duas perspectivas: justificação e discussão interna e justificação e discussão externa.

Justificação e discussão interna

Com licenciatura plena em matemática e mestrado profissional na mesma área, desde minha formação básica esta disciplina foi ensinada em geral de maneira abstrata e descontextualizada. Além disso, em minha dedicação profissional enquanto professor por mais de quinze anos, outros trabalhos contribuiram para perceber uma determinada carência no ensino e aprendizagem daquela. A atuação como colaborador em institutos responsáveis por avaliações em larga escala, inclusive internacionais, despertou-me certo interesse pelos resultados aferidos por estes instrumentos. Desta forma não é difícil notar um considerável insucesso nos resultados de matemática, por todo o mundo. Apesar de alguns avanços, sigo consciente que estes ainda são poucos. Vinculada à Formação Docente, esta investigação é orientada a contribuir para melhorias na qualidade educativa. Destacamos também, numa vertente de maior prazer pessoal, o fato de vincular recursos que permitam maior compreensão e aplicação contextualizada da matemática, especificamente no âmbito das simetrias. A relação existente entre a arte, a cultura, o património e a matemática motivaram-me a realizar a aproximação dos conceitos geométricos de simetrias de modo que façam sentido a especialistas educativos e, sobretudo, que sirvam às crianças, estudantes do 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB), as quais em alguma instância esta pesquisa também visa. A presença cotidiana de recursos disponíveis ao ensino de simetrias, fizeram-me-me notar que há muitos recursos suscetíveis de promover o ensino e a aprendizagem fora dos muros da escola.

Justificação e discussão externa

O ensino e aprendizagem de matemática ainda é marcado por altos índices de retenção e atitudes negativas em diversos países. Diversas avaliações internacionais[1] revelam que os conhecimentos e as competências matemáticas de muitos alunos ao final da educação básica são aquém do esperado. É comum perceber a desmotivação por parte dos alunos (Conceição, Mendes & Borges, 2017), os quais não apresentam interesse pela disciplina em outros locais para além do contexto escolar (UNESCO, 2016a). Entre as causas deste cenário, destaca-se a desvinculação do ensino da matemática com o mundo real (Regis, Dantas, Garcia & Rodrigues, 2017), apesar do reconhecimento unânime desta relação (UNESCO, 2016a).

[1] Tomando por base os resultados de estudos como o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) realizados pelo *International Study Center* (ISC), o *Programme for International Student Assessment* (PISA) da OCDE, e também a pesquisa do *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo* (SERCE) desenvolvida pelo *Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación* (LLECE) na América Latina.

A necessidade de utilização matemática é intrínseca à atividade humana e revela-se de forma multifacetada, transcendendo o perfil adotado no senso comum. Sua promoção através de uma educação matemática adequada favorece a reflexão da diversidade de meios com os quais seus conceitos podem vir a revelarem-se sequencialmente ao educando, que permita uma experiência com esta disciplina de forma coletiva com os pares, seja entre discentes, docentes ou entres estes dois grupos, com valores de solidariedade. Qual a justificativa de oferecermos ao estudante uma experiência dentro da escola se esta não o possibilita a utilização de seus valores fora dela, de modo a usufruir conscientemente o mundo? Não se trata de uma ciência exata em prol do social, e sim de uma ciência que pode também ser vista socialmente na maneira como esta se apresenta. Este é um desafio atual da educação matemática que “exige mudanças substanciais” (UNESCO, 2016a, p. 11) e dado o papel fundamental da escola no desenvolvimento dos estudantes, tem por obrigatoriedade oferecer um ensino inovador e adequado às demandas sociais.

Enquanto ciência e disciplina escolar, podemos afirmar que a matemática é uma das mais antigas. Tal qualidade a proporciona, por toda a sua existência, uma posição de destaque no currículo (Ponte *et al*., 2007). Pardal (1993) destaca que o currículo não é um instrumento técnico de sequências de conteúdos. Para este autor o currículo “é uma construção sociopedagógica elaborada por uma estrutura política, assente num conjunto de valores” (p. 14). Em relação a geometria, um ramo da matemática que possui notória beleza e presença cotidiana, podendo seus conceitos serem percebidos através de simples observação do mundo que nos rodeia. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática (Brasil, 1998) sugerem o estudo de geometria e suas conexões com outras áreas de conhecimento, devendo assim ser explorado “a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato” (p. 51). Este indicação é endossada também pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Artes (Brasil, 1997) que indicam que a conexão entre matemática e arte favorece o desenvolvimento do educando, afirmando que

> o aluno que conhece arte pode estabelecer relações mais amplas quando estuda um determinado período histórico. Um aluno que exercita continuamente sua imaginação estará mais habilitado a construir um texto, a desenvolver estratégias pessoais para resolver um problema matemático (p. 14).

Mais precisamente sobre as simetrias, as Orientações Didáticas dos parâmetros de matemática destacam que alguns desses conceitos podem ser observados em “grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc” (Brasil, 1998, p. 124).

Em Portugal, nos últimos 30 anos, as alterações que ocorreram nos programas de matemática evidenciaram a oscilação da importância dada a esses conceitos de simetrias, principalmente nos anos elementares. No programa de 2007 (Ponte *et al*., 2007), simetrias ocupavam um lugar de destaque, perdendo esta qualidade no programa vigente atualmente (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013), embora todos os temas transversais referidos no PMEB de 2007 estejam contemplados de forma explícita ou implícita em todos os descritores das Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico de Portugal vigente atualmente (PMEB, 2013). Para Veloso (1998), a aprendizagem dessa temática prevê um conjunto de vantagens na medida em que tais conceitos estão intimamente relacionados com a capacidade intrínseca do ser humano em identificar fenômenos que ocorrem na natureza. A introdução dos conceitos de simetria no ensino básico permite que os alunos desenvolvam o espírito de observação e de percepção de regularidades, possibilitando exprimirem livremente a sua criatividade (Veloso, 1998). Contudo, este conteúdo foi excluso das formações inicias de professores, tanto nas Escolas Superiores de Educação como nas Universidades (Veloso, 2012). Em nossa revisão bibliográfica ficou clara a as lacunas da formação inicial e continuada, principalmente acerca de valores que carecem com os nossos objetivos, onde poucos são os trabalhos com o perfil e referências (estratégias, recursos, estudos) que desenvolvemos, com o foco na formação docente. E é a partir destas considerações anteriores que vimos, no ato de desenvolver uma Oficina de Formação Docente com os objetivos previstos como uma ação adequada às necessidades atuais.

Pergunta central e perguntas orientadoras da investigação

A pergunta central da investigação foi a seguinte:

A utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais pode ser vantajosa ao ensino e à aprendizagem de simetrias no 1º CEB?

Associadas à pergunta central foram ainda formuladas as seguintes perguntas orientadoras, apresentadas a seguir.

1. Quais os níveis de conhecimento científico, didático-pedagógico e curricular dos professores do 1º CEB em relação ao ensino de simetrias?
2. Como são as práticas didático-pedagógicas e as planificações dos professores do 1º CEB ao promoverem o ensino de simetrias?
3. De que forma o ensino de simetrias previsto para o 1º CEB pode ser viabilizado de modo contextualizado
4. Pode, uma Oficina de Formação Docente, desenvolver uma prática pedagógica satisfatória para promover o ensino de simetrias no 1º CEB utilizando uma estratégia metodológica que inclua recursos provenientes da arte, da cultura e do património?
5. A utlização de recursos contextualizados no ensino de simetrias no 1º CEB é pertinente ao favorecimento da aquisição de conhecimento científico, da aprendizagem e satisfação profissionais por parte dos docentes?
6. Quais as considerações dos docentes do 1º CEB acerca da percepção de aprendizagem discente a partir da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais no ensino de simetrias?
7. O ensino de simetrias promovido de forma contextualizada através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais pode, por consequência, alcançar melhorias na aprendizagem discente?

Objetivos gerais da investigação

Tendo em conta as todas as considerações anteriores, apoiamos este estudo nos objetivos gerais que se seguem:

- **Objetivo Geral *I*:**

  Caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico (ensino e planificações e recursos) e as considerações docentes a partir destes conhecimentos.
- **Objetivo Geral *II*:**

  Planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) através de uma Oficina de Formação Docente utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.
- **Objetivo Geral *III*:**

  Em relação ao ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais, avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente.

Pressupostos da investigação

Os presupostos que apresentamos a seguir emanaram e aprimoraram-se ao longo e desde o início desta investigação.

- ✓ Existe uma relação intrinsecamente rica entre os conceitos de simetria e a arte, a cultura e o património.
- ✓ O ensino de matemática na Formação inicial de professores é predominantemente teórico e abstrato.
- ✓ As práticas didático-pedagógicas dos professores do 1ºCEB para o ensino de simetrias são predominantemente teóricas e descontextualizadas.
- ✓ A observação da realidade artística, cultural e patrimonial coopera à melhor qualidade do ensino de simetrias.
- ✓ A disponibilidade cotidiana dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais podem ser potencializadores do ensino das simetrias.
- ✓ Existem lacunas na Formação Docente tanto na abordagem dos conceitos de simetria quanto nesta abordagem de forma contextualizada como alternativa.

- ✓ Uma Formação Docente que aborde o ensino de simetrias utilizando um enfoque participativo e colaborativo e recursos contextualizados favorece a prática pedagógica associada.
- ✓ Uma Formação Docente colaborativa e emancipatória, desenvolvida através de investigação-ação pode preencher possíveis lacunas existentes nas formações já vivenciadas.
- ✓ Uma Formação Docente direcionada para o ensino contextualizado de simetria no 1º CEB favorece a aquisição de conhecimento científico, a percepção de aprendizagem e a satisfação docente por parte dos professores.
- ✓ O ensino de matemática através de recursos contextualizados favorece a aprendizagem e o alcance de resultados mais satisfatórios.

PRIMEIRA PARTE: ESTUDOS TEÓRICOS

CAPITULO I – CONHECIMENTO CIENTÍFICO

Tem este capítulo o propósito de apresentar as definições matemáticas que foram contempladas durante este estudo. A base teórica elencada para considerar as definições aqui presentes foram amplamente embasadas pelas apresentadas no livro *Simetrias e Transformações Geométricas – Textos de Geometria para Professores*, de Eduardo Veloso (Veloso, 2012), muito embora apresentaremos pareceres de outros autores diante de algumas considerações que julgamos pertinentes. Também consideramos pertinente apresentar uma contextualização histórica das diversas utilizações do termo *simetrias* e outros conceitos associados a este, assim como apresentar algumas conexões destes conceitos com outras áreas.

O conhecimento científico do conteúdo, segundo Shulman (1986), é "quantidade e organização do conhecimento em si, na mente do professor" (p. 9). Shulman completa salientando que cabe ao professor mais do que compreender que algo é como é, mas o por que é como é, qual o sustento de tal afirmação e como esta perde seu valor parcial ou, até mesmo, total (Shulman, 1986). Para além disso, o docente deve perceber o motivo pelo qual um determinado conteúdo é central numa disciplina enquanto outros são periféricos (Shulman, 1986). Em 2005, Shulman ampliou suas considerações sobre o conhecimento científico do conteúdo cabível aos docentes, considerando que estes devam valer-se de abordagens alternativas de um mesmo conceito diante da diversidade discente. Em relação ao ensino de matemática nos anos iniciais, Serrazina (2010) aponta que o professor deve ter em consideração que é nesta etapa que certos hábitos de raciocínio e pensamento matemático são desenvolvidos e estabelecidos, e o sucesso deste processo envolve a compreensão das explicações do professor, ao qual cabe utilizar diversas representações de conceitos, e métodos não convencionais de resolução de problemas por parte dos alunos.

Há mais de trinta e cinco anos, Abrantes e Ponte (1982) já apontavam, em relação à formação inicial, para o erro em se "separar completamente as componentes científica, pedagógica e prática da formação dos futuros professores" (p. 271). Estes autores consideravam, e sugeriram, que "um plano equilibrado de formação deveria pressupor uma interligação muito grande e desde muito cedo destas três componentes" (p. 271), onde

> a relação teoria-prática, o protagonismo do professor no processo de formação, a importância da reflexão sobre a experiência e a importância de que o trabalho de formação seja informado e apoiado por estudos de investigação (Ponte, 2005, p. 269).

Diante estas considerações e motivados pela falta de materiais que agreguem fontes de conhecimento científico e didático-pedagógico acerca da temática aqui em apreço, buscamos assim proceder nesta pesquisa com o objetivo de colaborar com os leitores que a isto busquem.

I.1. Passeio histórico

A palavra *Simetria* foi utilizada em diferentes épocas, por diferentes pessoas e com os mais variados significados. Até mesmo hoje, diversas pessoas a utilizam em referência a contextos distintos, por vezes até incompatíveis, pois, enquanto ideia, a simetria tem um caráter universal (Shirali, 2001), permitindo a comunicação entre povos, entre passado e presente, através de suas manifestações naturais ou criadas pelo homem.

Hodgson (2011) menciona estudos paleoantropológicos que relatam resultados acerca da construção simétrica de ferramentas, por parte dos hominídeos, "que talvez tenham evoluído para a preferência estética de estruturas simétricas em humanos" (p. 31). Washburn e Growe (1998) aponta registros dos povos antigos que revelam seu interesse e motivação por criação com uso de simetrias na sua arte, através da pintura, escultura, tecidos, pavimentação, cerâmica, cestaria, madeira, pedra entre outros. Aristóteles, em sua obra *Metaphysics*, assim como Darwin, numa menção semelhante presente em seu livro *The descent of man*, já afirmavam a "preferência que os seres humanos mostram por projetos simétricos" (Giannouli, 2013, p. 32). Jones (1868), em sua nobre obra *The grammar of ornament*, lançada em meados do século XIX, refere igualmente que quase todos os povos demonstram um forte instinto de desejo por ornamentação, o qual se desenvolve proporcionalmente a partir da sua fase inicial e durante o progresso civilizatório. Nas palavras de Weyl (2007, p. 17), "O sentido da simetria é a ideia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos". Para Maia (2014), esta forma de expressão permanece até aos dias atuais, como "um comportamento espontâneo visível no interior dos sistemas culturais" (p. 123).

É claro que o eclodir do conceito de simetria deve ser associado ao da ideia de geometria, que remonta aos egípcios, pelo destaque alcançado na matemática diante das necessidades mais naturais da época. Sem o objetivo de datar com precisão a origem da geometria, Boyer (2010) arrisca que o seu uso pode ser apercebido tão logo a partir da análise das pinturas rupestres. Em semelhança, também não é possível precisar o surgimento e evolução do conceito de simetria, mas pode-se também percebê-lo nestas mesmas manifestações rupestres, com a presença de padrões. Segundo Gerdes (2014), há registros comprovadores que desde 70.000-80.000 a. E. C.[2], em Blombos (Cabo Ocidental, África do Sul), os seres humanos já gravavam figuras simétricas em vários objetos. Boyer (2010) remete para desenhos feitos pelo homem, no período neolítico, nos quais se notam considerações com as relações espaciais, valendo-se de congruências e simetria, representadas em vasos, cestos e tecido. Sobre este período, datado de 8000 a. E. C. e considerado o último da Idade da Pedra, Boyer e Merzbach (2012) afirmam que

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes (p. 26).

Também é possível perceber a presença de simetria, principalmente a simetria de reflexão ou simetria axial enquanto primeiro conceito geométrico de simetria, sustentado pela característica peculiar da percepção visual humana (Washburn & Crowe, 1998; Weyl, 1989), em manifestações proveniente do povo sumério, no ano 4000 a. E. C. Apesar da forma intuitiva que estas criações parecem revelar, é possível analisá-las como transformações geométricas. Motivos simétricos com uma e duas dimensões, respectivamente, frisos e padrões, já eram utilizados pelos egípcios, mil anos antes dos gregos (Washburn & Growe, 1998), embora os estudos matemáticos com maior complexidade sobre este tema tenham tido início na Grécia, no século V a. E. C. (Speiser, 1927), demonstrando o povo grego deter avançados conhecimentos geométricos. Nesta vertente, Pitágoras (570 a. E. C. – 495 a. E. C.) e Euclides (325 a. E. C. – 265 a. E. C.) merecem um destaque especial por

[2] Significa *antes da Era Comum* e é cronologicamente equivalente a *antes de Cristo*.

seus legados presentes até aos dias atuais. Washburn e Crowe (1998) sublinham também trabalhos de artesãos bizantinos de Revenna, de Constantinopla, bem como os seus sucessores em Veneza, além dos motivos islâmicos criados ao longo de todo o mediterrâneo e a Este da Índia. Mesmo sem referências diretas a criações matemáticas propriamente ditas, seus métodos e resultados são considerados notáveis fontes de registros geométricos e simetrias (Washburn & Growe, 1998). As simetrias também figuravam nas manifestações emanadas no tempo do Renascimento, quando "houve a valorização e retomada da arte da Antiguidade Clássica, além da valorização do homem e visão científica da natureza" (Lopes, Alves & Ferreira, 2015, p. 9) e que contou com artistas italianos (Maia, 2014). Destes pode destacar-se Leonardo Da Vinci (1452-1519), pelo estudo e determinação consciente de todas as possíveis simetrias em edifícios monumentais com o propósito de perceber a intrínseca harmonia de suas características mais importantes (Oliveira, 1997). A forma com a qual as capelas foram decoradas por Da Vinci revela o zelo deste artista (Veloso, 1998; Washburn & Growe, 1998).

O termo *grupo* teve sua primeira utilização através do jovem matemático Évariste Galois (1811-1832), cujos trabalhos foram reconhecidos somente décadas mais tarde, "como peças fundamentais da matemática moderna" (Pinto, 2012, p. 29). Já o termo *transformação* tem a sua atribuição associada ao matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899) (Yaglom,1988) que, em linhas gerais, remete a "uma bijeção de um conjunto nele próprio" (Pinto, 2012, p. 29). O *Teorema da Classificação das Isometrias* é comumente concedido a Michel Chasles (1793-1880), historiador e geómetra francês, reconhecido por suas inúmeras contribuições para a geometria projetiva (Pinto, 2012).

I.2. Mas afinal, o que é simetria?

Pasquini & Bortolossi (2015) apresentam quatro interpretações para a palavra *simetria* obtidas pela Versão 3.0 do Dicionário Houaiss Eletrônico.

- Simetria (Datação: 1563-1570):

- ✓ Conformidade, em medida, forma e posição relativa, entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória, um plano médio, um centro ou um eixo
- ✓ Derivação: por extensão de sentido, semelhança entre duas ou mais situações ou fenômenos; correspondência
- ✓ Conjunto de proporções equilibradas
- ✓ Rubrica: Matemática. Propriedade de uma função que se mantém invariável sob determinadas transformações

O Dicionário Online de Português[3] apresenta as interpretações que se seguem para *simetria*:

- ✓ Correspondência de posição, de forma, de medida em relação a um eixo entre os elementos de um conjunto ou entre dois ou mais conjuntos: simetria arquitetural; quadros dispostos com simetria.
- ✓ Harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares.
- ✓ Rubrica: Gramática. Correspondência regular entre os membros da frase.
- ✓ Rubrica: Matemática. Disposição de duas figuras que se correspondem ponto por ponto de tal sorte que os dois pontos correspondentes de uma e da outra estejam a igual distância de um ponto, de uma reta ou de um plano dado.

O Dicionário Priberam[4] online define *simetria* como:

- ✓ Relação de tamanho ou de disposição que entre si devem ter as coisas ou as partes de um todo em relação a um ponto, eixo ou plano.

E o Dicionário inFormal[5] online como:

- ✓ Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio, ou, ainda, que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo; harmonia

[3] Disponível em https://www.dicio.com.br/. Acessado em 03 jan 2018.
[4] Disponível em https://www.priberam.pt/dlpo/. Acessado em 03 jan 2018.
[5] Disponível em http://www.dicionarioinformal.com.br/. Acessado em 03 jan 2018.

resultante de certas combinações e proporções regulares. Remete à igualdade, à semelhança entre fatos.

- ✓ Quando algo pode ser dividido em duas partes iguais, ele é simétrico.

Hon e Goldstein (2008) apontam que *simetria* é a palavra de origem latina epistemologicamente mais próxima da palavra original grega *summetra*, e que o significado de *simetria* abordado por Euclides "é o que hoje conhecemos como comensurável" (Pasquini & Bortolossi, 2015, p. 79). De acordo com Hargittai e Hargittai (1999), o termo simetria advém do grego *symmetria* que significa a *mesma medida*. O livro *Origins of Mathematical Words: A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots* (Lo Bello, 2013) aponta que a origem da palavra *simetria* é grega e provém de *medido* ou *comensurado com*, *de mesma medida ou tamanho de*, a partir de, *com*, e, *uma medida*. Disso vem *simetria* como significado de devida proporção. Para Hon e Goldstein (2008), os textos antigos não abordam o termo "simetria", ou uma expressão que a utilize, com a conotação do conceito atual. De acordo com estes autores, o conceito teve um único significado na Grécia antiga: proporcionalidade. Nesta época, este conceito estava associado a beleza e a harmonia das proporções (Washburn & Crowe, 1998; Weyl, 1989; Hargittai & Hargittai, 1999), o que dava ao uso deste conceito "um caráter de subjetividade nos julgamentos" (Maia, 2014, p. 120).

No contexto matemático, o conceito de simetria foi utilizado por Platão, Aristóteles, Euclides e Arquimedes para referir que duas quantidades compartilhavam uma medida comum, isto é, eram comensuráveis. Já no contexto avaliativo, como por exemplo na apreciação da beleza por Ptolomeu (no Almagesto) e Vitruvius (na Arquitetura), significava proporção devida, bem proporcional, equilibrada. Para Vitruvius, no Livro I do seu tratado de arquitetura, simetria é definida como uma "composição apropriada dos elementos da construção e a relação entre as diferentes partes e o esquema geral como um todo" (Vitruvius, 1914, citado por Pasquini & Bortolossi, 2015, p. 75-76), comparando essas considerações na arquitetura com as proporções entre partes do corpo humano. Ele diz ainda que "sem simetria e proporção não podem existir princípios na construção de qualquer edifício, isto é, não existe uma relação precisa entre suas partes como no caso de um homem em boa forma” (Vitruvius, 1914, citado por Pasquini & Bortolossi, 2015, p. 76). Percebe-se que, antagonicamente à definição moderna de simetria, a qual trata do objeto em si, Vitruvius refere-se à proporção entre as partes e o todo (Pasquini & Bortolossi, 2015). É de grande relevância também perceber a definição utilizada por Euclides, presente no Livro X da sua obra *Os Elementos*, que diz “magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida é possível produzir-se” (Euclides, 2009, citado Pasquini & Bortolossi, 2015, p. 79). Ainda em relação a esta mesma obra de Euclides, e entre as cinco noções comuns sobre este conceito, Maia (2014) aponta para a de “coisas que coincidem uma com a outra são iguais” (p. 123), enquanto que Oliveira (1997), associa a noção geral de congruência e, condignamente, define-se através do conceito de isometria do plano.

Em 1872, a ideia de invariância foi amplamente explorada através da publicação do Programa de Erlanger por Félix Klein (1849-1925), que favoreceu a associação das propriedades das transformações às propriedades dos objetos, viabilizando caracterizá-las como o estudo geométrico de objetos no plano (Akay, 2011). Este Programa propunha a abordagem da geometria de forma unificada e classificatória por meio das propriedades de figuras que permanecem invariantes pela ação de um grupo particular de transformações (Katz, 2009; Boyer, 1998). Assim, o conceito de grupo configurava-se numa maneira adequada de especificar as geometrias que surgiram ao longo do século (Boyer, 1998), encaminhando-nos a uma definição de geometria plana euclidiana. Para Mabuchi (2000), o uso do conceito de *simetria* por Klein traduzia-se por *isometria*, em português, e através de um princípio mais abrangente que axiomático, motivou investigações sobre grupos relacionados com *as geometrias*[6], consequentemente estabelecendo o termo *transformação geométrica*. Do ponto de vista epistemológico e metodológico, segundo Hon e Goldstein (2008), o conceito moderno de simetria é o único conceito científico que pode ser usado como uma propriedade ou como um argumento, um princípio. Este conceito moderno, como é entendido atualmente, surgiu em 1974, na obra *Elementos de Geometria* de Adrien-Marie Legendre (1752-1833),

[6] A expressão *as geometrias* era utilizada, à época, para referenciar ao que hoje referimo-nos por *a geometria* (Correia & Ferreira, 2007).

e refere-se a uma relação lógico-matemática e a uma propriedade intrínseca de uma entidade matemática que, sob uma certa classe de transformações, deixam algo inalterado (invariante). Anos mais tarde, já nos anos 70 do século XX, as transformações geométricas e o movimento das formas seriam revalorizados como uma prática viável ao entendimento das demonstrações de teoremas da geometria euclidiana (Outhred & Owens, 2006).

A história da matemática revela o uso de padrões unidimensionais e bidimensionais por volta de 1500 a. E. C. (Washburn & Growe, 1998). No entanto, e sem o compromisso temporal da classificação dos frisos e padrões, destacamos a obra de Fedorov (1853-1919) (1891), publicada na Rússia, em 1891, que definiu todos os dezessete tipos de padrões. Esta obra foi internacionalmente disseminada a partir de 1920, pelos trabalhos de Niggli (1924, 1926, citados por Washburn & Growe, 1998) e Polya (1924). No mesmo ano, apareciam os magníficos e futuramente conhecidos trabalhos de Escher (1898-1972), intimamente ligados à pavimentação de superfícies com elementos figurativos de animais e pessoas, ricos em motivos simétricos (Maia, 2014). Outro trabalho, de notável reconhecimento pela "enumeração completa, explícita e deliberada dos padrões uni e bidimensionais de duas cores" (Washburn & Growe, 1998, p. 5) é encontrado nos artigos do físico H. J. Woods (1935, 1936, citado por Washburn & Growe, 1998). Em 1948, foi a vez da geóloga Anna O. Shepard, especialista em análise petrográfica de cerâmica, apresentar a existência dos sete tipos de frisos e descrever como classificar padrões com motivos alternados (Washburn & Growe, 1998).

O Palácio de Alhambra, em Granada, Espanha, construído no século XIII, é uma das maiores fontes de criações contendo transformações geométricas associadas a arte, cultura e património em geral, onde é possível encontrar todos os sete tipos de friso e os dezessete tipos de padrões.

I.3. Conexões existentes entre simetrias e outras áreas

De uma maneira mais ampla, Lucas e Rosito (2018) afirmam que, tida como "um instrumento essencial para a construção do conhecimento em outras áreas curriculares" (p. 169), com a matemática é possível resolver problemas da vida cotidiana, inclusive pela sua estreita relação com o mundo do trabalho. Assim, a matemática é, certamente, fulcral na construção da cidadania e da sociedade, devendo ser promovida de forma que todos a ela tenham acesso, “levando-se em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual dos indivíduos” (Lucas & Rosito, 2018, p. 169).

No caso da geometria, através dos estudos das transformações geométricas, em geral, é possível constituir conexões entre diversas áreas da própria matemática, como por exemplo a álgebra e a trigonometria, e conexões inerentes a uma mesma mesma área, como vincular diferentes geometrias em relação a aprendizagens relacionadas com o espaço, forma e medida (Bansilal & Naidoo, 2012).

Para além do universo escolar, também é possível perceber a presença destas temáticas situada nas mais diversas áreas. Num viés científico, o conceito de simetria alcança diversas áreas do saber (Shirali, 2001), como, por exemplo, a psicologia, a antropologia, a história, a matemática (Washburn & Crowe, 1998), a cristalografia, a física (Shirali, 2001; Veloso, 1998), a arte (Shirali, 2001), a biologia, a química (Giannouli, 2013), a pintura, a escultura, a arquitetura, a prosa, a música (Giannouli, 2013) e a poesia (Shirali, 2001), onde se podem encontrar diferentes conceitualizações que constituem um campo fértil para discussões sobre sua abordagem.

Expandindo-se para o conceito de padrão, de forma mais genérica, como quando nos referimos a “uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades” (Borralho, Cabrita, Palhares & Vale, 2007, p. 193), percebemos a sua abrangência à Sociologia e à poesia, e também a disciplinas como a Educação Visual, a Educação Física e a Geografia. Borralho *et al*. (2007), não se restringe apenas à geometria ao apontar a ampliação da abrangência do uso deste conceito no âmbito de fenómenos naturais, exemplificando, através de termos presentes no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), por padrão estrelar, padrão das nuvens, padrão do dia e da noite, padrão das marés, padrão das dunas, padrão de relações vegetais, padrão dos componentes do DNA animal, padrões migratórios, padrão de produtividade entre outros.

Sua característica mais marcante, a repetição, é uma propriedade intrínseca da natureza, da ciência, da arte, da música e da vida em geral (Liu & Toussaint, 2011), comumente percebida por qualquer indivíduo, por vezes involuntariamente. Isto se deve às nossas capacidades inatas ou ao notável dom para reconhecimento de padrões nas manifestações humanas e naturais (Washburn & Crowe, 1998; Shirali, 2001), proporcionados por nossas estruturas oculares e mentais (Washburn & Crowe, 1998; Hargittai & Hargittai, 1999) inclusive aquando da existência de irregularidades ou omissões num padrão global (Hargittai & Hargittai, 1999). Para Borralho *et al*. (2007), o conceito de padrões extrapola o que consideramos de imediato ao depararmo-nos com padrões visuais presentes, por exemplo, em tecidos, papel de parede e peças de arte, atraídos para as regularidades já que "tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões" (Borralho *et al*., 2007, p. 194), como que numa tentativa humanamente tendenciosa de criar ordem no caos (Storr, 1992).

Direcionando-se mais à arte e percepções visuais, Arnheim (1980) considera que

> Uma composição desequilibrada parece acidental, transitória, e portanto inválida. Seus elementos apresentam uma tendência para mudar de lugar ou forma a fim de conseguir um estado que melhor se relacione com a estrutura total (p. 13).

A obtenção de informações de um determinado ambiente através da percepção visual de padrões por parte de um indivíduo permite que uma mesma imagem seja vista e interpretada à luz do conhecimento e das necessidades pessoais de cada um, variando de indivíduo para indivíduo (Washburn & Crowe, 1998), o que eleva a importância em "perceber quais os aspetos do processo visual – como a informação é recebida, digerida, armazenada e recuperada – estão relacionados com fatores culturais e quais são universais" (Washburn & Crowe, 1998, p. 15). Este fato pode ter sido responsável pelo interesse pioneiro dos psicólogos por este fenômeno (Washburn & Crowe, 1998; Lindquist & Shulte, 1987).

Antes de iniciarmos as primeiras definições, é necessário fundamentar dois pontos a serem considerados:

1. As definições que serão apresentadas a seguir se limitam às transformações geométricas no plano euclidiano[7].

[7] Utilizaremos a notação IR², a qual remete ao conjunto de todos os pares ordenados de números reais.

2. Aos pontos no plano euclidiano referir-nos-emos por letras latinas maiúsculas e em itálico.
3. As retas traçadas sobre o plano euclidiano serão designadas por letras latinas minúsculas e em itálico.

Iniciamos pelas definições de transformação geométrica.

I.4. Transformações geométricas

- Definição TG1 (Veloso, 2012, p. 5): Uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto *P* de IR^2 um e um só ponto *P'* de IR^2, verificando as seguintes condições:

a) Se *P* e *Q* são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes *P'* e *Q'* são também distintos;

b) Se *U* é um ponto qualquer de IR^2, então existe um ponto *V* em IR^2 tal que o seu correspondente pela transformação geométrica T é *U*.

Pela definição apresentada é possível perceber que uma transformação geométrica é uma função definida em IR^2, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano IR^2. Assim, o ponto *P'* é a imagem do ponto *P* por meio da transformação geométrica T, e o ponto *P* é a pré-imagem de *P'* por meio de T. Considerando que, por definição, uma figura plana F é um conjunto de pontos do IR^2, a imagem de F por meio de T é, por definição, uma figura plana F', obtida pelas imagens dos pontos de F, ou seja, F' = T(F). Para Veloso (2012), a "noção de função é fundamental e está presente em toda a matemática" (p. 18).

- Definição TG2 (Veloso, 2012, p. 5): Seja T uma transformação geométrica qualquer, *N* um ponto qualquer de IR^2 e *M* a pré-imagem de *N*. Chama-se transformação geométrica inversaa de T, e utiliza-se a notação T^{-1}, a correspondência $N \mapsto M$ assim definida.

Através das condições a) e b) da definição TG1, é possível constatar que T^{-1} é, de fato, uma transformação geométrica. Isto posto, verifica-se que para cada transformação geométrica T existe uma transformação geométrica inversa T^{-1}.

Sejam S e T duas transformações geométricas, *P* um ponto qualquer do IR^2 e *P'* a imagem de *P* por meio de T, ou seja, *P'* = T(*P*). Sendo S uma transformação geométrica e *P'* um ponto do IR^2, existe um ponto *P"*, também de IR^2, que é imagem de *P'* por meio de S. Desta forma, estabelecemos (Figura 1) uma correspondência $P \mapsto P'' = S(T(P)) = S \bullet T(P)$.

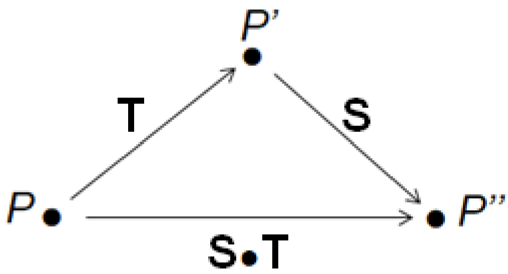


Figura 1: Composição de transformações geométricas

Também é possível constatar que a correspondêcia $P \mapsto P''$ é uma transformação geométrica.

- Definição TG3 (Veloso, 2012, p. 6): Dada suas transformações geométricas S e T, designamos por produto de S por T (ou composta de S com T) a correspondência $P \mapsto P''$, em que *P'* = T(*P*) e *P"* = S(*P'*). O produto de S por T será designado por S•T.

A operação que associa cada par de transformações geométricas (S, T) a uma transformação geométrica S•T é dita composição de S com T. É importante perceber que esta operação não é comutativa, ou seja, não podemos garantir que S•T = T•S.

Seja T uma transformação geométrica. Designamos *P* por ponto fixo de T se o ponto *P* é transformado em si próprio por meio de T, ou seja, T(*P*) = *P*. Chamamos de identidade a transformação geométrica I com a qual a imagem de cada ponto é o próprio ponto, ou seja, I(*P*) = *P*. Assim, todos os pontos do plano são fixos para a transformação identidade. Além disso, para qualquer transformação geométrica T, tem-se $T^{-1} \bullet T = T \bullet T^{-1} = I$.

Duas transformações geométricas S e T são ditas iguais se, para qualquer ponto *P* do plano, as imagens de *P* coincidem tanto por meio de S quanto por meio de T, ou seja, S(*P*) = T(*P*).

De acordo com Veloso (2012), o estudo das transformações geométricas permite uma operosidade ao ensino da geometria elementar que não era possível através da versão estática de Euclides, qualidade esta que confere às transformações geométricas a característica de um instrumento eficaz para a resolução de problemas.

São exemplos de transformações geométricas[8]: translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante, homotetia[9] (ou dilação), semelhança em espiral[10] (ou dilação rotativa), alongamento[11] e inversão[12]. De entre os apresentados, apenas os quatro primeiros pertencem à categoria das isometrias por preservarem distâncias. Apenas essas quatro serão abordadas com maior profundidade neste capítulo, em consequência do nosso interesse durante esta investigação.

Vamos, agora, definir as quatro primeiras transformações geométricas, as únicas de entre as apresentadas que são isometrias. De acordo com nossos interesses com esta investigação, para além de apresentarmos exemplos da aplicação destas transformações geométricas sobre um determinado ponto, apresentaremos também estas aplicações em figuras – enquanto conjunto de pontos do plano – para ilustrar os exemplos de cada uma das transformações geométricas que se seguem.

---

[8] Um maior aprofundamento destes exemplos podem ser apreciados na bibliografia indicada na obra de Veloso (2012), onde o autor destaca o livro *Transformações Geométricas*, de Franco de Oliveira, o capítulo I.2 do primeiro volume dos *Textos Didácticos* de Sebastião e Silva e os *livros Geometric Transformations*, vol. I, II e III, de I. M. Yaglon, *Transformazioni Geometriche*, de Maria Dedò, *Transformation Geometry*, de George Martin, e *Euclidean Geometry and Transformations*, de Clayton Dodge.

[9] É um tipo de semelhança.

[10] Também é um tipo de semelhança.

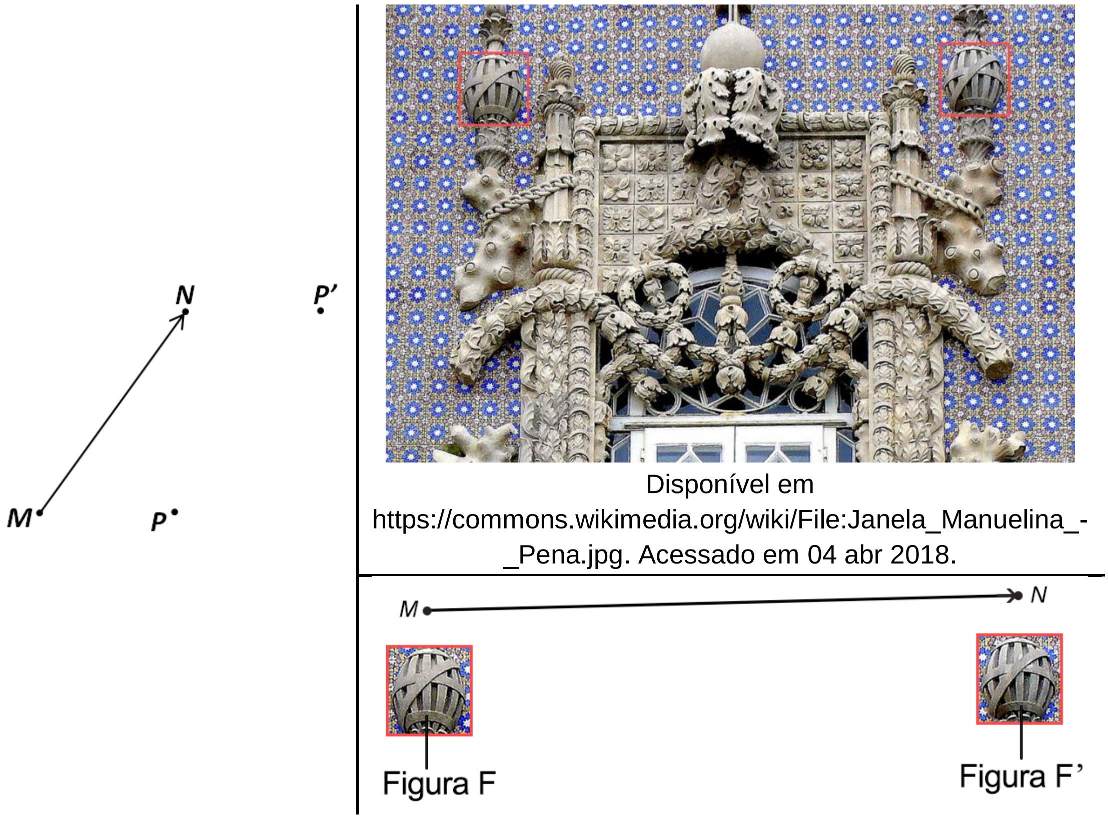
[11] É um exemplo de afinidade, uma categoria de transformações geométricas que contempla as semelhanças.

[12] De acordo com a definição apresentada neste material, inversão não é estritamente uma transformação geométrica devido o espaço de atuação desta não ser o plano euclidiano, mas sim uma extensão do mesmo (o plano inversivo).

I.4.1. Translação

- Dados dois pontos *M* e *N* quaisquer do plano, o segmento orientado MN é um segmento de reta MN com um sentido atribuído (de *M* para *N*). O ponto *M* é dito a origem deste segmento orientado e o ponto *N* a sua extremidade. Assim, um segmento orientado tem comprimento (ou módulo), direção (a mesma da reta MN) e sentido. Se dois segmentos orientados têm o mesmo comprimento, a mesma direção (isto é, são paralelos) e o mesmo sentido, estes são ditos equipolentes.

  Definição de translação (Veloso, 2012, p. 7): Dado um segmento orientado MN, diz-se translação definida por MN a transformação geométrica T que faz corresponder, a cada ponto *P* do plano, o ponto *P'* que é extremidade do segmento PP' equipolente a MN e tendo *P* como origem (Figura 2).



Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Janela_Manuelina_-_Pena.jpg. Acessado em 04 abr 2018.

Figura 2: Definição de translação

Se *M* coincide com *N*, ou seja, o módulo de MN é zero, a translação reduz-se à transformação identidade. A translação inversa de T é a translação T^{-1}, e é definida pelo segmento orientado NM. Dois segmentos orientados equipolentes definem a mesma translação. Como define-se vetor como o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um dado segmento orientado MN, é comum dizer que a translação é definida pelo vetor MN.

I.4.2. Rotação

- Dados três pontos, *A*, *O* e *B*, o ângulo orientado φ é o ângulo definido pelas semirretas AO e OB, em que se escolheu AO como lado-origem do ângulo e OB como lado-extremidade. Supõe-se assim definido um sentido positivo (sentido anti-horário, por convenção), o que permite definir igualdade (ou congruência) de ângulos orientados. Se φ é um ângulo orientado, - φ será por definição o ângulo orientado definido pelas semirretas OB (lado-origem) e OA (lado-extremidade).

  Definição de rotação (Veloso, 2012, p. 7): Sejam dados um ponto *C* e um ângulo orientado φ. Diz-se rotação R de centro *C* e ângulo φ a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto *P* do plano, o ponto *P'* = R(*P*) nas seguintes condições:

  1) R(*C*) = *C*, isto é, o ponto *C* é fixo para a rotação R.

  2) Se $P \neq C$,

     - o ângulo PCP' é igual a φ;

     - os segmentos CP e CP' são iguais (Figura 3).

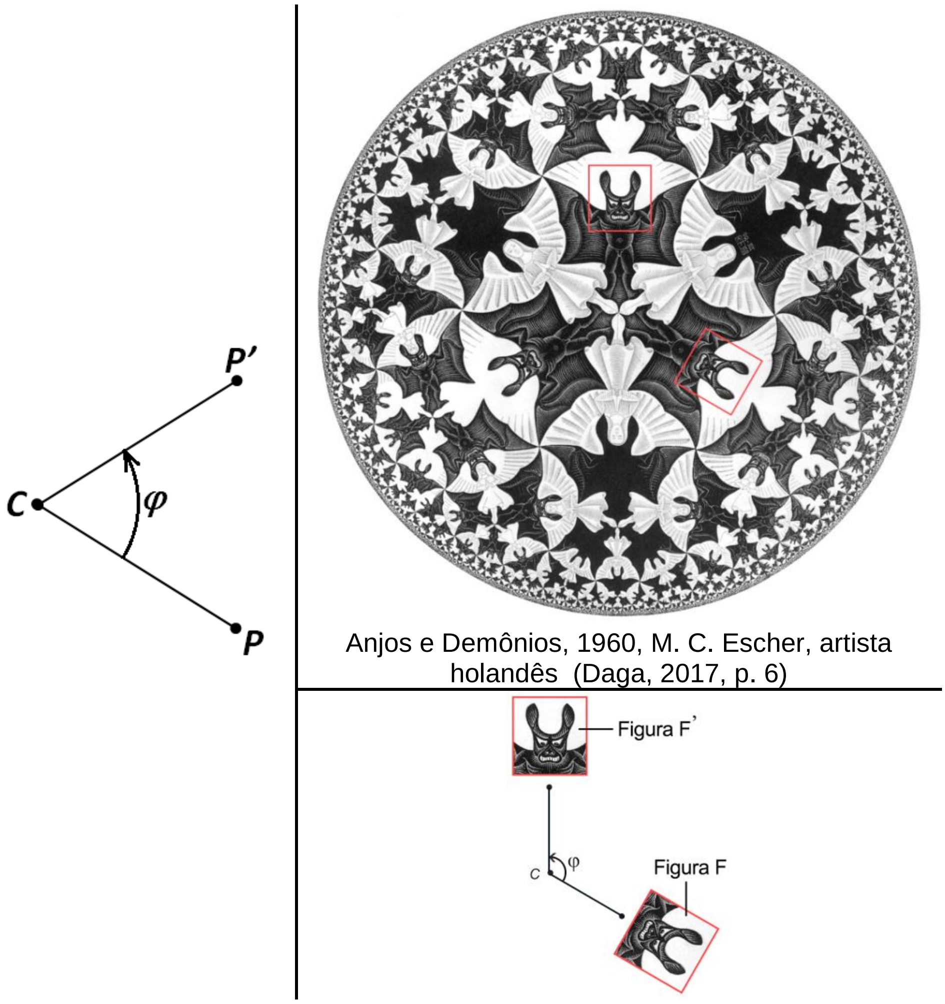


Figura 3: Definição de rotação

Uma rotação em que φ é múltiplo inteiro de 360° é a transformação identidade. A rotação inversa de R é a rotação R^{-1} de centro *C* e ângulo - φ. Duas rotações com mesmo centro e ângulos que difiram de um múltiplo inteiro de 360° (ou 2π radianos) são a mesma transformação geométrica. Chamamos de meia-volta a uma rotação de 180° (ou π radianos).

Veloso (2012) salienta um possível equívoco cometido por muitos docentes e discente aquando da associação dos termos translação e rotação a movimentos[13], no sentido usual da vida corrente. À luz do rigor matemático, o que ocorre não é um deslocamento do ponto *P* para a posição do ponto *P’*, e sim uma transformação, pois nas transformações geométricas não há movimentos e o que assim faz alusão é, na verdade, uma representação física da correspondência aplicada a todos os pontos do plano (Cabrita, Pinheiro,

[13] Por vezes, alguns autores referem-se por *deslocamento* a estes *movimentos*.

Pinheiro & Sousa, 2008). Contudo, esta associação e visualização podem ser aliadas em favor da aprendizagem destes conceitos, a fim de relacionar as duas posições dos pontos. Gradativamente, ao longo dos anos de escolaridade, a ideia de correspondência deve ser compreendida e deve substituir a ideia de movimento (Veloso, 2012).

I.4.3. Reflexão

- **Definição de reflexão (Veloso, 2012, p. 8):** Dada uma reta *e*, diz-se reflexão E de eixo *e* a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto *P* do plano o ponto *P'* = E(*P*) que verifica as seguintes condições:

  1) se *P* pertence a *e*, *P* = *P'*;

  2) se *P* não pertence a *e*, a mediatriz do segmento *PP'* é a reta *e* (Figura 4).

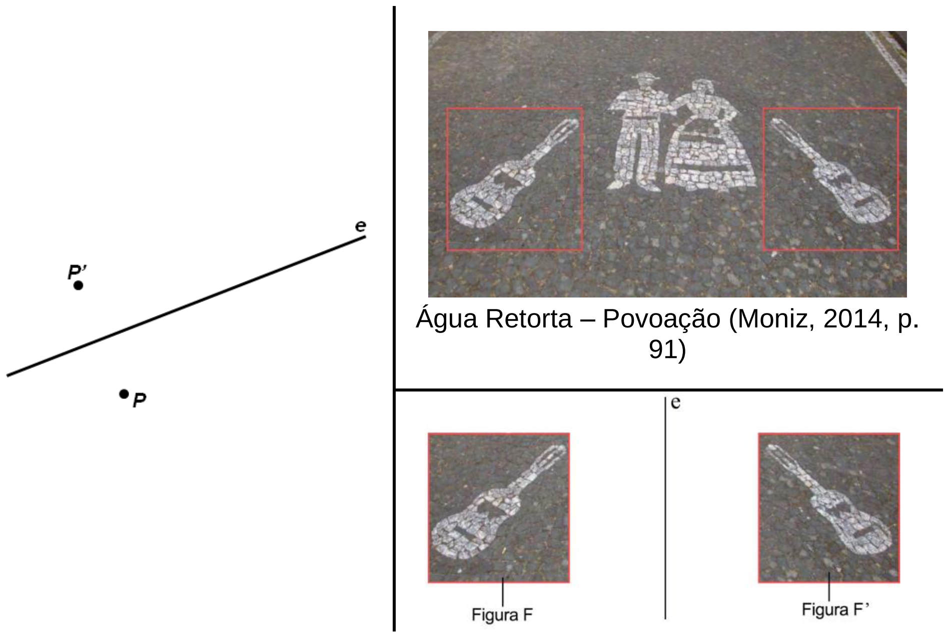


Figura 4: Definição de reflexão

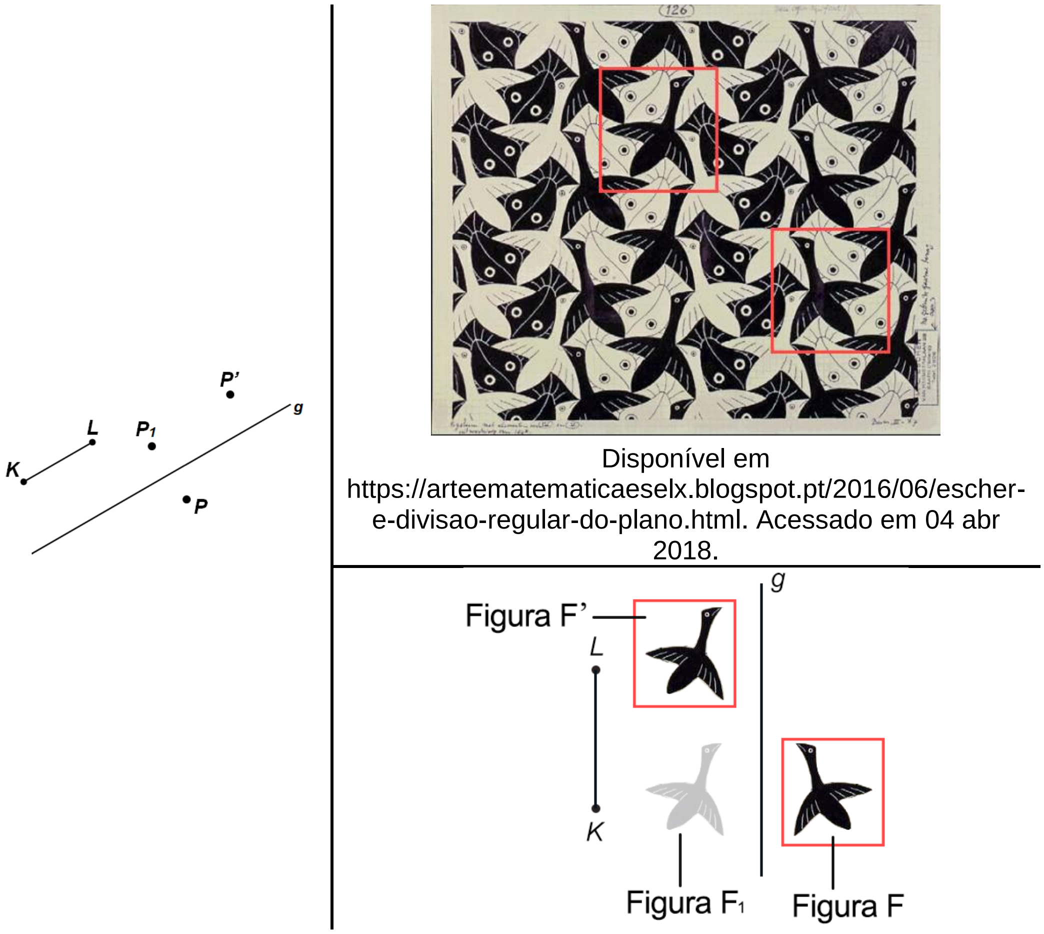
Se E é uma reflexão, então E^{-1} é a mesma reflexão. A composta de uma reflexão com ela própria é a identidade, ou seja, $E^2 = E \bullet E^{-1} = I$.

É de grande importância salientar, e voltaremos a tratar disso mais adiante, que a reflexão é uma transformação fundamental, uma vez que qualquer isometria é um produto de reflexões (Veloso, 2012). Outro aspecto fulcral é reconhecer que, matematicamente falando, a palavra *simetria* muitas vezes é utilizada de forma inadequada. Comumente, o termo *reflexão* é substituído por *simetria axial* ou *simetria bilateral*, e assim, o ponto *P’* = E(*P*) é considerado o ponto simétrico de *P* em relação ao eixo *e*. Veloso (2012) insiste que devemos acostumar-nos a designá-lo por *reflexão*, simplesmente. Desta forma, o ponto *P’* = E(*P*) deve ser nomeado por imagem de *P* por meio da reflexão de eixo *e*. O mesmo cuidado por parte dos docentes incide sobre a consideração de que, assim como todas as transformações geométricas, a reflexão diz respeito a todos os pontos do plano e não apenas de uma figura pertencente a este plano. Assim, apesar de compreensível por parte de alunos dos anos iniciais, a frase *fazer a translação T desta figura* deve ser, num momento propício, substituída por *ver qual é a imagem desta figura pela translação T do plano* (Veloso, 2012).

Segundo aponta Maia (2014), é provável que os docentes em exercício tenham algum domínio sobre as isometrias de translação, a rotação e a reflexão, uma vez que estas podem ter sido tratadas em algum momento da sua formação, além de figurarem entre os conteúdos de programas anteriores ao atual, ao menos no ensino secundário. Entretanto, somente com o PMEB anterior (Ponte *et al*., 2007), o conceito de reflexão deslizante e de simetrias em representações como frisos e rosáceas ganharam algum espaço no contexto curricular, diminuindo sua notoriedade no programa atual. Vejamos a definição de reflexão deslizante a seguir, segundo Veloso (2012).

I.4.4. Reflexão deslizante

- **Definição de reflexão deslizante (Veloso, 2012, p. 9):** Dados um segmento orientado KL e uma reta *g* paralela ao segmento KL, sejam T a translação definida pelo segmento KL e G a reflexão definida pelo eixo *g*. Diz-se reflexão deslizante definida pela reta g e pelo segmento orientado KL a transformação geométrica T●G (Figura 5).



Disponível em https://arteematematicaeselx.blogspot.pt/2016/06/escher-e-divisao-regular-do-plano.html. Acessado em 04 abr 2018.

Figura 5: Definição de reflexão deslizante

Em consequência direta de admitirmos que uma transformação geométrica é biunívoca (Cabrita *et al*., 2008), têm-se que toda transformação geométrica admite inversa. Assim, a composta de uma transformação geométrica qualquer com a sua inversa é a transformação identidade, que por sua vez é o elemento neutro da operação de composição (Bastos, 2007).

Veloso (2012) destaca que está "obviamente fora de questão a introdução do conceito de grupo aos alunos do Ensino Básico" (p. 22), embora a teoria de grupos permeie constantemente os estudos das transformações geométricas, sendo plausível o despertar de interesse por parte dos docentes. O conjunto das isometrias, guarnecido pelas operações de composição, goza da estrutura de grupo, isto é, verifica as propriedades de fecho, associatividade, existência de elemento neutro e existência de elemento inverso (Maia, 2014). Este vínculo das transformações geométricas à Teoria de Grupos esclarece "a pertinência do estudo da reflexão deslizante, pela verificação da propriedade de fecho no grupo das isometrias no plano" (Maia, 2014, p. 137). Desta forma, a reflexão deslizante é tida propriamente como uma isometria e não apenas a composição de uma translação com uma reflexão e “a partir de agora se pode definir que dois entes geométricos são congruentes se existir uma isometria que transforme um no outro” (Palhares, 2004, p. 358).

Cabe destacar que, dados dois pontos distintos, qualquer uma das transformações geométricas apresentadas anteriormente – translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante – é capaz de transformar qualquer um destes pontos no outro. A pertinência em se considerar a reflexão deslizante como uma isometria propriamente dita, e por sua vez, uma transformação geométrica, e não apenas uma composição de isometrias permite que, ao nos referirmos a duas figuras congruentes, seja possível conseguir transformar qualquer um delas na outra com a utilização de apenas uma destas transformações sem depender da utilização de composição de isometrias. Apresentaremos um exemplo ilustrativo desta propriedade logo a seguir a apresentação de algumas definições e teoremas relacionados às isometrias.

I.5. Isometrias

- **Definição de isometria (Veloso, 2012, p. 21)**: Diz-se que uma transformação geométrica T é uma isometria se, para quaisquer dois pontos P e Q, se tem dist(P',Q') = dist(P,Q), em que P' = T(P) e Q' = T(Q).

É importante perceber que a condição de preservação das distâncias é a característica mais importante das isometrias, donde emanam seguintes propriedades.

- **Teorema I1 (Veloso, 2012, p. 21):** As isometrias preservam as noções de *situado entre*[14], ponto médio, segmento, semirreta, reta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularidade.

[14] Seja T uma isometria qualquer. Diz-se que o ponto *B* está *situado entre A* e *C* se dist (*A*, *B*) + dist (*B*, *C*) = dist (*A*, *C*). Então, se *A′*, *B′* e *C′* forem respectivaente as imagens de *A*, *B* e *C*, teremos também que dist (*A′*, *B′*) + dist (*B′*, *C′*) = dist (*A′*, *C′*) e portanto *B′* está situado entre *A′* e *C′* (Veloso, 2012, p. 21).

Consideremos o conjunto de todas as isometrias do plano designado por Iso(IR²). Assim, Iso (IR²) verifica as seguintes propriedades:

a) o produto de duas isometrias é sempre uma isometria;

b) a inversa de uma isometria é ainda uma isometria;

c) a transformação **Identidade** é uma isometria;

d) sendo S, T e R isometrias, tem-se S•(T•R) = (S•T)•R (associatividade)

A partir destas propriedades, podemos concluir, em relação à composição de transformações geométricas, que o conjunto Iso(IR²) tem estrutura de grupo.

- **Teorema I2 (Propriedade Fundamental das Isometrias) (Veloso, 2012, p. 25):** Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos quaisquer, iguais[15]. Então existe uma e uma só isometria T do plano tal que *A'* = T(*A*), *B'* = T(*B*) e *C'* = T(*C*).

Deste teorema anterior, cabe-nos enunciar dois outros teoremas que dependem da consideração da orientação dos triângulos. A orientação de um triângulo pode ser definida como a ordem de *leitura* dos vértices do triângulo quando se define um sentido, por exemplo, *anti-horário*. Observe o triângulo a seguir (Figura 6):

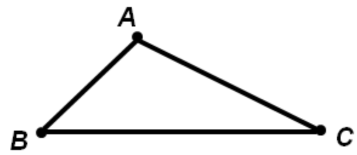


Figura 6: Orientação dos triângulos

Partindo do vértice *A* e adotando o *sentido anti-horário*, a orientação deste triângulo pode ser apresentada por ABC, ao passo que, ainda partindo do vértice *A*, se adotarmos o *sentido horário* a orientação deste triângulo passa a

[15] Baseando-se na obra de Euclides, a noção de igualdade de triângulos remete a correspondência entre as medidas de seus lados, ou seja, A'B' = AB, A'C' = AC e B'C' = BC, o que, consequentemente, permite o processo de *levar à sobreposição*, expressão que fora substituída por *geometricamente igual* a partir da Matemática Moderna a fim de evitar o abuso de linguagem que seria considerar como *iguais* a dois conjuntos de pontos distintos. Na revisão da obra de Euclides, Hilbert opta, muito adequadamente, pela utilização do termo *congruentes* (Veloso, 2012).

ser notada por ACB. Sugerimos ao leitor que verifique, mesmo que utilizando apenas a intuição e imaginação mais aguçada, que as isometrias de translação e de rotação preservam a orientação dos triângulos (isometrias diretas), enquanto que as isometrias de reflexão e de reflexão deslizante, não presenrvam (isometrias opostas). Além disso, note que o produto, ou inversa, de isometrias diretas é sempre uma isometria direta, o que permite concluir que os produtos, ou inversas de translações e rotações são sempre, respectivamente, translações e rotações. Já o produto de duas isometrias opostas é sempre uma isometria direta.

O fluxograma a seguir apresenta um resumo das propriedades das isometrias no que diz respeito a preservação (direta) ou não (oposta) da orientação dos triângulos e os pontos e retas fixas, caso existam (Figura 7).

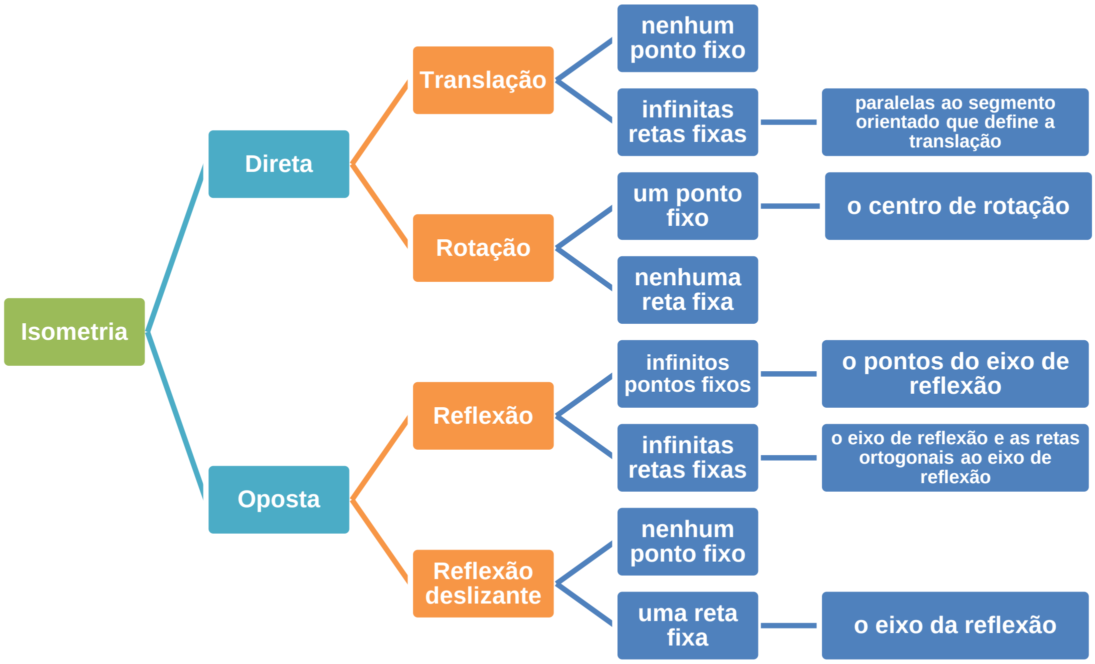


Figura 7: Propriedades de isometrias (Veloso, 2012; Cabrita *et al*., 2008)

Vejamos a seguir os dois teoremas necessários mencionados anteriormente:

- **Teorema I3-A (Veloso, 2012, p. 27):** No caso dos triângulos ABC e A'B'C' terem a mesma orientação, a isometria cuja existência e unicidade são afirmadas pelo teorema fundamental das isometrias é uma translação ou uma rotação.

- **Teorema I3-B (Veloso, 2012, p. 28):** No caso dos triângulos ABC e A'B'C' terem a orientações opostas, a isometria cuja existência e unicidade são afirmadas pelo teorema fundamental das isometrias ou é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

Unificando estes dois teoremas, enunciamos o teorema a seguir:

- **Teorema I3 (Veloso, 2012, p. 30):** Sendo ABC e A'B'C' dois triângulos congruentes quaisquer, a isometria que transforma ABC em A'B'C' – cuja existência e unicidade é garantida pela propriedade fundamental das isometrias –, é sempre de um dos quatro tipos seguintes: translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante (isometrias básicas).

I.5.1. Produto (ou composição) de reflexões

I.5.1.1. Produto de duas reflexões

- **Teorema PR1-A (Veloso, 2012, p. 32):** Sejam E e F duas reflexões distintas de eixos paralelos *e* e *f*. O produto E●F é uma translação definida por um segmento orientado nas seguintes condições:
  - **direção:** perpendicular às retas *e* e *f*;
  - **sentido:** de *f para e*;
  - **comprimento:** igual ao dobro da distância entre *e* e *f*.
- **Teorema PR1-B (Veloso, 2012, p. 32):** Sejam E e F duas reflexões de eixos não paralelos *e* e *f*. O produto E●F é uma rotação cujo centro é a interseção de *e* com *f* e o ângulo tem amplitude igual ao dobro da amplitude do ângulo orientado definido pelas retas *f* e *e* (*f* sendo o lado-origem e *e* sendo o lado-extremidade).

Novamente, aglutinando estes dois teoremas, enunciamos o seguinte teorema:

- **Teorema PR1 (Veloso, 2012, p. 32):** O produto E●F de duas reflexões é:

- a identidade, se E = F;
- uma translação, se E e F têm eixos paralelos não coincidentes;
- uma rotação, se E e F têm eixos não paralelos.

Ainda sobre composições de isometrias, apresentamos o Quadro 1.

Quadro 1: Composição de isometrias (Carvalho, Santos, Silva & Teixeira, 2016)

Composição	reflexão	translação	rotação	reflexão deslizante
reflexão	translação ou rotação	reflexão ou reflexão deslizante	reflexão ou reflexão deslizante	reflexão ou reflexão deslizante
translação	reflexão ou reflexão deslizante	translação	rotação	reflexão ou reflexão deslizante
rotação	reflexão ou reflexão deslizante	rotação	translação	reflexão ou reflexão deslizante
reflexão deslizante	translação ou rotação	reflexão ou reflexão deslizante	reflexão ou reflexão deslizante	translação ou rotação

Com este quadro, mesmo que de forma intuitiva, é possível perceber que existem composições de isometrias que se reduzem a uma isometria única. Como exemplo disto, temos que uma translação por meio de um vetor $\vec{v}$ aplicada posteriormente a uma translação por meio de um vetor $\vec{u}$ reduz-se a uma única translação por meio do vetor $\vec{u} + \vec{v}$. De uma forma geral, o que se pode perceber com o quadro anterior, é que

> as únicas isometrias planas que são autónomas, no sentido em que não se reduzem, são as translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. É comum chamar-se a este conjunto de quatro transformações, as quatro isometrias do plano. A composição de quaisquer duas destas quatro transformações resulta de novo numa das quatro (Carvalho *et al*., 2016, p. 144).

I.5.1.2. Produto de três reflexões

- **Teorema PR2 (Veloso, 2012, p. 33):** O produto de três reflexões cujos eixos são concorrentes num ponto ou paralelos entre si é uma reflexão.

- **Teorema PR3 (Veloso, 2012, p. 34):** O produto de três reflexões distintas cujos eixos não são nem concorrentes num ponto nem paralelos entre si é uma reflexão deslizante.

Diante dos teoremas PR1, PR2 e PR3, a **reflexão** é considerada a **isometria fundamental**, pois toda isometria pode ser obtida como produto (ou composta) de duas ou três reflexões (Veloso, 2012; Araújo, 2002).

I.6. Algumas considerações prévias ao encaminhamento de definições necessárias à definição formal de simetria

Apontamos algumas considerações importantes a serem levadas em conta antes mesmo da formalização do conceito de simetrias. Primeiramente, corroboramos com Veloso (2012) ao sugerir que o leitor deve esforçar-se em se afastar da noção superficial de simetria, isto é, a de simetria axial ou bilateral, muitas vezes desenvolvida pelo ensino ao qual nós, professores, fomos submetidos no passado. Outro importante aspecto está relacionado com as cores contidas nas imagens selecionadas, característica de total relevância principalmente quando se deseja utilizar imagens provindas de recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Embora Veloso (2012) não considere uma limitação, o autor recomenda que sejam sempre utilizadas imagens contendo apenas duas cores, onde uma delas seja considerada a cor do fundo (*cor* do plano, em geral, branca) e a outra (em geral, preta), a qual deve contrastar com a anterior, será considerada a cor do *desenho* da figura, isto é, os pontos que estão assinalados no plano. No caso da nossa investigação, amplamente dependente de imagens que retratam a realidade de recursos artísticos, culturais e patrimoniais, é importante considerar a variação de cores comuns a tais imagens, ou acordar determinar o que pode ou deve ser desconsiderado. Também em relação ao uso de imagens representativas de tais recursos, é comum perceber-se algumas imperfeições, desgastes, sombras ou reflexos que podem inviabilizar algumas conceitualizações, a menos que algumas abstrações sejam acordadas previamente. Outro ponto é sobre o ***motivo***, isto é, os elementos que se repetem num padrão. É extremamente importante não se ter em conta a natureza destes motivos, pois assim a tarefa de classificação destes padrões seria infindável (Veloso, 2012). O que nos interessa em relação a este motivo é a forma como esta repetição se processa, ou seja, a estrutura, a organização da figura como um todo. Assim, se duas figuras têm a mesma organização, apesar de motivos distintos (Teixeira, 2013), estas devem ser classificadas como sendo “do mesmo tipo” (Veloso, 2012, p. 50), (Figura 8) o que poderá ser percebido com as definições que serão apresentadas mais adiante, ainda neste capítulo.

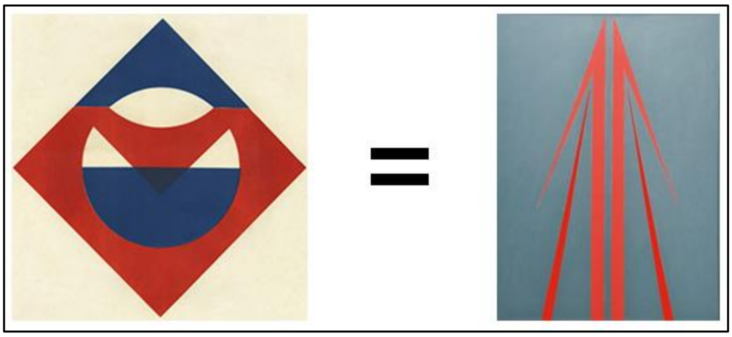


Figura 8: Rosáceas do mesmo tipo (esquerda: Alice Jorge, s/ título, litografia[16]; direita, Fernando Lanhas, s/ título, óleo sobre tela[17])

Passamos a algumas definições prévias à conceitualização de simetrias.

I.6.1. Movimento rígido de um plano

- **Conceitualização de movimento rígido de um plano (Veloso, 2012, p. 51):** Considere o plano IR² e uma figura F nele desenhada. A partir daí, fazemos uma cópia (IR²)’ do plano incluindo a cópia F’ da figura, em seguida, deslocamos a cópia no espaço, podendo até volta-la sobre si mesma (*de pernas para o ar*), e tornamos a assentá-la sobre o plano original. A única restrição é que não podemos deformar (encolher, rasgar, ampliar…) a cópia, pois o movimento deixaria de ser rígido.

Veloso (2012) sugere que imaginemos que esta cópia seja feita num acetato semitransparente de forma que permita perceber a relação entre a figura e sua cópia quando estes *planos* – original e cópia – se sobrepuserem.

Cada movimento rígido de IR² define uma transformação geométrica em IR². Além disso, como nos movimentos rígidos as distâncias são preservadas,

[16] Disponível em https://www.cm-vfxira.pt/uploads/writer_file/document/3182/20130722112223399173.pdf, p. 13. Acesso em 12 mar. 18.

[17] Disponível em https://www.cml.pt/cml.nsf/artigos/15604D3579BCDF0380257987005F0524. Acesso em 12 mar. 18.

ou seja, as transformações geométricas que correspondem aos movimentos rígidos preservam distâncias, podemos concluir que um movimento rígido de IR^2 é representado por uma isometria de IR^2, devendo esta ser uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

I.7. Simetria

Segundo Veloso (2012), "o conceito de simetria implica sempre a consideração de uma figura. Quando procuramos simetrias, estamos sempre a referir-nos a uma determinada figura F" (p. 57). A partir disto, consideremos uma figura plana F, isto é, um conjunto de pontos do plano, e o conjunto das isometrias do plano, que designamos por $Iso(IR^2)$. Se S é uma isometria do plano, seja F' a imagem de F por meio de S. Quando F' = F, S diz-se simetria de F.

- **Definição de simetria (Veloso, 2012, p. 56):** Dada uma figura plana F, chama-se simetria de F toda isometria S do plano que deixe F (globalmente) invariante, isto é, S(F) = F.

Cabe destacar que através desta definição afirmamos que a imagem de F por meio de S coincida com F (motivo pelo qual o autor utiliza o termo *globalmente*), o que não garante necessariamente que todos os pontos de F fiquem invariantes para a mesma isometria (Veloso, 2012).

- **Conceitualização de conjunto de simetrias de uma figura (Veloso, 2012, p. 57):** Seja F uma figura qualquer. Procurar as simetrias de F consiste em encontrar as isometrias do plano que deixam F invariante (ou que fixam F).

Daí, a pesquisa das simetrias de F consiste em procurar as:

  - translações que deixam F invariante; se T for uma tal translação, então T é uma simetria (de translação) de F.
  - rotações que deixam F invariante; se R for uma tal rotação, então R é uma simetria (de rotação) de F.
  - reflexões que deixam F invariante; se E for uma tal reflexão, então E é uma simetria (de reflexão) de F.

- reflexões deslizantes que deixam F invariante; se Rd for uma tal reflexão deslizante, então Rd é uma simetria (de reflexão deslizante) de F.

Designamos por *Sim*(F) o conjunto das simetrias de F, ou seja, o conjunto das isometrias do plano que deixam F invariante. Deve ficar claro que "as simetrias de F são sempre uma parte - *Sim*(F) - do conjunto de todas as simetrias do plano" (Veloso, 2012, p. 57).

Enunciamos a seguir o teorema que confere ao conjunto *Sim*(F) a estrutura de grupo em relação à composição de transformações geométricas.

- **Teorema S1 (Veloso, 2012, p. 57):** Sendo F uma figura qualquer, o conjunto *Sim*(F) das suas simetrias tem as seguintes propriedades:
    - contém a identidade I;
    - se contém a isometria S, contém a sua inversa S^{-1}.
    - se contém as isometrias S_1 e S_2, então contém as isometrias $S_1 \bullet S_2$ (e $S_1 \bullet S_2$).

Para maior percepção acerca do conjunto de simetrias de uma figura – *Sim*(F) – recomendamos a leitura da obra de Veloso (2012), nomeadamente da página 58 à 73.

De posse das definições apresentadas e dos teoremas enunciados até ao presente momento, é importante que o leitor já consiga perceber que o grupo de simetrias pertence ao grupo das isometrias, além de entender que características permitem classificar que uma figura possui simetria para além de possuir apenas isometria. Este é o nosso objetivo com as próximas palavras, prescritas através de um exemplo ilustrativo.

Considere uma figura (figura 1) e um eixo de reflexão, por exemplo. Aplicando uma reflexão[18] nesta figura por este eixo de reflexão, obteremos uma outra figura (figura 2). Se as figura 1 e 2 ficarem globalmente invariantes, isto é, se as figuras como um todo ficarem sobrepostas, temos, para além de uma (isometria de) reflexão, uma simetria de reflexão e o eixo de reflexão também

[18] Utilizamos a reflexão sem perda de generalidade. Analogamente, poderíamos utilizar os conceitos de translação, rotação ou reflexão deslizante, obviamente, com devidas adequações, principalmente no que diz respeito a figura a ser utilizada.

será considerado um eixo de simetria de reflexão. Do contrário, ou seja, se as figuras como um todo não ficarem sobrepostas, temos apenas uma (isometria de) reflexão e o eixo de reflexão será considerado apenas um eixo (de isometria) de reflexão. A imagem que apresentamos a seguir (Figura 9) foi utilizada durante a Oficina de Formação Docente (OFD) realizada como parte desta investigação. Vejamos:

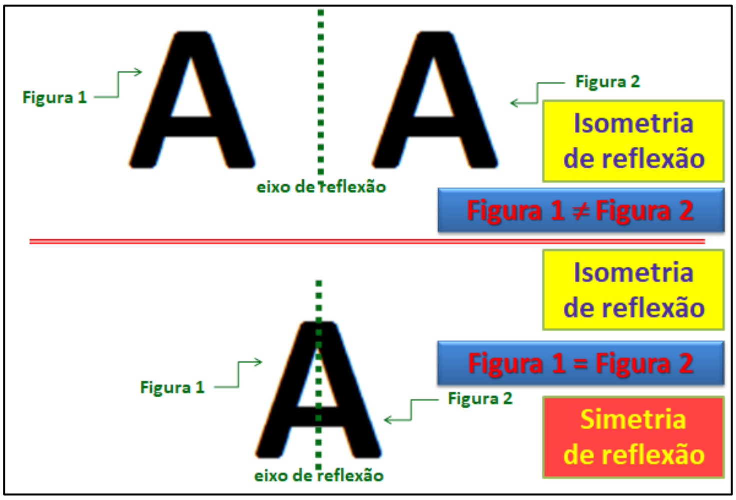


Figura 9: Diferenciação entre isometria e simetria

Devemos ter em atenção que o uso do símbolo '=' na comparação de figuras deve levar em conta alguns apontamentos já mencionados anteriormente, nomeadamente, as considerações sobre *globalmente invariante* (Definição de simetria) e *triângulos iguais* (Teorema I2). Além disso, cabe salientar que a informação *Isometria de reflexão* se faz presente em ambos os casos, ou seja, tanto no caso onde se tem Figura 1 ≠ Figura 2 quanto no caso de Figura 1 = Figura 2, enquanto que *Simetria de reflexão* é presente apenas quando se tem Figura 1 = Figura 2. Deste modo, é possível encaminhar alguma percepção acerca de que a simetria é um caso particular de isometria.

Avançamos agora para outras definições que foram amplamente utilizadas durante a realização da OFD.

I.7.1. Introdução à classificação de uma figura no plano

Para iniciarmos esta sessão, pensando de forma intuitiva, partimos do fluxograma a seguir (Figura 10), o qual, de uma forma mais geral, tem o propósito de auxiliar a classificação de uma figura no plano consoante a seu grupo de simetrias. Embora sejam previstas dúvidas a partir da classificação nele ilustrada, esperamos que estas possíveis sejam esclarecidas logo a seguir com a maior esplanação de cada um dos conceitos de rosáceas, frisos e padrões. Todas as figuras apresentadas neste fluxograma podem ser apreciadas, logo a seguir ao mesmo, em tamanho maior, acompanhadas respectivamente de suas fontes de referências.

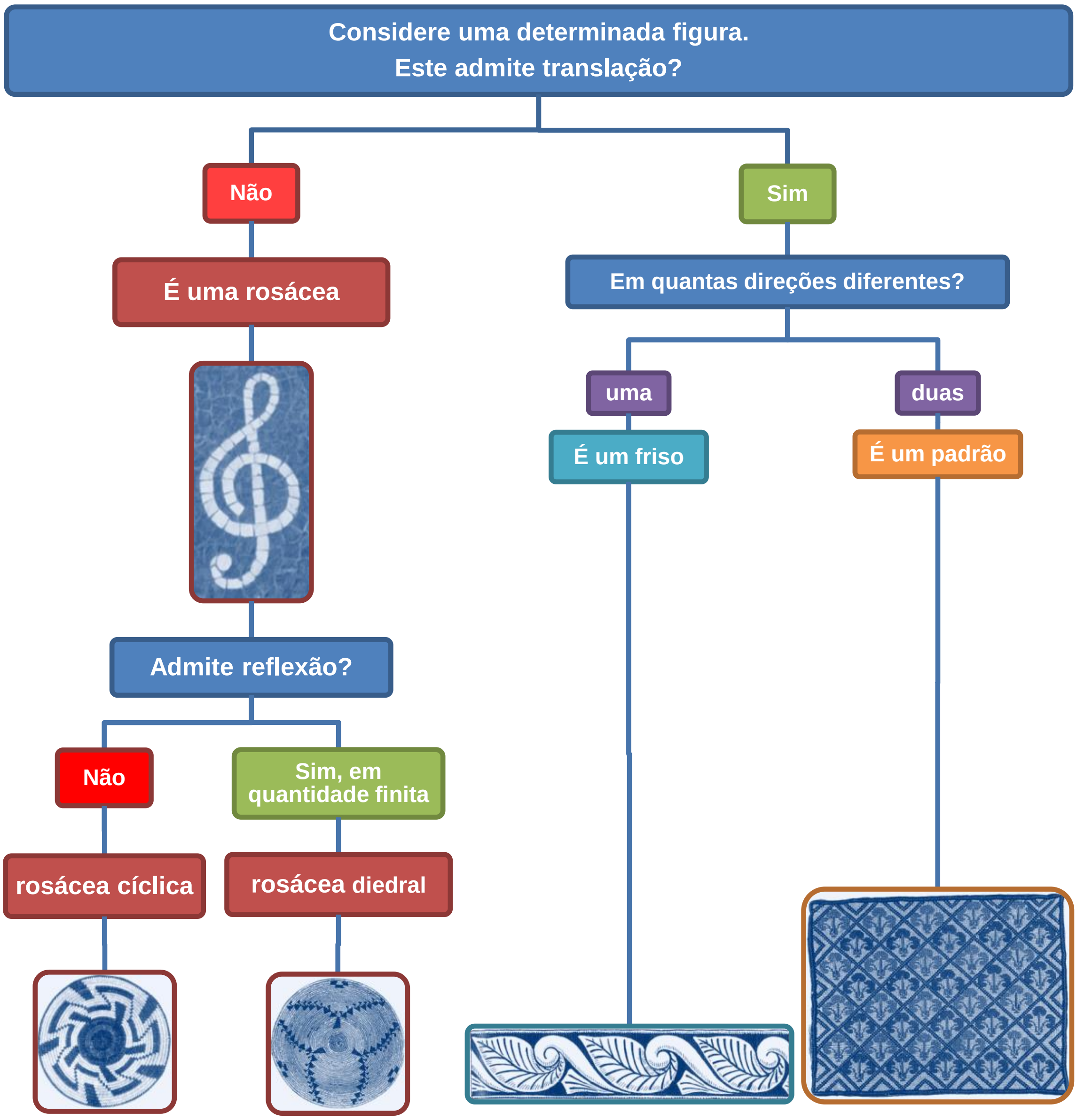


Figura 10: Fluxograma de classificação de uma figura no plano (Martin, 1982)

É importante salientar os casos particulares em respeito ao círculo e à circunferência. Estes entes geométricos, enquanto figuras, não são considerados rosáceas pelo fato de possuírem infinitas simetrias de reflexão.

Além disso, as figuras que possuem simetria de translação sem módulo mínimo não se enquadram no fluxograma apresentado anteriormente. Casos como este último estão esclarecidos mais adiante, a partir do subcapítulo I.9.

I.7.1.1. Rosácea

Figura 11: Candelária - Ponta Delgada (Moniz, 2014, p. 90)

a) Rosácea cíclica

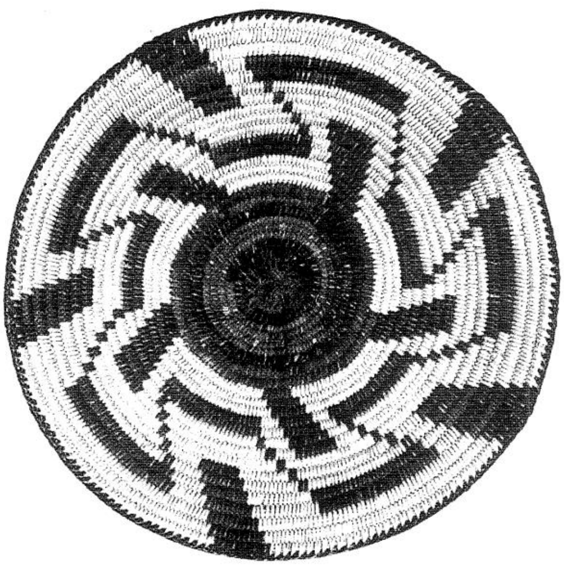


Figura 12: Placa enrolada, California Academy of Science, San Francisco (Washburn & Crowe, 1988, p. 249)

b) Rosácea diedral

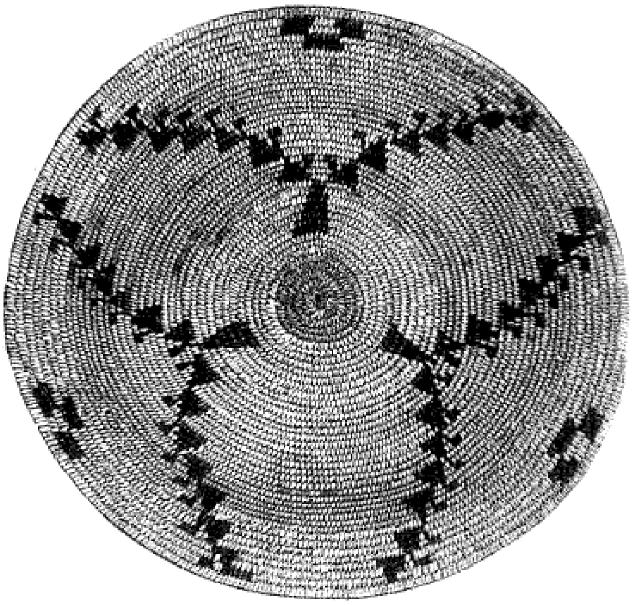


Figura 13: Bandeja de cesto, California Academy of Science, San Francisco (Washburn & Crowe, 1988, p. 250)

I.7.1.2. Friso

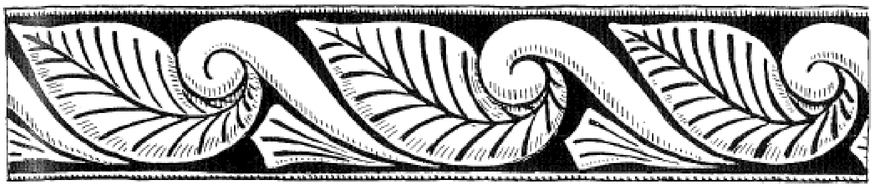


Figura 14: Madeira esculpida, Noruega (Arneberg, 1951, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 95)

I.7.1.3. Padrão

Figura 15: Capa de fronha, Margaret Woodbury Strong Museum, Rochester (n. 80.481) (Washburn & Crowe, 1988, p. 182)

I.8. Rosáceas

- **Definição de rosácea (Veloso, 2012, p. 75):** Diz-se rosácea toda a figura plana cujo conjunto de simetrias é finito.

Desta definição emanam cinco teoremas que apresentamos na sequência.

- **Teorema R1 (Veloso, 2012, p. 77):** Uma rosácea não tem simetrias de translação nem de reflexão deslizante.

Assim, uma rosácea admite apenas simetrias de rotação e de reflexão e, com isso, temos o próximo teorema:

- **Teorema R2 (Veloso, 2012, p. 77):** As simetrias de rotação de uma rosácea têm um centro em comum.

- **Teorema R3 (Veloso, 2012, p. 78):** Se uma rosácea F tem apenas simetrias de rotação – que naão se reduzem à identidade e que supomos em número de n –, então *Sim*(F) é constituído pelas rotações R, R^2, R^3, …, R^n = I, em que R é a simetria de rotação de menor ângulo positivo.

As rosáceas com estas características são designadas por cíclicas (c_n). Se F é uma rosácea cíclica, o conjunto *Sim*(F) possui n elementos. A partir deste teorema, tem-se que todos os ângulos de rotação de uma rosácea estão associados a $\frac{360°}{n}$ e a seus múltiplos (Teixeira, 2013). A partir da definição de rosácea e dos teoremas anteriores, é possível perceber que qualquer *figura limitada*, isto é, que pode ser envolta por completo por uma linha fechada, é uma rosácea (Figura 16).

Figura 16: Água Retorta – Povoação (Moniz, 2014, p. 91)

É de notar que esta rosácea não admite simetria de reflexão e a única simetria de rotação que esta admite é a identidade. Esta rosácea é do tipo c_1.

- **Teorema R4 (Veloso, 2012, p. 78):** Se uma rosácea F tem pelo menos uma simetria de reflexão, então *Sim*(F) é constituído por um número par 2n de simetrias, tendo n simetrias de rotação (R, R^2, R^3, …, R^n = I) com um centro em comum e n simetrias de reflexão cujos eixos passam por aquele centro.

As rosáceas com estas características são designadas por diedrais (d_n).

Por fim, temos o

- **Teorema R5 (Veloso, 2012, p. 78):** O conjunto de rosáceas de simetrias de uma rosácea é um c_n ou um d_n.

A figura a seguir a seguir apresenta como classificar uma rosácea (Figura 17). Cabe salientar que o valor de n pode ser tão grande quanto se queira, tanto em c_n quanto wm d_n, embora na Figura 17 apresentamos apenas até n = 4. Todas as figuras apresentadas neste fluxograma podem ser apreciadas, logo a seguir ao mesmo, em tamanho maior, acompanhadas respectivamente de suas fontes de referências.

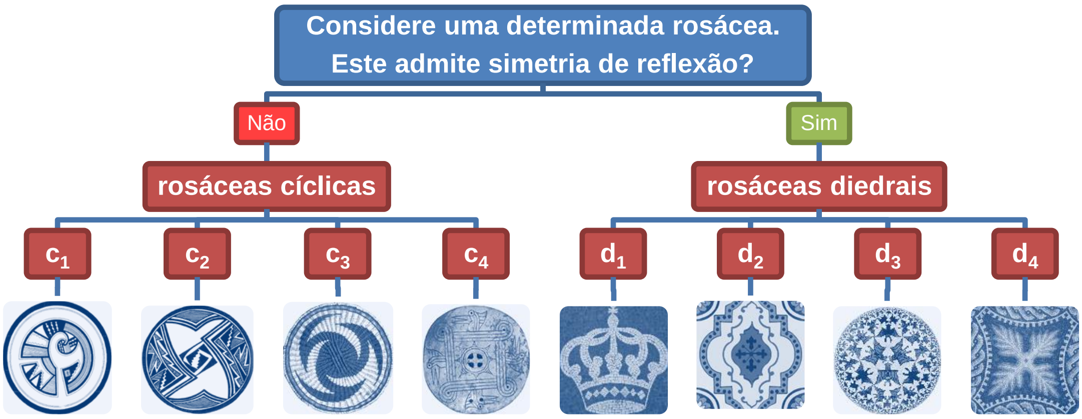


Figura 17: Fluxograma de classificação de uma rosácea (Martin, 1982)

c_1:

rotação de menor amplitude: 360° (apenas a *identidade*)

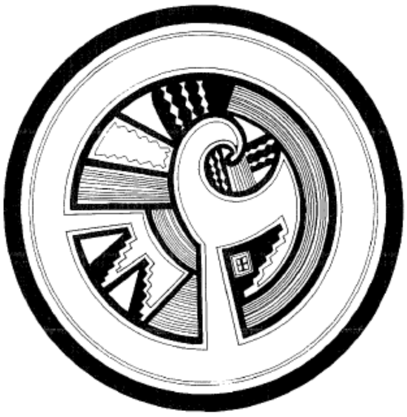


Figura 18: Cerâmica, Arizona (Sides, 1961, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 253)

c_2:

rotação de menor amplitude: 180° (meia-volta)

Figura 19: Cerâmica, California Academy of Science, San Francisco (Washburn & Crowe (1988, p. 248)

c_3:

rotação de menor amplitude: 120°

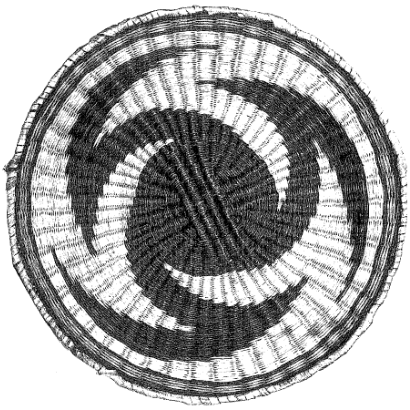


Figura 20: Vime, Hopi, California Academy of Science, San Francisco (Washburn & Crowe (1988, p. 249)

c_4:

rotação de menor amplitude: 90°

Figura 21: Concha, Mississipi, Museum of the American Indian (Washburn & Crowe (1988, p. 249)

d_1:

rotação de menor amplitude: 360° (apenas a *identidade*)	reflexões: apenas uma (vertical)

Figura 22: Ginetes, Ponta Delgada (Moniz, 2014, p. 95)

d_2:

rotação de menor amplitude: 180° (meia-volta) | reflexões: duas (vertical e horizontal)

Figura 23: Azulejo, Portugal (http://redeazulejo.fl.ul.pt/)

d_3:

rotação de menor amplitude: 120° | reflexões: três

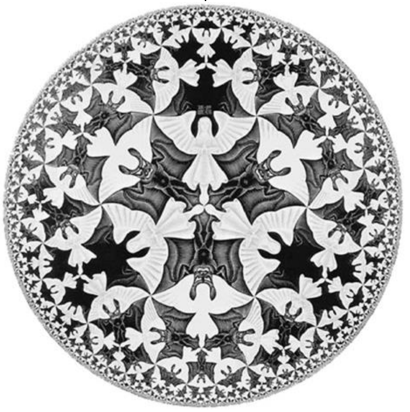


Figura 24: Anjos e Demônios, 1960, M. C. Escher, artista holandês (Daga, 2017, p. 6)

d_4:

rotação de menor amplitude: 90° | reflexões: quatro

Figura 25: Pavimento em mosaico, Museu Monográfico de Conímbriga, Portugal (http://www.conimbriga.gov.pt)

Independentemente da abstração com a qual vemos o motivo, ou seja, da natureza artística presente numa rosácea, os únicos dois grupos de rosáceas, cíclicas e diedrais, são infinitos devido aos submúltiplos de 360° (ou 2π rad). Como exemplo, apresentamos uma rosácea presente na Catedral de Estrasburgo, na França (Figura 26).

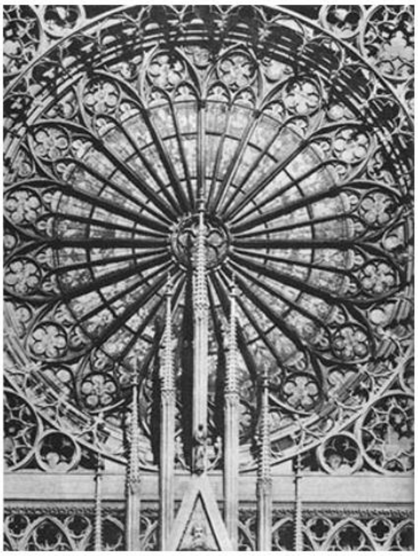


Figura 26: Catedral de Estrasburgo (Romanelli & Scapaccino, 1979, citado por Couto, 2017, p. 41).

Trata-se de uma rosácea do tipo d_{16}, cuja menor amplitude de simetria de rotação é de $\frac{360°}{16} = 20°$ e admite 16 eixos de reflexões. A Cateral de Notre-Dame também é bastante conhecida por suas imensas rosáceas, bastante imponentes e com um colorido bem exuberante.

I.9. Frisos

- **Definição de friso (Veloso, 2012, p. 75):** Diz-se friso qualquer figura plana cujo conjunto de simetrias verifica a seguinte condição:
    - existe uma simetria de translação T de módulo mínimo não nulo, tal que as simetrias de translação da figura são todas as potências de expoente inteiro de T.

Quando pensamos em frisos, entendemo-los como uma faixa no plano limitada por retas paralelas não coincidentes. Adotando, sem perda de generalidade, que esta faixa é horizontal, é possível considerar a existência de uma reta m, também horizontal, equidistante das retas limitantes do friso, a qual designamos por eixo central do friso[19]. Também é imprescindível perceber que devemos considerar o friso como estendido indefinidamente na direção desta reta m, como uma faixa infinita. Diretamente da definição tomada e das considerações postas, tem-se que todas as simetrias de translação de um friso têm a mesma direção. Maia (2014) aponta que o fato de o grupo dos frisos possuir uma infinidade de simetrias de translação é uma característica de destaque deste grupo. Esta característica deve ser percebida pelo fato de todas as translações serem numa única direção, em que existe pelo menos uma com módulo mínimo não nulo. É por este motivo que a figura a seguir (Figura 27) não é considerada a representação de um friso.

Figura 27: Exemplo de faixa que não é friso – Rua Oliveira Martins, Coimbra (o autor)

Os frisos favorecem a "exploração completa de todas as simetrias, pois, ao contrário das rosáceas, um friso pode possuir simetria de rotação, simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante e simetria de translação" (Maia, 2014, p. 148). Veloso (2012), a partir da definição apresentada, considera necessário responder algumas perguntas a fim de especificar os possíveis conjuntos de simetrias de um friso. As questões propostas por Veloso (2012, p. 89) são as seguintes.

1) Que simetrias de rotação – centros e ângulos – poderão existir num friso?
2) Que simetrias de reflexão poderão existir num friso?
3) Que simetrias de reflexão deslizante – eixos e translações – poderão existir num friso?

[19] Também designado por "centro do friso" (Breda *et al.*, 2011, p. 101).

Considerando a abstração necessária diante à natureza do motivo[20] presente nos frisos, a classificação baseada na estrutura e organização do friso remete para sete tipos diferentes. O reconhecimento deste limite na classificação de diferentes frisos faz com que a exploração deste tema seja mais rica, pois permite perceber “algumas simetrias em função de outras ou a impossibilidade da existência de umas pela existência de outras” (Maia, 2014, p. 148). A título de exemplo desta vantagem, Maia (2014) exemplifica que o fato de um determinado friso admitir simetrias de reflexão de eixo horizontal e de eixo vertical faz com que este friso admita também simetria de rotação. Outro exemplo citado pela mesma autora é que se um determinado friso admite simetria de reflexão de eixo horizontal e não admite simetria de reflexão de eixo vertical, então este friso não admite simetria de rotação. Além disso, um friso que admita simetria de reflexão de eixo horizontal não admite simetria de reflexão deslizante para além da trivial, pois, do contrário, todos os frisos que admitam simetria de reflexão de eixo horizontal admitiriam, ainda, simetria de reflexão deslizante (Veloso, 2012). Consequentemente, um friso que admita simetria de reflexão deslizante para além da trivial não admite simetria de reflexão de eixo horizontal. Assim, “a existência de uma destas implica a inexistência da outra” (Maia, 2014, p. 149). Nas palavras de Veloso (2012), os frisos que admitem simetria de reflexão de eixo horizontal admitem simetrias de reflexão deslizante exclusivamente triviais, as quais

> existem em todos os frisos que têm simetria de reflexão horizontal, não acrescentam nada de novo à simetria do friso, e por isso não contam, por assim dizer, na classificação que estamos a fazer dos tipos de frisos existentes (p. 102).

Vejamos os dois exemplos que se seguem (Figuras 28 e 29):

---

[20] Elementos que se repetem.

Exemplo 1 (friso que admite simetria de reflexão de eixo horizonal):

Figura 28: Friso na fachada exterior da Catedral de Siena e detalhes (Liu & Toussaint, 2011, p. 116)

Exemplo 2 (friso que admite simetria de reflexão deslizante):

Figura 29: Friso de Chevron em torno da Roda da Fortuna (Liu & Toussaint, 2011, p. 120)

A seguir, apresentamos alguns teoremas inerentes ao estudo dos frisos.

- **Teorema F1 (Veloso, 2012, p. 90):** Num friso, as simetrias de rotação possíveis são simetrias de meia-volta, com centros sobre a reta m, eixo central do friso.
- **Teorema F2 (Veloso, 2012, p. 91):** Num friso, as simetrias de reflexão possíveis são a reflexão de eixo m ou a reflexão cujo eixo é vertical.
- **Teorema F3 (Veloso, 2012, p. 92):** Num friso, quando existem simetrias de reflexão deslizante, o eixo de reflexão é sempre o eixo central do friso e os módulos das translações correspondentes assumem todos os valores iguais a metade dos módulos das simetrias de translação que são potências ímpares da translação de módulo mínimo do friso.
- **Teorema F4 (Veloso, 2012, p. 92):** Num friso, além das simetrias sempre presentes de translação, podem existir ainda (e apenas) as seguintes simetrias:

- de rotação: meias-voltas cujo centro está sobre a reta m, eixo central do friso;
- de reflexão: em que os eixos são de direção vertival e/ou a reta m, eixo central do friso;
- de reflexão deslizante: cujo eixo é a reta m e as translações estão de acordo com a definição adotada.

A partir do teorema apresentado imediatamante acima, o qual resume os três teoremas anteriores, partimos para a classificação dos sete tipos de frisos existentes. Apesar de algumas outras notações utilizadas nesta classificação, utilizaremos a mesma apresentada em Veloso (2012, p. 110) e Washburn e Crowe (1988, p. 57-58), provindas dos estudos da cristalografia, por julgarmos ser de maior clareza de acordo com o fluxo adotado.

Inicialmente, consideramos a designação de cada grupo de friso dada por 4 letras justapostas, p*xyz*, em que x, y e z seguem os seguintes critérios:

- a primeira letra é sempre p;
- x = m, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de reflexão de eixo vertical e; x = 1, se o grupo de simetrias do friso não admitir simetrias de reflexão de eixo vertical;
- y = m, se o grupo de simetrias do friso admitir uma simetria de reflexão de eixo horizontal, y = a, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de reflexão deslizante não triviais e; y = 1, se não se verificar os dois casos anteriores;
- z = 2, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de meia-volta, i.e., se admitir simetrias de rotação de amplitude 180° e; z = 1, se o grupo de simetrias do friso não admitir simetrias de meia-volta.

O fluxograma a seguir (Figura 30), contendo exemplos ilustrativos de cada um dos grupos, baseia-se na classificação dos sete tipos de frisos unidimensionais de duas cores apresentada por Whashburn e Crowe (1988) e Martin (1982), onde pode ser verificado o uso na notação elencada. Todas as figuras apresentadas neste fluxograma podem ser apreciadas, logo a seguir ao mesmo, em tamanho maior, acompanhadas respectivamente de seus conjuntos de simetrias e fontes de referências.

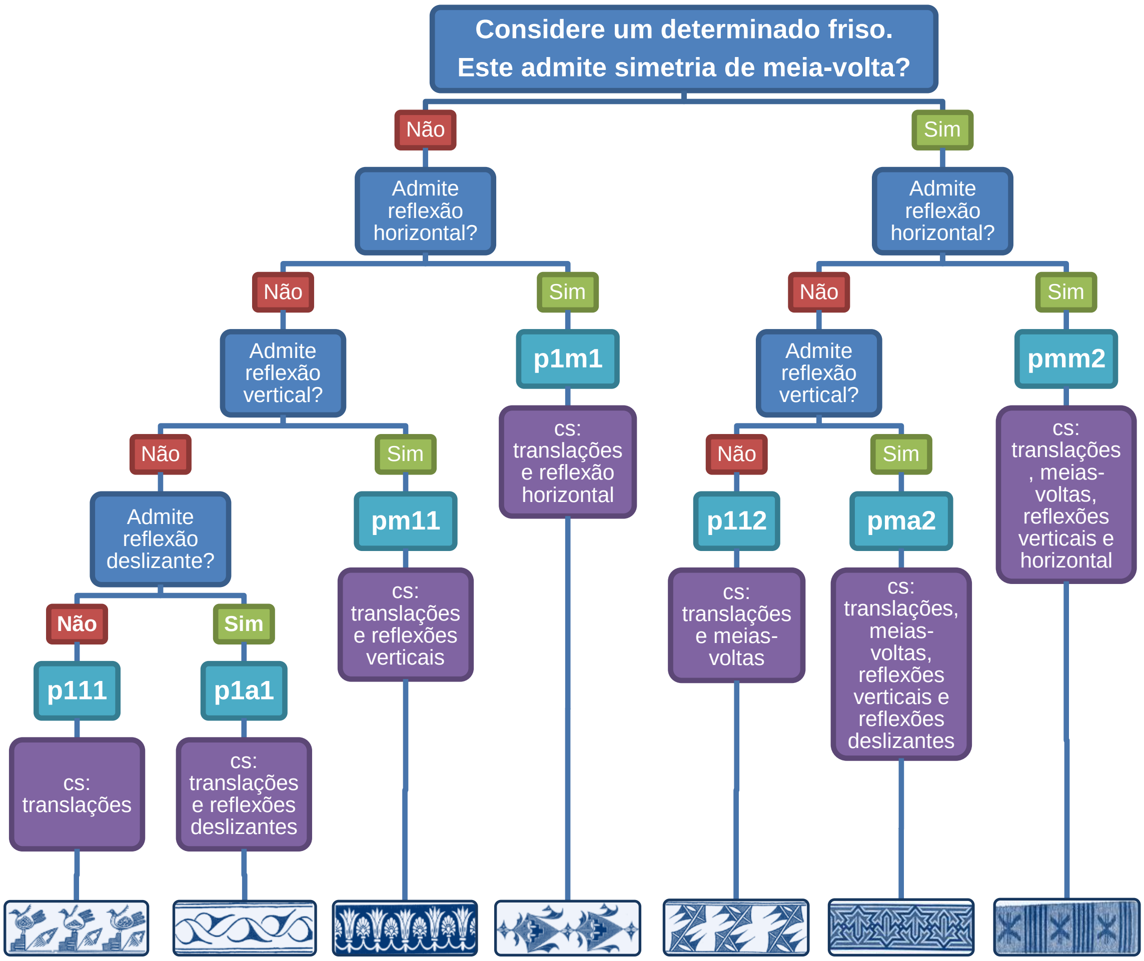


Figura 30: Fluxograma de classificação de um friso (Whashburn & Crowe, 1988; Veloso, 2012)

Aproveitamos, juntamente com a apresentação dos exemplos de cada um dos grupos de frisos com as figuras em maior tamanho, por revelar outra notação, de autoria do matemático húngaro Fejes Tóth (1915-2005) (Martin, 1982). Nesta notação, todos tipos de frisos são representados por F_x^y, onde x se refere às simetrias diretas e o y às inversas. A partir disso, tem-se:

- x = 2, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de meia-volta, i.e., simetrias de rotação de amplitude 180°; caso contrário, tem-se x = 1.
- y = 1, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de reflexão de eixo horizontal; y = 2, se o grupo de simetrias do friso admitir simetrias de reflexão de eixo vertical; ou y = 3, se o grupo de simetrias do friso

admitir simetrias de reflexão deslizante. Caso o grupo de simetrias do friso não admita simetria de reflexão nem de reflexão deslizante, não é colocado valor algum no lugar de y.

Vejamos as figuras.

p111 ou F_1 :

conjunto de simetrias: translações

Figura 31: Cerâmica (a), San Ildefonso Pueblo (Chapman, 1970, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 95)

p1a1 ou F_1^3:

conjunto de simetrias: translações e reflexões deslizantes

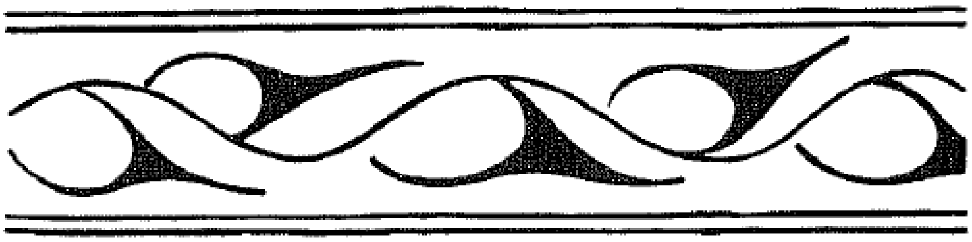


Figura 32: Cerâmica (b), San Ildefonso Pueblo (Chapman, 1970, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 124)

pm11 ou F_1^2:

conjunto de simetrias: translações e reflexões verticais

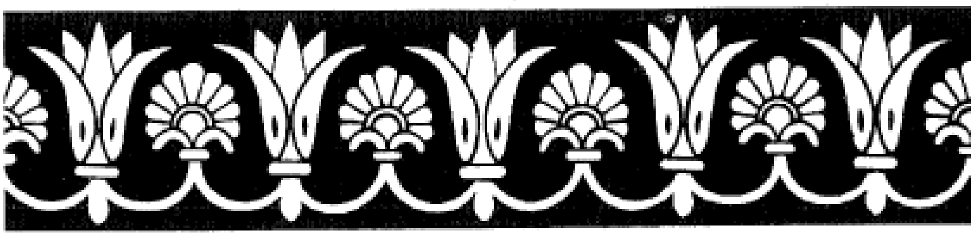


Figura 33: Tijolos esmaltados, Palácio de Darius, Susa (Dowlatshahi, 1979, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 104)

p1m1 ou F_1^1:

conjunto de simetrias: translações e reflexões verticais

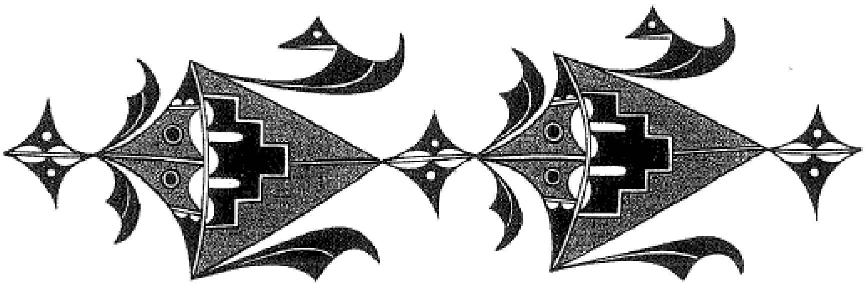


Figura 34: Cerâmica (c), San Ildefonso Pueblo (Chapman, 1970, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 98)

p112 ou F_2 :

conjunto de simetrias: translações e meias-voltas

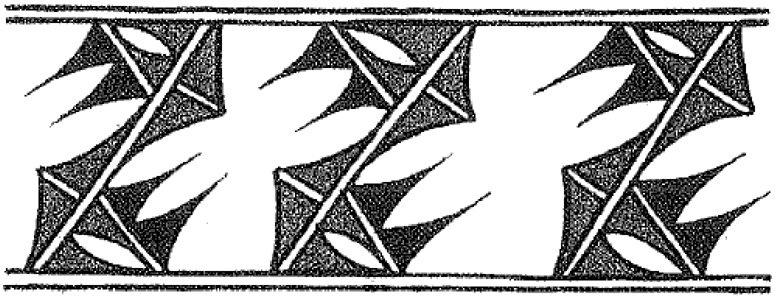


Figura 35: Cerâmica (d), San Ildefonso Pueblo (Chapman, 1970, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 108)

pma2 ou F_2^2:

conjunto de simetrias: translações, meias-voltas, reflexões verticais e reflexões deslizantes

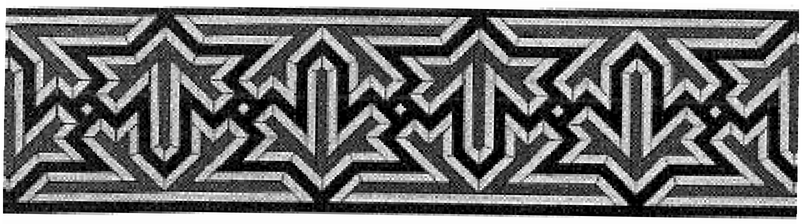


Figura 36: Mosaico de parede, Arabia (Prisse d'Avennes, 1978, citado por Whashburn & Crowe, 1988, p. 120)

pmm2 ou F_2^1:

conjunto de simetrias: translações, meias-voltas, reflexões verticais e horizontal

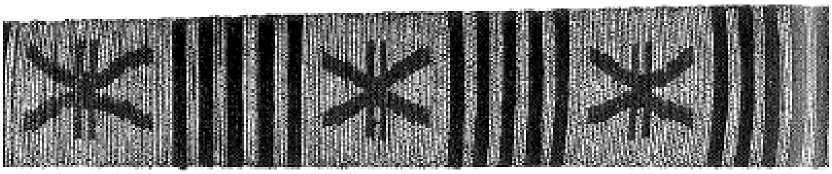


Figura 37: Haste de cachimbo, Sioux, América do Norte, Rochester Museum and Science Center (Whashburn & Crowe, 1988, p. 114)

I.10. Padrões

Do ponto de vista intuitivo, consideramos *padrão* a figura que se estende a todo o plano, por uma estrutura padronizada de repetição. Embora também sejam designados por *papéis de parede* e *padrões periódicos*, optamos pela designação *padrão* pois é este o termo utilizado por Veloso (2012).

Na busca de verificar se uma determinada figura F é um padrão, primeiramente deve-se distinguir duas translações que possam servir para definir tal padrão. Assim, escolhe-se duas simetrias de translação T_1 e T_2, relativas a F, de modo que seja possível obter qualquer simetria de translação T de F como produto de duas potências de expoente inteiro de T_1 e T_2. Isto posto, dizemos que T_1 e T_2 geram o conjunto de simetrias de translação de F e, ocorrendo isso, F é definida por *padrão*.

- **Definição de padrão (Veloso, 2012, p. 75):** Diz-se padrão qualquer figura plana F, que tenha duas simetrias de translação T e S de módulo não nulo e de direções diferentes e tais que as simetrias de translação de F sejam produtos $S^n \bullet T^m$, para m e n inteiros.

Atendo-nos a padrões bidimensionais, percebe-se que, se

movermos o padrão segundo múltiplos inteiros de qualquer um dos vetores ou segundo *misturas* (por exemplo, 3 verticais para cima juntamente com 4 horizontais para trás) o desenho manter-se-á inalterado. O termo técnico para estas *misturas* é *combinação linear com coeficientes inteiros* (Carvalho *et al*., 2016, p. 150).

Existem outras definições associadas aos estudos dos padrões, como por exemplo, malha (ou rede) e domínio fundamental, que fogem do alcance desejado com esta investigação, principalmente por esta ser direcionada ao ensino do 1º CEB. Entretanto, julgamos importante apresentar instrumentos suficientes, acerca das valências desta temática incidente sobre a apreciação de manifestações artísticas, culturais e patrimoniais, que permitam aos docentes interessados alguma forma de diferenciação entre os – ou até mesmo, classificação dos – grupos de rosáceas, de frisos e, no caso desta parte, de padrões. Posto isto, apesar de utilizarmos adequadamente a nomenclatura dos diferentes tipos de padrões, não nos dedicaremos à apresentação dos critérios inerentes a esta nomenclatura[21], como apresentamos no estudo das rosáceas e dos frisos. O uso de espelhos, miras e papel vegetal durante a OFD permitiu a percepção, por parte dos docentes participantes, dos tipos de simetria presentes nas imagens. Embora a nomenclatura não fosse utilizada, foi possível diferenciar e agrupar todas as imagens utilizadas de acordo com as simetrias que admitiam.

Apresentamos, a seguir, uma noção intuitiva de *malha* (ou *rede*), seguida de alguns teoremas sobre padrões.

Considere a missão de pavimentar, ou seja, cobrir por justaposição sem sobreposições e sem "deixar" espaços descobertos, um chão plano utilizando polígonos. Cada polígono destes é denominado de *célula da malha* e o conjunto de polígonos, a *malha*. Assim, "a todos os padrões corresponde uma rede ou malha cobrindo todo o plano" (Veloso, 2012, p. 115). Consideremos, agora, que os polígonos sejam colocados por meio das translações obtidas de acordo com a ***definição de padrão*** apresentada anteriormente. Assim sendo, as células da malha serão sempre paralelogramos, os quais podem ser retângulos, losangos ou quadrados, consoante as direções e módulos das duas translações escolhidas previamente. Em particular, quando a célula da malha for um losango, designamos a malha por rômbica. Vamos ao primeiro teorema sobre padrões:

- **Teorema P1 (Veloso, 2012, p. 121):** Se um padrão tem simetrias de reflexão ou de reflexão deslizante, então sua malha é retangular ou rômbica.

[21] Para maiores detalhes, sugerimos ver em Schattschneider (1978).

Considere uma figura F que admite simetria de rotação de centro num ponto *C* e ângulo α. O ponto *C* é dito centro de simetria (de rotação) de F. Se α é o menor ângulo que, juntamente com *C*, define uma simetria em F, então α é divisor de 360° e o ponto *C* é designado por *centro de simetria de ordem n* (n = $\frac{360°}{\alpha}$). Relembremos o estudo dos frisos, que, caso exista centro de simetria de rotação, estes apenas podem ser de ordem 2. Relativamente aos padrões, estas possibilidades são mais abrangentes, o que vemos no teorema a seguir:

- **Teorema P2 (Veloso, 2012, p. 121):** Os centros de simetria (de rotação) de um padrão apenas podem ser de ordem 2, 3, 4 e 6.

Por fim, o principal teorema de padrões:

- **Teorema P3[22] (Veloso, 2012, p. 121):** existem (apenas) 17 tipos de padrões.

Apresentamos, a seguir, uma adaptação do fluxograma dos grupos de padrões bidimensionais utilizado por Veloso (2012), o qual está embasado pela classificação considerada por Whashburn & Crowe (1988). Também constam informações como o conjunto de simetrias e do tipo de célula da malha correspondente ao padrão, devidamente acompanhados de uma figura ilustrativa de cada um dos grupos. Todas as figuras apresentadas neste fluxograma podem ser apreciadas, logo a seguir ao mesmo, em tamanho maior, acompanhadas respectivamente de seus conjuntos de simetrias e tipo de célula da malha e fontes de referências.

[22] A demonstração deste teorema também não figura entre nossos objetivos nesta investigação. De acordo com Veloso (2012), a demonstração detalhada deste teorema pode ser apreciada no capítulo 7 – Fregi e Mosaici – do livro *Forme*, de Maria Dedò.

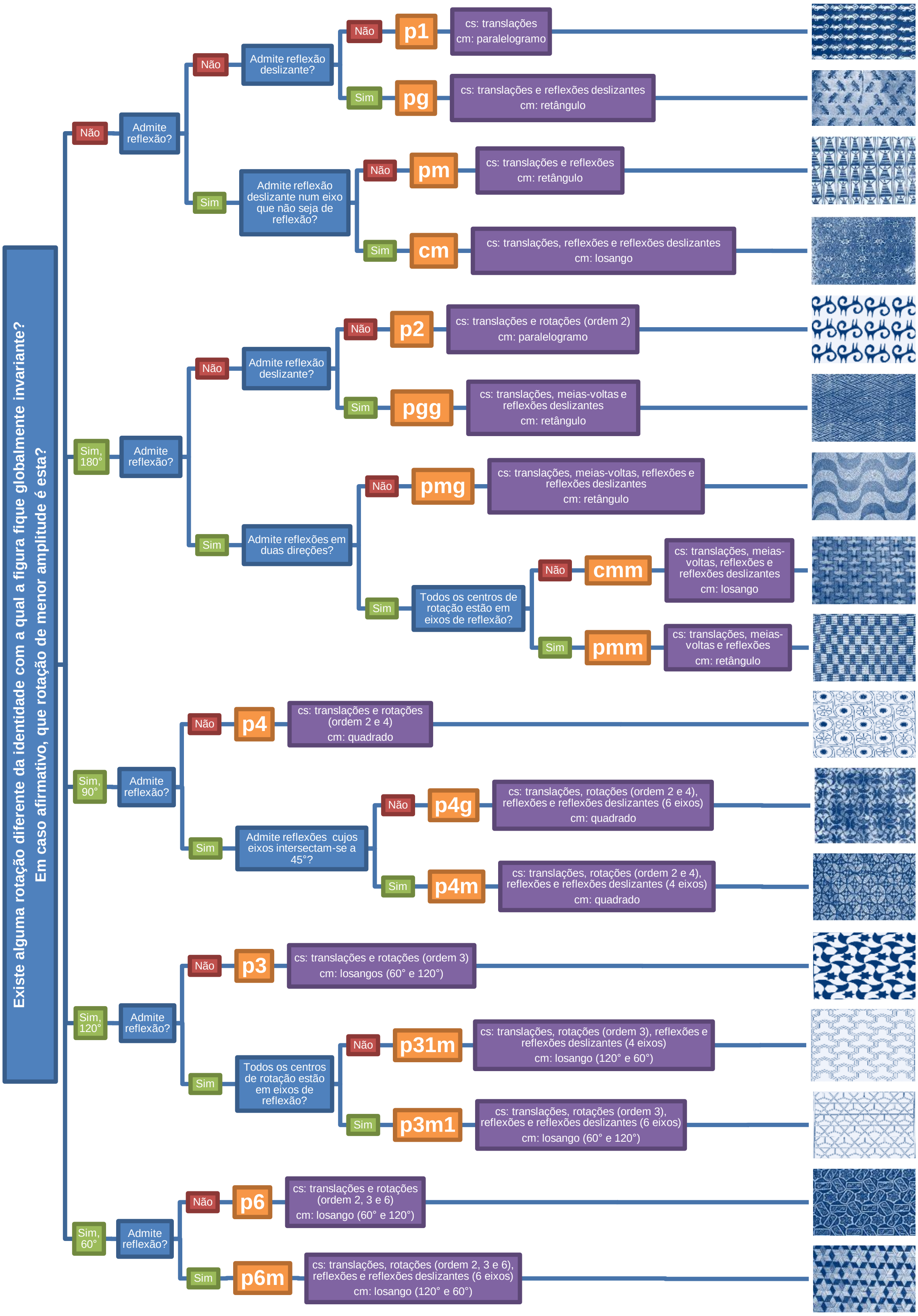


Figura 38: Fluxograma de classificação de um padrão (Whashburn & Crowe, 1988; Veloso, 2012)

Todos os exemplos ilustrativos apresentados neste capítulo podem servir para ratificar a presença das simetrias na arte, na cultura e no patrimômio, motivo pelo qual consideramos fiável esta investigação que aqui revelamos.

Na sequência, os exemplos de cada um dos grupos de padrões com as figuras em maior tamanho.

p1:

conjunto de simetrias: translações

células da malha: paralelogramos

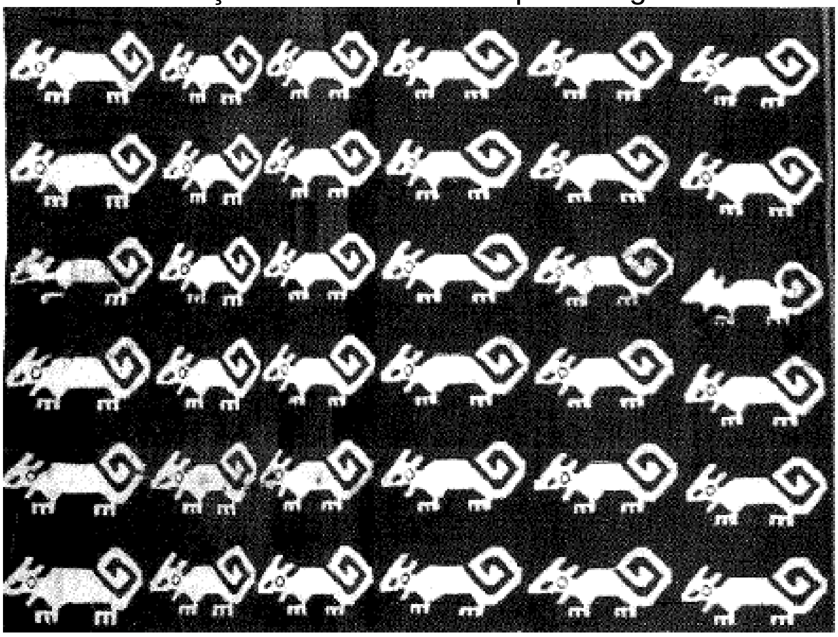


Figura 39: Canga, Peru, The Textile Museum
(Washburn & Crowe, 1988, p. 131)

pg:

conjunto de simetrias:
translações e reflexões deslizantes

células da malha:
retângulos

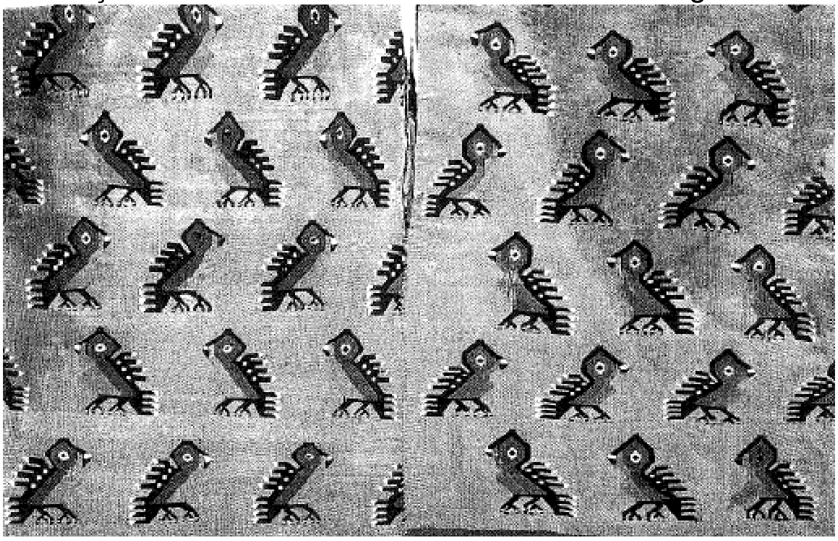


Figura 40: Túnica, Peru, The Textile Museum
(Washburn & Crowe, 1988, p. 133)

pm:

conjunto de simetrias:
translações e reflexões

células da malha:
retângulos

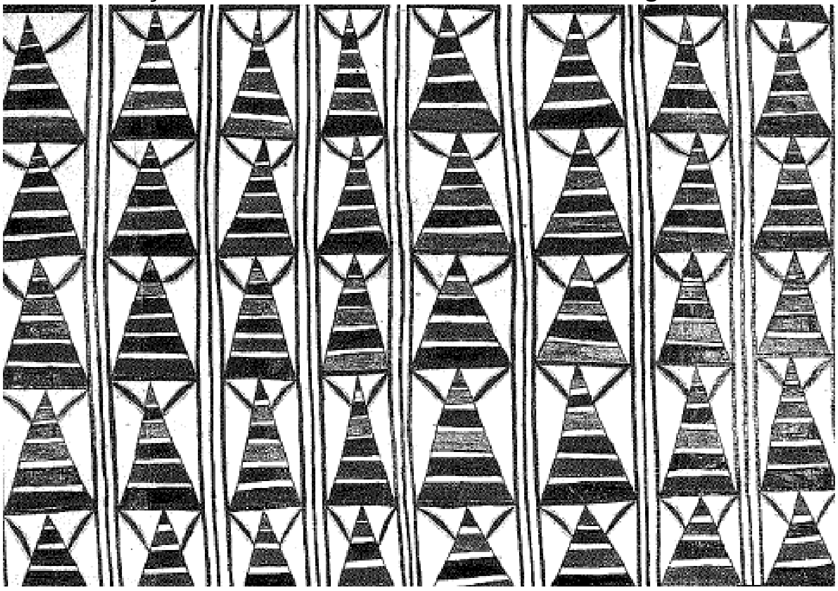


Figura 41: Tecido Tapa, Samoa, Field Museum of Natural History, Chicago (Washburn & Crowe, 1988, p. 175)

cm

conjunto de simetrias:
translações, reflexões e reflexões deslizantes

células da malha:
losangos

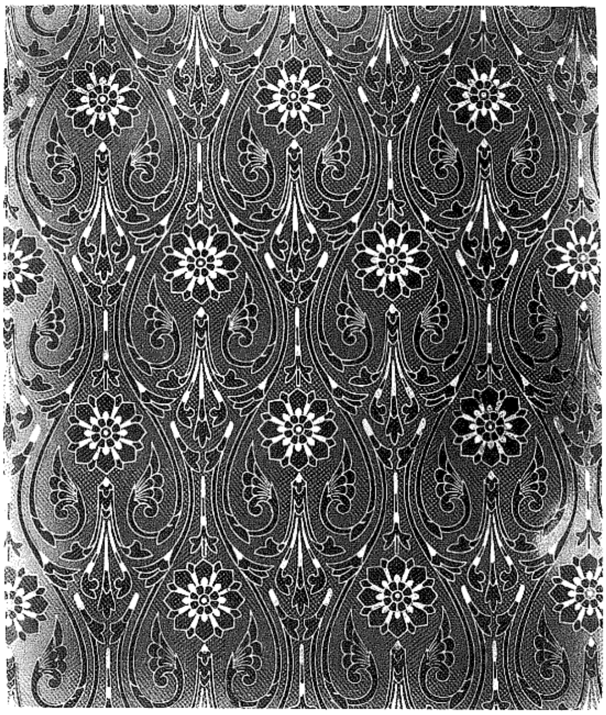


Figura 42: Papel de parede feito à mão, por Owen Jones, Victória and Albert Museum, Londres (Washburn & Crowe, 1988, p. 181)

p2:

conjunto de simetrias:
translações e rotações (ordem 2)

células da malha:
paralelogramos

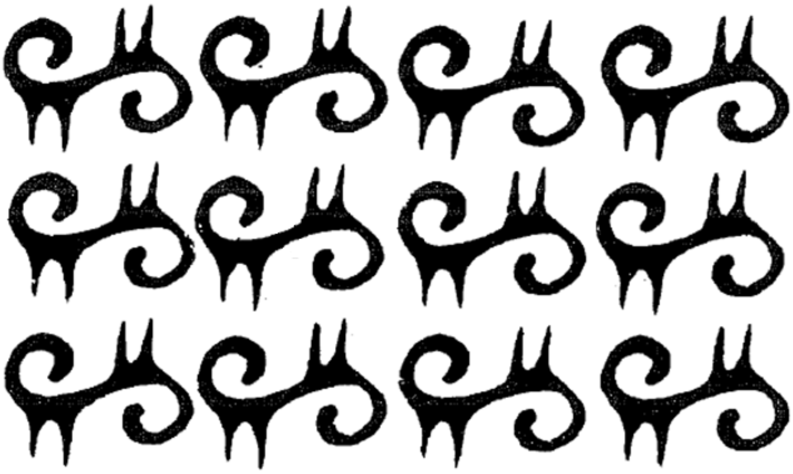


Figura 43: Estampado com símbolos de Adinkra, Gana (Williams, 1971, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 141, com adaptações)

pgg

conjunto de simetrias: translações, meias-voltas e reflexões deslizantes

células da malha: retângulos

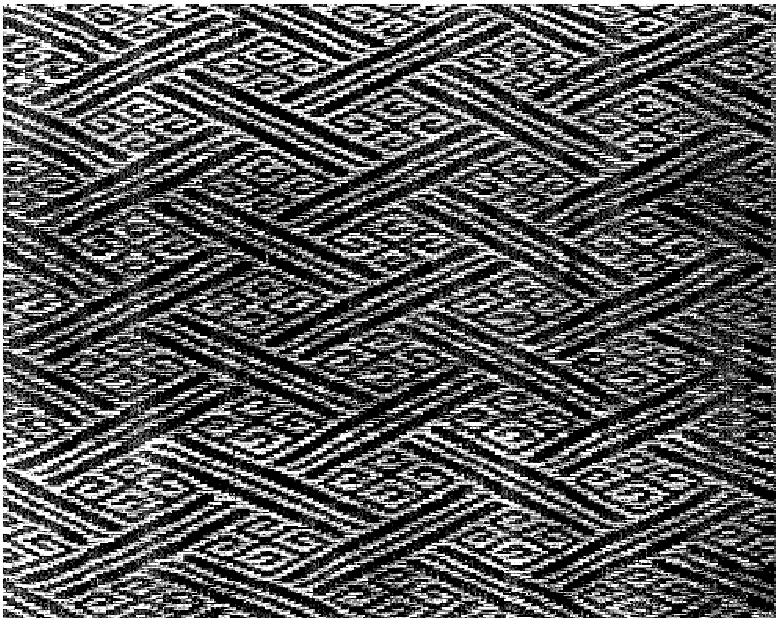


Figura 44: Esteira, Musée Royal de l’Afrique Centrale, Bélgica (Washburn & Crowe, 1988, p. 188)

pmg

conjunto de simetrias: translações, meias-voltas, reflexões e reflexões deslizantes

células da malha: retângulos

Figura 45: Calçada, Mar Largo, Lisboa (Silva, 2016, p. 114)

cmm

conjunto de simetrias:
translações, meias-voltas,
reflexões e reflexões deslizantes

células da malha:
losangos

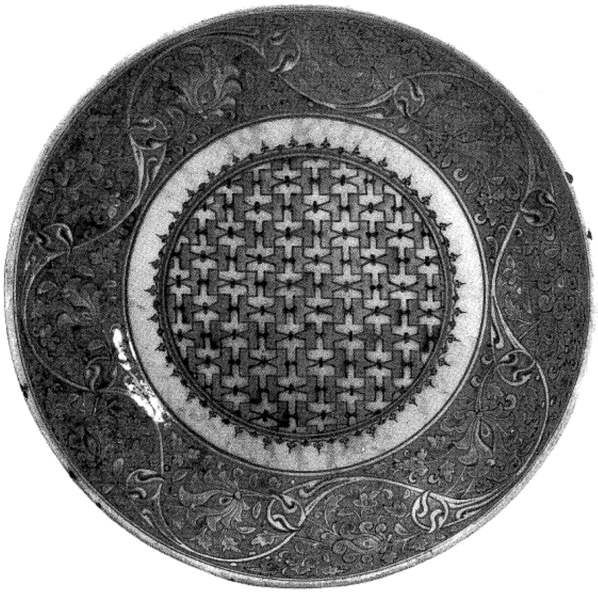


Figura 46: Placa de cerâmica vidrada, Turquia, The Metropolitan Museum of Art (Washburn & Crowe, 1988, p. 206)

pmm

conjunto de simetrias:
translações, meias-voltas e
reflexões

células da malha:
retângulos

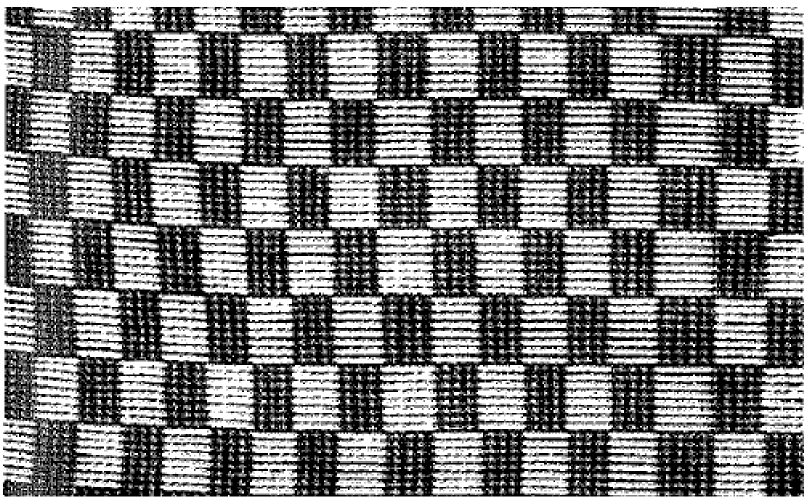


Figura 47: Tecido Kente, Nigéria (Washburn & Crowe, 1988, p. 147)

p4

conjunto de simetrias:
translações e rotações (ordem 2 e 4)

células da malha:
quadrados

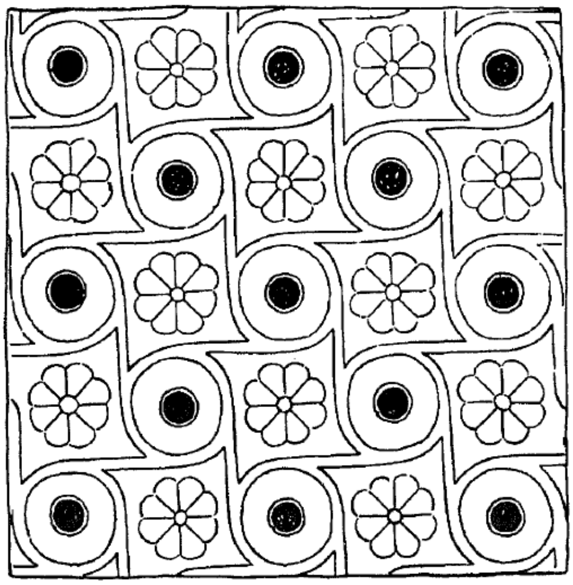


Figura 48: Teto pintado, Egito (Christie, 1929, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 155)

p4g

conjunto de simetrias:
translações, rotações (ordem 2 e 4),
reflexões e reflexões deslizantes (6 eixos)

células da malha:
quadrados

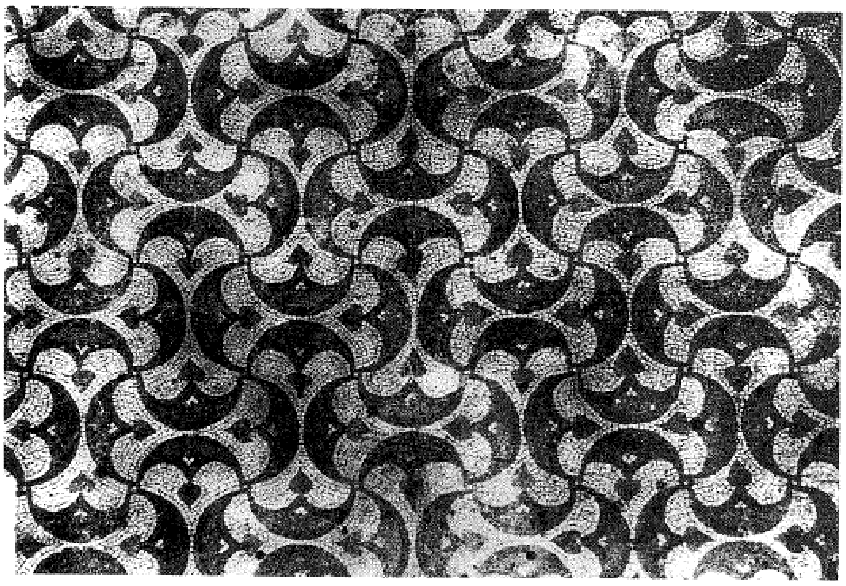


Figura 49: Pavimento de mosaico, Argélia (Germain, 1969, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 231)

p4m

conjunto de simetrias:
translações, rotações (ordem 2 e 4),
reflexões e reflexões deslizantes (4 eixos)

células da malha:
quadrados

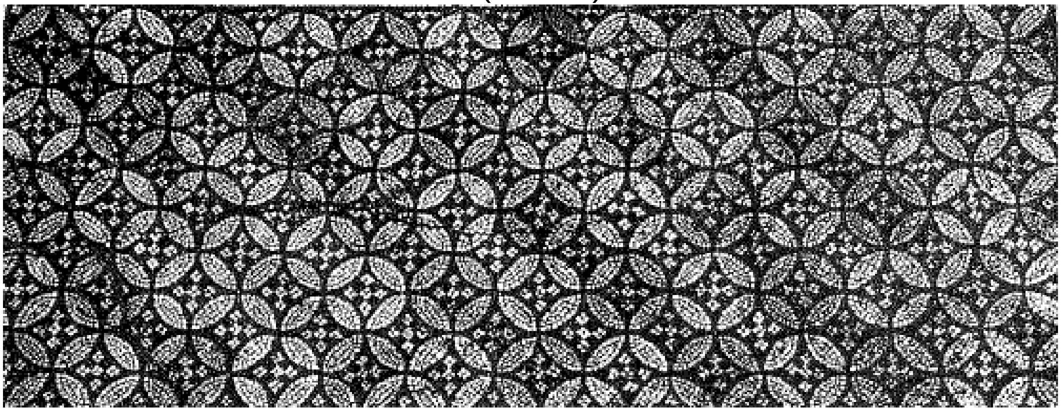


Figura 50: Pavimento de mosaico, Turquia (Levi, 1947, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 223)

p3

conjunto de simetrias:
translações e rotações (ordem 3)

células da malha:
losangos (60° e 120°)

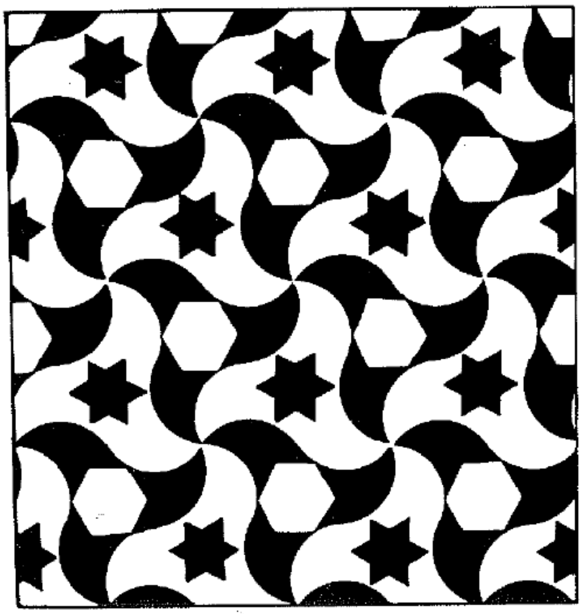


Figura 51: Telha, Alhambra, Espanha (Grabar, 1978, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 236, com adaptações)

p31m

conjunto de simetrias:
translações, rotações (ordem 3),
reflexões e reflexões deslizantes (4 eixos)

células da malha:
losangos (120° e 60°)

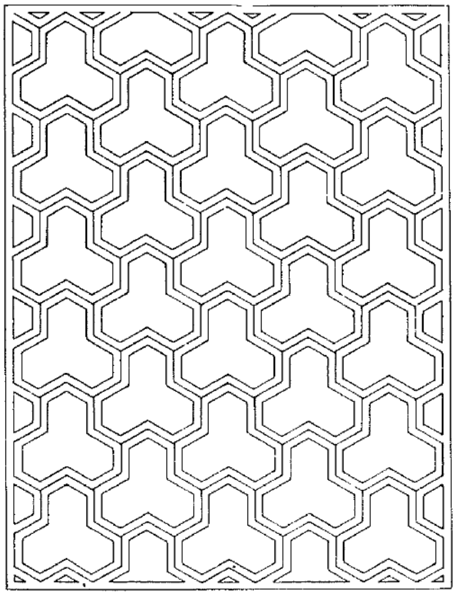


Figura 52: Treliça (a), China (Dye, 1974, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 238)

p3m1

conjunto de simetrias:
translações, rotações (ordem 3),
reflexões e reflexões deslizantes (6 eixos)

células da malha:
losangos (60° e 120°)

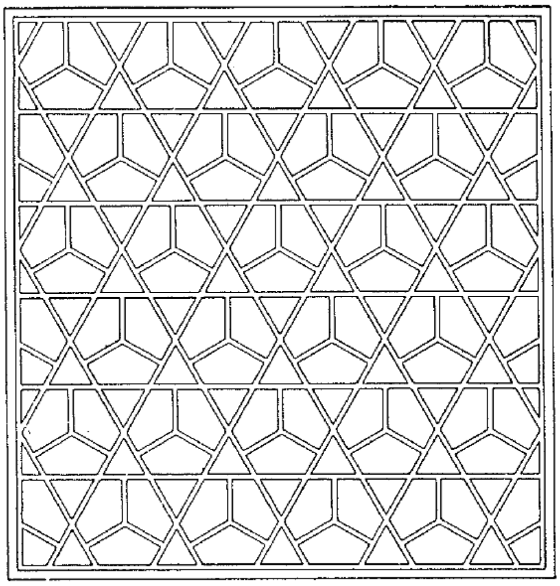


Figura 53: Treliça (b), China (Dye, 1974, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 237)

p6

conjunto de simetrias:
translações e rotações (ordem 2, 3 e 6)

células da malha:
losangos (60° e 120°)

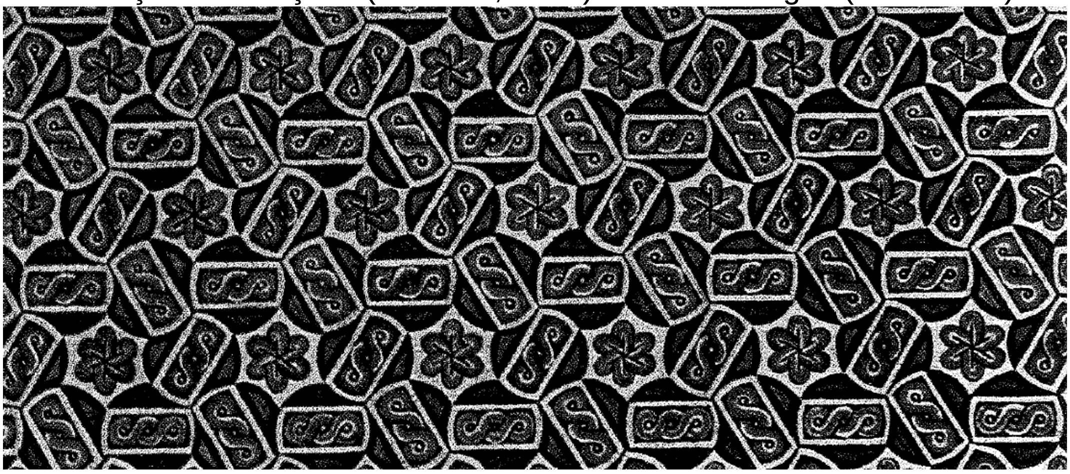


Figura 54: Pavimento de mosaico, Itália (Berti, 1976, citado por Washburn & Crowe, 1988, p. 241)

p6m

conjunto de simetrias:
translações, rotações (ordem 2, 3 e 6),
reflexões e reflexões deslizantes (6 eixos)

células da malha:
losangos (120° e 60°)

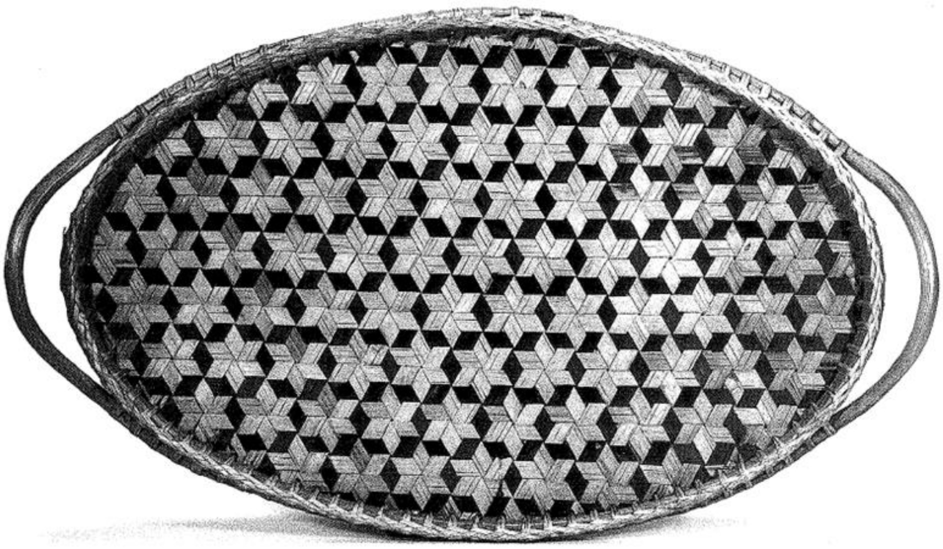


Figura 55: Bandeja de cesto trançada, Oceania, California Academy of Science, San Francisco (Washburn & Crowe, 1988, p. 242)

CAPÍTULO II – CONHECIMENTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO E CURRICULAR

Em relação aos conhecimentos do professor, há outros níveis que vão além do conhecimento científico do conteúdo, já apresentado no capítulo I, nomeadamente, o conhecimento didático-pedagógico e o conhecimento curricular. Estes dois níveis são apresentados neste capítulo, onde iniciamos pelo conhecimento didático-pedagógico.

O conhecimento pedagógico do professor engloba aspectos mais relevantes para a capacidade de ensino docente, como “as formas mais úteis de representação dessas idéias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações mais poderosas” (Shulman, 1986, p. 9), criando, assim, estratégias flexíveis de ensino as quais podem provir de suas próprias pesquisas ou da sua sabedoria empírica. Estas devem considerar as múltiplas características e bagagem pedagógica dos discentes e, a partir daí, criar “as condições de instrução necessárias para superar e transformar essas concepções iniciais” (Shulman, 1986, p. 10). Este deve ser o foco do conhecimento pedagógico, o que dá ao aluno a oportunidade de aprendizagem, onde “o processo de ensino se inicia necessariamente em uma circunstância em que o professor compreende aquilo que se deve aprender e como se deve ensinar” (Shulman, 2005, p. 9).

II.1. Importância do ensino e da aprendizagem de simetrias

Desde o início do séc. XIX que Klein (1909) já enfatizava a importância da utilização das transformações geométricas no desenvolvimento didático-pedagógico e científico da geometria e da matemática, em geral. Klein afirmava que sua obra constituía um ensaio fundamental para o ensino escolar com o objetivo de, através de suas concepções reformadoras, fazer das transformações geométricas o ponto central da instrução matemática (Klein, 1909). Veloso (1998) defende que a ideia de transformações geométricas, a qual “acrescenta uma perspectiva funcional da geometria, passou a constituir um meio poderoso de estudo, de organização dos conceitos geométricos e mesmo de definição de geometria” (p. 60). Neste século, as transformações geométricas e as simetrias passaram a figurar nos programas de países (Usiskin, Andersen & Zotto, 2010), tais como os Estados Unidos da América, a Inglaterra, Singapura, Irlanda, Holanda, Turquia, África do Sul e Portugal (Maia, 2014), embora, ainda em certos casos, a sua abordagem não ocorra, ou ocorra de forma superficial (Mashingaidze, 2012).

A geometria foi considerada, pela comissão formada em 1976 pelo *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM, 1978), uma das dez competências matemáticas básicas. O objetivo destas competências é agregar "todas aquelas que um adulto precisa para exercer com eficiência suas funções na sociedade moderna" (Sherard, 1981, p. 1). Assim, de entre os sete motivos pelos quais Sherard (1981) se apoia para justificar esta posição da geometria, destacamos o segundo e o sétimo motivos. Respectivamente, estes defendem que a geometria é uma competência básica porque "tem ampliações importantes a problemas da vida real" (Sherard, 1981, p. 2) e porque "existem valores culturais e estéticos que vêm de seu estudo" (Sherard, 1981, p. 4). Diante disto, o autor diz que W. D. Reeve assim considerou ao escrever que o fracasso das pessoas na apreciação das formas de vida presente em seu entorno próprio os leva a falharem também numa parte significativa da beleza do mundo.

Alves e Santana (2009) salientam que se a geometria, em geral, for ensinada nas séries iniciais, "a criança irá desenvolvendo os conceitos básicos, facilitando para uma melhor compreensão e no futuro não terá problema de introduzir a teoria com a prática" (para.2). Com o surgimento das normas do NCTM (2008), ecoava a importância do ensino de transformações geométricas e simetrias desde o pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade, referindo que os programas de ensino "deverão habilitar todos os alunos para (…) aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas" (p. 44), visto que "a ênfase adequadamente atribuída ao tema da simetria fornece aos alunos discernimento no campo da matemática e no da arte e estética" (p. 46).

Segundo Veloso (1998), a abordagem de transformações geométricas e das simetrias a partir do ensino básico possibilita aos discentes desenvolverem o espirito de observação e percepção de regularidades, permitindo que o educando manifeste livremente sua criatividade, viabilizado a transição de um estudo intuitivo para uma aprendizagem natural. Corroborando com Maia (2014) e Veloso (2012), as transformações geométricas e as simetrias revelam-se como tema fundamental para um amplo desenvolvimento de competências discentes, o que possibilita o desempenho de um papel importante no processo de desenvolvimento do sentido geométrico, o principal objetivo do estudo da geometria (Usiskin *et al*., 2010) além de favorecer o desenvolvimento do raciocínio e capacidade de argumentação discente (Yanik, 2011) e a capacidade de visualização e o pensamento geométrico enquanto qualidades rentáveis à resolução de problemas (Bansilal & Naidoo, 2012). Veloso (1998) afirma que "capacidade de interpretação e resolução de problemas aumentou consideravelmente quando passamos a dispor do método das transformações geométricas" (p. 60). Considera-se, então, a importância de se propor um ensino iniciado de forma prática, pela visualização e pelo desenho, valendo-se de uma "abordagem gráfica para consolidar a compreensão" (Mashingaidze, 2012, p. 210), pois, do contrário, o aluno desenvolverá certa resistência à prática da visualização em matemática (Bansilal & Naidoo, 2012).

Os conceitos de simetria potencializam o processo de ensino e de aprendizagem pois, além de estimular a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico, auxiliam "o desenvolvimento do raciocínio e capacidade de argumentação por parte dos alunos" (Yanik, 2011, p. 231). Para Sherard (1981), a geometria permite a compreensão e apreciação do mundo cotidiano, presentes em diversas manifestações naturais, artísticas, culturais e patrimoniais que "podem contribuir para uma vida plena e harmoniosa" (p. 4). Diversos autores também defendem que estas manifestações configuram-se como relevante recurso disponível em favor do desenvolvimento matemático das transformações geométricas e das simetrias, pois viabilizam a aplicação de conceitos científicos à própria realidade. Para Figueira *et al*. (2007), as "transformações de figuras (…), bem como a simetria são essenciais para olhar e compreender o mundo que nos rodeia" (p. 6).

Segundo Sauter (s.d.), o estudo de simetrias cumpre tantas necessidades intelectuais que tentar enumerá-las pode ser uma forma de limitar esta qualidade. O autor diz que o estudo deste tema pode servir de "espelho para as culturas do mundo" (p. 2), reconhecendo as simetrias como um fenômeno cultural mundial, o que no caso do ensino, permite aos discentes a compreensão da própria cultura. A simetria é como "o fio comum de simetria une as culturas do mundo” (Sauter, s.d., p. 2). Num âmbito mais direcionado ao belo que a simetria e o uso dos padrões proporcionam, Weyl (2015) é categórico ao afirmar que “a beleza está ligada a simetria” (p. 3). Para Cifuentes, Negrelli e Estephan (2000, p. 3), “a beleza na geometria é encontrada na simetria e na elegância das formas” e Ripplinger (2006) diz que este fato se deve ao efeito visual proporcionado, somado às criações artísticas do homem, à observação minuciosa da natureza e às necessidades ao longo do tempo. Para Gerdes (1992)

> A regularidade é o resultado do trabalho criativo do Homem e não o seu pressuposto. São vantagens práticas, realmente existentes, da forma regular descoberta que conduzem a consciência crescente dessa ordem e regularidade. As mesmas vantagens estimulam à comparação com outros resultados de trabalho e com fenômenos naturais. A regularidade do produto de trabalho simplifica a sua reprodução e assim se reforça a consciência da sua forma e o interesse por ela. Com a crescente consciência e interesse forma-se, simultaneamente, uma valorização positiva da forma descoberta: a forma é também aplicada onde ela não é necessária; ela é sentida e apreciada como bela (p. 100).

II.2. Como ensinar simetrias

II.2.1. Tendências mais recentes no ensino da matemática

Uma tendência pedagógica constitui-se, particularmente, em uma predileção por pensamentos e comportamentos pedagógicos pressupostos na história da educação ou mesmo em outras práticas pedagógicas atuais. Por outras palavras, tendência pedagógica pode ser definida como como “toda e qualquer orientação de cunho filosófico e pedagógico que determina padrões e ações educativas, ainda que esteja desprovida de uma reflexão e de uma intencionalidade mais concreta” (Ferrari, 2006, p. 2). Esta concepção distingue-se do uso metódico e infundado do termo *tendência* em expressões como *tendências no ensino de matemática* e *tendências na pesquisa em educação matemática*, comuns em coletâneas de livros didáticos, disciplinas de pós-graduação, cursos de extensão e até em concursos públicos para o magistério superior, tem por consequência um desentendimento sobre seu real significado (Cavalcanti, 2010).

Damázio (2013), assente em estudos anteriores (Damazio, 2008; Fiorentini, 1995), separa as tendências em educação matemática em dois grupos: o primeiro grupo comporta tendências emergentes no campo de ensino específico da matemática, como "modelagem matemática, didática da matemática francesa, tecnologias e educação matemática, educação matemática e interdisciplinaridade, história e ensino da matemática, resolução de problemas e etnomatemática" (Damazio & Rosa, 2013, p. 38), enquanto que o segundo abarca as tendências que se expõem a partir de bases teóricas da pedagogia, como "formalista clássica, formalista moderna, empírico-ativista, tecnicista, construtivista, socioetnoculturalista, sociointeracionista semântica, histórico-crítica" (Damazio & Rosa, 2013, p. 38).

Segundo Cavalcanti (2010), as tendências em educação matemática são dinâmicas e complexas, entretanto, como ponto partida à discussão, o autor propõe distinguir em três macro-tendências, as quais denomina por didático-pragmática, epistemológica, e político-sócio-cultural. A didático-pragmática contempla as que se referem ao ensino da matemática, nomeadamente, as que se relacionam com métodos e concepções voltadas ao ensino e à aprendizagem, como por exemplo a modelagem matemática, a resolução de problemas, o uso de jogos no ensino, as tecnologias da informação e comunicação (TICs) e história da matemática como recurso, a matemática recreativa. A epistemológica está mais inclinada às teorias da educação matemática e sua própria identidade científica, incorporando, por exemplo, o construtivismo radical e as teorias da psicologia e filosofia da educação. E, finalmente, a político-sócio-cultura, que o autor relaciona ao propósito associado a transcendência, englobando as tendências que consideram questões metodológicas do ensino e epistemológicas do ramo científico, como a inclusão, a etnomatemática, a educação matemática crítica, a educação para a paz.

II.2.2. Algumas dificuldades no ensino e aprendizagem da geometria

O ensino e a aprendizagem de geometria, já há muito tempo, são associados a algumas dificuldades bastante peculiares.

Segundo Mashingaidze (2012), ao abordar a geometria através da álgebra, como ocorre nas salas de aula, o ensino centra-se em "explicar aos alunos uma maneira de determinar a relação entre o objeto e sua imagem na forma de uma equação" (p. 198), o que Hawking (1999) considera ser a parte desagradável da matemática. O motivo da dificuldade enfrentada pelos alunos diante das transformações geométricas no ensino secundário, em relação a abordagem vinculada à manipulação de regras algébricas, também é corroborado por Bansilal e Naidoo (2012), ao alegar que, em termos visuais, os alunos não percebem o que estão efetivamente realizando, mesmo quando o uso das regras algébricas ocorre de forma correta. Este contexto é uma das razões que fomenta a crença discente de que o conceito de transformações geométricas é difícil de entender.

Timmer e Verhoef (2012), embora reconhecendo a praticidade do uso da álgebra enquanto uma técnica eficiente para a demonstração de teoremas na geometria euclidiana, concordam que esta medida dificilmente gera percepções visuais, omitindo a essência da geometria que passa a dar lugar, de forma menos eficiente, ao uso das fórmulas algébricas (Timmer & Verhoef, 2012). Esta prática põe o ensino desses dois ramos da matemática, álgebra e geometria, a perderem seus espaços legítimos: a geometria, descaracterizada, perde seu mais nobre significado na sala de aula; e a álgebra assume um posicionamento severo e desagradável aos olhos dos discentes (Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992).

Num estudo sobre os conteúdos de simetria inerentes a parte do ensino básico, no Paraná, Ripplinger (2006), baseada nas afirmações do Currículo Básico local, diz ser frequente deparar com o trato do conhecimento matemático através de uma visão platônico-formalista, “unicamente ligado à razão” (p. 45). No entanto, a autora salienta a importância a ser dada ao binómio razão-emoção, reconhecendo a emoção como fonte de conhecimento, ou conhecimento sensível, e diz tratar, em seu estudo, “a simetria com uma abordagem estética, uma linguagem que admite outros valores que não apenas a exatidão e o rigor” (Ripplinger, 2006, p. 45).

Segundo Andrade, Kusmenkovsky, Cardoso & Jacon (2007), a dificuldade de aprendizagem de simetrias também é da responsabilidade da abordagem tradicional promovida nas escolas, onde se estimula de forma insuficiente a visão espacial dos alunos, através da predominância do desenvolvimento do hemisfério esquerdo do cérebro, responsável pela lógica, racionalidade, abstração e simbolismo, enquanto o lado direito também é responsável por habilidades necessárias a esta aprendizagem, como por exemplo, a intuição, a visão global, os raciocínios visual e perceptivo, a imaginação criativa e a capacidade de síntese. É comum que o gosto pelo desenho, como forma de expressão aquando da infância decresça com a aproximação dos dez anos de idade, fase em que se consolidam funções específicas nos dois hemisférios[23]. Simultaneamente a esta fase, a criança desenvolve aptidões linguísticas e o "sistema de símbolos parece se sobrepor às percepções e interferir com desenhos exatos deles" (Andrade *et al*., 2007, p. 10), o que influencia diretamente a criatividade, a percepção e a produção e concepção artísticas.

II.2.3. Tendências recentes no ensino de simetrias

O ensino das transformações geométricas favorece uma abordagem moderna da geometria, o que, nos anos iniciais de escolaridade, viabiliza o seu tratamento numa vertente sintética afastada da analítica (Maia, 2014). Boyer (1998) relembra que esta prática era defendida por Lacroix (1765-1843), ao afirmar que álgebra e geometria devem ser abordadas o mais separadamente possível, embora "os resultados em ambas deveriam servir para mútua iluminação, correspondente, por assim dizer, ao texto de um livro e sua tradução" (Boyer, 1998, p. 330).

A fim de realçar a importância do ensino das transformações geométricas na matemática escolar elementar, Maia (2014), amplamente embasada em uma notória diversidade referencial[24], atribui três aspectos indispensáveis à abordagem desta temática. Vejamos, a seguir, esses três aspectos, embora, consoante nossos interesses com a presente investigação, nos ateremos em maior atenção ao terceiro e último aspecto:

1) estudo das propriedades das figuras;
2) sua associação (ainda que intuitiva) ao estudo das funções;
3) como ferramenta motivadora para análise de representações

[23] Conhecida por lateralização cerebral.
[24] Sugerimos ao leitor de maior interesse nestas referências que consulte a obra da autora. Maia, C. M. F. (2014). *As isometrias na inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Departamento de Ciências da Educação e do Património. Universidade Portucalense, Portugal.

culturais e do cotidiano nos quais a simetria adquire um papel de relevo.

A autora afirma que estes aspectos estão interligados e que o fato de reconhecer esta relação permite a compreensão integral deste tema.

Sobre o ponto 1), relativamente ao nível mais elementar e indispensável à continuidade dos estudos, Maia (2014) nos diz que a abordagem da temática em apreço permite que a geometria seja considerada numa perspectiva global e não local, focando-se nas transformações geométricas aplicadas nas figuras e não apenas na observação destas (Crowe & Thompson, 1987). Esta atitude é também contemplada pelo primeiro nível de compreensão geométrica do modelo de Van Híele (Maia, 2014).

Extrapolando as perspectivas transversais comuns aos currículos, num viés de ensino construtivista, e valendo-se de ricas e desafiantes tarefas, adequadamente sequenciadas, medidas mais específicas têm emanado com o propósito de superar determinadas dificuldades (Gaspar & Cabrita, 2014). Posto isto, advoga-se a construção do conceito de congruência de figuras por parte dos discentes, iniciando por sobreposição das mesmas e avançando para translação, rotação e reflexão e até composições. Gaspar e Cabrita (2014) consideram ainda que espelhos e dobragens, por exemplo, devem ser utilizados tão logo no início da abordagem das simetrias, começando por figuras que apresentam apenas um eixo e avançando para as que permitem rotação. Quanto à composição de figuras que admitem, em particular, simetria de rotação e de reflexão, é conveniente reconhecer alguns *deslocamentos*[25] e viabilizar conhecimentos progressivamente mais bem definidos e sistematizados (Ponte *et al*., 2007; NCTM, 2007; Schattschneider, 2009; Breda *et al*., 2011).

O PMEB de 2007 (Ponte *et al*., 2007) aponta para a importância de uma abordagem inicial das isometrias de forma intuitiva, com uma formalização crescente de maneira gradual. Booth (1984, citado por Outhred & Owens, 2006), baseado em alguns estudos, salienta que as ideias intuitivas de simetria e padrões eram explicitamente claras em suas pinturas. Isto posto, Maia (2014)

[25] Como dito no capítulo I, deve-se ter em atenção a utilização de termos como *deslocamento* e *movimento*, pois estas ações, na realidade, não ocorrem nos estudos das transformações geométricas.

considera, por diversos motivos, que “as percepções visuais são fundamentais para o sucesso escolar dos primeiros anos” (p. 129), e que, a sua ausência, é considerada como “um dos problemas da educação em geometria” (Fujita, Jones & Yamamoto, 2004, p. 5). Os mesmos autores apontam para a importância a ser dada às habilidades intuitivas dos alunos e consideram que estas deveriam ter um papel crucial na educação geométrica. Tratando-as por *intuição geométrica*, estes autores dizem ser “um tipo de habilidade para imaginar, criar e manipular figuras geométricas na mente ao resolver problemas de geometria” (p. 1). Em consonância com a importância a ser dada à intuição estão matemáticos de destaque como Hilbert (1862-1943) e Poincaré (1854-1912), já Piaget e Van Híele não a reconheciam com tamanha distinção.

Para Bouckaert (1995) as propriedades dos objetos geométricos devem ser pensadas conjuntamente com as propriedades das transformações, ligadas através das transformações geométricas, podendo ser caracterizadas como o estudo de objetos geométricos no plano. Assim, o estudo das transformações permite “descobrir e/ou provar propriedades de objetos geométricos; criar figuras regulares (padrões) como frisos, rosáceas, papéis de parede; classificar objetos geométricos e perceber a quiralidade de um objeto" (Bouckaert, 1995, p. 4).

No ponto 2), Maia (2014) considera a visão da geometria assente numa conceitualização matemática contemporânea, em que as figuras são subconjuntos do plano, sendo este um conjunto infinito de pontos. Assim sendo, Yanik (2011) diz que as transformações geométricas são aplicadas a todos os pontos do plano e não apenas a um único objeto do mesmo. Particularmente em relação às simetrias, Michel Demal em seu projeto implementado a crianças de 5 a 14 anos, em 1984, usava o termo *automorfismo*, ou seja, “transformação que mapeia um objeto em si mesmo” (Bouckaert, 1995, p. 2), com o objetivo de abranger as translações e rotações e não apenas as reflexões, comumente as únicas associadas à simetria. Para Hollebrands (2004), o trato de funções dado às transformações, diferenciando-as de movimentos, é um entendimento importante ao desenvolvimento do raciocínio. Jackson (1975) aponta que a relação entre estes dois temas é possível, pois as transformações geométricas são aplicações das funções na geometria, e esta maneira de perceber é fundamental à matemática como um todo.

De acordo com Crowe (s.d.), o texto pioneiro da teoria de grupos é de autoria do suíço Andreas Speiser, na edição de 1927 do livro *The Fundamental Principles of the Mathematical Sciences in Individual Treatises With Special Attention to Their Applications* (Speiser, 1927), e neste mesmo livro, o autor dedica um capítulo completo à simetria de ornamentos e suas possíveis aplicações à antropologia e arqueologia. Oliveira (1997) reconhece a importância de simetria em matemática devida à sua relação com a noção algébrica de grupo. Segundo Schattschneider (1978), desta relação emanam benefícios para além de aspectos matemáticos. Como exemplo, temos o caso de Stylianou e Grzegorczyk (2005) que, a partir de um curso dedicado às transformações geométricas através dos conhecimentos de grupo, admitiram ter percebido um outro olhar em relação à associação entre matemática e arte. Schattschneider (1978) endossa a relação entre os estudos de simetrias e a teoria de grupos pela análise da repetição, construção e criação de desenhos, como por exemplo, na obra de Escher que, com suas características peculiares a teoria de grupos, faz sentido tanto na matemática quanto no meio artístico.

O ponto 3), o de nosso maior interesse no contexto deste trabalho, conta com uma gama muito diversa de estudos que relacionam as transformações geométricas e as simetrias aos demais ramos da própria matemática e também a outras áreas do saber (Son, 2006). Santos (2008) considera urgente uma mudança na estrutura da educação, onde a cultura tenha um papel de destaque “na construção dos conhecimentos, na elaboração da própria linguagem, independente de qual saber esteja sendo discutido” (p. 32). Santos (2008), utilizando a matemática como exemplo, diz que, por um lado, esta traz as “características de precisão, rigor e exatidão, servindo de dominação do poder” (p. 32), e por outro destacam-se os personagens icônicos “adotados pelos compêndios do curso de matemática” (p. 32). Sobre esta bivalência onde a matemática se assenta, D’Ambrósio (1996) diz que

> Se isso pudesse ser identificado apenas como parte de um processo perverso de aculturação, por meio do qual se elimina a criatividade essencial ao ser (verbo) humano, eu diria que essa escolarização é uma farsa. Mas é pior, pois na farsa, uma

> vez terminado o espetáculo, tudo volta ao que era, ao passo que na educação o real é substituído por uma situação que é idealizada para satisfazer os objetivos do dominador. O aluno tem suas raízes culturais, parte de sua identidade, e no processo, essas são eliminadas. Isso é evidenciado de maneira trágica, na educação indígena. O índio passa pelo processo educacional e não é mais índio, mas tampouco branco (D'Ambrósio, 1996, p. 114).

Corroborando com este posicionamento, Sadovsky (2010) diz que

> É preciso instituir um sentido, Temos de construí-lo. Ele não é evidente, não é um manifesto, não é natural. Falamos de instituir e construir, não de restituir ou reconstruir. Não se trata de recuperar o que passou, embora muitos sintam nostalgia nisso. O que era antes — ao menos no caso da matemática — já não atrai, não satisfaz, não gratifica e não seduz nem os docentes, nem os alunos (p. 12).

II.2.4. Contextualização e ensino de simetrias através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais

Pensar na aprendizagem da matemática por meio da arte é uma ideia que é percebida ao longo da história dessa ciência. Muitos filósofos, geômetras e arquitetos desenvolveram projetos tendo a matemática como elemento fundamental.

No século XX, motivado pelo crescente avanço científico e dissociação entre ciência e filosofia, viu-se uma gradual fragmentação e especialização do conhecimento (Pombo, 2004). Em meados daquele século, Oppenheimer (1955, citado por Pombo, 2005) interpreta tal situação da seguinte maneira:

> Hoje, não são só os nossos reis que não sabem matemática mas também os nossos filósofos não sabem matemática e, para ir um pouco mais longe, são também os nossos matemáticos que não sabem matemática. Cada um deles conhece apenas um ramo do assunto e escutam-se uns aos outros com um respeito fraternal e honesto. (...) O conhecimento científico hoje não se traduz num enriquecimento da cultura geral. Pelo contrário, é posse de comunidades altamente especializadas que se interessam muito por ele, que gostariam de o partilhar, que se esforçam por o comunicar mas não faz parte do entendimento humano comum... O que temos em comum são os simples meios pelos quais aprendemos a viver, a falar e a trabalhar juntos. Para além disso, temos as disciplinas especializadas que se desenvolveram como os dedos da mão: unidos na origem mas já sem contacto (p. 7).

Gallo (2000) aponta que, muito diferente das práticas educacionais das sociedades antigas, onde o desenvolvimento do conhecimento acontecia diante às necessidades de resposta a uma misteriosa realidade experimentada no dia-a-dia, a produção de conhecimento através do ensino contemporâneo ocorre de forma compartimentada, fragmentada pela especialização do saber, condição da qual uma das consequências é o fenómeno da institucionalização generalizada da atividade científica. Neste panorama, atualmente tem-se a ciência como uma grande organização, internamente dividida em diferentes comunidades científicas com funções bem definidas, cada um no seu campo de ação, como grupos rivais que lutam entre si para conseguir espaço, apoio financeiro ou reconhecimento (Pombo, 2004).

Sabemos que existem muitas vantagens em consequência da especialização (Malanchen, 2014), por exemplo, um maior reconhecimento e aprofundamento ao tema, no entanto, Gallo (2000) não descarta a necessidade em considerar que as partes compõem o todo, complexo e interrelacionado, de forma aos conhecimentos especializados terem um sentido global. A fragmentação do ensino, que isola os objetos do seu meio próprio, assim como as partes de um todo (Morin, 2003), deve ser superada de forma a atonar as conexões entre os saberes, a complexidade da vida e dos problemas atuais a ela inerentes, com o objetivo de dar respostas aos anseios futuros. Do contrário, aliás é que temos como resultado do histórico de fragmentação refletido em diversos currículos, o conhecimento ganha altas doses de abstração, de alheamento, caracterizado num contexto forjado.

Apesar de, segundo Elam (2010), poucos educadores se servirem da arte no ensino da matemática, tratando isoladamente os conteúdos, estudos internacionais como o *Critical Links: Learning in the Arts and Student Social and Academic Development* (Deasy, 2002), indicam que a aprendizagem em Arte desenvolve as habilidades matemáticas. De entre as vantagens, Freire (1983) aponta ser mais provável conseguir a integração do afeto e da cognição se procurarmos atividades em que o sentir e o saber são reconhecidos, utilizando para isso a interligação que diversas áreas do saber têm com a arte. Vincular matemática à arte leva o educando a vê-la como uma obra construída pelo espírito humano, com equilíbrio, harmonia, beleza e delicadeza nos detalhes (Antoniazzi, 2005), constituindo-se como fundamental para o desenvolvimento integral do ser humano e para a evolução da própria sociedade (Barbosa, 2007), possibilitando a inserção do indivíduo no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (Fainguelernt & Nunes, 2006). Rossi e Bisognin (2009) afirmam que a matemática e a arte se integram em vários caminhos favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia intelectual, da sensibilidade e da criatividade.

É possível detectar, predominantemente em contextos educacionais, o uso de termos correlatos ao propósito da não fragmentação do ensino, como por exemplo, pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade (Lavaqui & Batista, 2007; Pombo, 2004; Roldão, 2000). Lavaqui e Batista (2007) apresentam um considerável referencial teórico destes termos, bem como outros subtermos associados e suas variações interpretativas à luz de alguns autores. Estes termos são definidos num *continuum* de crescente intensidade que abrangem conhecimentos de distintas disciplinas enquanto áreas do saber, caracterizadas pela adição, coordenação, combinação e fusão, respectivamente, num grau de paralelismo, perspetivismo e convergência e holismo e unificação (Pombo, 2004; Amaral, 2015). Com a nossa investigação, e através dela, não atingimos – o que também não fora nosso objetivo – um cariz associativo a algum destes termos mencionados há pouco, na medida que estes efetivamente integram, em maior ou menor grau, os conhecimentos de mais de uma disciplina. Em, e através da nossa pesquisa, valemo-nos da utilização de recursos oriundos da arte, da cultura e do património, reconhecemos estes como instrumentos contextualizadores, capazes de motivar e revelar algum sentido à abordagem construtivista de determinados conceitos matemáticos, ou, mais precisamente, geométricos. Em consonância com Gandulfo *et al*. (2013), reconhecemos que

> A vivência geométrica na escola pode ser uma experiência de grande valor se a aprendizagem está fundamentada em atividades construtivas motivadoras e lúdicas. A metodologia ativa fundamenta o processo de ensino na atividade criativa do aluno, na sua atividade investigativa, nas suas descobertas, tendo os alunos como os próprios construtores de seus conhecimentos e ao professor como o orientador desse processo (p. 2).

Contextualização traduz-se em um conceito complexo que remete para diversas teorias pedagógicas e psicológicas as quais, apesar de subsistirem ainda dúvidas quanto ao seu real impacto no processo de aprendizagem, têm vindo a revestir grande relevo no ensino (Festas, 2015). Para Fainguelernt (1999),

> No processo de ensino-aprendizagem um conceito não pode simplesmente ser reduzido à sua definição, e é através da contextualização por meio de diferentes atividades e situações-problemas que ele adquire um significado para o aprendiz (p. 75).

No caso das simetrias, a sua presença em diversos contextos cotidianos, para além do contexto escolar, realça que o seu estudo, se promovido através de recursos provindos destes contextos, favorece a aprendizagem através do desenvolvimento da motivação e interesse por este tema, permitindo aos discentes uma melhor representação dos conceitos (Andrade *et al*., 2007, p. 10).

Com base em afirmações apresentadas em documentos educacionais brasileiros, nomeadamente nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Barbosa (2004) considera que a articulação entre as expressões *contextualização* e *interdisciplinaridade* englobam as relações entre conteúdos da própria à matemática, e que o ensino desta disciplina está relacionado diretamente a um contexto. Assim, Barbosa (2004) revela profunda preocupação com o uso do termo contextualização, pois, uma vez que todas as atividades da matemáticas escolar fazem parte de um determinado contexto, a reivindicação pela contextualização é inútil. Com isso, não cabe reivindicar a contextualização do ensino de matemática. Este já está contextualizado. Nesta perspectiva, D' Ambrosio (2001) levanta duas questões:

> "(…) como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV?" (p. 76),

e afirma que "(…) não se pode entender Newton descontextualizado" (p. 76).

Diante disto, entendemos que duas outras questões devam ser respondidas: Qual é o contexto?; Que contextos desejamos?

Apoiado por Skovsmose (2000), consideramos três contextos diferentes:

1. matemática pura: quando a situação concerne integralmente à matemática acadêmica;

2. semi-realidade: quando a situação abarca elementos do cotidiano ou demais ciências, porém trata-se de situações forjadas.
3. realidade: quando relata situações que ocorrem nos contextos cotidiano e científico.

Skovsmose não considera a separação entre a matemática e a realidade, uma vez que a matemática também é realidade pelo fato de admitir um cariz formatador na sociedade, onde as ideias que lhe pertencem impactam diretamente em nossas vidas (Skovsmose, 1994).

Direcionando para o ensino e para aprendizagem e reconhecendo as possibilidades de um ensino integrado, Amaral (2015) considera que "para consolidar e ampliar um conceito matemático é importante que o aluno o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos" (p. 18). Assim, para além de se valer com o que se infere ser parte do habitual discente, é importante viabilizar o contato deste com diferentes propostas de compreensão do conceito a ser abordado (Amaral, 2015). Tanto o contexto cotidiano atual quanto o da antiguidade proporciona "motivo de estudo e desenvolvimento da capacidade criadora da humanidade e é a geometria que oferece maiores possibilidades na hora de experimentar mediante materiais adequados" (Gandulfo *et al*., 2013, p. 2). Assim, o ensino de geometria é visto como um aliado à análise e conhecimento do mundo físico habitualmente presente, configurando-se como um importante instrumento favorável à interpretação e aquisição de conteúdos matemáticos e de outras ciências que, além de terem um interesse cultural próprio, abrange um interesse pedagógico considerável em favor de motivar o ensino e também a aprendizagem da geometria (Alsina & Canals, 2000).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Artes (Brasil, 1997) indicam que a conexão entre matemática e arte favorece o desenvolvimento do educando, afirmando que

> o aluno que conhece arte pode estabelecer relações mais amplas quando estuda um determinado período histórico. Um aluno que exercita continuamente sua imaginação estará mais habilitado a construir um texto, a desenvolver estratégias pessoais para resolver um problema matemático (p. 14).

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1998), indicam que o estudo de geometria e suas conexões com outras áreas de conhecimento devem ser explorados “a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato” (p. 51).

Em Portugal, as simetrias estão presentes nas diretrizes do Programa de matemática do Ensino Básico de 2007 com o objetivo de fomentar uma dinâmica de ensino e de aprendizagem embasada numa metodologia socioconstrutivista, e, para tal, a destreza na manipulação de recursos estáticos e dinâmicos é considerada uma necessidade a que os professores devem recorrer (Ponte *et al*., 2007). Este programa assume como necessidade, para além dos temas matemáticos, “três capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática – a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação Matemática” (p. 1), às quais é indicado que estejam em atenção permanente diante do ensino a ser promovido. Assim, através do ensino e da aprendizagem de matemática, deve-se criar contextos que favoreçam a articulação proveitosa entre estas capacidades, bem como a sua relação direta com os temas matemáticos. Segundo Boavida e Menezes (2012), esta ideia de integração associa-se à de progressividade. Cada uma destas capacidades transversais contam, separadamente, com seus objectivos gerais e específicos de aprendizagem (Ponte *et al*., 2007). As Metas Curriculares, em consonância com o programa vigente atualmente, referindo-se às capacidades transversais como temas transversais, diz que

> Os temas transversais referidos no Programa de 2007, como a Comunicação ou o Raciocínio matemático, referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados, estando contemplados neste documento de forma explícita ou implícita em todos os descritores (Bivar *et al*., 2013, p. 2).

Embora pareça omisso em relação à resolução de problemas, o programa atual faz diversas menções com respeito a esta capacidade, demonstrando considerá-la também como um tema transversal, à semelhança dos que menciona explicitamente na passagem citada há pouco. Aliás, resolução de problemas enquanto uma capacidade transversal também é contemplada em diversos documentos orientadores de práticas educativas internacionais, a exemplo das normas do NCTM, que considera “a simetria e as transformações geométricas como uma estratégia de resolução, verdadeiramente notável e raramente utilizada" (Maia, 2014, p. 135).

Ma (2009), em prol da compreensão matemática elementar profunda, afirma que o professor deve estar munido de todas as valências, entre elas a científica, de forma a fomentar o desenvolvimento de outras competências incluindo as competências transversais. Neste sentido, afirma que:

> alguns investigadores fizeram notar que, de modo a promover a compreensão matemática, é necessário que os professores ajudem os alunos a fazer conexões explícitas entre os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas. De fato, nem todos os professores são capazes de fazer essas ligações: tudo indica que apenas os que têm uma clara compreensão das ideias matemáticas incluídas no tópico poderão estar aptos a desempenhar esse papel (Ma, 2009, p. 38).

No que concerne à justificativa de abordagens de conteúdos curriculares em geral, D'Ambrósio (1996) diz que estas devem ser "contextualizadas ao mundo de hoje e do futuro" (p. 32), o que é complementado pelos *Estudos Complementares AVA 2000* (Paraná, 2002), ao considerar que

> O estudo da geometria ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo. A simetria, por exemplo, proporciona oportunidades para os alunos visualizarem a geometria no mundo da arte ou na natureza. Neste domínio, a exploração de conceitos e padrões geométricos pode criar situações muito interessantes para os alunos (Paraná, 2002, p. 44).

Kaleff (1994) eleva a importância do ensino de geometria na escola básica não se limitar apenas ao desenvolvimento de conceitos, mas sim na promoção destes em contextos mais amplos, relacionando-os com outras áreas do saber para além da própria matemática, "interligando-os com a vida real" (p. 85). O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008) considera que as ideias geométricas se mostram apropriadas à representação e resolução de problemas em outras áreas da própria matemática e em situações cotidianas, cabendo, sempre que possível, ser integrada às outras áreas.

Zaleski Filho (2013), na promoção do ensino de simetrias entre outros conceitos matemáticos através da arte, com destaque às obras de Piet Mondrian, reconhece a interligação entre a matemática e o Universo, seus números e formas geométricas, as equações da ciência e da vida e a estreita ligação destes elementos com a arte, a qual nos direciona a conhecer o mundo onde nos inserimos, percebendo seu vigor criativo. Como considera Maia (2014, p. 134), “uma forma de os cativar para os temas da matemática é cativá-los para o sentido do belo”.

A existência de padrões nos objetos produzidos pelas várias culturas constitui, para alguns professores, uma base trabalho para a exploração deste tipo de regularidades geométricas (Veloso, 1998).

Estas relações permitem o desenvolvimento de experiências de aprendizagem mais ricas e motivadoras, favorecendo a melhor relação entre a matemática e o aprendiz (Matos & Cabrita, 2012), ajudando-os no desenvolvimento da sua própria intuição, auto-estima e motivação (Gura, 1996). Stylianou e Grzegorczyk (2005) consideram que a relação entre a arte e o *design* é ampla e sólida, exemplificando através dos trabalhos de Escher e Fomenk. O primeiro, enquanto artista que se valia da matemática, e o segundo, enquanto matemático que se valia da arte. Em seus estudos, estes autores revelam que os estudantes que participaram no projeto intitulado *Escher World* “desenvolveram uma forte compreensão do conceito de simetria e o desenvolvimento geral das competências relacionadas com a resolução de problemas” (Stylianou e Grzegorczyk, 2005, p. 32). O reconhecimento dos padrões de regularidade de algumas estruturas para a compreensão do mundo que nos rodeia é considerado por diversos autores, como a essência da matemática (Vale, 2009). Bulf (2009) diz que devemos reconhecer que o mundo real favorece o raciocínio empírico, mas que também deve ser reconhecido como um “conceito científico” (p. 726), considerado por Bouckaert (1995) como “fundamental” (p. 1), e que é parte da matemática e de outras áreas do saber.

II.2.5. Alguns estudos desenvolvidos valendo-se do uso de recursos artísticos, culturais e patrimoniais na promoção do ensino de simetrias

Os estudos das simetrias pode ser iniciado através da utilização de recursos intrínsecos às manifestações artísticas, culturais e patrimoniais vivenciados cotidianamente. A análise de padrões diretamente ligados a estudos culturais foi iniciada, de acordo com Crowe (s.d), através da publicação da tese doutoral de Edith Mueller (Mueller, 1944), onde detalhava matematicamente os ornamentos mouros presentes em Alhambra. Entretanto, ideias semelhantes foram introduzidas na arqueologia norte-americana em 1942 por George Brainerd (Brainerd, 1942) e, de forma mais minuciosa, por Anna Shepard (Shepard, 1948). A busca de padrões geométricos funciona como um atrativo aos discentes, permitindo-os desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas, apresentar justificações e fazer generalizações (Matos, 2011), perceber características básicas das isometrias e desenvolver competências espaciais (Yanik, 2011).

A presença de simetrias em diversas manifestações artísticas, culturais e patrimoniais, permite aos docentes um embasamento para a exploração do ensino deste tema (Veloso, 1998). No entanto, a necessidade de compreensão, simples ou aprofundada, depende do conhecimento científico desses conceitos (Washburn & Growe, 1998).

Maia (2014) apresenta uma ampla coleção de estudos em que recursos artísticos, culturais ou patrimoniais serviram de base para o ensino e a aprendizagem de simetrias e todos se revelaram benéficos à abordagem deste tema. A autora aponta três estudos realizados com sucesso, por Gordon (1996), Gorini (1993) e Stylianou e Grzegorczyk (2005) em cursos de formação, através do recurso a arte e objetos do cotidiano. Gordon (1996) utilizou papel de parede considerando-o um recurso repleto de conceitos, acessível, transcultural, que impactou grande entusiasmo aos discentes. Gorini (1993), através da análise visual de obras de arte, apresenta que seu trabalho com os alunos permitiu-lhes perceberem a relação entre as duas áreas, considerando que a fonte de beleza de trabalhos artísticos emana da beleza da própria matemática. Stylianou e Grzegorczyk (2005) aproveitaram padrões geométricos oriundos da arte clássica e contemporânea, obtidos pelos próprios alunos. Os autores afirmam que a confluência entre arte e matemática sistematiza um evidente instrumento que cativa os discentes e é capaz de motivar inclusive os discentes que não coadunam com os currículos adotados ou com o próprio cariz de abstração da matemática ou aos quais estiveram dispostos a uma pedagogia estéril (Stylianou & Grzegorczyk, 2005). Os alunos do curso promovido por Stylianou e Grzegorczyk, apesar da ideia que possuíam acerca do conceito de simetria e da capacidade de identificar a simetria como simetria axial ou como uma simples reflexão, não conseguiam definir verbalmente os conceitos tampouco reconhecer matematicamente as demais simetrias. De acordo com Maia (2014), ao fim dos cursos de formação promovidos por Gordon e Gorini já era possível notar o encanto dos formandos pelas simetrias e pelas suas relações com os recursos utilizados. Quanto ao curso promovido por Stylianou e Grzegorczyk (2005), na fase final notava-se a evolução do conhecimento dos formandos, os quais já conseguiam reconhecer as quatro simetrias, utilizando termos pertinentes e propriedades “termos específicos e propriedades comuns à teoria de grupos.

Nascimento, Benutti e Neves (2007) utilizaram mandalas de catedrais enquanto rosáceas, para abordar o ensino, principalmente, de simetria de rotação e de reflexão. Para estes autores, “a riqueza de formas presentes nessas estruturas é que possibilita um efetivo exercício da percepção visual e da criatividade” (Nascimento, Benutti & Neves, 2007, p. 7). Além disso, a atual busca por novas perspectivas para as mesmas estruturas geométricas do passado eleva-se “nos princípios fundamentais que organizam a forma, como as simetrias, e não no traçado em si” (Nascimento, Benutti & Neves, 2007, p. 8), o qual conta com as tecnologias gráficas como aliado no desenvolvimento.

Marchis (2009) desenvolveu uma proposta de ensinar simetrias utilizando mosaicos, nomeadamente de Sevilha, na Espanha, e de Monastir, na Tunísia, e elementos presentes no cotidiano, como móveis e edifícios, por exemplo, relacionando o conceito matemático à arte e à etnografia através da interculturalidade. Seu trabalho foi direccionado a alunos de 11 e 12 anos e, de acordo com a autora, o sucesso na aprendizagem ocorreu de forma atrativa e contou com questões interculturais, onde os discentes também aprendem Geografia, Etnografia, História e Artes.

Kolodzieiski (2016), em sua tese doutoral, apresenta relatos de docentes que abordaram os conceitos de simetrias em sala de aula através de recursos provenientes da cultura africana, em tranças Nagô feitas em penteados e em mosaicos na construção do tabuleiro do Shisima.

Barros (2017) realizou uma pesquisa com alunos do 6º ano da Educação Básica, onde analisou as transformações geométricas, em especial a simetria de reflexão, rotação e translação, através da relação entre a matemática e a arte, focada nas obras de artistas como Maurits Cornelis Escher, Tarsila do Amaral, Ivan Cruz, Eduardo Kobra e João Carvalho. Segundo a autora, os resultados revelaram uma oportunidade de reduzir desajustes de aprendizagem dos conceitos geométricos, além de alcançar melhorias do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos.

Maciel, Rêgo e Carlos (2017) desenvolveram uma pesquisa a fim de perceber quais as possibilidades pedagógicas do uso de imagens fotográficas nos manuas escolares de matemática, considerando a contextualização destas com o ensino. Estes autores embasaram-se em três pilares: “a imagem fotográfica, como expressão humana (…); a contextualização matemática como estratégia para o ensino (…), em especial no cotidiano (…); e o livro didático de matemática” (p. 345). Os resultados obtidos revelam a importância do uso de imagens na abordagem de diversos conceitos matemáticos, destacando-se os de geometria e principalmente os de simetria, os quais consideram de significativa importância para o desenvolvimento dos demais conteúdos.

Teixeira, Fialho, Medeiros e Jarimba (2017) apresentam quatro trabalhos, desenvolvidos por estudantes do mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do ensino Básico, da Universidade dos Açores, implementados com alunos do 3º CEB. Os autores assentaram-se na relação entre a matemática, a arte e o património cultural açoriano, servindo-se das expressão plástica na busca de padrões matemáticos, utilizando como recursos as calçadas, tapetes e painéis de azulejos. Este trabalho também pôde contar com o que o programa de Estudo do Meio sugere ao afirmar que “o meio local, espaço vivido, deverá ser objeto priviligiado de uma primeira aprendizagem metódica e sistemática da criança já que, nestas idades, o pensamento está voltado para a aprendizagem concreta” (ME-DEB, 2004, p. 101). Particularmente em relação ao trabalho que utilizou as calçadas como recurso, os autores consideraram que foi dada aos estudantes a oportunidade de consolidar alguns conteúdos já abordados anteriormente, nomeadamente, o de simetrias, onde foram notadas algumas dificuldades na identificação das mesmas durante a atividade.

Souza, Quartieri e Marchi (2017) desenvolveram atividades com alunos do 6º ano do Ensino Básico relacionando matemática e arte através de mandalas. Apesar de não estar explícito que conceitos foram abordados nas atividades, percebe-se apenas a incidência de simetria de reflexão. As autoras revelam que as atividades impactaram na motivação e interesse por parte dos discentes, além da aquisição de todos os conceitos matemáticos abordados.

Martins (2017), através da conexão entre as simetrias de reflexão, de translação e de rotação e os padrões geométricos presentes nos azulejos históricos de Belém do Pará, desenvolveu uma proposta de ensino para subsidiar o ensino destes conceitos aos alunos do 9º ano do Ensino Básico. No entanto, trata-se de uma proposta, não sendo apresentados dados acerca de sua implementação.

Consideramos de notável interesse apresentar um projeto de doutoramento em curso no ano de 2017. Trata-se do artigo de Ribeiro, Palhares e Salinas (2017), que objetiva analisar e compreender as estruturas matemáticas presentes em elementos como coreografia, trajes, acessórios e música, da dança folclórica típica da região Norte de Portugal e da Galiza. Segundo os autores deste artigo, a pesquisa visa desenvolver tarefas a serem implementadas em sala de aula em níveis de escolaridades adequados, e um conjunto de orientações pedagógicas necessárias a esta implementação.

II.3. O lugar das transformações geométricas, isometrias e simetrias no currículo e as respectivas orientações metodológicas

Retornando à perspectiva de Shulman (1986), existe outro domínio associado ao conhecimento do professor: o conhecimento curricular. Shulman (1986) considera currículo como a

> gama completa de programas projetados para o ensino de assuntos e tópicos específicos em um determinado nível, a variedade de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas e o conjunto de características que servem de indicação e contra-indicação para o uso de currículo particular ou material de programa em circunstâncias particulares (p. 10).

Assim, o currículo e tudo o que este abarca servem de matéria-prima com a qual o professor constrói seus instrumentos de ensino e os avalia em prol da melhor aprendizagem de seus alunos, e este é o motivo porque a não abordagem do conhecimento curricular nas formações de professores é ainda mais grave do que a mesma falta relativa ao conhecimento pedagógico.

Shulman (1986) ilustra esta importância ao levantar o seguinte questionamento: “Será que confiamos em um médico que realmente não entendesse as formas alternativas de lidar com categorias de doenças infecciosas, mas que sabia apenas de uma maneira?” (p. 10).

II.3.1. A Escola, as Disciplinas Escolares, a Matemática e o Currículo

Segundo Maia (2014, p. 41), “a escola é uma estrutura organizada, instituída pelo Estado”, que, especificamente em relação à escola portuguesa, se destaca como intrumento de socialização dos educandos mais jovens e de desempenho de papéis sociais fulcrais à sociedade que a abriga. Isto posto, a escola se traduz em uma ferramenta singular “para a aquisição de conhecimentos e habilidades indispensáveis, tanto para a luta contra as desigualdades econômicas e sociais quanto para a participação no processo de transformação social” (Silva, 1989, p. 67).

O surgimento das disciplinas escolares remete-se aos séculos XVI / XVII, e é a partir daí que se inicia o notório desenvolvimento cultural do século XIX e XX (Boavida & Amado, 2008), fomentando o advento de novos saberes escolares transparecidos pelo surgimento da diversidade de disciplinas e, consequentemente, prejuízo de outras. Enquanto ciência e disciplina escolar, podemos afirmar que a matemática é uma das mais antigas, qualidade tal que lhe proporciona, por toda a sua existência, uma posição de destaque no currículo (Ponte *et al*., 2007). Este destaque pode ser justificado por ser, esta ciência, causadora de implicações diretas no modo de pensar e de agir do ser humano. Além dos saberes instrumentais e práticos, também lhe estão associados aspectos do desenvolvimento intelectual, valorizados na escola, como o raciocínio, a lógica, a exatidão e a objetividade. Diante da atual sociedade globalizada, imersa na amplitude de agentes e contextos educativos, as escolas, os docentes e os discentes confrontam-se com inúmeros desafios onde a matemática se dispõe como instrumento cultural fundamental, permitindo o desenvolvimento e/ou aprimoramento de capacidades e competências, tais como a argumentação, a formulação e teste de conjeturas, a comunicação e o rigor da observação e a resolução de problemas, aspectos que contrbuem para a diminuição da exclusão social e obtenção de sucesso pessoal e profissional (NCTM, 2007; Roth & Radford, 2011). Qual a justificativa de oferecermos ao estudante uma experiência dentro da escola se esta não lhe possibilita a utilização de seus valores fora dela, de modo a usufruir conscientemente o mundo? Não se trata de uma ciência exata em prol do social, e sim de uma ciência que pode também ser vista socialmente na maneira como esta se apresenta. Este é um desafio atual da educação matemática que "exige mudanças substanciais" (UNESCO, 2016a, p. 11). A necessidade de utilização matemática é intrínseca à atividade humana e revela-se assim de forma multifacetada, transcendente ao perfil adotado no senso comum.

Numa visão sociológica, Pardal (1993) considera o currículo escolar diferente de um simples normativo técnico de "planos de estudo, de estratégias de aprendizagem e de mecanismos de avaliação. Um currículo escolar é uma construção sociopedagógica elaborada por uma estrutura política, assente num conjunto de valores" (p. 14).

Relativamente à administração do currículo, as entidades governamentais, em geral, não conseguem gerir as multifaces das demandas escolares, o que permite alguma autonomia às escolas em adaptarem os normativos consoante o contexto particular – condições económicas, sociais e culturais dos discentes – de cada uma delas (Maia, 2014). As adaptações viáveis de administração de um currículo devem emergir considerando essas condições como aspectos centrais aos processos didático-pedagógicos, objetivando garantir um ensino variado, rico e de qualidade, diante das demandas normativas comuns (Silva, 1989).

Tais demandas comuns, habitualmente conhecidas por currículo nacional "resulta do conjunto de dados e conhecimentos selecionados dos bens culturais disponíveis, transformados em saber escolar (logo, susceptíveis de serem ensinados e aprendidos) (p. 69), que objetivam "garantir a socialização do conhecimento como um dos requisitos necessários em direção a uma maior equidade social" (p. 69). Ademais, a busca por um currículo comum não significa a unificação do ensino, mas favorecer um conjunto unímodo com aliança entre este instrumento e a administração que a escola realiza diante do contexto real "definindo opções e intencionalidades próprias, e reconstruindo modos específicos de organização e gestão curricular, adequados à consecução das aprendizagens que integram o currículo para os alunos concretos daquele contexto” (Roldão, 1998, p. 44).

Frente à multiplicidade e complexidade dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, percebemos a relevância de identificação dos seus desafios no desenvolvimento de uma visão, partilhada entre professores, educadores e demais agentes educativos, que emane e responda às consequentes expectativas, tanto para o ensino quanto para a aprendizagem desta ciência. Assim considerando, vislumbra-se a administração de um currículo criado como um vetor para aprendizagens nesta perspectiva (Rose, 2002), conjugando maneiras e oportunidades de ações variadas e vantajosas (Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons, & Shahan, 2011), seleção de recursos a serem utilizados (Jackson *et al*., 2011; Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009), e concretização de metas didáticas que viabilizem a consolidação de práticas educativas consoante as propriedades, demandas e interesse dos discentes. Deste modo, simultaneamente, favorecem oportunidades de aprendizagem e a igualdade à conquista do sucesso escolar e à inclusão social (César, 2009; Cobb & Hodge, 2011).

II.3.2. Movimentos reformistas: influência no currículo de matemática

O desenvolvimento da sociedade é um dos maiores influenciadores para reformas curriculares e na matemática escolar (Maia, 2014). Para Maia (2014), a educação na escola deve favorecer a sociedade por meio da formação das próximas gerações e, por este motivo, “as mutações temporais da própria sociedade não permitem que o currículo seja um documento atemporal, estéril e acabado” (Maia, 2014, p. 51). As diversas origens das ocorrências sociais têm por consequência as retificações no currículo, considerando o momento histórico e o viés social (Llavador, 1991).

No final do século XIX, o sistema empregatício e o mercado de trabalho de grande potências políticas da Europa Ocidental e dos EUA vislumbravam mudanças decisivas consequentes do impulso originado pela Revolução Industrial. Estruturas de sistemas educacionais, matérias de estudo e métodos de instrução, ainda com características de uma sociedade agrícola e sensivelmente adaptados às demandas da Revolução, viam-se desafiados pelas mudanças sociais *modernas* (Schubring, 1999). Diante de algumas mudanças estruturais em andamento nos sistemas educativos de alguns estados europeus, as reformas curriculares faziam-se necessárias. Nomeadamente em relação à matemática, ciência tida como suporte do pensamento lógico, os conteúdos eram elementares diante das mudanças e os métodos de ensino formais, de "caráter estático e desligado das aplicações práticas" (p. 30), frente às exigências da indústria e do comércio, com necessidades de conhecimentos mais modernos, avançados e que fomentassem aplicações técnicas.

Em 1865, Félix Klein, estudante da Universidade de Bonn, na Alemanha, centra seus estudos em matemática e física, obtendo o grau de doutor no campo da geometria tão logo em 1868. Três anos mais tarde, Klein se reuniu em Paris com outros dois matemáticos afim de estudar os avanços obtidos no ensino das simetrias (Yaglom, 1988). Em 1872, já na Alemanha, Klein se torna professor da Universidade de Erlangen, onde apresenta um programa, originalmente intitulado *Considerações comparativas referentes a recentes investigações geométricas*, amplamente conhecido como *Programa de Erlangen*, no qual, as geometrias, embasadas pelas transformações geométricas caracterizadas por funções (Yaglom, 1988), eram descritas como estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações (Boyer, 1998). Para Pinto (2012), este programa de Klein foi uma referência, "considerada como um dos marcos mais importantes da matemática do século XIX" (p. 29), constituindo-se, mais de um século depois, como um divisor de águas.

Tão logo nos primeiros anos do século XX, mesmo que de forma bem tímida, iniciaram-se algumas ações de reformas do currículo de matemática. Segundo Rowe (2004), por volta da virada do século XIX para o século XX, ocorreram significativas alterações nos locais de desenvolvimento da matemática. Investigações coletivas e colaborativas, raras até então, tornavam-se práticas comuns, findando "a era dos matemáticos geniais e isolados". Sociedades científicas emergiram com a finalidade de fomentar espaços profissionais de discussão. Apesar de resistências terem impedido a sua implementação, o *movimento de Perry*, na Inglaterra, visava sublinhar uma metodologia de ensino mais prática, utilizando, inclusive, laboratório (Gutierre, 2008).

Em 1902, no gabinete ministerial da França, sentenciaram-se consideráveis mudanças curriculares, "introduzindo até mesmo elementos do cálculo diferencial para as classes mais adiantadas das escolas de secundárias" (Schubring, 1999, p. 31). No entanto, a implementação destas mudanças não era tarefa tão simples, dependendo de diversos outros fatores que não garantiam sua concretização. Em 1905, Félix Klein desenvolveu uma experiência na Alemanha, conhecida como *Meraner Reform*, que foi um movimento de professores focado em modernizar e unificar o ensino secundário da matemática neste país. Face às aflições de adequação do ensino de matemática nos países industrializados, fez-se necessário firmar um comitê internacional que tratasse das reformas do currículo de matemática. Em 1908, ocorreu, em Roma, o IV Congresso Internacional de Matemática, onde se criou o IMUK (*Interbationale Mathematische Unterrichskommission / CIEM – Commission Inernationale de l'Enseignement Mathématique*[26]), tendo Félix Klein como um de seus membros. Esta comissão constituiu-se como um "agente organizador e instigador de um movimento internacional de reforma" (Schubring, 1999, p. 31). Foi neste congresso que Félix Klein apresentou a sua experiência com o *Meraner Reform*, o que sustentaria, quase meio século depois, o eclodir do "primeiro projeto de internacionalização do ensino de matemática, denominado de Movimento da Matemática Moderna (MMM)" (Wielewski, 2008, p. 1). O CIEM continuou a promover outros congressos, encerrando suas atividades em 1920, devido ao quadro político internacional, extremado pelas guerras mundiais (Dias, 2008).

No início do século XX, precisamente no ano de 1909, o resultado das teorias do Programa de Erlangen e seus reflexos em discussões, palestras, congressos e cursos de formação ministrados pelo próprio Klein discutindo a necessidade de uma reforma curricular, é publicado o livro *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus. Teil II: Geometrie*, onde o estudo das transformações geométricas está coberto pelo segundo dos três

[26] A partir de 1954, o IMUK passa a se conhecido como ICMI – *International Comission on Mathematical Instruction* (Schubring, 1999).

blocos da obra. Ali, três transformações geométricas – translação, reflexão e rotação – e suas combinações compunham um conjunto de isometrias (Klein, 1909). A ênfase dada às transformações geométricas era tamanha que, por considerar que a matemática havia alcançado um nível de evolução a ponto de impossibilitar os matemáticos de "estruturar a geometria por meio de um logicismo axiomático" (Silva & Pietropaolo, 2014, p. 310) e com o objetivo de promover o estudo de geometria através de movimento, Klein termina esta obra propondo "a substituição dos axiomas da geometria Euclidiana pela aplicação do seu grupo de transformações num determinado plano" (p. 310). De acordo com Mabuchi (2000), Klein sugeria que a simetria fosse a base organizadora e unificadora da geometria, sendo possível dizer que Klein foi o primeiro e principal responsável por uma maior importância dada às transformações geométricas e às simetrias.

Anos mais tarde, com o fim da Segunda Grande Grerra, nasce "uma nova conjuntura mundial" (Maia, 2014, p. 67) inserida em avanços tecnológicos e científicos, com demandas de adequações do currículo do ensino de matemática de forma a abrigar, através de novas metodologias de ensino, temas matemáticos lecionados nos diversos níveis educacionais. Portugal, por sua vez, vivenciou diversas alterações económicas, sociais e culturais em "consequência do desenvolvimento da indústria e do crescimento das cidades que, por sua vez, originaram um aumento da população escolar" (p. 67).

Ao longo dos anos 50, o cerne da propagação das propostas de renovação já não era mais a Alemanha, mas sim os EUA. Lá, diversos comitês foram criados "com a finalidade de desenvolver projetos curriculares inovadores para o ensino da matemática" (Dias, 2008, p. 9). Em 1951, foi criado o Comitê de Matemática Escolar da Universidade de Illinois, iniciando uma estrutura de modernização do currículo de matemática no nível secundário. Seria, ainda de forma embrionária, uma iniciativa de desenvovimento de um movimento internacional de modernização do ensino da matemática, entretanto fracassado pela falta de apoio suficiente (Malaty, 1988). Cinco anos mais tarde, o lançamento do satélite russo Sputnik I (primeiro satélite artificial da Terra) pela União Soviética aparenta aos EUA alguma sensação de atraso tecnológico e de poderio militar frente à Rússia, endossado pelo grau deficitário de matemática dos soldados estadunidenses (Gutierre, 2008). Em 1958, foi criado o *School Mathematics Study Group* (SMSG), na Universidade de Yale, custeado pela *National Science Foundation*, e considerado “o maior e mais influente projeto realizado nos EUA” (Dias, 2008, p. 10). A motivação latente à modernização necessária às reformas curriculares do ensino secundário e universitário culminou em 1959, com a instauração de requisitos específicos de conhecimento matemático para o ingresso a universidade, por parte do *College Entrance Examination Board*.

II.3.2.1. O Movimento da Matemática Moderna (MMM)

Foi em Royaumont, em França, ainda em 1959, que ocorreu um simpósio internacional que contou com a participação de sessenta professores de vinte países e organizado pela Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE). Este simpósio teve por objetivo “promover uma renovação do ensino da matemática em todo o mundo” (Gonçalves, 2007, p. 13), e foi considerado “o principal marco referencial do segundo movimento internacional de reorganização e modernização dos currículos escolares para o ensino da matemática, conhecido como Movimento Matemática Moderna (MMM)” (Dias, 2008, p. 10). Segundo Dias (2008), a publicação do livro *Un programme moderne de mathématiques par l'enseignement secondaire*, em 1961, foi a primeira consequência do MMM, criado por uma comissão de especialistas reunidos pela OECE num evento em Dubrovnik, Croácia, em 1960, com os mesmos objetivos, e cujos ideais alcançaram, para além dos EUA e Canadá, outros países e regiões, com notáveis reflexos na América Latina. Sem a responsabilidade em formalizar o *evento-nascimento* do MMM, Matos (2006) afirma que tanto o encontro de Royaumont quanto o de Dubrovnik serviram de promoção da “definição de um currículo para a matemática pré-universitária”, tendo por objetivo “unificar esforços que vinham sendo desenvolvidos em diversos países (Bélgica, Estados Unidos, França, Inglaterra, Itália, por exemplo)” (p. 92). Muitos países implementavam já os idários do MMM no ensino de matemática, com o propósito de aproximar a matemática ensinada na escola básica com a matemática resultante das pesquisas (Wielewski, 2008), embasado pelo rigor lógico e distanciamento da intuição e da memorização sem compreensão (Zabala, 2010). Os adeptos do MMM consideravam que, através dos ideários deste Movimento, alcançariam o preparo de pessoas capazes de acompanhar e lidar com a tecnologia originada à época.

Entre os conteúdos até então não presentes no currículo de matemática, importa referir que as transformações geométricas passaram a figurar nas propostas do MMM (Wielewski, 2008). Mesmo assim, a geometria, de uma forma geral, ainda fosse vista como um tópico desinteressante da álgebra linear, e “as atividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, dando como exemplo a disciplina de Educação Visual” (Abrantes, 1999, p. 3). A extraordinária velocidade de propagação destes ideais, sem mesmo enfrentar obstáculos à altura, parecia “ser um convincente indicador de que essa crise existia e era reconhecida como tal” (APM, 2009, p. 10).

Em Portugal, a partir de 1955, com a designação da sub-comissão portuguesa da Comissão Internacional do Ensino Matemático, tendo como membros Vicente Gonçalves, Sebastião e Silva, José Calado e José Silva Paulo (Silva, 1955), emergiram novas tendências. Dois anos depois, Sebastião e Silva, José Calado, Jaime Furtado Leote e Santos Heitor foram destinados a participar da XI reunião da *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching* (CIEAEM), em Madrid, propagando novos ideais para o ensino da matemática, em diversas publicações. Começava assim, e através dos contatos formados entre portugueses e comunidade internacional, alguma influência do MMM em Portugal, que ocorreu de forma intermitente durante a década de 60. Para Matos (2010), este fato deve-se a tendências mais conservadoras, resistentes “a quaisquer mudanças no sistema educativo” (p. 150). Em 1960, houve uma atualização[27] ocorrida nos programas portugueses para a educação primária que, no entanto, não contou com alterações de grande profundidade, mantendo muitos dos objetivos presentes nos programas anteriores[28]. Em 1962, Inocêncio Galvão Telles, Ministro da Educação Nacional, criou a Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática, destinada à revisão do

[27] Decreto-lei 42994/1960, de 28 de maio.

[28] Decreto-lei 27603/1937, de 29 de março, para as três primeiras classes e Decreto-lei 16730/1929, de 13 de abril, para a quarta classe.

programa do 3º ano liceal, e nomeou o empenhado José Sebastião e Silva para presidente desta. Daí são criados cursos para professores liceais, focados na experiência pedagógica. A Comissão elabora então um currículo experimental que, em 1963, implementa a três turmas de 6º ano de Lisboa, Porto e Coimbra, com alunos mais bem qualificados. Posteriormente ampliou-se este ensaio.

Importa salientar que o programa curricular até então datava de 1947[29], tendo por base livros únicos, escolhidos pelo Ministério da Educação e usados da mesma maneira em âmbito nacional (Matos, 2006), como uma maneira de restringir o acesso à informação e exercer algum controle ideológico (Menezes, 2010). Nessa época, mergulhado num período ditatorial desde a segunda metade dos anos 20, no país "não existia espaço para a liberdade individual, não era permitido expressar opiniões ou pensamentos contrários aos do governo" (Silva, 2010, p. 27). No entanto, e como bem salienta Maia (2014), apesar de tratar-se de uma época do regime de Salazar, algumas medidas foram tomadas gradualmente em prol de mudanças no sistema educativo. Nesse momento, a alusão à resolução de problemas fora realizada por Silva Paulo, no nº 17 da Gazeta de Matemática de 1943, limitando-se, no entanto, a apresentar as quatro etapas de resolução de um problema propostas por Polya (Paulo, 1943). Em 1965, através de um pequeno artigo do professor Machado Gil, de Viseu, publicado pela revista Labor (Gil, 1965), também foi feita referência a uma obra de Polya[30] porém de forma mais latente, rogando por uma matemática "que se faz para entendimento e de que se entende o alcance quando se faz" (p. 206). No mesmo ano, o discurso de Sebastião e Silva atonava igualmente alguma aproximação ao uso da resolução de problemas – que o mesmo denominava por *problema novo* – ao recomendar que

> Todo o *problema novo*, com interesse, tem uma ideia-chave, um abre-te Sésamo que ilumina o espírito de súbita alegria: a clássica ideia luminosa que faz gritar *Eureka!*. Ora, é esse momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: só por essa porta se entra no segredo da matemática (...) (Silva, 1965-66, p. 4).

---

[29] Regulamentados pelos Decreto-lei n.º 23603/1937, de 29 de março, para as três primeiras classes e pelo Decreto-lei n.º 16 730 de 13 de abril de 1929 para a quarta classe.
[30] *Comment poser et résoudre em problème*, tradução francesa do livro *How to solve it*.

Todavia, a resolução de problemas ainda não pertencia ao discurso curricular português de forma autêntica, existindo apenas referências "tímidas, dispersas e desconexas, ou praticamente inexistentes, até ao início dos anos 90" (Guimarães, 2007, p. 5). Em 1968, a nova legislação[31] para a reformulação dos programas vigentes até então para o ensino elementar manteve a característica de pouca alteração. De alguma forma influenciados pelo MMM, estes dois programas não revelavam a geometria com destaque. Em ambos, este tema iniciava-se pela 3ª classe, através da observação, da análise e da imaginação criadora das crianças, não se valendo de um método dedutivo, sendo sequencialmente proposto através da observação de figuras geométricas. Desenhos e trabalhos manuais também eram considerados aliados ao ensino desta temática, onde se aproveitava a atividade natural das crianças no desenho de figuras e na construção de figuras geométricas (Silva, 2010).

Durante o MMM, os currículos de matemática em Portugal foram abruptamente reformulados, contando com novos conteúdos e com a privação de conteúdos tradicionais, além da recomendação de uma nova abordagem para a matemática como um todo. Para Ponte (2003b), o ímpeto de "doutrina para sustentar a didática da matemática, revelou-se completamente inadequado" (p. 5), enaltecendo estruturas algébricas, álgebra linear e as probabilidades e desvalorando drasticamente a geometria de Euclides, a geometria analítica clássica, a aritmética racional e a trigonometria. Especificamente em relação à geometria, Maia (2014) afirma que "o MMM relegou-a para segundo plano" (p. 70), e assim, com pequenas alterações, os programas perduraram até 1991. Revelava-se um anúncio a grandes desafios a ocorrer com o ensino e a aprendizagem de geometria em Portugal e em grande parte dos sistemas educativos internacionais.

A intensificação do ensino imposta pelos preceitos do MMM, juntamente com as mudanças sociais da época faziam com que a década de 70 do século XX abrigasse controvérsias diante do MMM (Feiteira & Pires, 2008; Ponte, 2003b; APM, 2009; Maia, 2014). Os novos formato de exercícios consequentes do rigor e da abstração destes Movimento, "muitas vezes estéreis e

[31] Portaria nº 23485/1968, de 16 de julho.

irrelevantes" (Maia, 2014, p. 71), o que culminava com o "surgimento de uma juventude com pouca apetência pelo esforço intelectual" (Feiteira & Pires, 2008, p. 186) e "falta de interesse" (APM, 2009, p. 10) pela matemática. Assim, não se alcançavam progressos nas competências discentes no raciocínio, na resolução de problemas e, nem mesmo, no próprio cálculo e na aritmética básica (Ponte, 2003a; APM, 2009). Destacava-se, ainda, a pobre preparação que o ensino proporcionava para os estudos superiores" (APM, 2009, p. 10), que, nos EUA, pôde ser notado pelo "declínio dos resultados dos alunos nos testes de admissão à universidade" (Ponte, 2003a, p. 13).

Somada a previsível desmotivação docente, desencadeava-se o esmorecimento do MMM.

O MMM também foi severamente criticado por nomes de destaque como Morris Kline (1973) e René Thom (1973). O lançamento do livro *Why Johnny can't add*, de Kline (1973), demonstra o antagonismo à nova matemática que estava sendo propagada até então. Em Portugal, sete anos mais tarde, António St. Aubyn (1980) reforçava a crítica feita por Kline e Thom:

> Acabamos por assistir a um ensino de matemática orientado numa óptica essencialmente dedutiva, focando os aspectos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais "pobres" às mais ricas. A matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada, artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade. A intuição, fundamental na criatividade, que teve um papel essencial na construção do edifício matemático, não é estimulada. Ora, se analisarmos as diversas etapas históricas da evolução da matemática, reconhecemos que a intuição teve sempre um papel capital nas descobertas e, portanto, no progresso matemático e que a dedução, isto é, a construção do edifício da matemática a partir de um número reduzido de axiomas e definições corresponde a uma fase posterior de síntese (p. 8).

Ponte (2003b) afirma ainda que, apesar de não ter cumprido seu principal objetivo, o de hospedar melhorias das aprendizagens para o ingresso ao ensino superior, o MMM proporcionou algo de positivo, como, por exemplo, "uma renovação dos temas, uma abordagem mais atual dos conceitos, uma preocupação com a interligação das ideias matemáticas" (p. 7).

II.3.2.2. O *Back-to-Basics*

Em concordância com as insatisfações encaradas com a filosofia do MMM e diante de vários desafios a que este Movimento não ofereceu resposta, no início dos anos 70 do século XX, surgiu o movimento *Back-to-Basics* que se contrapôs aos preceitos do MMM (Malaty, 1988). Motivados pela adequação da matemática às necessidades mais básicas na utilização cotidiana, tornando-a mais prática do que teórica e buscando o "estabelecimento de níveis de competência mínima em exames para passagem de ano e para concessão do diploma final do ensino secundário" (Ponte, 2003a, p. 13), o *Back-to-Basics* iniciou nos EUA e Inglaterra e prontamente disseminou-se a outros países (APM, 2009). Toda a tendência conservadora e o caráter reducionista, com ênfase no cálculo e expertises tecnicistas, este movimento revelava um olhar limitado para a matemática e seus alcances, o que o fez encarar, tão logo, demasiada oposição (Ponte, 2003a).

Em um curto período de tempo, o *Back-to-Basics* esmorece em consequência da grande oposição dos professores de matemática (Ponte, 2003a; Maia, 2014), que consideravam que o ensino abrange mais do que o simples domínio do cálculo, e deve contar com outros aspectos, como, já se destacava, a resolução de problemas (Herrera & Owens, 2001; Ponte, 2003a; Westwood, 2011; NCSM, 1978). Ademais, alegavam desagrado frente a dedicação do ensino a temáticas consideradas importantes face às novas exigências da sociedade, embora estas não integrassem os programas escolares.

Em Portugal, já sem a participação de Sebastião e Silva (Ponte, 2003b) e ainda por influência do MMM, uma reforma veio alterar o que se pensava ser crucial num programa de matemática até então, implementando novos programas em todos os níveis de ensino. Os novos programas enalteciam o abstrato e formal, tendo o cálculo como fio condutor, e sucumbiam por completo as aplicações da matemática, deixando de lado o "desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas" (Ponte, 2003b, p. 7). De acordo com Ponte (2003), os "programas de Matemática portugueses dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de matemática formalista no estilo moderno com matemática computacional no estilo tradicional" (Ponte, 2003b, p.

7). Mesmo com estes programas, o *Back-to-Basic* não teve um impacto considerável em Portugal (Ponte, 2003a), pois as alterações ditadas pelo MMM e a atenção especial dada às competências de cálculo eram consideradas cruciais (Ponte, 2003a), para vencer os obstáculos dos exames de acesso ao ensino superior (Maia, 2014). Das ocorrências associadas a este período, Ponte, Matos e Abrantes (1998) salientam que é possível perceber, em pesquisas realizadas acerca do desempenho dos discentes portugueses no fim da década de 70 so século XX, orientações de reforço do ensino das habilidades relacionadas ao cálculo. Além disso, Ponte (2003a) aponta a relevância dada à lógica matemática, mas, em contraponto, as poucas alterações em relação a Álgebra e Análise.

II.3.2.3. As Normas para o ensino e aprendizagem da matemática

A segunda metade da década de 70 do século XX parecia trazer à tona a resolução de problemas como via de promoção do ensino de matemática. Em 1975, ocorreu a puplicação da *Overview and analysis of school mathematics: Grades K-12* através do relatório do *National Advisory Committee on Mathematical Education* (NACOME), nos EUA. Apesar da pouca visibilidade dada à resolução de problemas neste instrumento (Guimarães, 2007), é possível destacar o subcapítulo *Problem-Centered and Interdisciplinary Programs* no capítulo dedicado a padrões de ensino (Hill, 1975, p. 63). Três anos depois, a resolução de problemas figura como a primeira entre as dez áreas de aptidões básicas propostas pelo *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM, 1978), no *Position Statements on Basic Skills*, afirmando que "aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar matemática" (p. 148).

Em Portugal, com a Revolução de 25 de Abril de 1974 e suas marcas na história do país, surgem grandes impactos em diversas instâncias. Quanto à educação, este impacto resultou em instabilidade nas escolas, nos docentes e no próprio Ministério responsável. As primeiras manifestações da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), depois da democratização de 1974, revelavam certo amargor de crítica à Matemática Moderna. Vieram os programas de 74, com dois programas para a 1ª classe[32] – A e B –, o programa de 75[33], considerado melhor do que o anterior por revelar maior preocupação com a compreensão do que com as técnicas, embora isto ficasse mais no papel do que na prática. Em ambos, a geometria não era tratada com a devida atenção. Ou era, de acordo com o cenário em que o país se encontrava.

Para o ano letivo de 1978/1979[34], um novo programa foi elaborado e, embora homologado, nunca foi implementado de fato devido a falta de condições para tal.

Oposto a este programa, outro programa foi desenvolvido para ser implementado somente em 1980[35]. Este, reconhecendo o alto índice de insucesso da geometria, em todos os níveis de ensino, traz determinadas orientações para a exploração e organização do espaço, numa tentativa de incentivo à geometria. Os conteúdos dividiam-se em temas associados a objetivos específicos a serem alcançados, e, historicamente, foi o primeiro programa português de matemática que apresenta algo referente a simetria. Ainda de forma muito preliminar, os objetivos direcionados ao 2º ano orientavam a *Desenhar em papel quadriculado figuras simétricas*, e no 3º ano, a *Construir figuras simétricas em relação a uma reta*. Apenas estas duas passagens se relacionavam diretamente com simetrias.

Em nível internacional, ainda em 1980, acautelado como o arranque para uma nova reforma (Herrera & Owens, 2001), o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980) publica um conjunto de recomendações para o ensino da matemática através de *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Este documento enaltecia a resolução de problemas e a essencialidade do aprimoramento de competências para além do domínio do cálculo (Canavarro, 2003), recomendando com clareza que a resolução de problemas deveria ser "o foco da matemática escolar nos anos 80" (NCTM, 1980, p. 1).

---

[32] *Classe*, na nomenclatura da época, equivale a *ano* na atual.
[33] Conhecido como *Programa Laranja*.
[34] Conhecido como *Programa Limão*.
[35] Conhecido como *Programa Verde*.

Somente cinco anos mais tarde este documento seria traduzido e publicado em Portugal (NCTM, 1985). Mesmo assim, e embora de forma superficial, a expressão *resolução de problemas* já era ouvida em Portugal no início desta década. Motivados pelos maus resultados discentes e pela insatisfação de docentes e investigadores matemáticos, a Sociedade Portuguesa de Matemática iniciou diversos debates de onde emanavam vozes em favor da revisão dos programas (SPM, 1982). Num encontro internacional de homenagem a Sebastião e Silva, realizado em Portugal em 1983 pela mesmo Sociedade (SPM, 1983), de entre as comunicações apresentadas, três abordavam este tema e sua função no ensino, afirmando a possibilidade de alterar a característica desse ensino assim como a afinidade entre os discentes e a matemática (Ponte & Abrantes, 1983).

Em dezembro de 1985, o Conselho de Ministros de Portugal aprova a criação da Comissão da Reforma do Sistema Educativo e em julho de 1986 (publicada a 14 de outubro) é aprovada a nova Lei de Bases do Sistema Educativo[36]. A reformulação dos currículos do Ensino Básico seria a principal consequência da aprovação desta Lei (APM, 2009). Ainda em 1986, foi criada a Associação dos Professores de Matemática (APM), em Portugal, cuja primeira meta assumida era a de impulsionar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da matemática. A relação dos princípios desta Associação com os docentes descortinava novas possibilidades de orientações curriculares, possibilitando um alicerce em favor da renovação que o ensino de matemática necessitava (Guimarães, 2007). Em muitas das publicações da APM, em particular nas veiculadas através da revista intitulada Educação e Matemática[37], a resolução de problemas apresentava-se com destaque considerável.

Em 1988, ocorre o evento que, considerado o mais importante sobre o tema até hoje, marcou a atenção dada ao currículo em Portugal: o Seminário de Vila Nova de Milfontes, realizado pela APM. Paulo Abrantes, João Pedro da Ponte, Eduardo Veloso e Henrique Manuel Guimarães são alguns dos nomes responsáveis por este evento, que contou com pouco mais de vinte

[36] Lei de Bases nº 46/86.
[37] O lançamento desta revista data do início de 1987.

participantes entre professores, matemáticos e educadores. Novas perspectivas sobre currículo e ensino, influenciadas internacionalmente pelo livro *A Experiência Matemática* de Philip Davis e Reuben Hersh e pela versão preliminar das Normas do NCTM, foram a tónica do Seminário (Ponte, 2003). A APM então, através dos textos provenientes deste evento, edita o documento chamado Renovação do Currículo de Matemática, o qual mantêm este nome para sucessivas edições a serem publicadas pela Comissão da Reforma Educativa responsável pelo feito (Guimarães, 2007). Para além da bases norteadoras da reforma curricular, esta publicação apresentava o novo papel do professor incidindo sobre a "resolução de problemas, ao tipo de atividades a desenvolver e o uso das novas tecnologias no apoio ao ensino e à aprendizagem" (Maia, 2014, p. 74).

Ainda em 1988, Duarte (1988) divulga as suas considerações sobre o pouco caso dado à geometria, inclusive da indisposição dos docentes em lecionar esta temática, relegando-a à desatenção. Consequentemente, esta situação acarretou "carências graves, quer nas aprendizagens matemáticas dos alunos, quer na preparação dos professores, provocando em muitos destes uma certa insegurança" (Veloso & Pinheiro, 1994, p. 21). Em uma das publicações da Revista Educação e Matemática, da APM, em 1988, destacou-se atenção especial ao ensino de geometria, defendendo a qualidade desta temática estar "intimamente ligada com a realidade, uma vez que é o estudo do espaço e das formas que o constituem e a nossa vida diária envolve inúmeras relações espaciais" (Serrazina, 1988, p. 3).

Internacionalmente, com o impacto da publicação do NCTM de 1980 aquém do esperado e em consequência da estreiteza do feito, o NCTM reuniu especialistas da matemática, do nível de escolaridade elementar ao universitário, e outros pesquisadores, retomando e perseverando suas ideias. Para isto, quase uma década depois do arranque inicial, retomaram a ideia através da publicação do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), um conjunto de normas para a matemática escolar (Maia, 2014) da associação norte americana de professores de matemática. Passados dois anos, a APM publica este documento orientador em Língua Portuguesa (NCTM, 1991). A grande atenção dada à resolução de problemas pode ser apreciada “ao longo de todo o documento das Normas” (Guimarães, 2007, p. 2), como por exemplo, quando diz que “a resolução de problemas (…) deve ser central na vida escolar, de tal modo que os alunos possam explorar, criar, adaptar-se a novas condições, e activamente criar novo conhecimento no decurso das suas vidas” (NCTM, 1991, p. 5), recomendando que este viés deve ser percebido como “um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas” e não como “um tópico distinto” (p. 29). Assim como nas publicações futuras[38], o *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, de 1989, mostrava-se a favor das mudanças na educação matemática como um todo, englobando conteúdos a serem abordados assim como o caráter pedagógico com o qual estes deveriam fluir.

Cabe ainda salientar que as normas tratavam as linhas gerais a serem abordadas, valendo-se de exemplos clarificadores do que a matemática escolar deve abarcar, recomendando inclusive a conexões entre temas e a vida cotidiana (Herrera & Owens, 2001. Também atribuia importância a algumas áreas da matemática, nomeadamente, à geometria, de forma como ainda não tinha acontecido. Com todas estas características, este movimento reformista consequente da publicação das Normas, aflorava certo entusiasmo no fomento a uma nova educação matemática, visível até em atitudes de editores que, financiados por projetos experimentais nas escolas, seguiam as Normas em seus textos.

II.3.3. O Programa de 1990 (DEB, 1990) e o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001)

Bem no fim da década de 80 e fruto da reforma introduzida pela Lei de Bases do Sistema Educativo, o Ministério da Educação português, através de equipes de professores-autores das orientações curriculares do período do MMM, dá início a elaboração de novos programas. Tais equipes, em total consonância com as perspectivas da época, encontram um lugar amplo para a resolução de problemas, salientam o uso de novas tecnologias no ensino e revalorizam a geometria (Maia, 2014).

[38] *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991); *Assessment Standards for School Mathematics* (1995); *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) (Herrera & Owens, 2001).

Destacava-se a preocupação destas equipes diante da importância a ser dada à geometria no novo programa que estavam a elaborar (Tudichum & Nunes, 1989). Em 1990, na forma de um reajustamento dos programas anteriores e na continuidade da publicação da Lei de Bases, culmina um novo programa de matemática do 1º ciclo, ocorrendo o mesmo para o 2º e 3º ciclos, em 1991. De acordo com Maia (2014), até ao surgimento destes programas, a geometria foi relegada ao desinteresse em ser lecionada, muito diferente do que se prestavam estes novos programas. O mesmo já era apontado por Gutiérrez (1998) ao afirmar que, no passado, em diversos países, o ensino de geometria em nível primário era reduzido aos conhecimentos básicos de figuras planas e espaciais, aprendizagem de fórmulas para o cálculo de áreas e volumes e pouco mais, tendo espaço ao final dos manuais escolares e comumente abordado de forma parcial. Ademais, sobre a formulação das finalidades e dos objetivos gerais do ensino da matemática assumindo com importância de forma a dar um sentido geral ao processo de ensino-aprendizagem, estes novos programas consideram que “o que se diz a este respeito em documentos curriculares anteriores é insuficiente ou desadequado e propõe novas formulações” (Ponte, 2009, p. 98). Silva (2010) aponta, mais especificamente em relação ao programa de 1990, ou seja, o do 1º ciclo, que os seus objectivos gerais são apresentados de forma “sucinta e passível de várias interpretações, consoante a visão de cada professor” (Silva, 2010, p. 55). Este programa era muito mais completo em relação à geometria, que se apresentava num bloco, amplo como nunca, designado por *Forma e Espaço*, com real destaque desde o 1º ano.

As melhorias eram sentidas na comunidade matemática em geral, ao ponto de o editorial da revista Educação e Matemática do último semestre de 1991 apresentar, logo no início, a frase *Finalmente os programas antigos vão acabar!* (Guimarães, 2007). As melhorias consideradas podiam ser associadas às ideias emanadas do Seminário de Vila Nova de Milfontes de 1988. Lobato (1991) refere-se à mudança do paradigma da matemática escolar com único propósito de preparação para ingressar no ensino superior, de modo a compor uma possibilidade de desenvolvimento de interesses e capacidades individuais, pondo o discente, enquanto pessoa, no cerne e como agente do processo.

Em todos os níveis de escolaridade era possível notar as orientações para a resolução de problemas, a manipulação de materiais diversos e o amplo destaque dado à geometria, considerando-a primordial. Embora os termos *Transformações no plano* e *figuras simétricas* já tivessem presentes no programa de 1980, foi nos programa de 1990/1991 que os mesmos termos ganham uma real valoração. Mais propriamente em relação ao novo programa do 1º ciclo, o de 1990, destacam-se as seguintes orientações em relação às simetrias (Quadro 2):

Quadro 2: Parte do Programa do 1º CEB de 1990

ANO	OBJETIVOS
1º ano	Explorar simetrias utilizando livremente espelhos.
	Construir figuras simétricas através de dobragens e recortes.
2º ano	Fazer desenhos decorativos: • frisos em papel quadriculado; • rosáceas contornando a base circular de um objecto.
	Desenhar figuras simétricas, em papel quadriculado, escolhendo um eixo de simetria.
3º ano	Fazer transformações de figuras geométricas planas (utilizando diferentes meios e materiais: recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram).
	Desenhar frisos e rosáceas.
	Fazer uma composição a partir de um padrão dado.
	Desenhar, em papel quadriculado, a figura simétrica de uma figura em relação a um eixo horizontal.
4º ano	Fazer transformações de figuras geométricas planas segundo algumas regras (utilizando diferentes meios e materiais: dobragens, geoplano…).
	Desenhar frisos e rosáceas.
	Fazer uma composição a partir de um dado padrão.

Diante dos oito Objetivos Gerais deste programa, consideramos que todos eles se relacionam direta ou indiretamente com nosso propósito ou prática desenvolvida com ou através desta investigação. Apresentam-se a seguir os referidos objetivos, acompanhados de nossas considerações sobre a relação com esta investigação. Vejamos:

1. *Manifestar curiosidade e gosto pela exploração (…).*

Este objetivo expressa o que veio a constituir o cerne de nossa proposta metodológica para o ensino das simetrias e que será apresentada no capítulo IV. Nessa proposta, procurou-se incentivar a curiosidade dos docentes através da exploração de recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

2. *Recolher dados simples e organizá-los de forma pessoal recorrendo a diferentes tipos de representação.*
3. *Efectuar medições, escolhendo instrumentos adequados, para resolver problemas simples da vida corrente.*

Recolher dados, organizá-los, medir com o auxílio de instrumentos em prol da resolução de problemas figuram entre as etapas necessárias à resolução das atividades desenvolvidas com os docentes durante a OFD, bem como com as implementadas aos discentes *a posteriori*.

4. *Fazer e utilizar estimativas em situações (…) de medição.*

O uso da intuição e de estimativas são etapas realizadas quase que de forma involutária, previamente à resolução propriamente dita de um problema.

5. *Explorar, construir e transformar modelos geométricos e estabelecer relações entre eles.*
6. *Explicar e confrontar as suas ideias com as dos companheiros, justificar as suas opiniões e descrever processos utilizados na realização de actividades.*
7. *Desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas e assumir progressivamente uma atitude crítica perante os resultados.*
8. *Resolver situações e problemas do dia-a-dia, aplicando (…) as noções básicas de geometria (…).*

Destacamos ainda as afirmação contida neste programa, aquando aponta que

> As atividades de exploração do espaço e das formas fazem apelo à criatividade e sentido estético das crianças e respondem à sua natural e progressiva procura de equilíbrio e harmonia (DEB, 1990, p. 180).

e

> A manipulação e exploração de objectos, a observação que, gradualmente,se torna mais pormenorizada, a utilização de materiais e intrumentos na construção e desenho

> de modelos geométricos permitirão muitas descobertas e desenvolverão as capacidades de relacionar, classificar e transformar (DEB, 1990, p. 180).

Isto posto, consideramos que o programa de 1990 marca uma promessa de melhorias que estariam por vir – e vieram –, das quais falaremos mais adiante. As notas de relação entre os Objetivos Gerais deste programa e a nossa investigação, apresentadas há pouco, também poderão ser confirmadas nos capítulos que compõem esta investigação, nomeadamente, os que retratam a metodologia utilizada.

Retomando aos acontecimentos da época, em 1995, por iniciativa de um grupo de sócios e membros da própria direção, a APM criou o Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), por "se ter constatado que não havia muitas ideias sobre o que deveria ser a geometria dos programas de matemática dos ensinos básicos e secundários" (GTG, 2006, p. 25). Em 1999, a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em parceria com a APM, promove o Encontro sobre o Ensino e Aprendizagem da Geometria (Ponte, 1999). Ponte (1999) refere, num de seus artigos, que a geometria estava no cerne das preocupações educativas, necessitando de atenção especial dedicada ao ensino, à aprendizagem e à formação de professores. Em 2000, num habitual encontro de professores promovido pela secção de educação matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, a geometria foi o tema central entre professores, investigadores e futuros alunos (Boavida, 2000).

Em 2001, reflexo de um movimento iniciado, em 1996, com a Reflexão Participada sobre os Currículos do Ensino Básico (DEB, 1997) e seguido pelo projeto de Gestão Flexível do Currículo (García Alonso, Peralta, & Alaiz, 2001), em confronto com o insucesso da reforma curricular instaurada em 1986, a partir da Lei de Bases, é criado[39] o Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (CNEB) (ME-DEB, 2001), coordenado por Paulo Abrantes. Entre as considerações lá presentes, relevando saberes em ação, este Currículo considera que

> A ênfase da matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da matemática para resolver

[39] Decreto Lei n.º 6/2001.

problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (p. 58).

De entre as dez competências gerais reveladas neste documento, de acordo com nosso interesse, destacamos a número 1, a qual refere que, finda a educação básica, o aluno deverá ser capaz de “Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realizade e para abordar situações e problemas do cotidiano” (ME-DEB, 2001, p. 15). É considerado ainda que cada uma dessas competências tenha um caráter transversal, explicitando um conjunto de ações relativas à prática docente, reconhecidas como essenciais ao desenvolvimento adequado dessas competências nas diferentes áreas e dimensões desse currículo. A partir disso, em relação à competência que destacamos, são oferecidas as seguintes indicações de operacionalização no Quadro 3 que se segue:

Quadro 3: Operacionalizações transversal e específica (ME-DEB, 2001, p. 17)

<table>
<tr><th>Operacionalização transversal</th><th>Operacionalização específica</th></tr>
<tr><td>• Prestar atenção a situações e problemas manifestando envolvimento e curiosidade</td><td rowspan="5">A operacionalização específica será feita na perspectiva de cada disciplina ou área curricular tendo em conta os saberes, procedimentos, instrumentos e técnicas essenciais de cada área do saber e visando o desenvolvimento pelo aluno destas competências</td></tr>
<tr><td>• Questionar a realidade observada</td></tr>
<tr><td>• Identificar e articular saberes e conhecimentos para compreender uma situação ou problema</td></tr>
<tr><td>• Pôr em ação procedimentos necessários para a compreensão da realidade e para a resolução de problemas</td></tr>
<tr><td>• Avaliar a adequação dos saberes e procedimentos mobilizados e proceder a ajustamentos necessários</td></tr>
</table>

Nomeadamente em relação à geometria, de entre os aspectos gerais a desenvolver, comuns a todos os ciclos, destacamos os que se seguem (ME-DEB, 2001, p. 62):

- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto para investigar propriedades e relações geométricas;

- A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.

Mais especificadamente em relação ao 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB), são apontados os seguintes aspectos gerais (ME-DEB, 2001, p. 63):

- O reconhecimento de formas geométricas simples, bem como a aptidão para descrever figuras geométricas e para completar e inventar padrões;
- A aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como para identificar propriedades de figuras geométricas;
- A compreensão do processo de medição e a aptidão para fazer medições e estimativas em situações diversas do cotidiano utilizando instrumentos apropriados.

Vemos, neste documento, mais uma valorização da geometria, de forma intensa e abrangente. Cabe destacar que o CNEB não veio com a pretensão de substituir o programa que estava em vigor, mas sim como uma proposta de enquadramento de elementos diversos que o constituíam, buscando uma gestão harmoniosa e equilibrada dos programas, em consonância com a nova conceitualização, apoiada pelo "perfil de competências gerais e respectiva operacionalização transversal" (ME-DEB, 2001). Para Santos, Canavarro e Machado (2007), o CNEB era um documento oficial "com características ímpares em Portugal, que passou a coexistir com os programas das disciplinas, os quais permaneceram em vigor, na sua generalidade, tal como foram escritos em 1991" (p. 1). Especificamente em relação ao ensino secundário, através de uma nova reforma curricular, o ano letivo 2003/2004 passa a vigorar com três novas disciplinas de matemática (Matemática A, Matemática B e Matemática aplicada às Ciências Sociais), como forma de adequar os currículos aos diferentes percursos académicos ou profissionais dos alunos (Feiteira & Pires, 2008; Santos, Canavarro & Machado, 2007).

Em 2006, revelando alguma preocupação diante das dificuldades enfrentadas por parte dos professores frente aos conceitos de simetrias, Bastos (2006) remete à nova abordagem desta temática no novo programa de matemática do Ensino Básico que estava por vir.

II.3.4. O Programa de 2007

Todos os documentos orientadores de práticas pedagógicas apresentados até esta época, ou não abordavam as simetrias, ou restringiam-se a associá-las apenas à simetria axial (Maia, 2014). Esta limitação não condizia com a abrangência do uso deste conceito por diferentes sociedades que, em relação a produções humanas, "escolhem e usam preferencialmente diferentes simetrias para estruturar os seus padrões" (Washburn & Crowe, 1998, p. 34).

Em 28 de dezembro de 2007, com o programa de matemática de 1990 ainda em vigor, situação que perdurou até ao ano letivo de 2009/2010[40], foi homologado o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB) (Ponte *et al*., 2007), buscando relacionar os programas de 1990/91 (Ponte & Sousa, 2010) e o CNEB (Feiteira & Pires, 2008). Os próprios autores deste programa consideravam tratar-se de "um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, datado do início dos anos noventa" (Ponte *et al*., 2007, p. 1), opinião, no entanto, contrariada por alguns estudiosos da área.

À semelhança da organização do CNEB, este programa também trazia os conteúdos separados por ciclo. A geometria vem sob um enfoque de desenvolvimento do sentido espacial, com destaque à visualização, às transformações geométricas e à demonstração (Ponte *et al*., 2007). Isto posto, as transformações geométricas aparecem tão logo no 1º CEB, embora ainda de modo informal, aumentando gradualmente o rigor nos ciclos seguintes. Além disso, é a primeira vez que um documento direcionado às práticas educativas em Portugal refere a importância do ensino gradual de simetria. Sugere ainda a promoção do ensino através de aspectos históricos, artísticos e culturais relacionados com a geometria, utilizando a arte decorativa em geral (azulejos, bordados e tapetes), como uma mais-valia à exploração e compreensão, fomentado por uma dinâmica de sala de aula embasada na metodologia de

[40] Antes da implementação em todo o país, ocorreu uma fase experimental no ano letivo de 2008/09 com 40 turmas de todos os ciclos do ensino básico (Feiteira & Pires, 2008). Já no ano letivo de 2009/2010 o programa iniciou sua implementação em algumas escolas e no seguinte ano letivo em todas as turmas de 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos do país. No ano letivo de 2011/2012 abrangiu todo o 1º e 2º CEB e o 7º e 8º anos. O 9º ano foi contemplado por este programa somente a partir do ano letivo de 2012/2013 (Maia, 2014).

ensino-aprendizagem socioconstrutivista, e, para tal, a destreza na manipulação de recursos estáticos e dinâmicos, considerada uma necessidade a que os professores devem recorrer (Ponte *et al*., 2007).

Pessoa (2010), diante de sua vivência durante a experimentação do programa de 2007 e, consequentemente, constatação de evidências de melhorias na aprendizagem discente, afirma que este impõe a implicação com "o processo de reformulação das concepções do que é ensinar e aprender matemática e a responsabilidade pelo desenvolvimento de uma atitude positiva" (p. 25), guiando, necessariamente, "para uma redefinição dos papéis desempenhados pelo aluno e pelo professor" (p. 25-26). Segundo Ponte (2009), o novo programa "favorece a introdução ou aprofundamento de elementos de inovação necessários e urgentes nas práticas de ensino-aprendizagem desta disciplina" (p. 112), viabilizando importantes oportunidades, nomeadamente, a de valorizar conteúdos que andavam em segundo plano, como por exemplo, as transformações geométricas. Para Maia (2014), a ênfase dada às tranformações geométricas e ao uso das simetrias de forma a incrementar as experiências matemáticas discentes consideram ideias defendidas pelos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008).

De entre as duas finalidades fundamentais elencadas neste programa, destacamos a segunda, onde se refere que o ensino de matemática deve ser orientado, ao longo dos três ciclos, a "Desenvolver atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciências" (Ponte *et al*., 2007, p. 3), envolvendo a "compreensão da matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história" (p. 3) e "capacidade de apreciar aspectos estéticos da matemática" (p. 3).

Este programa também considera nove objetivos gerais que o ensino de matemática deve permear ao longo dos três ciclos de escolaridade. De acordo com o nosso interesse, salientamos o número nove, o qual indica que

> Os alunos devem ser capazes de apreciar a matemática. Isto é, devem ser capazes de: reconhecer a importância da matemática (…) na vida diária; predispor-se a usar ideias e métodos matemáticos em situações do seu cotidiano e aplicá-las com sucesso; reconhecer a beleza das formas, regularidades e estruturas matemáticas;

mostra conhecimento da história da matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura (…) (Ponte *et al*., 2007, p. 6).

Pessoa[41] (2010) revela considerar o estudo das transformações geométricas como uma reformulação considerável neste programa, uma vez que, no programa anterior, este tema se limitava à reflexão de eixo vertical e, em alguns casos, de eixo horizontal. Além disso, para esta autora, a introdução do estudo das isometrias é um ponto de distinção dos dois programas, pois abrange, para além da reflexão, conceitos como reflexão deslizante, translação e rotação, utilizando frisos que são representações motivadoras e que possibilitam o estudo destes quatro conceitos (Vieira, Ferreira & Mamede, s.d.). A seguir, apresentamos o Quadro 4 com os conteúdos de geometria, inerentes ao 1º ciclo no programa de 2007, nos atentando para a temática que aqui nos interessa.

Quadro 4: Tópicos, objetivos específicos e notas do programa de 2007 (Ponte *et al*., 2007)

	Tópicos	Objetivos específicos	Notas
1º e 2º anos	Figuras no plano e sólidos geométricos: - Reflexão	- Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo. - Desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical.	- Utilizar espelhos e miras na exploração de reflexões. - Propor a construção, no plano, de figuras simétricas através de dobragens e recortes e utilizando papel quadriculado. - Dar e pedir exemplos que evidenciem reflexões como simetrias axiais no meio natural e físico.
3º e 4º anos	Figuras no plano e sólidos geométricos: - Reflexão	- Identificar no plano eixos de simetria de figuras. - Construir frisos e identificar simetrias.	- Propor a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta).

Para Veloso (2012), a inclusão das simetrias neste programa, de forma mais ampla como nunca fora realizado e adequadamente associado às transformações geométricas, "poderá tornar-se, no âmbito das experiências

[41] Docentes de uma turma-piloto do 4º ano durante a implementação deste novo PMEB (2007).

matemáticas dos alunos ao longo do ensino básico, um fator relevante para o seu desenvolvimento matemático e cultural" (p. 41), corroborando integralmente com os objetivos do ensino da matemática já apostolados no Currículo Nacional.

Diferente da baixa expectativa dos docentes aquando da implementação do programa anterior, agora notou-se um clima de otimismo, o que Carvalho e Dias (2009) associam aos investimentos realizados em favor do processo de generalização, como ampla divulgação; oferta de formação; plano de ação para a matemática em andamento; escolas equipadas com recursos e disponibilização de materiais de apoio na *internet*. Assim, o programa de 2007 revelava-se um "potenciador de uma melhor qualidade de ensino e aprendizagem dos alunos" (Maia, 2014, p. 115), "importante acontecimento da educação matemática em Portugal" (Canavarro, Tudella & Pires, 2009, p. 1).

Em 23 de dezembro de 2011, é anunciada[42] a revogação do CNEB embasada na alegação que tal documento "não reúne condições de ser orientador da política educativa preconizada para o Ensino Básico, pelo que se dá por finda a sua aplicação". Segundo Bonito (2014), o Ministro da Educação e Ciências considerou que o CNEB teria aderido a versões extremas de algumas orientações pedagógicas, inclusive não fundamentadas cientificamente, impondo-as como norteadoras oficiais para a aprendizagem. Veloso (2012) demonstra insatisfação frente a esta revogação, afirmando que as ideias do texto de Paulo Abrantes, parte integrante do Currículo e utilizada por Veloso na abertura do capítulo 3 de seu livro, não foram extintas por esta medida e devem continuar

> a prevalecer sobre as ideias primárias que constituem a filosofia utilitarista da educação matemática do Ministério da Educação (deste e de anteriores governos), a qual se reduz na prática a exames de proficiência em técnicas e a testes intermediários para os preparar (p. 76).

Assim, o CNEB era substituído, então, pelas Metas Curriculares[43] (Leite & Delgado, 2012), que já tinham sido iniciadas em 2010 pela Ministra da Educação da época, Isabel Alçada (Bonito, 2014). Em 2012, devido ao fato de

---

[42] Despacho n.º 17169/2011, de 12 de dezembro.
[43] António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira e Maria Clementina Timóteo foram os autores das Metas Curriculares.

as Metas já mencionadas não evidenciarem os conhecimentos e capacidades a serem adquiridas pelos discentes em cada disciplina (Leite & Delgado. 2012), ocorreu a reformulação das mesmas. No caso da matemática, o ensino desta passou a contar com as orientações curriculares juntamente com as novas Metas Curriculares para a matemática, homologadas em 10 de agosto de 2012[44], que em 14 de dezembro do mesmo ano passa a legislar[45] como um documento de utilização obrigatória por parte dos professores. Os princípios orientadores da organização e da gestão dos currículos dos ensinos básico e secundário[46], tinham como objetivo "melhorar a qualidade do que se ensina e do que se aprende" (Decreto-Lei n.º 139/2012, p. 3476), oferecendo maior flexibilidade de organização das atividades letivas, na autonomia pedagógica, na gestão curricular e organizativa das escolas, favorecendo aos docentes a "liberdade dos professores na implementação de metodologias baseadas nas suas experiências, práticas individuais e colaborativas" (p. 3476).

II.3.5. O Programa de 2013

No ano seguinte, em 17 de junho de 2013, a pouco mais de dois meses do início do ano letivo seguinte e ainda sem concluir um ciclo completo de implementação do programa anterior, é homologado o novo programa de matemática (Bivar *et al*., 2013), a vigorar logo a partir do ano letivo de 2013/2014. Nesta conjuntura, cabe o que defende Viñao (2007), ao considerar que o fracasso das reformas escolares ocorre pelo fato de os currículos serem criados como instrumentos que não conduzem à interação entre o contexto escolar e os ensinamentos oriundos das experiências docentes, restringindo-se aos objetivos impostos. Para Veloso, Brunheira e Rodrigues (2013), como o próprio título de sua publicação diz, esta proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico é "um recuo de décadas" (p. 3). Na esfera política, estes autores apontaram para um cenário de medidas pouco duradouras, pondo a educação na condição de "um objeto pueril a reboque da dança dos sucessivos governos" (p. 3), sendo totalmente irresponsável com os alunos e professores portugueses. Em 22 de junho de 2013, os autores do PMEB (2007) publicaram um manifesto de indignação sobre esta homologação e as considerações

[44] Despacho N.º 10874/2012, de 10 de agosto.
[45] Despacho N.º 15971/2012, de 14 de dezembro.
[46] Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de Julho.

acerca da mesma, emitida por seus autores e também pelo próprio ministro da Educação, os quais alegavam que o programa recém homologado não se configurava por conter diferenças importantes em relação ao programa anterior e a sua implementação não traria grandes transtornos aos docentes e discentes. Os autores do PMEB (2007) alegavam, também em crítica, o inserir-reposicionar-excluir de conteúdos em relação à configuração do programa anterior, acrescentando que agora a apresentação regredia a constar de uma lista de conteúdos, fragmentados por ano de escolaridade em consonância com uma exastiva “lista de micro-objectivos específicos de que consta o documento das Metas Curriculares para que o programa remete num registo fortemente prescritivo” (Ponte *et al*., 2013, para. 5). Em concordância com este posicionamento, um grupo[47] de professores de matemática e de formadores de matemática da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa já havia emitido um parecer ainda mais pormenorizado, onde revelavam encarar tal homologação com bastante preocupação e discordância, apontando para o cariz gradual com o qual foi respeitada a implementação do programa anterior e para o amplo investimento realizado na formação de professores para o mesmo. Além disso, apontavam para avanços revelados por alguns estudos comparativos internacionais, promovidos pela OCDE e outros organismos, como o PISA e TIMSS, considerando como indícios do investimento e da adequação das orientações curriculares feitos até então. Alguns apontamentos para o novo programa de 2013 e respectivas metas também foram oferecidos por Ana Cristina Barroso, Carlos Albuquerque, Luís Sequeira, Maria João Gouveia, Maria Manuel Torres e Suzana Nápoles, com sugestões de correções no texto das partes destinadas ao 1º CEB, visando maior rigor conceitual e clareza dos objetivos. Os autores divulgaram um contributo para a discussão política da proposta baseados diversos documentos orientadores internacionais[48].

[47] Alguns membros deste grupo também fazem parte do grupo de autores do manifesto citado anteriormente.
[48] *National Core Curriculum for Basic Education* da Finlândia (2004), *Common Core State Standards for Mathematics* (2010) dos Estados Unidos, *Programmes of study for Key Stages 1-2* do Reino Unido (Fevereiro de 2013) e *Mathematics Syllabus Primary* (2007) e *Primary Mathematics Syllabus* (2012), apenas disponível para o nível *Primary One*, de Singapura.

Diante de tantas insatisfações, em 25 de junho desse mesmo ano, de maneira mais direta e clara, a direção da APM solicita a anulação da homologação do programa de 2013 e a consequente manutenção do programa de 2007.

Direcionando à temática de nosso maior interesse neste artigo e comparando-o com o programa anterior, percebemos significativas carências e empobrecimento acerca da abordagem de conteúdos outrora contemplados no PMEB (2007). Voltando ao parecer emitido pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, este lamentava a ausência de frisos e rosáceas na proposta homologada, considerando estes objetos matemáticos como "potenciadores do gosto dos alunos pela disciplina, dada a sua ligação com trabalhos de arte decorativa, sugestiva da apreciação dos aspetos estéticos da matemática, consideramos que os mesmos deveriam ser objeto de estudo relativamente à identificação das respetivas simetrias" (para. 14). Corroborando com esta opinião, Maia (2014) destaca ainda que o 1º CEB passou a abordar apenas a simetria de reflexão, e que as rosáceas podem ser consideradas implicitamente aquando da lecionação das simetrias de rotação – agora posicionadas a partir do 2º CEB, e os frisos aquando da lecionação das simetrias de translação – agora posicionadas a partir do 3º CEB, abordagens que "dependerá do desenvolvimento que o professor quiser dar ao próprio programa mas dificilmente terão o lugar de destaque alcançado no programa anterior" (p. 86). É importante salientar que, no que diz respeito aos temas transversais, consta nas Metas Curriculares (Bivar *et al*., 2013) que

> Os temas transversais referidos no Programa de 2007, como a Comunicação ou o Raciocínio matemático, referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados, estando contemplados neste documento de forma explícita ou implícita em todos os descritores (p. 2).

Considerando os mesmos critérios com os quais selecionamos partes intrínsecas dos documentos até então vislumbrados aqui, correlacionados com nossos objetivos com esta investigação, destacamos parte de uma de entre as três grandes finalidades do ensino da matemática – a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade –

descritas neste documento (Bivar *et al*., 2013). Sobre a análise do mundo natural, o documento afirma que

> A matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução (…) (p. 2).

A seguir, apresentamos o Quadro 5 com os conteúdos da temática aqui em apreço e o que consta nas Metas referidas.

Quadro 5: Programa e Metas (Bivar *et al*., 2013)

	Programa de 2013	**Metas Curriculares**
1º ano	Localização e orientação no espaço - Figuras geometricamente iguais.	Identificar figuras geométricas como geometricamente iguais, ou simplesmente iguais, quando podem ser levadas a ocupar a mesma região do espaço por deslocamentos rígidos.
2º ano	Figuras geométricas - Construção de figuras com eixo de simetria.	Completar figuras planas de modo que fiquem simétricas relativamente a um eixo previamente fixado, utilizando dobragens, papel vegetal, etc.
3º ano	Figuras geométricas - Identificação de eixos de simetria em figuras planas.	Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, etc.

De entre os documentos orientadores das práticas educacionais, nesta época os docentes ainda contam com os Cadernos de Apoio (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2012), os quais foram elaborados por quatro dos seis autores do programa de 2013. Estes visam complementar as Metas Curriculares de Matemática que, segundo os autores dos Cadernos, se apresentavam de forma reduzida, carenciadas de exemplos ilustrativos dos descritores. Assim, os Cadernos trazem “sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores” (p. 1). Mas, da mesma forma que o programa e as Metas foram alvo de críticas, com os Cadernos não foi diferente.

Alguns autores[49] de críticas já mencionadas anteriormente afirmam que os Caderno de Apoio do 1º ciclo não são claros em alguns de seus objetivos, precisando ser clarificados, assim como as Metas. Particularmente a respeito da parte do Caderno dedicada a geometria e medidas, estes críticos apontam que é demasiada extensa, com exemplos e exercícios pobres e distanciados das características do ensino atual, além de ratificar as metodologias impostas aos docentes através das Metas.

II.3.6. O Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular (PAFC)[50]

A dificuldade em promover uma reforma curricular profunda em Portugal deve-se ao atual contexto deste âmbito, o qual é repleto de uma multiplicidade de documentos normativos e orientadores, onde é possível perceber incoerências e inconsistências há quase três décadas (ME-DGE, 2017a). Diante deste cenário e das prioridades definidas para a educação, o Governo Constitucional de Portugal aprovou, em carácter experimental, a implementação do PAFC dos ensinos básico e secundário, no ano escolar de 2017/2018, "o que tem gerado elevadas expectativas em escolas, professores e famílias" (Torres, 2017, p. 153). E é nessa busca em harmonizar uma prescrição nacional comum, onde a escola se valha de autonomia curricular em prol de decisões contextualizadas, que nasce uma redefinição do Currículo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, por meio da elaboração de um Referencial Curricular. Para Nina (2017), diante do contexto global atual, este projeto configura-se também como uma oportunidade para o desenvolvimento de Educação para os Média a partir de uma literacia mediática. O PAFC também favorece a participação ativa dos discentes em prol de uma escola mais democrática, de forma a promover uma cidadania mais responsável, a diminuição da desigualdade e a motivação, o envolvimento, a responsabilidade e a melhoria das ações de ensino e de aprendizagem (Torres, 2017) e considerando valores de ordem ético-política, epistemológica e socioeducativa (Pereira, Mouraz e Figueiredo, 2014), contrapondo-se à persistente perspectiva em que a "edificação curricular escolar ignora, regra geral, a opinião dos alunos" (Azevedo, 2014, p. 444).

[49] Ana Cristina Barroso, Carlos Albuquerque, Luís Sequeira, Maria João Gouveia, Maria Manuel Torres e Suzana Nápoles.
[50] Despacho n.º 5908/2017, de 5 de julho.

No presente momento da redação desta tese, o projeto já contava com dois elos notáveis deste referencial: o Perfil dos Alunos (PA) no final da escolaridade obrigatória (ME-DGE, 2017b), já estabelecido durante esta redação, e as Aprendizagens Essenciais (AE)[51], ainda não formalmente estabelecidas no mesmo momento.

II.3.6.1. Perfil dos Alunos no final da escolaridade obrigatória (ME-DGE, 2017b)

O objetivo é promover melhores aprendizagens capazes de inspirar o desenvolvimento de competências de nível mais elevado, admitindo o cerne das escolas, de seus discentes e docentes, e favorecendo a gestão curricular de maneira flexível e contextualizada. Assim se considera reconhecer que o exercício efetivo da autonomia em educação só é integralmente garantido a partir do currículo enquanto objetivo desta autonomia (ME-DGE, 2017b). Isto posto,

> Perante os outros e a diversidade do mundo, a mudança e a incerteza, importa criar condições de equilíbrio entre o conhecimento, a compreensão, a criatividade e o sentido crítico. Trata-se de formar pessoas autónomas e responsáveis e cidadãos ativos (ME-DGE, 2017, p. 5).

Reconhecendo a aprendizagem como agente diferenciador entre desenvolvimento e atraso, este documento normativo destaca os sete pilares considerados, por Edgar Morin, numa cultura de autonomia e responsabilidade. São eles (ME-DGE, 2017, p. 5-6):

1. prevenção do conhecimento contra o erro e a ilusão;
2. ensino de métodos que permitam ver o contexto e o conjunto, em lugar do conhecimento fragmentado;
3. o reconhecimento do elo indissolúvel entre unidade e diversidade da condição humana;
4. aprendizagem duma identidade planetária considerando a humanidade como comunidade de destino;

[51] Disponível em http://dge.mec.pt/Aprendizagens-Essenciais. Acessado em 20 mar. 18.

5. exigência de apontar o inesperado e o incerto como marcas do nosso tempo;
6. educação para a compreensão mútua entre as pessoas, de pertenças e culturas diferentes;
7. desenvolvimento de uma ética do género humano, de acordo com uma cidadania inclusiva.

O *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (ME-DGE, 2017b) é constituído, num primeiro momento, por *Princípios* e *Visão*, aspectos em que o ato educativo se encontra assente, e num segundo momento, por *Valores* e *Áreas de Competências* a desenvolver (Figura 56).

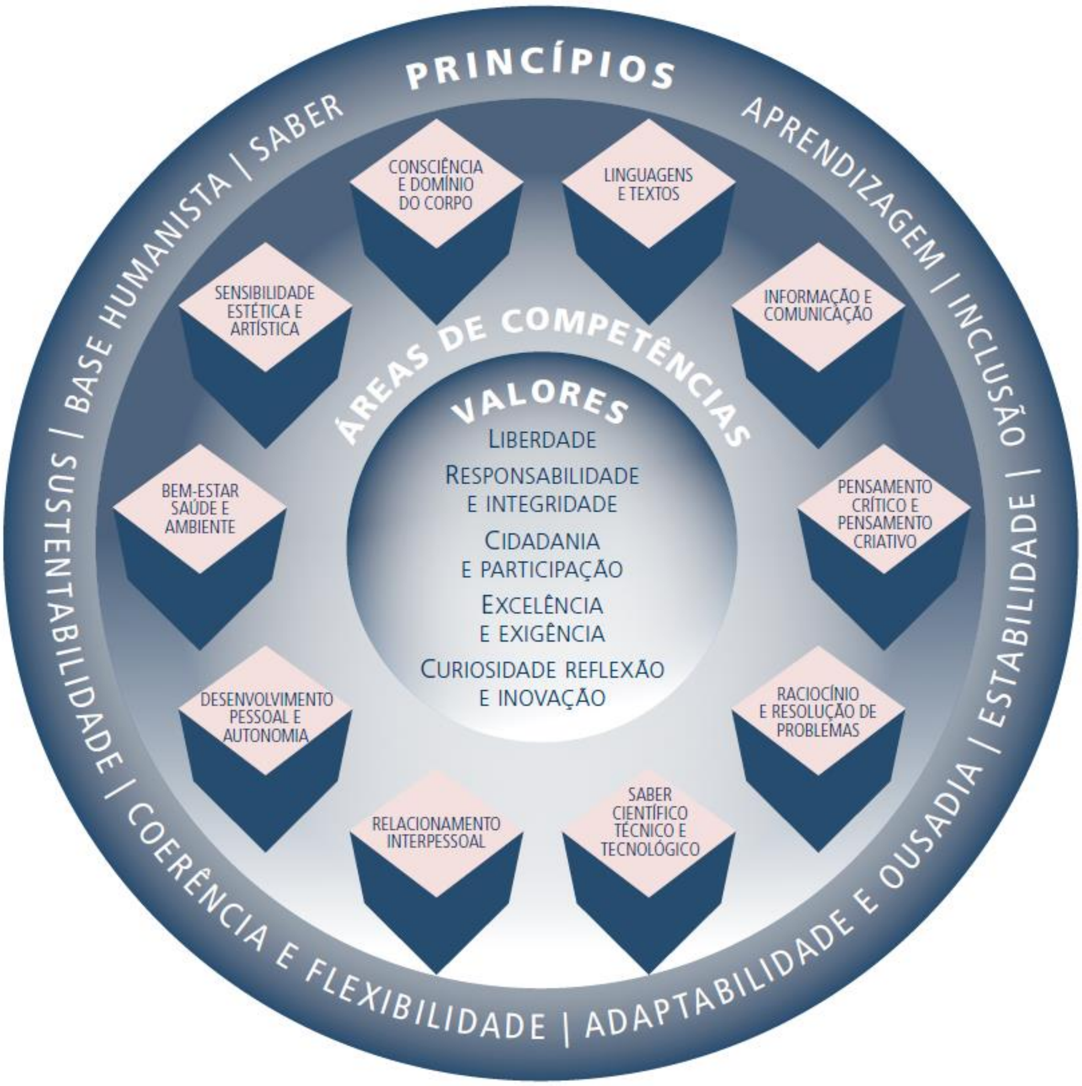


Figura 56: Esquema conceitual do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME-DGE, 2017b, p. 12)

Os *Princípios* legitimam as ações relativas a execução e a gestão do currículo em contexto escolar, abrangendo todas as disciplinas. A *Visão* revela o que é desejado para os discentes, com foco na qualificação individual e cidadania democrática, ao final da escolaridade obrigatória. Assim, através das atividades escolares, as crianças e os jovens devem ser estimuladas a desenvolver e efetivar os valores basilares da cultura da escola, nomeadamente Responsabilidade e integridade; Excelência e exigência; Curiosidade, reflexão e inovação; Cidadania e participação e Liberdade (ME-DGE, 2017b, p. 17).

As *Áreas de Competências* conciliam competências percebidas como

> combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados. São de natureza diversa: cognitiva e metacognitiva, social e emocional, física e prática. Importa sublinhar que as competências envolvem conhecimento (factual, conceitual, processual e metacognitivo), capacidades cognitivas e psicomotoras, atitudes associadas a habilidades sociais e organizacionais e valores éticos (ME-DGE, 2017b, p. 9).

De entre as áreas de competências consideradas, destacaremos duas que se relacionam diretamente com a pesquisa aqui desenvolvida: Raciocínio e resolução de problemas e Sensibilidade estética e artística. A primeira, Raciocínio e resolução de problemas, divide-se em duas partes. As competências da primeira parte, referente ao raciocínio, concernem aos processos lógicos que viabilizam “aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento” (ME-DGE, 2017b, p. 23), enquanto as competências da segunda parte, referente à Resolução de problemas, concernem aos processos de obter respostas para uma situação nova, “mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões” (p. 23). A segunda área de competência destacada, Sensibilidade estética e artística, se refere “a processos de experimentação, de interpretação e de fruição de diferentes realidades culturais, para o desenvolvimento da expressividade pessoal e social dos alunos” (ME-DGE, 2017b, p. 28). Abarcam o domínio de ações técnicas e performativas inerentes a criação artística, facultando o desenvolvimento de aspectos estéticos para a apreciação crítica, num ensaio cultural informado.

Por fim, o documento *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* considera algumas implicações práticas às ações pedagógicas e didáticas de modo a adequar a integrabilidade das ações educativas para os propósitos do perfil de competência dos discentes. Assim, são apontadas um conjunto de ações associadas à prática docente e que são fundamentais para o desenvolvimento do *Perfil*. Daí, a ação educativa é entendida como formativa especializada, assente no ensino, tendo por consequência “a adoção de princípios e estratégias pedagógicas e didáticas que visam a concretização das aprendizagens” (ME-DGE, 2017, p. 32). É a busca pela maneira mais adequada e os recursos mais eficientes para que todos os discentes aprendam, ou seja,

> para que se produza uma apropriação efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes que se trabalharam, em conjunto e individualmente, e que permitem desenvolver as competências previstas no Perfil dos Alunos ao longo da escolaridade obrigatória (ME-DGE, 2017b, p. 32).

II.3.6.2. Aprendizagens Essenciais (AE)[52]

Considerando a pluralidade e a complexidade como aspectos fundamentais na busca da definição do que se deseja para a aprendizagem discente à saída dos 12 anos da escolaridade obrigatória, o projeto busca identificar, nas disciplinas escolares e nos anos de escolaridade, um rol essencial de conteúdos, capacidades e atitudes que alcance os objetivos de consolidar aprendizagens de forma efetiva; desenvolver competências que requerem mais tempo (realização de trabalhos que envolvem pesquisa, análise, debate e reflexão) e permitir efetiva diferenciação pedagógica na sala de aula.

Esta fase conta com a participação voluntária de 225 unidades[53] orgânicas integradas, da rede de ensino público e privado, distribuídas pelas regiões Norte, Centro, Lisboa e Vale do Tejo, Alentejo, Algarve, Açores, Madeira e ainda três escolas portuguesas no estrangeiro. A partir daí, busca-se a evolução para um cariz mais orientativo e menos prescritivo, até uma

---

[52] Disponível em http://dge.mec.pt/Aprendizagens-Essenciais. Acessado em 20 mar. 18.
[53] Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/unidades_organicas_pafc.pdf. Acessado em 20 mar. 18.

reformulação global do currículo nacional, de forma gradativa e participativa, assente em referenciais internacionais[54].

As AE, enquanto componente do referencial curricular, são documentos orientadores curriculares que embasam a planificação, execução e avaliação do ensino e da aprendizagem, consideradas um referencial curricular comum não limítrofe às ações dos discentes durante o ano letivo, em favor do desenvolvimento das competências preestabelecidas no PA. Tendo por base as considerações do Projeto *The Future of Education and Skills - Education 2030*[55], da OCDE, não se trata, pura e simplesmente, da contração da quantidade e alcance dos conteúdos prescritos, mas sim da

> substituição de acumulação enciclopedista enumerativa, pelo aprofundamento da complexidade do conhecimento que se elege como essencial. Neste sentido, o "menos" (ruptura com o modo quantitativo-enciclopédico) passa a "mais" (ganhos qualitativos de solidez, uso e aprofundamento do conhecimento) (ME-DGE, 2017a, p. 8).

É através destas perspectivas que o *Currículo do Ensino Básico e do Ensino Secundário* será desenvolvido, tendo o propósito de constituir-se como referencial e matriz das orientações curriculares nacionais.

As Aprendizagens Essenciais (AE), em fase de elaboração durante a redação desta redação, indicava ser o próximo elo a ser estabelecido. Estas AE são orientadas pelo *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, articuladas entre si e definidas, nesta fase inicial, para os primeiros anos de escolaridade de cada Ciclo do Ensino Básico (1º, 5º, 7º), de nível de ensino (10º) e de 1º ano de formação de cursos organizados em ciclos de formação. Sem adotar novos manuais escolares nem revogar quaisquer documentos em vigor, o Programa e Metas Curriculares bem como seus Cadernos de Apoio e todo o Materiais de Apoio à Implementação das Metas Curriculares são considerados documentos de apoio[56]. Para cada ano e área disciplinar/disciplina, as AE elencam os conhecimentos, as capacidades e

---

[54] Projeto *Future of Education and Skills 2030* (http://www.oecd.org/edu/school/education-2030.htm), da OCDE; *Repensar a Educação* (UNESCO, 2016) e *Resumo de Políticas* (UNESCO, 2017).
[55] Disponível em http://www.oecd.org/edu/school/education-2030.htm. Acessado em 22 mar. 18.
[56] Ver quadro síntese. Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/quadro_sintese_documentos_curriculares.pdf. Acessado em 22 mar. 18.

atitudes a desenvolver por todos os alunos, esclarecendo (ME-DGE, 2017, p. 8):

a) o que os alunos devem saber (os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceitualmente, relevantes e significativos)

b) os processos cognitivos que devem ativar para adquirir esse conhecimento (operações/ações necessárias para aprender) e

c) o saber fazer a ele associado (mostrar que aprendeu), numa dada disciplina - na sua especificidade e na articulação horizontal entre os conhecimentos de várias disciplinas -, num dado ano de escolaridade, integrados no ciclo respectivo e olhados na sua continuidade e articulação vertical.

Estes esclarecimentos se dão através de enunciados integrados, dispostos por descritores de competências que operacionalizam as aprendizagens desejadas, contando com a identificação dos conhecimentos disciplinares e as ações operacionais intrínsecas às mesmas. Assim, as AE de cada disciplina se iniciam por uma breve introdução específica que contém as ideias organizadoras e os conceitos centrais da disciplina, por ano/ciclo, acompanhada das justificativas curriculares, sempre apoiadas pelos descritores do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

As finalidades apresentadas enquadram, fundamentam e dão um sentido global às Aprendizagens Essenciais (AE) que a seguir se apresentam para cada tema matemático em cada um dos três ciclos do ensino básico, sendo entendidas como *os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceitualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina* (…) (Despacho n.º 5908/2017, de 5 de julho). As AE constituem, para cada tema matemático, um todo integrado e articulado de conteúdos, objetivos e práticas de aprendizagem interrelacionados e indissociáveis. Os objetivos concretizam as aprendizagens essenciais relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver, e as práticas estabelecem condições que apoiam e favorecem a consecução desses objetivos.

Assim, a aquisição e desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, e a sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos, são objetivos essenciais de aprendizagem, associados aos conteúdos de aprendizagem de cada tema matemático — sendo que os que estão definidos em termos de capacidades e as atitudes expressam também um vínculo próximo com a matemática — e as práticas de aprendizagem que visam proporcionar condições que apoiem e favoreçam aprendizagens sustentáveis, com compreensão e transferíveis ou aplicáveis em contextos matemáticos e não matemáticos.

Em relação ao previsto para geometria e medidas, destacamos quatro de entre os considerados como conhecimentos, capacidades e atitudes:

- Descrever figuras no plano, identificando as suas propriedades, e representá-las a partir de atributos especificados;
- Compor e decompor figuras planas, a partir de figuras dadas, identificando atributos que se mantêm ou que se alteram nas figuras construídas;
- Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas envolvendo a visualização e a medida em contextos matemáticos e não matemáticos, e avaliar a plausibilidade dos resultados;
- Desenvolver interesse pela matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e domínios da atividade humana e social.

De entre as ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos, destacamos:

- Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados, numa abordagem do espaço ao plano, que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido (dos conceitos, propriedades, operações, e procedimentos matemáticos);
- Descrever figuras bi e tridimensionais, identificando propriedades e partes componentes dessas figuras;

- Desenhar figuras bidimensionais e antecipar atributos de figuras obtidas por composição ou decomposição;
- Utilizar materiais manipuláveis estruturados e não estruturados, na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem;
- Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, atividades exploratórias, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos).
- Resolver problemas que requeiram a aplicação de conhecimentos já aprendidos e apoiem a aprendizagem de novos conhecimentos
- Resolver e formular problemas, analisar estratégias variadas de resolução, e apreciar os resultados obtidos;
- Analisar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.

À semelhança do Projeto de Gestão Flexível do Currículo, introduzido em Portugal há mais de vinte anos, do qual emanou a elaboração de um Projeto Curricular de Escola/Agrupamento, é reconhecida a importância da reflexão sobre as práticas de gestão curricular nas escolas através destas políticas de flexibilização (Almeida *et al*., 2017; Santos & Barreiros, 2017). Todos estes aspectos integrados a autonomia e flexibilidade curricular são um contraponto a "histórica e persistente rigidez dos planos de estudos" (Torres, 2017, p. 153).

Em um parecer divulgado em 30 de abril de 2018 pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM, 2018), o conjunto de documentos embasadores do PAFC é qualificado como "inquietante", "facilitista" e "obscurantista" (p. 1). Considera ainda que, de uma maneira geral, é "excessivamente vago e ineficaz como orientador do ensino" (p. 1), e que desconstrói os progressos das duas úmtimas décadas e os alcances obtidos com o programa atualmente em vigor, sendo um "retrocesso a atitudes características daquilo que de pior teve o ensino em Portugal no século XX" (p. 1).

Sucintamente, vemos que muitas foram as alterações ocorridas nos programas e demais documentos orientadores das práticas educativas de matemática em Portugal. Movimentos reformistas internacionais contribuíram significativamente para as alterações ocorridas, no país, nos programas e demais documentos orientadores das práticas educativas de matemática. No entanto, a geometria demorou muito tempo até ganhar seu espaço. A partir do programa de 1980, aumentando no programa de 1990, temas como transformações geométricas começam a aparecer, mas foi somente no programa 2007 que este tema, juntamente dos conceitos de simetria, apareceram de forma expressiva, elevando a geometria a um lugar de destaque que nunca tinha tido. A homologação do programa de 2013, enquanto o de 2007 ainda não tinha completado um ciclo de implementação completo, foi criticada por muitos professores e entidades portuguesas ligadas ao ensino de matemática por diversos motivos. Entre eles, e particularmente em relação ao assunto que nos dedicamos aqui, é de salientar que as Tranformações Geométricas e as simetrias perderam a posição de destaque apesar de diversos autores apontarem os benefícios do ensino destes temas, em todos os ciclos de ensino. Diante de todo o exposto até então, destacamos a consideração de Sá (2000), ao apontar que a matemática, enquanto objeto de estudo e de ensino,

> implica, pressupõe e destina-se a desenvolver funções nobres do nosso intelecto, por vezes ditas de alto nível: as capacidades de reflexão, de raciocínio, de hierarquização, de relacionação, de argumentação, entre outras, por esta ou outra ordem. Trata-se, por isso, de uma disciplina muito sensível, de grande vulnerabilidade às mudanças metodológicas e de estratégia didática (p. 1).

Após a grande conquista obtida com o Programa de 2007 para o ensino das transformações geométricas e simetrias, o Programa atual, desde 2013, revela um retrocesso atribuído frente as vantagens de abordagem deste tema em sala de aula.

Apesar de ainda estar em fase de implementação, o PAFC é apresentado como uma oportunidade de adequação as necessidades peculiares das diferentes realidades que os docentes se deparam. No entanto, há quem considere que sua implementação seja um retrocesso e um desinvestimento no conhecimento e no ensino. É imprescindível ter em consideração os anseios derivados das vozes emanadas de toda a comunidade escolar, com o propósito de se valer dos dois pilares do projeto, autonomia e flexibilidade. Estes dois aspectos centrais do PAFC devem corresponder as necessidades, as quais devem ser projetadas na elaboração de um currículo que conte com o amparo de formações contínuas colaborativas em prol de sua exequibilidade. Assim, o que for considerado como realmente importante a ser ensinado poderá ser debatido, aprendido e adaptado pelos docentes, em busca de tornarem viáveis, tanto o ensino quanto aprendizagem.

CAPITULO III – FORMAÇÃO DE PROFESSORES E INVESTIGAÇÃO-AÇÃO

A qualidade das aprendizagens é o principal objetivo de um ensino eficaz, que por sua vez remete para a importância da formação de professores como via crucial de melhoria neste sentido. Segundo Day (2001, p. 213),

> há dados que demonstram que a formação contínua pode produzir, e de fato produz, um forte impacto no pensamento e na prática dos professores e, consequentemente, de uma forma indireta, na qualidade das experiências de aprendizagem dos alunos na sala de aula.

No mesmo sentido, Oliveira e Passos (2008) referem que nas últimas décadas destacaram-se pesquisas educacionais com enfoque nos docentes, nos discentes, nos currículos, em diversos fatores que influenciam diretamente o contexto escolar, demonstrando certo reconhecimento da importância e da necessidade de uma formação docente, inicial ou contínua, de forma sólida e não promovida através de um conjunto de cursos de reciclagem (Oliveira & Passos, 2008; Ponte, 2005).

Diversos estudos têm mostrado que o envolvimento ativo dos professores é uma ação fundamental para que as mudanças ocorram. Com efeito, sendo os professores o cerne das mudanças de práticas pedagógicas (Hargreaves, 1998), qualquer reforma curricular ou proposta metodológica tem necessariamente de passar por eles, assumindo as questões relacionadas com a sua formação um papel estratégico fundamental. Assim, mudanças de abordagens e de práticas pedagógicas só ocorrem se, fundamentalmente, estas forem da vontade do professor (Forte & Flores, 2011; Veiga Simão *et al.*, 2007). Nesta vertente, Estrela (2003) afirma que para ocorrer a mudança é preciso ter-se o desejo ou o próprio sentimento de necessidade desta ou, ao menos, "é necessário que a mudança assuma um significado para aqueles a quem ela é proposta ou imposta" (p. 56).

Reconhecendo que as escolas e salas de aula são organizações complexas, Day (2004) destaca ainda que docentes e discentes são mais determinantes à qualidade de ensino e aprendizagem do que as políticas educacionais e suas propostas. Neste âmbito, Nóvoa (2007) afirma que

> o excesso dos discursos esconde uma grande pobreza das práticas. Dito de outro modo: temos um discurso coerente, em muitos aspectos consensual, estamos de

> acordo quanto ao que é preciso fazer, mas raramente temos conseguido fazer aquilo que dizemos que é preciso fazer (p. 23).

Este mesmo autor salienta que o reconhecimento deste distanciamento nos seduz à busca de novas possibilidades para a profissão docente, a qual recupera uma notável centralidade na definição das politicas públicas neste início do século XXI (Nóvoa, 2007).

III.1. Modelos de formação de professores

Nessas últimas décadas, diversos estudos sobre a formação inicial e contínua de professores, políticas curriculares, saberes docentes, planos salariais e condições laborais, formações específicas de ensino, identidade profissional, entre outras, têm ganhado destaque, muitas vezes embasados por experiências e investigações fomentadas por instituições internacionais como OCDE, UNESCO e Banco Mundial (Libâneo, 2015). Tais estudos relacionam-se a reformas educativas executadas que, por suas vezes, estão relacionadas ao desenvolvimento económico e social destes países, donde podemos perceber vertentes como as do professor investigador, do professor reflexivo, do professor intelectual crítico entre outras, as quais influenciam políticas públicas educacionais e o currículo de sistemas (Libâneo, 2015).

De acordo com Diniz-Pereira (2011), diferentes modelos disputam um cariz predominante de inserção na formação docente. Estes modelos dividem-se em três grandes grupos: o grupo da racionalidade técnica, o grupo da racionalidade prática e o grupo da racionalidade crítica, estando estes dois últimos mais próximos entre si.

O primeiro grupo agrega aqueles assentes na **racionalidade técnica**, dos quais destacamos o *modelo de treinamento de habilidades comportamentais*, o qual tem por propósito treinar os docentes a fim de desenvolverem habilidades específicas e observáveis (Tatto, 1999); o *modelo transmissivo*, onde um conteúdo específico é transmitido aos docentes e as habilidades pedagógicas práticas, em geral, são relegadas a segundo plano; e o *modelo académico tradicional*, em que o conhecimento científico ou disciplinar do conteúdo é considerado suficiente à promoção do ensino e as características ligadas à prática poderão provir do próprio desenvolvimento da ação (Tabachnick & Zeichner, 1991). É embasado nestes modelos de racionalidade técnica que os currículos de diferentes países são elaborados, amparados pelo apoio de diversas instituições internacionais, a exemplo do Banco mundial, responsáveis por reformas conservadoras de programas de formação docente, principalmente em países em emergentes.

Estes modelos de formação docente, também conhecidos por *epistemologia positivista da prática*, são comumente os mais disseminados e consideram que "a atividade profissional consiste na solução instrumental de um problema feita pela rigorosa aplicação de uma teoria científica ou uma técnica" (Schön, 1983, p. 21). Este pensamento foi bastante adotado durante os séculos XIX e XX, quando se considerava que o pensamento dos professores deveria desenvolver-se à luz da teoria, de forma a esta relação fornecer uma reflexão crítica dos ensaios educacionais práticos (Carr & Kemmis, 1986). Assim, a prática educacional toma por base a aplicação do conhecimento científico e, consequentemente, os problemas daí eminentes devem ser considerados como *técnicos*, cuja solução há de advir de "procedimentos racionais da ciência" (Diniz-Pereira, 2011, p. 13). Em suma, nos modelos abarcados pela racionalidade técnica, o docente é um técnico-especialista ao qual cabe aplicar precisamente normas científicas ou pedagógicas.

Num viés mais descritivo e interpretativo do que explanatório e preditivo (Diniz-Pereira, 2011), temos os modelos do segundo grupo, os quais baseiam na **racionalidade prática**. Estes modelos visam superar os entraves impostos pelos modelos tradicionais e hegemônicos apresentados no grupo anterior. Destacamos três modelos no grupo da racionalidade prática: o *modelo humanístico*, onde os docentes são os principais responsáveis pela escolha do que eles próprios devem conhecer em profundidade (Tatto, 1999); o modelo de *ensino como ofício*, onde o cohecimento sobre o ensino advém por meio do método de tentativa e erro, sendo atentamente analisado de forma concomitante com os acontecimentos (Tatto, 1999); e o *modelo orientado pela pesquisa*, o qual tem por objetivo viabilizar ao docente na análise e reflexão da sua própria prática em busca da ação sobre a solução de problemas relativos ao ensino e à aprendizagem em contexto de sala de aula (Tabachnick & Zeichner, 1991).

O surgimento destes modelos remontam ao início do século XX, tendo o trabalho de Dewey (1933) como a origem de diferentes estudos futuros, como os realizados por Schwab e Stenhouse (Carr & Kemmis, 1986) e Schön (Schön, 1983), os quais repercutem até aos dias atuais. Segundo Diniz-Pereira (2011), o Banco Mundial tem utilizado recentemente um discurso de racionalidade prática com o objetivo de permanecer no controle sobre os programas de formação docente. Para Carr e Kemmis (1986), a racionalidade prática compreende a educação como uma atividade complexa ou um processo que se altera consoante as demandas, as quais podem ser administradas apenas através de adequadas atitudes realizadas pelos próprios profissionais, ou seja, "por meio de uma deliberação sobre a prática" (Diniz-Pereira, 2011, p. 16). Este arbitramento é "guiado por critérios advindos do processo em si mesmo, ou seja, critérios baseados na experiência e aprendizagem, os quais distinguem processos educacionais de não-educacionais e os quais separam as boas práticas das indiferentes ou ruins" (Carr & Kemmis, 1986). Segundo Schön (1983), exercer a reflexão na ação faz do profissional um pesquisador no contexto prático, rompendo a dependência de aspectos teóricos e técnicos predeterminados e assumindo um caráter autoral de "uma nova teoria de um caso único" (Schön, 1983, p. 68). Diniz-Pereira (2011) considera que, embora se admita alguma vertente técnica, as características peculiares da realidade educacional, nomeadamente seu cariz fluido e reflexivo, desfavorecem uma sistematização técnica. Assim, inserido numa carreira com variáveis teóricas e práticas de conhecimento, os docentes são vistos como um profissional reflexivo, questionador e avaliador de sua prática pedagógica cotidiana, a qual se deve considerar influenciada por fatores para além dos muros da escola.

Gatti (2016) afirma que, diante das buscas para melhor qualificação profissional docente e de condições para laborais para tal exercício, surgem diversas preocupações relacionadas com as desigualdades socioculturais diante dos desafios futuros. A partir disto, "a formação de quem vai formar torna-se central nos processos educativos formais, na direção da preservação de uma civilização que contenha possibilidades melhores de vida e co-participação de todos" (Gatti, 2016, p. 163). Isto posto, apresentamos o terceiro grupo, o qual contempla os modelos de formação baseados na **racionalidade crítica**, onde, de acordo com o livro *Becoming Critical: Education, knowledge and Action Research* de Carr e Kemmis (1986), revela uma perspectiva fundamentada na Teoria Crítica da Escola de Frankfurt (Diniz-Pereira, 2011), em que o principal propósito é a transformação da educação e da sociedade, o que a distingue da relação teoria-prática. Novamente, à semelhança da apresentação dos modelos inerentes aos grupos anteriores, destacaremos aqui três dos modelos de formação que são abarcados por este grupo. O *modelo sociorreconstrucionista* é aquele que considera o ensino e a aprendizagem como vias de promover uma realidade igualitária, humanística e de justiça social no contexto da sala de aula, da escola e da sociedade (Liston & Zeichner, 1991). O *modelo emancipatório* ou *transgressivo* promove a educação na forma de um dinamismo político, fazendo da sala de aula um campo aberto a possibilidades em favor da construção, por parte do professor, de maneiras conjuntas de extrapolar ou transgredir os limites preestabelecidos (Hooks, 1994). E o *modelo ecológico crítico*, que tem o intúito de revelar, interromper e interpretar desigualdades correntes na sociedade, de modo a favorecer um movimento de transformação social (Carson & Sumara, 1997).

Segundo Shor (1992), apesar dos trabalhos de Dewey e Piaget serem pioneiros no que diz respeito do levantamento de problemas, Freire é o responsável pelo desenvolvimento de uma vertente política associada a esta ação, defendendo a proposta de um “diálogo de levantamento de problemas” (p. 20) a partir do qual “o professor é frequentemente definido como alguém que levanta problemas e dirige um diálogo crítico em sala de aula; levantamento de problemas é sinônimo de pedagogia” (p. 20). Esta dinamização deve contar com a participação ativa de docentes e discentes, todos como autores desta ação, onde o contexto social e cultural da educação deve ser considerado. Para Diniz-Pereira (2011), apesar de os modelos de racionalidade técnica e prática também considerarem o professor como alguém que levanta problemas, estes modelos não veem esta tarefa como parte da natureza do trabalho docente. Os modelos técnicos tem esta ação como uma concepção instrumental e os modelos práticos mais caracterizados pelo aspecto interpretativo, ambos diferenciando-se da vertente política explícita dos modelos críticos. Para Diniz-Pereira (2011), no grupo de modelos qualificados pela racionalidade crítica, vê-se a educação como *historicamente localizada*, ou seja, que se dá diante de um panorama sócio-crítico e direciona-se a uma situação futura desejada; como *atividade social*, da qual emanam consequências sociais para além de um melhoramento individual; como *intrinsecamente política*, incidindo diretamente nas opções de vida dos envolvidos no processo; e como *problemática*, com "seu propósito, a situação social que modela ou surgere, o caminho que cria ou determina relações entre participantes, o tipo de meio na qual trabalha e o tipo de conhecimento para o qual dá forma" (Carr & Kemmis, 1986, p. 39). Posto isso, quando ensino e currículo são abordados através da racionalidade crítica, a palavra de ordem é *pesquisa* (Diniz-Pereira, 2011).

Para Diniz-Pereira (2011), o atual conexto internacional é propício para educadores-pesquisadores, potencialmente capazes, contrariarem a predominância de sistemas tradicionais e conservadores, em busca de novos modelos coletivos, colaborativos e críticos de formação profissional docente, permitindo reais possibilidades que busquem melhores condições laborais e de qualificação profissional.

III.2. Desafios e dinâmicas da formação de professores

Sobre como atrair, aperfeiçoar e manter professores eficientes, muitos países (OCDE, 2005) referem-se, entre outras questões, à debilidade dos laços existentes entre a formação inicial e a formação contínua de professores e as necessidades demandadas pelas escolas. Também a relação entre formação científica e formação pedagógica ou entre os níveis teóricos e práticos da formação continuam a constituir desafios da mesma. Este desvínculo persiste, ainda hoje, nos cursos de formação docente (Dias & André, 2016; Libâneo, 2015; Saviani, 2009). Para Libâneo (2015), dois tipos de formação distinguem-se claramente. Por um lado, tem-se a formação através da *licenciatura em pedagogia*, na qual forma-se o professor polivalente para sua ação nos anos iniciais da Educação Básica, privilegiando aspectos metodológicos e pedagógicos limítrofes. Assim, promove-se o conhecimento teórico de forma generalizada e o conhecimento disciplinar delimita-se à metodologia do ensino das disciplinas. Por outro lado, tem-se as formações através das licenciaturas em conteúdos específicos de determinadas áreas científicas, onde o foco principal é no conhecimento científico em detrimento ao pedagógico, comumente dissociado da formação disciplinar específica. Saviani (2009) define, repectivamente, estas duas vias de formação docente como o modelo pedagógico-didático e o modelo dos conteúdos culturais-cognitivos. Relativamente ao primeiro modelo, predominantemente implementado em escolas normalistas de formação docente para os anos iniciais, este é tal forma que “considera que a formação do professor propriamente dita só se completa com o efetivo preparo pedagógico-didático” (Saviani, 2009, p. 149), contrapondo-se ao segundo modelo, predominantemente propagado nas universidades e demais instituições responsáveis pela formação docente de profissionais dos anos finais da Educação Básica e ensino secundário, onde “a formação do professor se esgota na cultura geral e no domínio específico dos conteúdos da área de conhecimento correspondente à disciplina que irá leccionar” (Saviani, 2009, p. 149).

Isto posto, defende-se a necessidade de uma visão mais ampla da aprendizagem e do desenvolvimento docente, bem como a articulação entre aprendizagem e contexto de trabalho. Para estas mesmas expectativas, a aprendizagem do professor no local de trabalho tem sido uma via significativa do desenvolvimento profissional docente (Forte & Flores, 2011). Retallick (1999) aponta a relevância desta prática dizendo que “a ideia da escola como um local educativo para professores (bem como para alunos) representa um avanço considerável na reflexão sobre o trabalho dos professores” (p. 35).

Porém, em diversos processos de mudança europeus, nota-se a dificuldade em envolver ativamente os professores na identificação da qualidade do seu trabalho. Segundo o Relatório TALIS (OCDE, 2009), realizado em 23 países, a maioria dos professores consideram que o desenvolvimento profissional, envolvido dentro de diversas atividades, tem um impacto moderado ou elevado. O máximo impacto detectado é notado na investigação e nos programas de qualificação, entretanto, apesar da quantidade de dias dedicados a estas atividades ser comumente maior, é reduzido o número de docentes que delas participam. Assim, o Relatório TALIS salienta dois aspectos que os órgãos responsáveis pelas políticas educacionais e os diretores de centros de formação devam ter em atenção. Em primeiro lugar, os docentes formadores profissionais que atuam em cursos de qualificação dedicam muito tempo e dinheiro e julgam que estes cursos sejam eficientes. Contudo, há pouca adesão de docentes enquanto alunos destes cursos de qualificação, e os que buscam por estes cursos, muitas vezes enfrentam dificuldade em acompanhá-los por falta de tempo. Esta constatação sugere que a quantidade de tempo e dinheiro dedicada aos professores destes cursos deve ser repensada. Em segundo lugar vem a falta de oferta adequada de desenvolvimento profissional, de acordo com 42% dos professores, e que é considerado "o fenômeno mais amplo das necessidades não atendidas" (OCDE, 2009, p. 12). Isto indica a necessidade de avaliar mais minuciosamente a oferta e apoio diante das demandas de desenvolvimento profissional tenha que ser prioridade em diversos países (OCDE, 2009).

De acordo com Forte e Flores (2011), para que os professores se apropriem de aspectos relacionados à sua qualidade profissional, sentido de identidade e comprometimento, "é necessário envolvê-los em debates sobre estas questões" (p. 94). Isto pode ser propiciado através de formações de professores que criem oportunidades de aprendizagem onde os conhecimentos práticos e acadêmicos coabitem de forma menos hierárquica (Zeichner, 2010). Anda sob esta perspectiva, Forte e Flores (2011) mostram que alguns autores apontam para a aprendizagem como um "fenômeno dinâmico, permanente, pessoal e socialmente construído através da interação entre os indivíduos, da confrontação e transformação de ideias preconcebidas e da (re)interpretação de experiências e para a articulação entre aprendizagem e contexto de trabalho, entre conhecimento, aprendizagem e construção da identidade" (p. 96). As autoras completam dizendo que "é fundamental pensar nas estratégias e práticas de colaboração existentes nas escolas e as condições da sua realização, bem como a sua relação com processos de desenvolvimento profissional em contexto de trabalho" (p. 96).

Mais ainda, a complexidade das funções docentes e as evidências sobre a pluralidade do bom ensino permitem compreender a existência de diferentes modelos de formação e também a relevância que tem vindo a assumir os que enfatizam a reflexão e investigação sobre a docência como estratégias de formação (Machado & Formosinho, 2009) e o papel da colaboração docente no desenvolvimento profissional dos professores (Flores & Veiga Simão, 2009; Snoek, 2008).

Diversas exigências da sociedade do conhecimento requerem capacidades docentes aptas a conviverem com as crescentes complexidades e desafios inerentes ao ofício, harmonizando outras formas de pensar e organizar a sua formação e o seu desenvolvimento profissional.

Neste panorama, a formação insere-se num quadro de dinâmicas de formação-ação organizacional e de incentivo à prática de trabalhos de investigação-ação (Nóvoa, 1992a; Dean, 1991), proporcionando "um campo profissional autónomo, suficientemente rico e aberto" (Nóvoa, 2009, p. 53). Para Day (2001), "os professores não podem ser formados (passivamente), eles formam-se (ativamente). É, portanto, vital que participem ativamente na tomada de decisões sobre o sentido e os processos da sua própria aprendizagem" (p. 17), deixando "de ser objecto para passar a ser sujeito da formação" (Ponte, 2005, p. 272).

Ainda sobre o incentivo à prática de trabalhos de investigação-ação, citado por Nóvoa (1992b), esta pode assumir uma característica mais colaborativa, o que vamos referir por investigação-ação participativa. Lima (2002) aponta que

> nunca se defendeu a colaboração profissional de forma tão veemente, entendida como o modo ideal de se assegurar o desenvolvimento profissional dos docentes ao longo da carreira, a aprendizagem de excelência para os alunos e a transformação das escolas em autênticas comunidades de aprendizagem (p. 7),

pois a compreensão do que faz o professor e o porquê disso depende da compreensão do contexto onde este se insere bem como da cultura laboral onde esta se assenta (Hargreaves, 1998). Sugere-se, então um afastamento da formação de professores da lógica de oferta/consumo, ganhando aspecto de (re)construção da formação, na vertente do que é persistente por diversos autores, na medida em que a aprendizagem dos professores no local de trabalho é vista como uma componente significativa do desenvolvimento docente (Retallick, 1999), associando os contextos de trabalho e de formação (Formosinho & Machado, 2007), transpondo a formação para o interior da profissão docente (Nóvoa, 2007) e percebendo a importância da aprendizagem colaborativa e da criação conjunta do conhecimento (Kortaghen, 2009). Cabe ainda apontar as atitudes, por parte de alguns professores, baseadas numa prática profissional individualista (Lima, 2002; Almeida *et al*., 2018), que receiam socializar seus espaços e tempos de trabalho aos seus pares, o que, de certo modo, impede a partilha de experiências e conhecimentos que melhorem a formação de cada um e a educação numa perspetiva global. (Forte & Flores, 2011, p. 98). De fato, enquanto coletivo, os professores não têm habitualmente esta prática, o que dificulta a existência de um diálogo reflexivo, fazendo da escola, para muitos professores, um local de egocentrismo das questões profissionais (Forte & Flores, 2011).

São esperados diversos desafios para uma formação de professores, desde a sua concepção até ao seu resultado final, passando pela sua implementação. Quando se diz *resultado final* remete-se sumariamente à sua cronologia, tempo em conta que se considera ter desenvolvido plenamente o planejado prévio ao seu início. Mas é prudente esperar que uma formação de professores, por mais planejada e "completa" que se espere desenvolver, deixe inquietações suficientes capazes de fomentar formações futuras. É como se a formação de professores, vista como uma formação continuada, não se encerre por si só, mas se complete a cada formação que origine outras próximas, as quais ainda não se tivessem notado tais necessidades. Mesmo assim, desejamos que outros conceitos ligados a matemática possam ter sua aprendizagem de forma eficaz, mesmo que não seja pelo apelo à arte, à cultura e ao património, mas que seja de uma forma contextualizada e interdisciplinar, e, consequentemente, mais rica e atraente. Uma das maneiras de iniciar o desenvolvimento de uma prática em que o aluno se torne ator no processo de ensino e de aprendizagem é através de uma renovada postura de conduta do professor em sala de aula.

Para Matos (2011), caso os docentes lecionem sempre da mesma forma os mesmos conteúdos nas diversas turmas, sem diversificar os instrumentos e materiais de trabalho, é possível que alguns não realizem uma contextualização, uma adaptação e uma atualização da sua forma de ensinar e dos instrumentos e ferramentas de trabalho que utilizam no sentido de adaptar as aprendizagens ao público-alvo. Isto posto, a dificultosa ação na mudança de abordagens de conteúdos em sala de aula, por parte dos professores, demanda uma via de desaprendizagem seguida por nova aprendizagem (Mousley, 1990, citado por Handal & Herrington, 2003, p. 4) despertando processos desconfortáveis comumente desagradáveis e intimidadores (Martin, 1993, citado por Handal & Herrington, 2003). Entretanto, “não devemos perder de vista a forte possibilidade que existe de as concepções dos professores interferirem no ensino que realizam e na aprendizagem dos seus alunos” (Vasconcellos, s.d., p. 14). Para além disso, o confronto entre a inovação curricular e as concepções dos professores pode provocar um desconforto nestes (Costa, 2008) que, assim, “evitam ensinar temas que não dominam, mostram insegurança e falta de confiança” (Curi, 2004, p. 162).

Direcionando-nos à educação matemática, corroboramos com Sadovsky (2010) ao afirmar que, no modelo pedagógico atual, os professores mostram a utilidade das fórmulas e das regras matemáticas por meio de um treinamento de aplicação: *definição*, *exercícios-modelo*, *exercícios de aplicação*. E é a partir dessa prática que emergem questionamentos, por parte do educando, como “Para que serve isso? De onde veio? Por que é assim?”. Este contexto revela a inadequação de métodos e condutas pedagógicas os quais dificultam, ou tampouco permitem, a oportunidade de desenvolvimento de um trabalho intelectual mais profundo e significativo em sala de aula. “Trata-se, portanto, de formação, e não de informação” (Sadovsky, 2010).

Na literatura atual, é possível notar alguns trabalhos desenvolvidos que sugerem o ensino da matemática através de recursos, comumente associados a materiais manipuláveis ou recursos artísticos. Estes últimos geralmente incidem sobre criações dos próprios discente ou a obras renomadas de poucos e alguns distintos artístas, como Escher, por exemplo. Mas ainda não há referências (estratégias, recursos, estudos) com o foco na formação de professores, valendo-se de uma metodologia de investigação-ação participativa com o propósito que temos com esta pesquisa.

III.3. Aspectos históricos da Investigação-Ação

Inúmeras incertezas ainda pairam sobre a verdadeira origem da metodologia de investigação-ação. Numa busca por esta origem, Tripp (2005) baseado em diferentes autores[57], aponta algumas possibilidades:

1. *um trabalho realizado em 1913, em Viena na Alemanha.*
2. *uma pesquisa com objetivos de alcançar melhorias nas relações inter-raciais, realizada por John Collier antes do fim da Segunda Guerra Mundial.*
3. *o livro de Buckingham, de 1926, Research for Teachers, em defesa de um notório processo.*
4. *os antigos empiristas gregos usavam um ciclo de investigação-ação, se considerarmos as aproximações entre os conceitos de investigação-ação e reflexão.*

Isto posto, Tripp (2005, p. 445) conclui que "é pouco provável que algum dia venhamos a saber quando ou onde teve origem esse método, simplesmente porque as pessoas sempre investigaram a própria prática com a finalidade de melhorá-la".

A versão mais amplamente defendida e utilizada por diversos autores atribui o título de formalizador da denominação investigação-ação (*action research*) ao alemão Kurt Lewin, em 1944, nos Estados Unidos, com a publicação em 1946 do artigo *Action research and minority problems* (A investigação-ação e os problemas das minorias) (Diniz-Pereira, 2011). Pouco depois do fim da Segunda Guerra Mundial, os trabalhos neste enfoque foram demandados pela administração estadunidense com a urgência em sanar problemas de ordem prática (Selva, 2010) como, por exemplo, alterar costumes alimentícios da população frente a falta de determinados produtos (Gollete y Lessard-Hébert, 1988). Assim, submetiam as funções de "agentes de troca, em auxílio direto com as pessoas a quem eram destinadas as propostas de intervenção" (Selva, 2010, p. 136). Nestes primeiros casos já era possível reconhecer características como o conhecimento, a intervenção, a melhoria e a colaboração. Para Lewin, há mais benefícios quando se envolve na criação do

[57] Altrichter (1993); Deshler & Ewart (1995); Selener (1997); Rogers (2002); Dewey (1933).

conhecimento científico em um contexto social, com uma mediação direta e colaborativa com os elementos envolvidos.

Em seu artigo original, Lewin (1946) aponta a primazia da investigação-ação como um instrumento aprimorador da prática social em relações intergrupais, especificamente na administração social, e realça a profunda importância de o profissional das ciências sociais integrar a ação como parte intrínseca de sua tarefa investigativa. Faz-se necessário uma aproximação entre estes olhares numa simbiose: a investigação sobre um problema em contexto social; a intervenção ou ação que visa resolvê-lo, transmutando a situação anterior e uma nova reflexão de onde emane o conhecimento sobre a transformação em questão (Amado, 2014). Isso contrastava as considerações tradicionais e as ideias vigentes à época sobre a verdade científica, despertando uma rejeição por parte de comunidades científicas a esta nova concepção de abordagem metodológica (Almeida, 2001). Esta reação contrária pode ter sido motivada pelo fato de que, historicamente, até mesmo as ciências sociais dedicavam suas pesquisas em lograr sua cientificidade e em restringir os campos da produção do conhecimento e da aplicação (Salazar *et al*., 2006).

Na década de 50, a investigação-ação chega ao campo educacional substancialmente pelos trabalhos de Stephen Corey, diretor do Columbia Teachers College, que “acreditava que professores provavelmente considerariam os resultados de sua própria pesquisa mais úteis do que aqueles encontrados por pesquisadores, e assim provavelmente seriam usados para questionar as atuais práticas curriculares” (Anderson, Herr e Nihlen, 1994, p. 13). Já no fim desta mesma década, a investigação-ação foi alvo de desdém de investigadores tradicionais e deixou de compor as pesquisas educacionais e das ciências sociais, em geral. Apesar deste desinteresse perdurar até aos anos 60, esta metodologia nunca desapareceu por completo (Diniz-Pereira, 2011). Mas foi ainda na década de 60 que, através do trabalho de Lawrence Stenhouse e do movimento dos professores pesquisadores, ambos na Inglaterra, a investigação se encaminha a uma posição de destaque, inseridas nas escolas e financiada pelo Estado.

Na década de 70, momento marcado por diversas mobilizações sociais, esta metodologia começa a se destacar e começou a moldar-se para a forma como é utilizada nos dias atuais. Este impulso se entretece ao neomarxismo e à ingerência da teoria crítica do filósofo Jurgen Habermas, a qual contempla o Homem como um ser ativo e responsável pelo seu sentido próprio (Merlino *et al*., 2009). Dessas considerações, "é a ação prática, planificada, sistematicamente analisada em grupo e refletindo sobre o mais conveniente, em cada caso, o que permitirá melhorar sua situação, sair da alienação e se emancipar" (p. 61). A perspectiva teórica passa a enfrentar a realidade com maior intensidade, maior atividade social, maior conexão do real pela eminência da praxis, maior envolvimento e reflexão crítica, destinado a transformar, formar-se capaz de amparar diversos investigadores das ciências sociais em geral e da educação em particular (Stenhouse, 1983). Esse delineamento permite um trânsito de conhecimento pela reflexão crítica e operacionalização de prática, fomentando o surgimento de possíveis teorias. Na tentativa de melhorias da prática é preciso levar em consideração concomitantemente os processos e os produtos. Segundo Elliot (2005), a qualidade dos resultados deve ser julgada de acordo com a qualidade dos processos e vice-versa. Esta reflexão simultânea entre produtos e processos, cláusula da investigação-ação, também compõe concretamente o que Schön denomina de prática reflexiva. É preciso ter em atenção o risco em considerar reflexão ou auto-avaliação como sinónimos de investigação, o que favorece uma interpretação da metodologia como um conjunto de procedimentos e técnicas padronizadas ao invés de uma série de ideias e princípios dinâmico que embasa a busca da compreensão interna ao processo pedagógico" (Elliot, 2005).

Nos anos 90, a investigação-ação desperta mais interessados, ao mesmo tempo que se destacam as pedagogias que germinam "a criatividade, o pensamento crítico e o *aprender a aprender*" (Castro, 2012). A qualidade de introduzir e potenciar processos de mudança têm dado grande notoriedade e utilidade à investigação-ação na esfera educativa. Este destaque tem incidido em diversos ramos educacionais, nomeadamente, formação de adultos, alfabetização e programas de divulgação cultural como as iniciativas de Paulo Freire (Diniz-Pereira, 2011; Merlino *et al*., 2009; Herandez Sampieri *et al*., 2014) como um legado (Herr & Anderson, 2015), além de outros ramos não necessariamente educacionais, como “inserção comunitária, determinação e priorização de problemas, caracterização de potencialidades para a solução de problemas, capacitação comunitária, estruturação de projectos operativos, processos de seguimentos e devolução” (p. 62).

No fim do século XX, já era possível caracterizar diversas utilidades incidências de investigação-ação, ao longo do século, em diferentes campos de aplicação: na administração, no desenvolvimento comunitário, na mudança organizacional, no ensino, na política, na conscientização, no empoderamento, no desenvolvimento nacional, na agricultura, em negócios bancários, na saúde e no avanço tecnológico (Tripp, 2005; Merlino, 2009).

Para Kemmis e Wilkinson (2011), uma investigação-ação participativa, para além da qualidade de espiral autorreflexiva na qual é predominantemente reconhecida, inclui seis características fundamentais. Esta tem que ser: um processo social; participativa; prática e colaborativa; emancipatória; crítica e recursiva (reflexiva, dialética).

A participação docente em investigações-ação em contexto de sala de aula favorece diversos benefícios ao próprio professor, como o aprimoramento das próprias competências profissionais, a capacidade de criar conhecimentos curriculares e de direcionar a ação educativa (Selva, 2010), passando “de eternos intermediários entre o especialista curricular e os estudantes para converter-se em verdadeiros agentes de inovação, de elevada credibilidade entre seus colegas” (p. 141). Desta forma, testemunham as palavras de Stenhouse (1985): “somente o professor pode mudar o professor” (p. 51).

III.3.1. Conceito e características

Aceitando Lewin como o *pai* da nomenclatura desta metodologia de investigação, consideraremos sua definição:

> A investigação-ação[58] é um tipo de questionamento introspectivo coletivo feito pelos próprios participantes num determinado momento na intenção de aperfeiçoar a

[58] Também tratada por *ação-investigação*, *investigação na e/ou para a ação*, *pesquisa-ação* entre outros (Almeida, 2001). Relativamente à nomenclatura *investigação na e/ou para a ação*, Esteves (1986) separa-a em duas partes: na *investigação-para-a-ação* é acarretada por alguém que necessita do conhecimento de um problema para providenciar a solução; na *investigação-na/pela-ação* visam a produção de conhecimento (objectivos de investigação), a promoção de mudanças (objetivo de inovação) e a formação de competências nos participantes (objetivo da formação).

racionalidade e a justiça de um contexto, e cuja intenção também é aprimorar o conhecimento desta prática e sobre os contextos nos quais a ação ocorre (Lewin, 1946; Selva, 2010; León & Montero, 2015; Herandez Sampieri *et al*. 2014; Diniz-Pereira, 2011; Kemmis & McTaggart, 1992).

Passados muitos anos de emergência da investigação-ação, é possível encontrar diversas definições de investigação-ação, com pequenas variações relativas ao foco de incidência do estudo. O importante é que todas estas definições primem pelo carácter fundamental de exploração reflexiva impresso pelo investigador na sua prática, “contribuindo dessa forma não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática” (Coutinho *et al*., 2009, p. 360). Para Almeida (2001), integrar a produção e o uso imediato ou concomitante do saber, cria uma relação entre a investigação “pura” e as regras de ação imediata. Esta característica se apoia em interpretação e circularidades complexas.

Há uma diversidade de técnicas variantes da investigação-ação enquanto metodologia de investigação educativa, aproximadas pela característica fundamental de reflexão sobre ação durante todo o processo, a interação ativa entre pesquisador e pesquisados (Flick, 2007), de modo a possibilitar a aquisição ou aumento do conhecimento de todos os envolvidos (Amado, 2014). Nela a pergunta de investigação é sobre um ou mais problemas ou situações de um grupo, e com ela espera-se obter um diagnóstico e categorias sobre os motivos problematizadores e suas soluções (Herandez Sampieri *et al*., 2014). Esta abordagem metodológica é a que mais se aproxima da prática do professor enquanto investigador (Latorre, 2003), e enaltece esta prática enquanto um conceito de reflexão (Coutinho *et al*., 2009).

Alguns autores consideram a investigação-ação como uma das modalidades da investigação qualitativa devido a analogias entre suas estratégias (Coutinho 2005), contudo algumas das técnicas quantitativas também são úteis se utilizadas de forma complementar, o que leva outros autores a considerarem-na como desenhos mistos (Herandez Sampieri *et al*., 2014).

Um dos desenhos básicos da investigação-ação é a investigação-ação participativa[59] (Kemmis & Wilkinson, 2011; McMillan & Schumacher, 2005; Herandez Sampieri *et al*., 2014; Amado, 2014; Merlino *et al*., 2009; León & Montero, 2015). Nesta variante[60] os participantes atuam em parceria com o investigador, interagindo "da abordagem até a elaboração do relatório" (Herandez Sampieri *et al*., 2014, p. 501), inclusive com os dados. Até mesmo a identificação da problemática ocorre em conjunto com o investigador. Normalmente, o foco principal da investigação-ação participativa está "tanto no processo como nos resultados de uma mudança de estratégia, como um programa de desenvolvimento pessoal" (McMillan & Schumacher, 2005, p. 25). Os participantes deixam de ser apenas objetos a serem pesquisados e protagoniza a transformação da própria realidade, rompendo-se assim com a dicotomia sujeito-objeto de investigação, compondo uma unidade de investigação integrada com o investigador, o qual assume o papel de facilitador, agente de mudança (Amado, 2014; Bernal, 2010). Para Cano Flores (1997), a investigação se desenvolve como um processo plenamente educativo de autoformação e autoconhecimento da realidade.

III.3.2. Sujeito-objeto de investigação

Para Fonseca (2002, p. 35), "o objeto da pesquisa-ação é uma situação social situada em conjunto e não um conjunto de variáveis isoladas que se poderiam analisar independentemente do resto". Suárez Pazos (2002) completa dizendo que esta situação social é problemática ou, em todo caso, necessitada de melhorias. Como nas investigações-ação participativas o enfoque difere do tradicional pela interação dos participantes com os especialistas durante a investigação, rompe-se então com a dicotomia sujeito-objeto de investigação (Bernal, 2010). De acordo com o autor, tem-se, por um lado os

> especialistas investigadores, os quais cumprem o papel de facilitadores ou agentes de mudança" e por outro a "comunidade ou grupo onde se realiza a investigação, os quais serão os próprios gestores do projeto investigativo e, portanto, protagonistas da transformação de sua própria realidade e construtores de seu projeto de vida (p. 61).

[59] Também chamada de *investigação-ação colaborativa* ou *investigação-ação cooperativa*.
[60] Alguns autores consideram esta variação uma redundância uma vez a investigação-ação por si só já mantêm um alto grau de participação dos pesquisados (Tripp, 2005).

Uma vez que o ensino transmissivo é, de uma forma geral, abstracto e carenciado de contexto é uma situação problemática propensa a melhoras nomeadamente por uma resposta prática, tivemos o desenvolvimento da ação de formação, que propôs o ensino de simetrias no 1º CEB através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais, como sujeito-objeto da nossa própria investigação. Os professores envolvidos foram, juntamente com o investigador, autores das etapas que a constituíram.

III.3.3. Os atores

Em contexto de sala de aula e de formação de professores, o professor ou formador assume uma postura de guia do estudo, um mediador explorador do cenário em voga, em busca de compreensão e solução plausível para um problema detectado. A participação do investigador no processo deve ser planeada na situação problemática a ser investigada (Fonseca, 2002), onde o investigador deixa de lado o papel de mero observador e participa diretamente, tal como os seus pares. Esta atitude fornece ao investigador argumentos mais substanciais para uma análise reflexiva da pesquisa como um todo.

Considerando como meta principal solucionar “um problema concreto em um lugar específico, não é essencial um controle rigoroso da investigação” (McMillan & Schumacher, 2005, p. 25). Relativamente à formação de professores, formador e formandos cooperam como investigadores ativos no processo em busca de um produto o qual pode ser redefinido ao longo do processo.

Bernal (2010) aponta que a investigação-ação participativa tem revestido cada vez mais a comunidade científica das ciências sociais dos países em desenvolvimento, motivado pelo reconhecimento da “importância da participação comunitária e das pessoas em seus próprios processos de desenvolvimento” (p. 61).

III.3.4. Finalidade da Investigação-Ação

Antes mesmo de gerar conhecimentos, a principal finalidade da investigação-ação é compreender e solucionar problemas específicos e alcançar melhorias na prática consoante ao planeamento (Herandez Sampieri *et al*., 2014). A partir deste lema, a produção e utilização do conhecimento se rende a esta meta principal, de forma a estar condicionada por ela. Este foco na prática desnuda a realidade e suas necessidades intrínsecas. O desenvolvimento dos processos inerentes não pode ser simplificado por meio de abstrações teóricas. Estas se submetem a sabedoria prática fundamentada de experiências reflexivas de casos concretos (Elliot, 2003). Sandín Esteban (2003) destaca que a investigação-ação também serve para que os participantes reconheçam suas funções no desenvolvimento da transformação.

Destacando as diferenças semânticas entres *finalidade* e *fim*, a investigação não termina na produção de conhecimento, mas "pretende atuar nas realidades sociais, transformando-as desde o protagonismo dos atores" (Selva, 2010, p. 138). Para Montecinos e Gallardo (2011) a melhoria pessoal é uma condição favorecida pelo compromisso coletivo na abordagem de uma problemática comum, e não um objetivo específico da investigação-ação. Segundo Guerra (1995), a aquisição dos dados ou a evidência de fatos de forma única e exclusiva não é a principal incumbência, mas sim o debate que se promove nos agentes sociais e entre seus componentes, isto é, o fluxo permanente entre reflexão e ação, um olhar pragmático do contexto social, onde o primordial é o diálogo constante com a realidade para interceder em sua transformação.

Em relação à investigação-ação participativa, Bernal (2010) considera que esta tem por finalidade principal propiciar ao "sujeito da investigação ser autogestor do processo de autoconhecimento e transformação em si mesmo" (p. 62), de forma a dinamizar a capacidade dos participantes a fim de que este modifique sua prática autónoma, consciente, reflexiva e criticamente.

III.3.5. Desenvolvimento de um processo de Investigação-Ação

Quatro etapas são essenciais nos desenhos de investigação-ação (León & Montero, 2015; Pereda, Prada, & Actis, 2003; Lewin, 1946; Coutinho *et al*., 2009; Herandez Sampieri *et al*., 2014):

- **1ª etapa – Reflexão Inicial:** identificar, evidenciar e diagnosticar o problema de investigação. Nesta fase se determina a preocupação sobre a temática a ser investigada. Tal preocupação não se dá pelo reconhecimento de problemas teóricos de interesse do investigador, mas de problemas cotidianos enfrentados pelos investigados, participantes da investigação e cujas resoluções devam emanar de soluções práticas (Selva, 2010).

- **2ª etapa – Planificação:** elaborar um plano para resolver o problema ou iniciar a mudança. Para Selva (2010) o plano geral deve ser flexível "para que possa incorporar aspectos não previstos no transcurso da investigação" (p. 139). Ele também deve ser realista, considerando certas conjecturas de dificuldades.
- **3ª etapa – Ação:** implementar o plano criado e avaliar os resultados obtidos. É o momento de por a ação em prática. Esta etapa, como ocorre muitas vezes em investigações-ação e a caracteriza, é repleta de incertezas e necessita decisões imediatas para se adequar a um desejo comum do grupo. Mesmo assim, esta ação é "mediada, controlada, fundamentada e informada criticamente" (Selva, 2010, p. 139). Esta etapa pode alterar as opções de recolha de dados previamente planejadas.
- **4ª etapa - Retroalimentação:** retroalimentar, levando a um novo diagnóstico e a uma nova espiral de reflexão e ação. A auto-reflexão aclara a situação problemática e também deve acontecer democraticamente em favor de todos, na busca de soluções plausíveis. Corroborando com Selva (2010, p. 139), "é o momento de analisar, interpretar e tirar conclusões".

É fulcral que essas etapas, componentes do primeiro ciclo, ocorram quantas vezes forem necessárias até que se resolvam os objetivos e proporcionem mudanças ou melhorias convincentes (Latorre, 2003; Herandez Sampieri *et al*., 2014). Cada um desses conjuntos de procedimentos cíclicos origina a um conjunto de procedimentos também cíclico, compondo novas espirais de ação reflexiva (Coutinho *et al*., 2009).

Kemmis e Wilkinson (2011) não concordam com as afirmações da organização dos processos em espiral de ciclos autocontidos. Para estes autores, "esses estágios sobrepõem-se e os planos iniciais rapidamente se tornam obsoletos à luz do aprendizado a partir da experiência" (p. 32). Não é fundamental que os participantes sigam fielmente os passos, mas sim que alcancem os resultados previstos.

III.3.6. Alguns modelos de Investigação-Ação

III.3.6.1. Modelo de Kurt Lewin: ciclos de ação reflexiva (Lewin, 1946)

Apresentaremos a seguir os passos previstos para o desenvolvimento de uma investigação-ação de acordo com Lewin (1946).

O ponto de partida para um planeamento, em geral, é a fixação de um determinado objetivo, embora seja comum não ter plena clareza da limitação deste objetivo nem mesmo como cumpri-lo. Assim, o primeiro passo é averiguar este objetivo prévio através dos meios de que se dispõe, o que comumente demanda do aumento de informações. Feito isto, parte-se para o segundo passo o qual consiste na elaboração de um plano global para atingir o objetivo e a preparação para o primeiro passo da ação. É comum que, neste momento, o objetivo inicial já tenha sofrido alguma alteração. Em seguida, se dedica à realização do primeiro passo do plano global. Nesta etapa é possível que se necessite de novas questões com a meta de se obter mais informações. Quatro funções estão atreladas à aquisição destas informações:

- deve avaliar a ação, revelar se alcançou o desejado;
- oportunizar a aprendizagem – novas percepções – aos planificadores;
- embasar a planificação seguinte;
- embasar alterações no plano global.

Adiante, a próxima etapa (terceiro passo) compõe-se novamente de ações de planificação, execução e reconhecimento ou recolha de mais informações. O objetivo é avaliar os resultados oferecidos com o segundo passo e, se necessário, alterar novamente o plano global. Neste traçado composto de ação e reflexão crítica os ciclos posteriores aperfeiçoam os métodos, os dados e a interpretação de acordo com o conhecimento adquirido no ciclo anterior (Dick, 2006). A seguir (Figura 57), apresentamos o modelo de investigação de Kurt Lewin (1946) interpretado por Stephen Kemmis (Elliot, 1993).

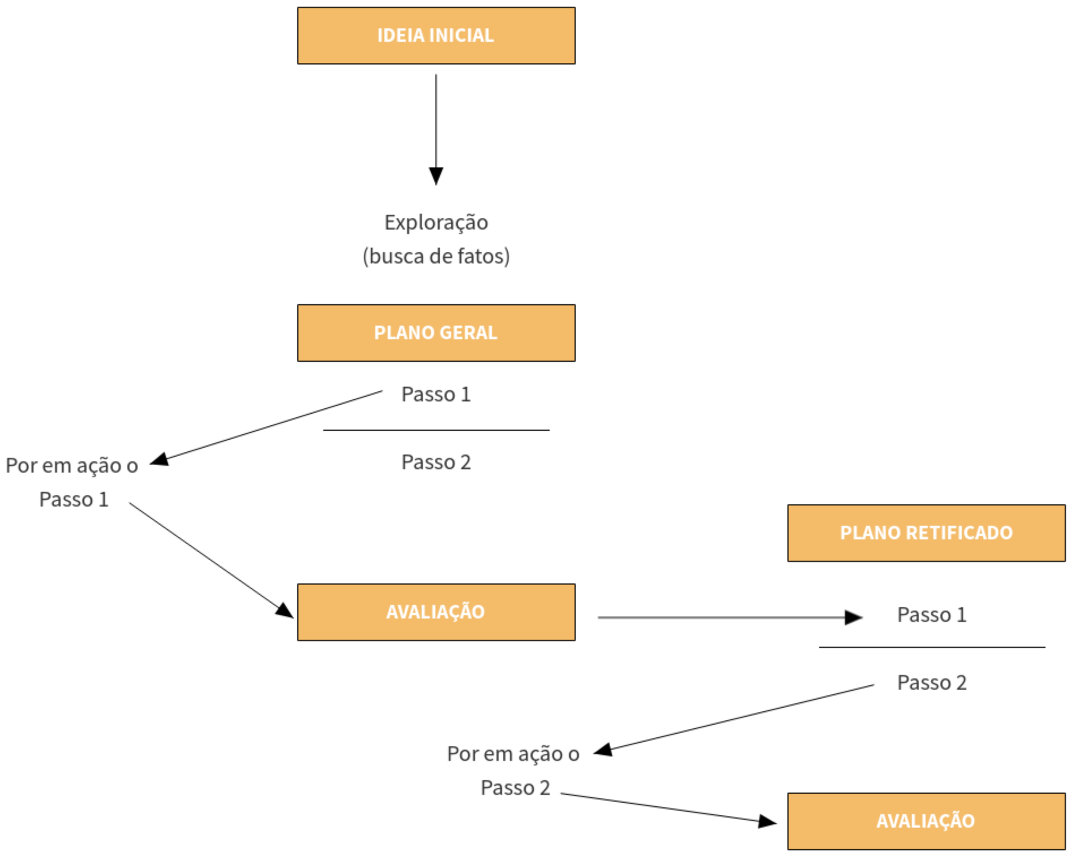


Figura 57: Modelo de Lewin (Castro, 2012)

Lewin (1946) destaca a importância de perceber esta ação como um todo, de forma ampla, como um observador externo. Em alusão, para ilustrar tal indicação, o autor utiliza o exemplo fictício de um barco navegando. De repente o capitão nota que o barco navega para a direita mais do que deveria e, providencialmente, gira o timão para a esquerda. O capitão tem evidências que sua atitude resultou e decide ir comer. Enquanto isso, o barco passa a navegar em torno de um mesmo ponto. Os demais tripulantes não perceberão o que está ocorrendo. Este é o risco em limitar as observações. Nas áreas sociais, segundo Lewin (1946) a produção académica de novas perspectivas científicas deve ser avaliada externamente de modo a verificar seu real impacto no que se presta. Para além da produção, é fundamental que sejam obtidas informações capazes de aferir resultados.

III.3.6.2. Modelo de Elliot: diagrama de fluxo (Elliot, 1993)

Segundo o próprio Elliot (1993), o seu modelo é uma espécie de modelo revisado de Lewin. Elliot (1993) acredita que o modelo de Lewin é um excelente ponto de partida para perceber em que consiste a investigação-ação, porém deixa margem para utilizadores considerarem a possibilidade de se fixar previamente uma ideia geral de que o reconhecimento consiste apenas em perceber características e que a implementação é um processo linear. Elliot (1993, p. 89) destaca a necessidade em considerar os seguintes aspectos:

- é possível modificar a ideia geral;
- o reconhecimento inclui a análise e o descobrimento dos fatos, reiterando-se ao longo da espiral de atividades, sem circunscrever-se ao início do processo;
- a implementação de uma fase de ação nem sempre é fácil, não devendo proceder a avaliar os efeitos de uma ação até que se haja comprovado em que medida se há implementado.

É a partir destas ressalvas que Elliot (1993) considera a Figura 58.

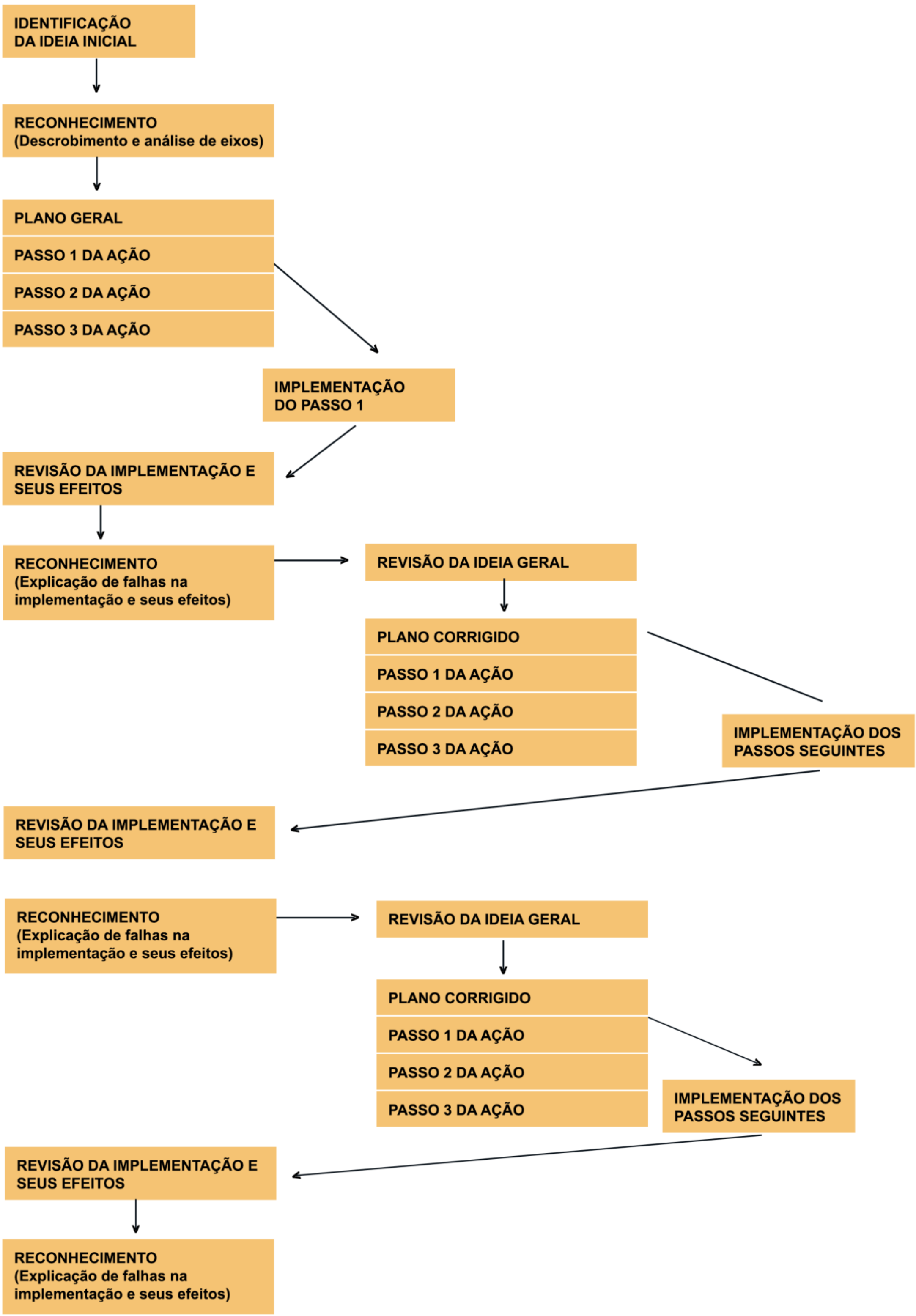


Figura 58: Modelo de Elliot (1993, p. 81)

III.3.6.3. Modelo de Kemmís: espirais de ação (Kemmis & McTaggart, 1988)

Com base no modelo de Lewin, porém voltado às práticas educativas, Stephen Kemmis considera os quatro pilares para a investigação-ação: o plano, a ação, a observação e a reflexão. Estes devem ter um carácter colaborativo e são introduzidos no grupo pesquisado através da identificação de um problema comum a ser abordado pela investigação. Kemmis e McTaggart (1988, p. 15) apontam que, para realizar a investigação-ação, todos os participantes promovem:

- o desenvolvimento de um plano de ação criticamente informada a fim de melhorar o que já está em andamento;
- uma influência para que o plano se desenvolva;
- a observância das consequências da ação criticamente informada no contexto em que esta ocorre;
- a reflexão em torno desses efeitos, fundamentando nova planificação, uma ação futura criticamente informada e assim por diante, através de ciclos consecutivos.

É no modelo de Kemmis (Figura 59) que o carácter em espiral fica explícito.

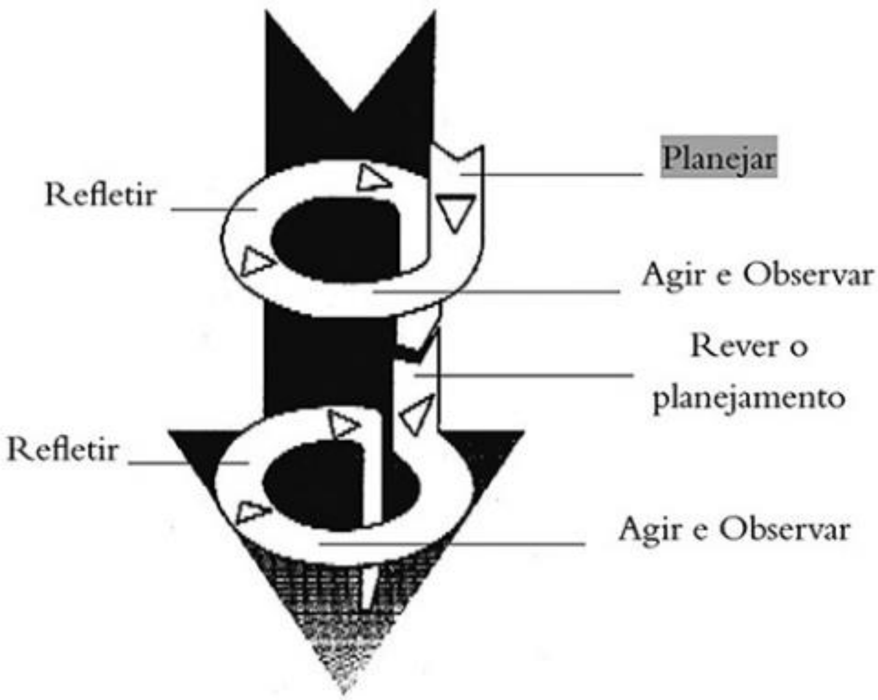


Figura 59: Modelo de Kemmis (Kemmis & Wilkinson, 2011, p. 32)

III.3.6.4. Modelo de Whitehead (1989)

Crítico às propostas de Lewin e Kemmis, Whitehead (1989) considerou que esses autores se afastaram da realidade educativa, promovendo mais “um exercício académico do que um modelo que permita melhorar a relação entre teoria educativa e autodesenvolvimento profissional” (p. 38).

Whitehead (1989) diz que podemos planejar o desenvolvimento de professores / pesquisadores se direcionarmos nossos olhares para onde a teoria educacional está sendo produzida. Então, considerando que a pergunta desencadeadora para uma abordagem pela investigação-ação é “Como eu posso melhorar minha prática aqui?”, inicia-se o primeiro ciclo com as seguintes etapas (Whitehead, 1989):

- 1ª - Experimentar problemas quando valores educacionais são negados na prática.
- 2ª – Imaginar maneiras de superar problemas.
- 3ª – Ação de uma solução escolhida.
- 4ª – Avaliação dos resultados das ações.
- 5ª – Modificação dos problemas, ideias e ações à luz das avaliações...

e o ciclo continua (Figura 60).

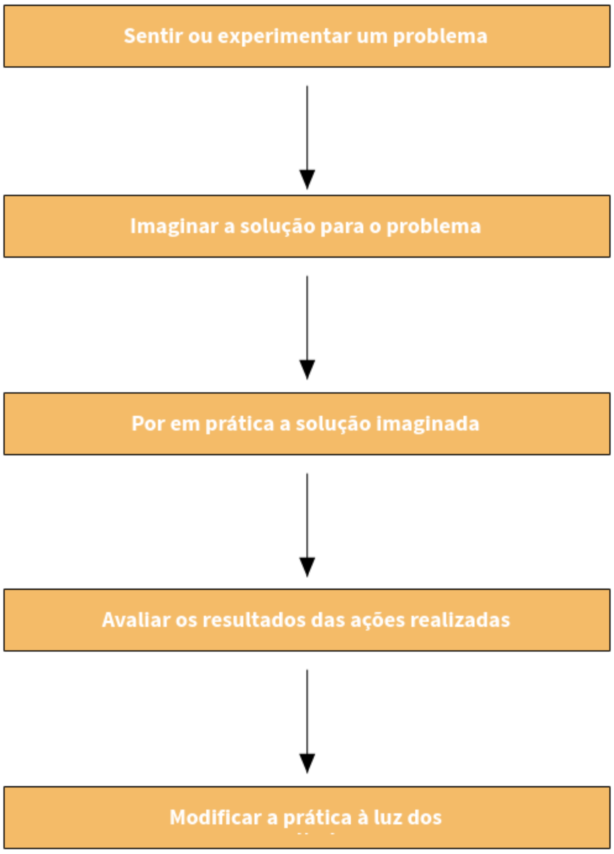


Figura 60: Modelo de Whitehead (1989)

Para Whitehead (1989), esta é a forma mais próxima da investigação-ação em sua origem, e se diferencia de outras abordagens pelo uso do "eu" como um contraponto latente na condução de uma reivindicação ao conhecimento educacional.

III.3.6.5. Modelo de Latorre (2003)

Latorre (2003) basicamente se inspira nos autores citados anteriormente e publica um esquema de implementação de investigação-ação. Para este autor, o potencial pleno de melhora e mudança não é alcançado apenas por um ciclo de investigação-ação e, por isso, pode demorar mais tempo de acordo com a postura dos participantes, da frequência das relações entre professor e alunos ou da capacidade docente em analisar a situação problemática em que a investigação objetiva solucionar. Assim Latorre (2003) justifica a real necessidade de mais de um ciclo e apresenta o esquema da Figura 61.

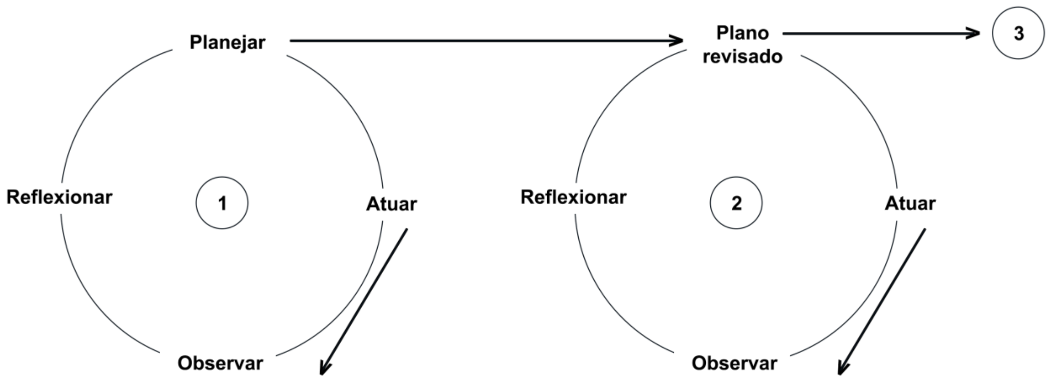


Figura 61: Modelo de Latorre (Latorre, 2003, p. 32)

III.3.6.6. Modelo de Mcniff e Whitehead (2006)

Em 2011, McNiff e Whitehead (2011) mantém viva uma versão quase nada modificada de um esquema feito por eles mesmos, em anos anteriores, ao qual batizam de "um ciclo de ação-reflexão" (p. 9) (Figura 62).

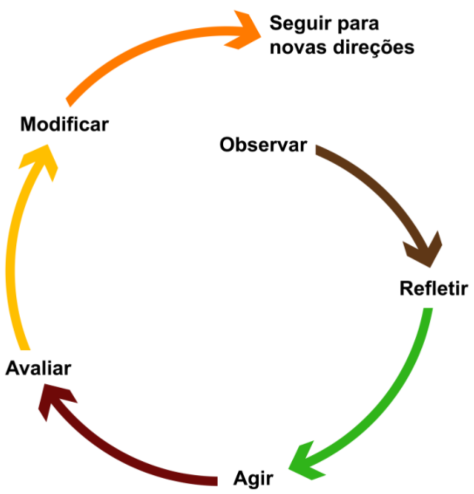


Figura 62: Modelo de Mcniff e Whitehead (McNiff & Whitehead, 2011, p. 9)

III.3.6.7. Modelo de Mckay e Marshall (2007)

Judy McKay e Peter Marshall apresentam um esquema de investigação em 2001 numa versão plana como a apresentada a seguir (Figura 63), adaptado por Costa, Politano & Pereira (2014).

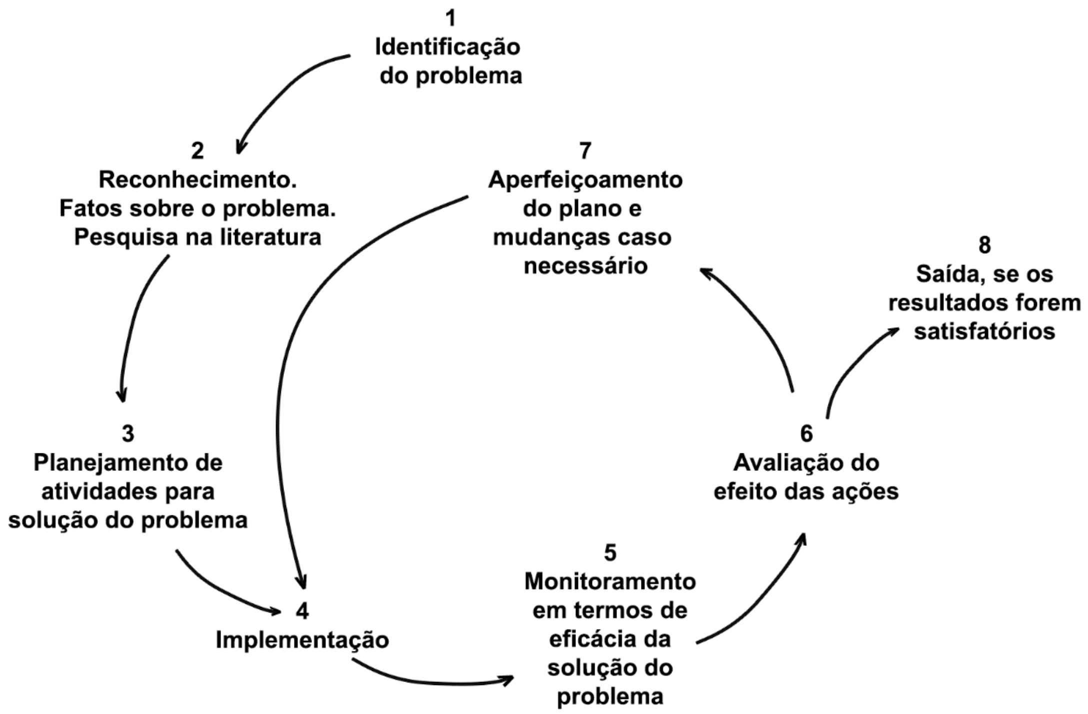
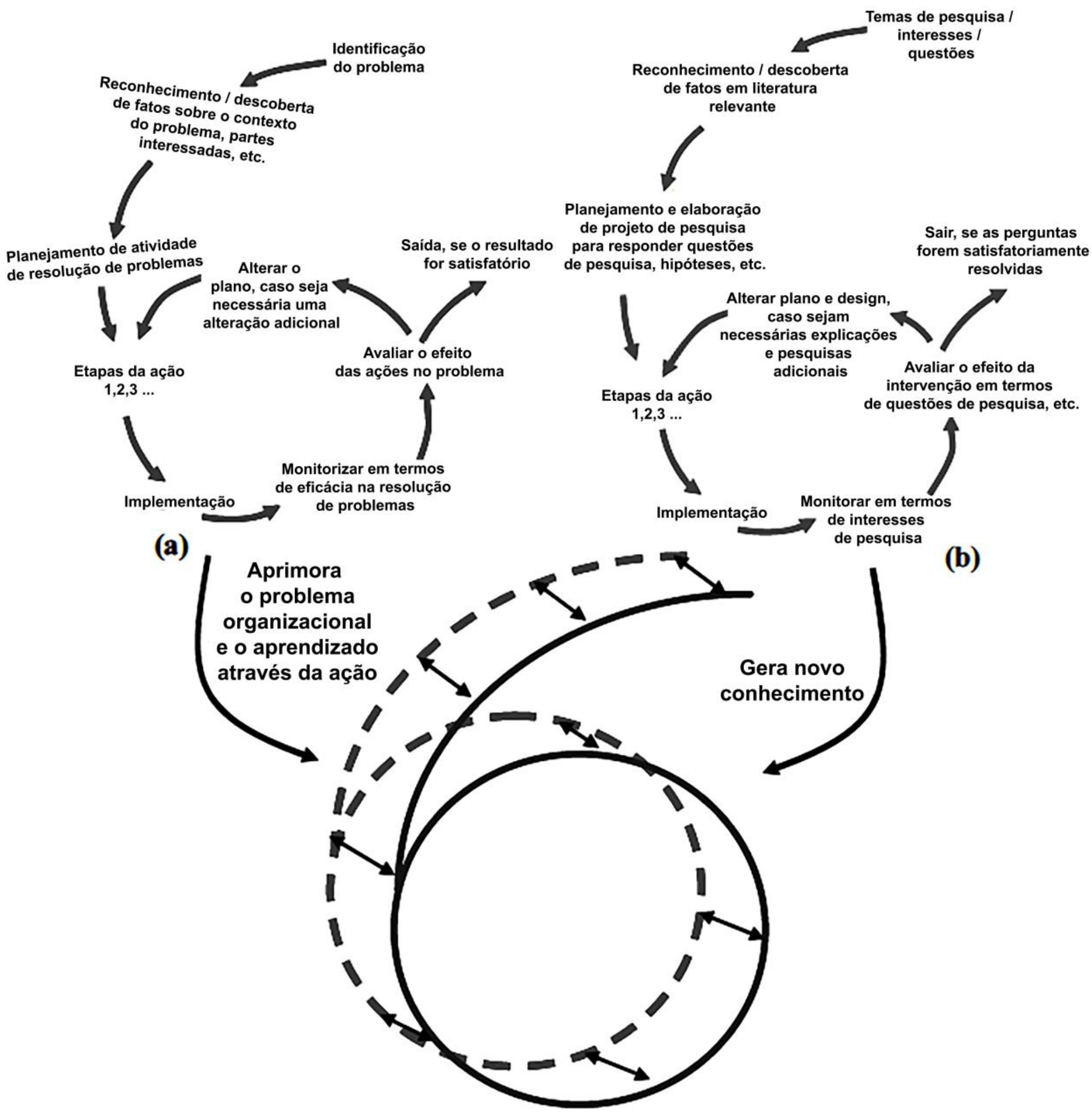


Figura 63: Modelo de Mckay e Marshall (2001, adaptado por Costa, Politano & Pereira, 2014).

A partir deste esquema McKay & Marshall (2001) incrementam-no considerando que o sucesso de projetos de investigação-ação necessitam ser desenvolvidos por dois conjuntos independentes de atividades (Figura 64), onde uma esteja focada na resolução de problemas (parte (a)) e a outra no interesse da pesquisa (parte (b)).



Figuras 64: partes (a) – Foco na resolução de problemas; parte (b) – Foco no interesse da pesquisa (McKay & Marshall, 2006).

Para os autores, o maior desafio da investigação-ação é equilibrar essas duas atividades: resolução de problemas e o interesse da pesquisa. Privilegiar extremamente a primeira sucumbe a segunda, assemelhando a investigação-ação da pesquisa a “uma atividade de consultoria que se reflete após a solução do problema para produzir resultados de pesquisa que não possuem fundamentação adequada e profundidade” (Marshall *et al*., 2010, p. 77). Ou seja, a investigação deixa de ser uma pesquisa em profundidade e limita-se a uma prática reflexiva. Do contrário, ter em privilégio extremo a segunda pode descurar uma solução real e longínqua para o problema prático em questão, perdendo o sentindo da pesquisa e o compromisso ético do investigador, e tendo em risco à condução a “conclusões superficiais e possivelmente enganosas" (p. 78). Isto posto, o equilíbrio destina-se a "resolver um problema de interesse e importância social e organizacional real e gerar conhecimentos novos e válidos através de atividades de pesquisa aceitáveis e rigorosas" (p. 78).

Seguramente, este esquema é o que mais se aproxima desta investigação, uma vez a que intervenção proposta, a qual é uma investigação-ação, ocorre enquanto fase destinada à *ação da investigação*, ou seja, é uma investigação-ação (intervenção através da ação de formação) em uma das fases (ação) de outra investigação-ação (a pesquisa como um todo). Mais adiante, em Plano de Trabalho (Capítulo IV), detalharemos através de esquemas que representam nossa investigação e suas fases.

III.3.7. Paradigmas e validade da Investigação-Ação

Em ampla pesquisa, Tripp (2005) afirma ter tido acesso a milhares de investigações-ação ditas bem-sucedidas e não encontrar algo que "avaliasse o processo em termos mais amplos do que sua utilização num programa ou projecto particular" (p. 461). Mesmo assim, o autor se convence de que existem projectos de investigação-ação que fracassaram, inclusive dele próprio por insuficiência de ciclos ou características do contexto e não pelo ciclo ou pela pesquisa. Para o próprio implementador de uma investigação-ação é difícil perceber algum erro sem a necessidade de alguma de avaliação externa. Soma-se a isso a personalidade intrínseca na qual o implementador se vale ao longo da pesquisa (Tripp, 2005). Mesmo com esta personalidade, para que a investigação-ação produza conceito é preciso se comprometer com generalização de resultados obtidos. A ampliação da divulgação formal, por meios científicos, e em contexto escolar pode ajudar nesta busca de novos adeptos da investigação-ação, e, consequentemente, maior aproximação de generalizar conceitos (Amado & Cardoso, 2014). Outro fator a se considerar é que, apesar de os adeptos à investigação-ação considerarem que os instrumentos de pesquisa não são o único nem o mais importante e que existem outras exigências epistemológicas como, por exemplo, o conhecimento interativo intrínseco, do ponto de vista técnico-científico ela é alvo de críticas comumente dirigidas a algumas investigações qualitativas, como a debilidade quanto a originalidade e a generalização, não cabendo a outros contextos

(Selva, 2010). Amado e Cardoso (2014) também destacam a possibilidade de distorção dos dados causada pela participação direta do investigador.

Este paradigma é tão mais amplo que Bernal (2010) destaca ser comum considerarem, para estudos do campo social, que não exista método de validade universal adequado em resolver os problemas de investigação. Porém, como bem defende Selva (2010), "a validade interna da investigação-ação se garante pela aplicação de processo holísticos da investigação, a profundidade e a complexidade da informação, pelas várias fontes de informação, e, sobretudo, pelas transformações produzidas, tanto em ideias, como em práticas ou em contextos" (p. 140).

No caso da variante de investigação-ação utilizada na presente pesquisa, a investigação-ação participativa, valemo-nos do privilégio de ser reconhecida como uma forma genuína onde seu valor educativo se insere na esfera da inovação, através da transdisciplinaridade, e do aprimoramento de competências docentes (Selva, 2010). Com a investigação-ação participativa, a validação do conhecimento é garantida pela capacidade deste próprio conhecimento nortear a transformação dos participantes e possibilita o aprimoramento da qualidade de vida (Bernal, 2010).

Especificadamente sobre o uso da investigação-ação na formação inicial de professores, Zeichner (2011) reconhece, fulcrado em uma vasta busca na literatura, que o aprendizado e o desenvolvimento do professor figuram entre o maior objetivo da pesquisa, idiossincraticamente se essa maior reflexão docente e o conhecimento por ela gerado auxiliam o objetivo de uma educação de qualidade para todos. Segundo o autor, esta percepção não determina um descaso dos formadores de professores pelas melhorias educativas, mas sim a ausência da intenção emancipatória da investigação-ação. Isso retrata a o infrequente "impulso democrático e político historicamente associado à pesquisa-ação" (p. 66).

SEGUNDA PARTE: ESTUDOS EMPÍRICOS

Posicionamento epistemológico

Nos embasamos numa visão epistemológica na qual abarca um enfoque interpretativo, ou seja, onde se contextualizem os fatos (Rossetto & Ferraretto, 2016), devidamente complementada por um enfoque sociocrítico que visa "superar o reducionismo e o conservadorismo" (Alvarado & García, 2008, p. 189) de modo a inserir a "ideologia de forma explícita e a autorreflexão crítica nos processos do conhecimento (…) partindo a ação-reflexão dos integrantes da comunidade" (p. 189), em busca da solução de um problema. Estes autores completam que "o conhecimento se constrói sempre por interesses que partem das necessidades dos grupos; busca a autonomia racional e libertadora do ser humano; e se consegue mediante à capacitação dos sujeitos para a participação e transformação social" (p. 190).

Somado ao apresentado anteriormente, concordamos com a pertinência de nos valermos de um planeamento transdisciplinar, o qual abarca características de caráter participativo e colaborativo. Cabrera (2016, p. 63) destaca alguns aspectos, mais específicos para a docência universitária, deste enfoque o qual tomamos a liberdade coerente de expandir adequadamente à Formação Contínua direcionada a docentes do ensino básico. Para a autora, nesta perspectiva cabe ao docente:

- atuar como facilitador de processo de aprendizagem, sendo flexível na utilização dos recursos disponíveis;
- adaptar-se à organização do tempo e do espaço e do público alvo;
- ter em atenção às próprias motivações, às situações que emanam do contexto e à contingência social, política e cultural;
- favorecer um clima de respeito, participação e colaboração, tanto dentro da sala de aula como nos projetos e trabalhos fora dela;
- avaliar as atitudes, a participação, as habilidades e competências, para além dos conteúdos;
- adequar as próprias avaliações com distintas estratégias, num processo permanente de retroalimentação.

Há ainda em se considerar o distanciamento existente entre o ensino teórico e o ensino prático. Particularmente em relação ao Brasil, Mathias (2013) relata que ainda há uma disjunção entre as práticas curriculares que abarcam saberes específicos e saberes pedagógicos nos cursos de formação de professores. Há uma determinada incompatibilidade que separa o conteúdo oferecido nesses cursos de formação de professores de matemática e a real necessidade do que será utilizado por ele em sua praxis. Por consequência, o fracasso é mútuo assim como a isenção da culpa. Os discursos de isenção das universidades "apenas aprofundam o abismo entre a universidade e a escola, instituições que deveriam ser parceiras próximas em nosso sistema educacional. Na universidade, sabe-se muito pouco da escola e, na escola, sabe-se muito pouco da universidade. Precisamos ser humildes para aprendermos, uns com os outros" (Mathias, 2014, p. 3).

Diante destas considerações, levamo-nos à abordagem de uma coerência metodológica através de um enfoque de investigação-ação, com a finalidade de fazer com os participantes, professores e professoras, se tornem protagonistas do ensino, almejando, assim, romper as barreiras pedagógicas no ensino da matemática. Esta opção se sustenta em duas frases bastante conhecidas até mesmo em ditos populares:

"Pratique o que você prega" (Baseado numa passagem bíblica de Mateus 23:3)

"Uma onça de ação vale mais que mil toneladas de teoria" (Mahatma Gandhi)

CAPÍTULO IV – METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Mesmo já tendo sido referido no início desta obra, na apresentação do Problema de Investigação, iniciamos este capítulo retomando os objetivos gerais de forma que a apresentação dos objetivos específicos revele a relação entre estes dois. Em seguida, apresentamos a caracterização do tipo estudo e a opção elencada para a análise dos dados recolhidos. Também revelamos o plano de trabalho, os aspectos éticos e as limitações e debilidades da investigação.

IV.1. Relação entre os objetivos gerais e os objetivos específicos da investigação

No sentido de analisar o potencial educativo dos RACP para o ensino e para a aprendizagem de simetrias, desenvolveu-se um estudo empírico que será a seguir apresentado.

São três os objetivos gerais estabelecidos para o estudo, aos quais estão associados sete objetivos específicos.

O **Objetivo Geral *I*** visa caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico (ensino e planificações e recursos) e as considerações docentes a partir destes conhecimentos.

Para o **Objetivo Geral *I*** foram formulados os seguintes obetivos específicos:

- **Objetivos Específicos *I*:**

I-i. Caracterizar o **CONHECIMENTO CIENTÍFICO PRÉVIO**, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente.

I-ii. Caracterizar o **CONHECIMENTO CURRICULAR PRÉVIO**, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente.

I-iii. Caracterizar o **CONHECIMENTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO PRÉVIO**, sobre simetrias, dos participantes da Oficina de Formação Docente, referentemente ao **ENSINO** e às **PLANIFICAÇÕES E RECURSOS**.

O **Objetivo Geral *II*** propõe-se em planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) através de uma Oficina de Formação Docente utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

Os objetivos específicos relativos ao **Objetivo Geral *II*** são os seguintes:

- **Objetivos Específicos *II*:**

II-iv. Criar colaborativamente um **BANCO DE ATIVIDADES** adequadas ao ensino de simetrias utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e uma **PLANIFICAÇÃO PERSONALIZADA** para a implementação destas atividades.

II-v. Descrever e analisar práticas docentes utilizadas nas **IMPLEMENTAÇÕES** das atividades elaboradas utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

O **Objetivo Geral *III*** visa avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente em relação ao ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

Neste contexto foram formulados os seguintes **Objetivos Específicos *III***:

III-vi. Verificar a **SATISFAÇÃO DOCENTE** e as **MELHORIAS ALCANÇADAS NA APRENDIZAGEM DOCENTE** dos conceitos de simetria abordados na Oficina de Formação Docente.

III-vii. Verificar a percepção docente em relação à **SATISFAÇÃO DISCENTE** e a **APRENDIZAGEM DISCENTE** de simetrias e a relação destas com o uso dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais no ensino.

IV.2. Caracterização do tipo de estudo

A *investigação educativa* caracteriza-se pela aplicação sistemática e escolar dos fundamentos de uma ciência comportamental para os problemas de ensinar e aprender num balizamento educativo formal e a categorização dos temas que tenham conexão direta ou indireta com tais conceitos. Este tipo de investigação agrega um valor particular ao capacitar educadores ao desenvolvimento de uma classe sólida de conhecimento que interessa a outros profissionais e disciplinas, e que garante à educação um amadurecimento e sentido de avanços tão necessários (Cohen & Lawrence, 2002).

As características de gerar informações cientificamente válidas e conhecimentos precisos enaltecem a importância da Investigação em geral e os métodos nela utilizados. Particularmente, em relação à Investigação Educativa, destacamos duas razões que motivam investigadores educativos a debaterem estes métodos e as respectivas adequações para estudar os fenômenos (Shulman, 1981, citado por McMillan & Schumacher, 2005). A primeira razão se apoia na necessidade de a Investigação Educativa ater-se a um grupo específico de observações ou fatos. Diante da abundância de possibilidades, os resultados muitas vezes tornam-se alvos de questionamentos contrários sobre a abrangência do estudo. E a segunda, considerada por Shulman como a principal, é que seu destaque se dá pelo fato de esta, em si mesma, não ser uma ciência ou uma disciplina, mas sim uma área de estudo em que os fenômenos, sucesso, pessoas, processos e instituições compõem a base para investigadores de diversos tipos. Métodos de investigação específicos de outras disciplinas podem auxiliar na busca de respostas no campo educativo.

Em suma, podemos dividir os estudos de Investigação Educativa entre os abstractos, dos quais derivam informações gerais acerca de práticas e políticas educativas frequentes, influenciando as considerações sobre educação e, por outro lado, os estudos concretos, que incidem em consequências mais imediatas nas planificações, no desenvolvimento ou na melhora de uma determinada prática (McMillan & Schumacher, 2005). É neste último perfil que esta pesquisa se enquadra.

Mesmo com algumas compatibilidades estratégicas prévias, as abordagens quantitativa e qualitativa detêm características próprias. Uma forma de especificar estes métodos de investigação origina-se na “concepção de métodos enraizados nas distintas concepções de realidade social, na maneira de conhece-la cientificamente e no uso de ferramentas metodológicas que se utiliza para analisá-la” (Bernal, 2010, p. 60).

O cerne dos métodos quantitativos está na medição de características dos fenômenos sociais, podendo este ser derivado de um marco conceitual intrínseco a determinado problema, um conjunto de postulados que expressem as relações entre as variáveis pesquisadas de forma dedutiva. Os resultados obtidos com este método geralmente são apresentados de forma generalizada e padronizada (Bernal, 2010).

Já, de acordo com Bonilla e Rodríguez (2005), o método qualitativo, ou método não tradicional, visa esclarecer situações específicas sem generalizações, não prioriza a medição e sim a qualificação e a descrição dos fenômenos sociais a partir de características decisivas percebidas pelos mesmos elementos internos à pesquisa. Investigadores qualitativos buscam a compreensão de situações sociais como um todo, considerando suas características e dinâmicas, partem de corpos teóricos aceitos pela comunidade científica, vislumbrando conceituar acerca da realidade, centrado em informações oriundas da população ou pessoas investigadas. Não se valer de procedimentos padronizados, incluir o investigador como um dos instrumentos de recolha dos dados e proporcionar uma evolução ao contexto ou ambiente com o passar do tempo são algumas das características que conferem conferem aos estudos qualitativos um caráter único, como “peças artesanais do conhecimento, feitas a mão” (Herandez Sampieri *et al*., 2014, p. 470).

O enfoque qualitativo, que, de um ponto de vista teórico, “se justifica pela reação a uma produção de dados cada vez mais precisos e mais massivos, mas também pouco relevantes para a compreensão dos problemas sociais” (Gómez, 2015, p. 13), parte à uma reação crítica a esta posição e motiva um efeito de distanciamento do enfoque quantitativo. Com os avanços das investigações esta controvérsia aos poucos dissipou-se, não pondo em superioridade uma frente a outra numa “guerra de paradígmas” (Herandez Sampieri *et al*., 2014, p. 580).

Atualmente é possível encontrar diversas pesquisas, livros e artigos académicos que utilizam ou abordam os enfoques quantitativo e qualitativo juntos – o enfoque misto ou integrado –, em todos os campos do conhecimento (Herandez Sampieri *et al*., 2014). Em estudos mistos, importa considerar a função da tendência dada e cada um dos enfoques quantitativo e qualitativo, o que confere diferentes desenhos a um estudo (Delgado, 2014) (Figura 65).

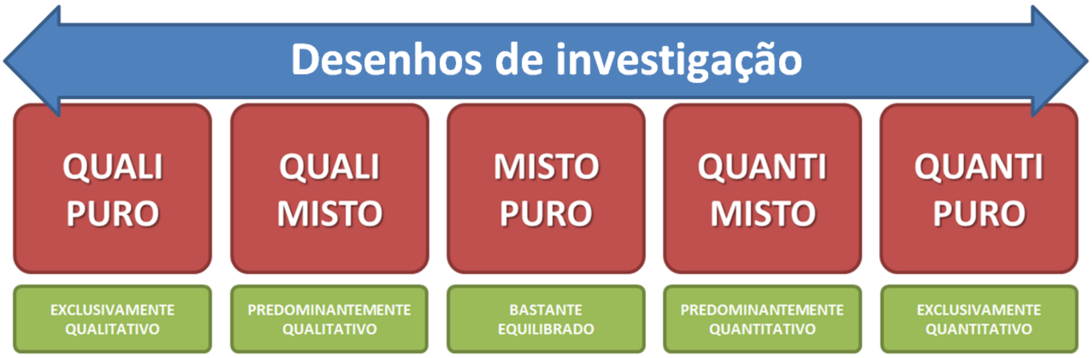


Figura 65: *Continuum* do dedenho de investigação (Delgado, 2014)

Diante das precisões estatísticas oferecida pela investigação quantitativa, da interpretatividade oriunda da investigação qualitativa, e de ambas, de forma mais ampla, emanada da investigação mista, consideraremos esta investigação numa perspectiva metodológica classificada como *qualitativa*.

Nesta investigação, o desenvolvimento da análise de dados, inclusive dos que se apresentam por frequências percentuais de respostas oferecidas pelos participantes a determinados instrumentos de recolha de dados, visou fundamentalmente a captação da realidade dos protagonistas e de suas ações, a partir de significados do sujeito em seu contexto, fomentando a interpretação dos fenômenos e suas planificações. Para Selva (2010), parte dos pressupostos que "os conceitos e explicações se constrõem socialmente pelas pessoas e tanto o conhecimento social como sua utilização estão baseados em valores, e que os fatos sociais não podem ser interpretados fora de um contexto teórico e portanto histórico" (p. 125).

A análise das funções ou as utilizações dadas aos distintos tipos de investigação oferece a compreensão de como a investigação causa avanços do conhecimento e melhorias das práticas. Essas funções podem ser classificadas como básica, aplicada e avaliativa, que diferem sobretudo nas funções especificadamente na influência sobre a tomada de decisões (McMillan & Schumacher, 2005).

De acordo com os propósitos desta pesquisa, provamos e avaliamos relações empíricas de uma prática específica em um campo determinado. O que a confere à nossa investigação a função de investigação aplicada é o fato de os conhecimentos obtidos através dela destinarem-se à prática com o objetivo de “investigar, comprovar ou rejeitar hipóteses sugeridas pelos modelos teóricos” (Rodrigues, 2007, p. 3) e alcançar “um conhecimento relevante para dar solução a um problema geral” (McMillan & Schumacher, 2005, p. 23). Desta investigação deriva-se um conhecimento proveniente de um campo concreto, onde seus efeitos podem ser notados também a longo prazo.

Por outro lado, também consideramos nossa investigação com função avaliativa. Os processos de onde provém efeitos que poderão ser notados a longo prazo ajudam na tomada de decisões imediatas. Na função avaliativa de uma investigação utiliza-se uma prática concreta, podendo esta ser um programa, um produto ou um processo, em uma determinada situação, e afere a eficiência desta prática associada a seus objetivos. Assim, a investigação-ação como uma variante da investigação avaliativa (McMillan e Schumacher, 2005), pois tem por objetivo solucionar um problema concreto em um lugar específico, com um controle flexível da investigação (Bernal, 2010).

Por não considerarmos disjuntas as características das funções aplicada e avaliativa de uma investigação, amoldamos nossa pesquisa como *aplicada-avaliativa*.

IV. 2.1. Participantes e método de escolha

Os participantes da nossa pesquisa foram selecionados através de um método de escolha não probabilístico por se adequar mais à pesquisa qualitativa e, especificamente, aos do presente estudo. Os participantes devem ser considerados informantes pela investigação qualitativa, adjetivo este que remete diretamente ao seu carácter participativo. Para Merlino (2010), a escolha dos participantes na investigação qualitativa não visa a generalização dos conhecimentos obtidos, mas sim o conhecimento em profundidade da perspectiva dos atores, das “suas vivências, sentimentos e razões” (p. 72). As características do nosso estudo não cabem privilegiar uma escolha aleatória, tampouco numerosa, e sim criteriosa e intencional (Merlino, 2010), de forma que a escolha destes participantes favoreça ao investigador a apropriação aprofundada acerca do fenómeno estudado (Vale, 2000). Inicialmente, este era o nosso propósito: escolher os participantes por conveniência. E, de certa forma, ter em conta de alguma conveniência nesta tarefa quando decidimos que os participantes fossem todos professores atuantes no primeiro ciclo da educação básica (1º CEB) de um mesmo agrupamento escolar, para que as escolas se limitassem a uma mesma região.

Escolhemos então um agrupamento escolar de Coimbra, em Portugal, devido à localização da Universidade e atuação os pesquisadores. Em setembro de 2016, numa reunião de início de ano letivo, apresentamos a proposta a todos os 42 professores do 1º CEB do agrupamento. Como dito anteriormente, é neste ponto que a escolha dos participantes desta pesquisa deixa de ser estritamente intencional e agrega a qualidade de voluntária, ou seja, seriam participantes da pesquisa todos os professores, daquele universo de 42 professores, que se interessassem pela proposta. Escolha de participantes voluntários, também conhecida por autoselecionada, são frequentes em ciências sociais e médicas (Herandez Sampieri *et al*., 2014, p. 386-387). Após este primeiro contato, 21 professores se voluntariaram e, então, marcamos encontro para dezembro do mesmo ano, a fim de apresentarmos um calendário em definitivo. Neste encontro, com os 21 professores, apresentamos a calendarização e o faseamento da OFD com todos os seus pormenores e determinamos um prazo aproximado de quinze dias para que os interessados confirmassem a sua participação por *e-mail*. Por fim, confirmamos a participação de onze professores os quais se inscreveram formalmente pelo *site* do Centro de Associação de Formação de Escolas responsável por tais ações no agrupamento em questão.

O Quadro 6 apresenta os dados socioprofissionais dos onze professores participantes da primeira sessão. Estes dados foram recolhidos através das oito perguntas da Parte I do Q1[61].

---

[61] Na próxima seção, IV.2.2., apresentamos em detalhes o questionário Q1. Este instrumento pode ser apreciado, na íntegra, no Apêndice 1.

Quadro 6: Dados socioprofissionais dos onze participantes do Q1

Professor	Idade	Género	Habilitação literária (ano de conclusão)	Vínculo profissional	Ano(s) de escolaridade em atuação (2016/2017)	Tempo (anos completos) de docência no 1º CEB	Tempo de docência no 1º CEB (no agrupamento)
A	50	M	B (1988) L (2000)	QE	3	27	4
B	37	F	L (2001)	QZP	2/3[62]	15	1
C	60	F	L (2002)	QE	Apoio Educativo	35	4
D	57	F	M (2013)	QE	3/4[62]	31	1
E	49	F	B (1988) L (2003)	QE	3	28	5
F	58	M	B (1982) L (2004)	QE	2	34	5
G	50	F	B (1987) L (2000)	QE	4	28	5
H	42	F	L (2002)	CTI	1	14	0
I	37	F	M (2015)	QZP	Apoio Educativo	14	5
J	52	F	M (2006)	QE	1/4[62]	28	1
K	55	F	B (1985) L (2006) M (2011)	QE	2	32	4

Propositalmente, omitimos a relação entre a designações dadas aos docentes no quadro anterior e a na apresentação e análise interpretativa dos dados (Capítulo V), visando preservar a identificação dos mesmos.

Logo após a segunda sessão presencial, um dos participantes (destaque em laranja na tabela anterior) teve que abandonar a formação devido a

[62] Turmas mistas, isto é, turmas compostas por alunos de distintos anos de escolaridade.

problemas de ordem pessoal. Situação parecida ocorreu com outro participante (destaque em verde na tabela anterior) que, embora não tenha abandonado por completo, mantendo presença em algumas sessões presenciais, não realizou as demandas dos trabalhos autónomos planejados. Isto posto, a maioria dos dados recolhidos, analisados e interpretados dizem respeito a nove efetivos participantes da oficina de formação de docente.

Após o término da OFD, percebemos a necessidade de aplicação de um outro instrumento de recolha de dados. Referir-nos-emos aqui a este instrumento como Teste Discente (TD), o que será mais pormenorizado mais adiante. De entre os participantes deste teste destacamos os discentes de duas turmas de dois dos professores participantes da Oficina. Uma destas turmas é considerada como turma única, por ter apenas alunos de um mesmo ano de escolaridade – neste caso, do 4º ano – e a outra como turma mista, por ter alunos de mais de um ano de escolaridade – neste caso, do 3º e do 4º anos. Considerando apenas os alunos do 4º ano, da turma única participaram dezenove alunos e da turma mista participaram dezessete alunos. Consideramos o grupo dos dezenove discentes como Grupo de Ação 1 (GA1) e o grupo dos dezessete discentes como Grupo de Ação 2 (GA2). No próximo capítulo, nos referiremos à Grupo de Ação (GA) o a união destes dois grupos, ou seja, o GA é composto por 36 discentes.

Consideramos também importante testar as mesmas atividades em outras três turmas, mistas, do mesmo agrupamento de escolas, as quais cumpriram o papel de Grupo de Controle. Novamente consideramos apenas os alunos do 4º ano pertencentes a estas três turmas. Assim, consideramos oito alunos de uma das turmas como o Grupo de Controle 1 (GC1), dez alunos de outra turma como Grupo de Controle 2 (GC2) e vinte e dois alunos da terceira turma como Grupo de Controle 3 (GC3). Analogamente à maneira como foi considerada no Grupo de Ação, também no próximo capítulo nos referiremos por Grupo de Controle (GC) e à união destes três grupos, ou seja, o GC é composto por 38 discentes. Garantidamente pela coordenação do agrupamento, os conceitos de simetria presentes no TD já tinham sido lecionados a todos os discentes do GC, porém através de uma prática não contextualizada e sem uso de recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

Ressaltamos que todos estes cinco grupos – GA1, GA2, GC1, GC2 e GC3 – foram escolhidas por conveniência com a ajuda da coordenação do agrupamento de escolas. Os dois primeiros foram escolhidos de entre as turmas cujos docentes estavam participando da oficina de formação de docente. Desta forma podemos ter a certeza que o ensino de simetrias foi promovido da forma em que pretendíamos. Em particular, as duas turmas escolhidas foram-no devido ao maior número de alunos de 4º ano e ao entusiasmo demonstrado pelos docentes destas turmas. Em relação à escolha dos grupos de controle, a conveniência deu-se na escolha de turmas em que houvesse maior chance de seus docentes terem ensinado simetrias de forma mais abstrata, pouco ou nada contextualizada, geralmente apoiados em uma metodologia demasiada tradicional.

IV.2.2. Técnicas do estudo e instrumentos de recolha de dados

Baseado diretamente em nossas questões de investigação e objetivos de pesquisa, selecionamos técnicas e instrumentos que mais se adequam a uma metodologia de investigação qualitativa de investigação-ação participativa. De acordo com Damas e Ketele (1985), deve considerar-se também a associação primordial entre a seleção do tratamento e a questão de investigação e, em determinados casos, utilizar conjuntamente diferente abordagens de tratamento pois elas se completam. As técnicas/instrumentos[63] devem abordar o sujeito incurso na investigação-ação. No caso do estudo aqui apresentado, foram utilizados os seguintes instrumentos:

a) Questionários:

Este tipo de técnica/instrumento é o mais frequente em investigações (Fiorentini & Lorenzato, 2007; Pardal & Lopes, 2011). As perguntas que compõem o questionário podem ser abertas, fechadas ou ainda de escolha múltipla de leque aberto[64] (Pardal & Lopes , 2011), as quais existem alternativas fechadas de resposta que permitem ao respondente completar de alguma forma. Para Hernandez Sampieri *et al*. (2014), questionários, assim

[63] Num sentido mais amplo, alguns autores consideram o questionário como um instrumento da entrevista enquanto técnica de recolha de dados, embora outros autores (Amado & Ferreira, 2014) tomam questionário também como uma técnica.
[64] Chamadas de *mistas* por Fiorentini e Lorenzato (2007).

como entrevistas e focus grupo, são os instrumentos mais comuns à investigação-ação.

- **Questionário Q1 (Q1) (Apêndice 1):** Este questionário foi o primeiro a ser aplicado na intervenção da investigação-ação, diretamente com os participantes da OFD. Foi dividido em cinco partes:
    - Parte I – Dados socioprofissionais
    - Parte II – Experiência docente, percepção, formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimento científico e didático-pedagógico sobre simetrias
    - Parte III – Documentos oficiais e normativos e articulações com suas práticas didático-pedagógicas
    - Parte IV – Suas considerações acerca do ensino e da aprendizagem de simetrias
    - Parte V – Conhecimento científico e didático-pedagógico

O questionário Q1 foi baseado no questionário empregado por Maia (2014) em sua tese doutoral intitulada *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Substancialmente, a diferença para o questionário preparado para esta investigação foi a conciliação de perguntas que remetem à abordagem de utilização ou não de recursos estáticos e dinâmicos, artísticos, culturais e patrimoniais e demais recursos para o ensino de simetrias por parte dos formandos.

- **Questionário Q2 (Q2):** Este instrumento ocorreu em torno da metade do período da oficina de formação de docente e continha estritamente uma parte, sendo esta dedicada aos conhecimentos científicos e e didático-pedagógicos. Aliás, foram usadas as mesmas perguntas da Parte V do questionário Q1 (Parte V), inclusive na mesma sequência e numeração das questões, com o objetivo de comparar a aquisição desses conhecimentos por parte dos formandos até ao momento de sua aplicação.
- **Questionário *Online* (QO) (Apêndice 2):** Os avanços tecnológicos permitem que necessidades específicas possam ser auxiliadas. Os meios de comunicação atuais permitem a Comunicação Mediada por Computador (CMC) e técnicas e instrumentos comuns a investigações em geral podem valer-se desta prática (Noveli, 2010). Para Mercado (2012), "os espaços

virtuais oferecem a vantagem do trabalho diferenciado, nos quais podem aceder a ferramentas *online* e a sua dinâmica" (p. 181).

De entre suas vantagens da aplicação de um questionário *online* podemos destacar o fato de não ser um método obstrutivo, demandar menos tempo, menos esforço e menor custo, além de ser flexível em tempo e espaço. Além disso, a utilização de questionários *online* não requer transcrições pois os próprios respondentes já redigem as suas respostas, o que consequentemente poupa tempo para a análise dos dados. No entanto, esta forma de inquerir não permite analisar a linguagem corporal dos respondentes e que às vezes é relevante em recolha de dados qualitativos (Rocha, Barros & Pereira, 2005).

Com base no exposto anteriormente, este instrumento de recolha de dados realizado através de um questionário[65] *online*, a ser respondido de forma dinâmica numa plataforma da *web*, teve os mesmos propósitos da entrevista individual e presencial que será apresentada mais à frente, ainda neste capítulo. Esta alteração na forma de utilização de instrumentos com os mesmos propósitos deu-se devido a dificuldade de presenciar todos os participantes em suas implementações das atividades aos discentes. As perguntas deste questionário foram divididas em blocos e os objetivos associados estão apresentados a seguir (Quadro 7):

[65] As questões são respondidas por escrito pelo entrevistado, sem a necessidade de gravação de áudio ou observação direta, participante ou não participante.

Quadro 7: Blocos e objetivos dos blocos do Questionário *Online* (QO)

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO
BLOCO 0 Legitimação da Entrevista	Explicar a entrevista e seus objetivos
BLOCO 1 Visão Geral	Perceber a visão do investigado sobre a utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais em favor do ensino de simetrias
BLOCO 2 Percepção de Aprendizagem dos investigados e competência docente desenvolvida na OFD	Verificar a percepção de aprendizagem / competência docente do investigado em relação à OFD e à implementação
BLOCO 3 Implementação	Perceber a visão do investigado sobre o planeamento utilizado por ele
	Comparar o planeamento utilizado nesta implementação com os utilizados, em implementações para os mesmos fins, anteriormente à OFD
	Perceber a visão do investigado sobre a implementação realizada por ele
	Verificar a opinião do investigado sobre as atividades realizadas: potencialidades e limitações
	Verificar as considerações do investigado sobre a percepção de aprendizagem dos alunos em relação à implementação.
BLOCO 4 Nível de satisfação e atitudes positivas devido à abordagem	Verificar o nível de satisfação do investigado devido à participação na OFD
	Verificar o nível de satisfação profissional do investigado em relação à implementação das atividades desenvolvidas na OFD
	Verificar as considerações do investigado sobre a satisfação dos alunos e alunas em relação a implementação
BLOCO 5 Síntese e metarreflexão sobre a participação na investigação e agradecimentos	Perceber o sentido que o investigado dá à própria participação ou colaboração na OFD e implementação da proposta

- **Teste Discente (TD) (Apêndice 3):** Após a implementação das atividades elaboradas pelos professores participantes desta pesquisa, foi aplicado um teste aos discentes de dois destes professores e também aos discentes de três outras turmas cujos professores não participaram diretamente da pesquisa. Os discentes das duas primeiras turmas compuseram o Grupo de Ação (GA), enquanto os discentes das outras três turmas compuseram o Grupo de Controle (GC). Este teste continha duas perguntas de opinião, uma para saber a satisfação do discente com o ensino utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e outra sobre o seu hábito em reconhecer conceitos de simetria no cotidiano, além de dez unidades de aferição de conhecimento científico, sendo sete destas valendo-se da utilização de recursos artísticos, culturais ou patrimoniais.

b) Observação direta não participante (ODNP):

Valemo-nos de observações direta não participantes em algumas das implementações das atividades dos formandos aos seus respectivos alunos. O investigador esteve presente na sala de aula enquanto a professora realizava as atividades elaboradas por ela mesma, em colaboração com os demais formandos participantes da OFD. De entre as vantagens da utilização deste instrumento de recolha de dados, destacamos, de acordo com Herandez Sampieri *et al*. (2014), a possibilidade de observar situações incomuns e registrá-las diretamente no contexto ocorrido, aclarando questões que podem ser desconfortáveis para o participante transparecer numa sessão com o investigador. Segundo estes estes mesmos autores, entre as desvantagens temos o fato de demandar do investigador a habilidade de percepção da posturas e linguagem não verbal dos observados. Mesmo sendo uma observação não participante, é possível que não o observado não fique confortável o suficiente para se comportar naturalmente.

c) Entrevistas:

Uma entrevista é uma situação de encontro de duas ou mais pessoas, que frequentemente possuem diferentes disposições afetivas (D'Espíndula & França, 2016). O entrevistador se propõe a colher informações para a investigação que está realizando ou pretende realizar, e o entrevistado pode ter uma gama variável de intenções, podendo mesmo não tê-las de forma explícita (Mann, 1975).

Amado (2014) considera a entrevista como um das formas mais adequadas para a busca da compreensão das pessoas sobre um determinado assunto. O autor destaca as principais características deste instrumento em termos gerais:

- Um poderoso meio que permite transferir informações do entrevistado para o entrevistador;
- possui pressupostos a serem controlados pelo plano de investigação;
- "uma conversa intencional orientada por objetivos precisos" (p. 207).

Nesta investigação realizamos duas entrevistas individuais e duas em *focus* grupo. As perguntas presentes nestes instrumentos aproximaram-se de algumas definições de Amado (2014), nomeadamente, perguntas de *experiência/comportamento*, que correspondem com ações passadas e presentes dos participantes, relatando suas experiências; de opinião / valor, que buscam compreender os processos cognitivos e interpretativos do participante; de sentimento, que visam detectar o envolvimento emocional apresentado pelo participante através das respostas, tendo em consideração suas experiências e pensamentos; e de conhecimento, que desnudam informações baseadas em fatos concretos.

Detalharemos a seguir estes instrumentos:

- **Entrevistas Individuais (EI):** estas entrevistas foram realizadas imediatamente após a observação participante das implementações das atividades aos alunos. Com isso visamos recolher algumas considerações imediatas dos participantes a fim de que não se perdessem certas percepções da implementação com o passar do tempo. À semelhança dos critérios considerados no QO, nestas entrevistas os blocos de perguntas também estão associados a objetivos (Quadro 8).

Quadro 8: Blocos e objetivos dos blocos das Entrevistas Individuais (EI)

BLOCO	OBJETIVOS DO BLOCO
BLOCO 1 Legitimação da Entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista
	Explicar a entrevista e seus objetivos
BLOCO 2 Implementação	Saber a visão do investigado sobre a implementação, realizada por si, das atividades
	Saber a visão do investigado sobre o planeamento utilizado por ele
	Comparar o planeamento utilizado nesta implementação com os utilizados, em implementações para os mesmos fins, anteriormente à OFD
	Saber a visão do investigado sobre a utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais em favor do ensino de simetrias
	Verificar a opinião do investigado acerca das atividades realizadas: potencialidades e limitações
BLOCO 3 Maior satisfação e atitudes positivas através da abordagem	Verificar se houve maior satisfação profissional do investigado em relação à implementação
	Verificar as considerações do investigado sobre a maior satisfação dos alunos em relação à implementação
BLOCO 4 Percepção de Aprendizagem e Competência Docente	Verificar a percepção de aprendizagem / competência docente do investigado em relação à OFD e à implementação
	Verificar as considerações do investigado sobre a percepção de aprendizagem dos alunos em relação à implementação.
BLOCO 5 Síntese e metarreflexão sobre a própria entrevista e agradecimentos	Captar o sentido que o investigado dá à própria situação da entrevista.

- **Entrevistas em *Focus* Grupo[66]:** Esta técnica de recolha de dados permite que as mesmas perguntas sejam feitas ao mesmo tempo a um grupo de tal forma que respondam e ouçam as respostas dos demais (León & Montero, 2015). O entrevistador e o grupo entrevistado podem expressar conhecimento, ideias, posturas, práticas, sentimentos, opiniões etc (León & Montero, 2015; Petracci, 2004) sobre os temas abordados. Mais recentemente, o uso desta técnica se disseminou também a investigações participativas e emancipatórias, enquadrando-se perfeitamente nos objetivos da nossa investigação. A utilização de entrevista em grupo, muito frequente em investigações educativas qualitativas em geral, demanda do investigador o interesse pelo grupo e por suas vivências enquanto grupo, onde o que interessa "não é o universo privado, mas o conjunto de significações específicas do grupo" (Amado, 2014, p. 224). Especificadamente sobre entrevistas em *focus* grupo, e o que a difere da entrevista em grupo propriamente dita principalmente, deve-se valorar a interação gerada no interior do grupo (Amado, 2014; Petracci, 2004) e pode abordar, em profundidade, um ou mais temas (Sullivan, 2009).

  Também de acordo com o carácter qualitativo da pesquisa, optamos por uma entrevista semiestruturada, o que não dispensa a utilização de um roteiro previamente elaborado (Manzini, 2004; Amado, 2014), o qual serve como um norteador que permite alguma flexibilidade de respostas (Bernal, 2010; Ventura, 2014; Amado, 2014).

  → ***Focus* Grupo FG1 (FG1) (Apêndice 4):** As perguntas utilizadas na *Focus* Grupo FG1 se aproximaram das seguintes classificações (Oliveira & Freitas, 1998; Santos & Fogliatto, 2002):

  i) introdutórias, onde o tópico geral é apresentado aos participantes;

  ii) transitórias, a conversação é encaminhada às principais questões em apreço;

  iii) chave, que abordam os objetivos de forma direta e, por isso, requerem maior complexidade, elaboração e análise (Santos & Fogliatto, 2002, p. 3);

[66] Conhecida também por *sessão em profundidade* (Herandez Sampieri *et al.*, 2014).

iv) finais e de resumo, onde se elabora, após o término das discussões, um resumo sucinto baseado nas principais questões e ideias emanadas do processo.

A seguir (Quadro 9), apresentamos apenas a parte da matriz desta entrevista em que constam, como em instrumentos anteriormente apresentados, os blocos mencionados anteriormente e seus respectivos objetivos.

Quadro 9: Blocos e objetivos dos blocos da *focus* grupo 1 (FG1)

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO
BLOCO 1 Legitimação da Entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista
	Explicar a entrevista e seus objetivos
BLOCO 2 Questões Introdutórias	Saber a visão do investigado sobre a importância da temática no ensino
	Saber a visão do investigado sobre a adequação da abordagem sugerida nos documentos oficiais e normativos e manuais escolares
BLOCO 3 Questões Transitória	Conhecer a percepção dos investigados frente suas práticas e abordagens anteriores, bem como a satisfação alcançada
BLOCO 4 Questões Chave	Saber a visão do investigado sobre a contextualização do ensino de simetrias
	Saber das expectativas dos investigados frente às etapas previstas e suas respectivas abordagens na OFD
BLOCO 5 Síntese e metarreflexão sobre a própria entrevista e agradecimentos	Captar o sentido que o investigado dá à própria situação da entrevista.

→ ***Focus* Grupo FG2 (FG2) (Apêndice 5):** As perguntas desta entrevista não foram separadas seguindo exatamente os mesmos critérios da FG1, mas também se dividiam em blocos de acordo com intenções específicas. Inicialmente continham apenas cinco blocos, contudo percebemos a necessidade de inserirmos mais três perguntas e compomos o sexto bloco. No Quadro 10 consta a versão já com os seis blocos e respectivos objetivos.

Quadro 10: Blocos e objetivos dos blocos da *focus* grupo 2 (FG2)

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO
BLOCO 1 Legitimação da Entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista
	Explicar a entrevista e seus objetivos
BLOCO 2 Vivências na formação	Saber a visão do investigado sobre seu envolvimento na recolha dos recursos
	Saber a visão do investigado sobre seu envolvimento na criação das atividades
	Saber a visão do investigado sobre a abordagem colaborativa na criação das atividades
BLOCO 3 Conhecimento Científico	Saber a visão do investigado sobre a necessidade de abordagem dos conhecimentos científicos na OFD
BLOCO 4 Conhecimento Pedagógico	Saber a visão do investigado sobre a importância da temática no ensino
	Saber das expectativas dos investigados frente à implementação das atividades elaboradas
BLOCO 5 Questão Final	Conclusão da entrevista
BLOCO 6 Parte Extra	Sobre a própria Oficina de Formação

Alguns dos instrumentos de recolha de dados citados anteriormente, nomeadamente, as EI, o QO, a FG1 e a FG2, os quais estão apresentados seguidos de seus blocos e objetivos dos blocos, foram elaboradas com questões orientadoras e perguntas de recurso. Estas últimas deram à entrevista o caráter flexível semiestruturado e foram utilizadas mediante às respostas obtidas pelas questões orientadoras.

d) Transcrições: Amado (2014) aponta que os dados recolhidos servem para fomentar a análise e interpretação destes, não sendo possível fazer considerar estas duas ações como disjuntas. Para que pudéssemos ter maior clareza de detalhes, as entrevistas individuais e a FG1 foram gravadas por áudio e a FG2 foi gravada por áudio e vídeo, todas elas sendo, posteriormente, transcritas. Hernandez Sampieri *et al*. (2014) salienta que a transcrição serve que se proceda a uma análise aprofundada da linguagem ocorrida. A transcrição, quando realizada pelo próprio investigador e que é o nosso caso, é tida como o início da análise dos dados (Amado, 2014). Valles (2002, p. 136) corrobora com a seguinte definição de Kvale (1996):

> Transcrever implica traduzir de uma linguagem oral, com suas próprias regras, a uma linguagem escrita com outro conjunto de regras. As transcrições não são cópias ou representações de uma realidade original, são construções interpretativas que são ferramenta úteis para determinados propósito. As transcrições são conversações descontextualizadas, abstrações, como os mapas topográficos são abstrações da paisagem original de que derivam. Os mapas enfatizam alguns aspectos da paisagem e omitem outros, dependendo a selecção do uso que se tenta fazer (p. 165).

Também em consonância com esta definição, não nos prendemos em realizar as transcrições de forma absolutamente literal, com todas as interjeições ou silêncios ocorridos, porém obedecemos a uma transcrição completa capaz de cumprir seus objetivos de forma credível. Desta forma, transcrevemos as entrevistas individuais e as entrevistas em *focus* grupo FG1 e FG2.

e) Diário de Campo (DC): Segundo Tuckman (2000) o diário de campo[67] é onde se registra o produto da observação do ambiente através de uma visão ampla. Para Hess (2006), a eficiência deste instrumento incide em momentos da investigação em que o objetivo dos investigadores seja "compreender sua prática, refletir, organizar, mudar e torná-la coerente com suas ideias" (p. 108), preservando momentos oriundos de observações e reflexões. Sem este instrumento não é possível aproveitar alguns pormenores desejados, contudo com ele também não se pode obtê-los na totalidade. Assim, registra-se o mais relevante para os participantes em observação (Hess, 2006).

[67] Também referido por *diário de bordo*.

Utilizamos este instrumento para registrar as observações participantes ocorridas nas diferentes sessões da OFD.

f) Análise Documental: A análise documental objetiva “identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse” (Ludke & André, 2011, p. 4) e acessar “leis e regulamentos, normas, cartas, discursos, revistas, arquivos escolares, livros, entrevistas, inquéritos por questionário” (Ventura, 2014, p. 52). Referimo-nos a esta técnica de recolha de dados na qual utilizamos durante a revisão bibliográfica no que incide, nomeadamente, sobre o conhecimento científico e didáctico-pedagógico de geometria, com enfoque principal nas transformações geométricas, nas isometrias e nas simetrias; os documentos oficiais e normativos como o Currículo Nacional, os PMEB de 2007 e de 2013, as Metas Curriculares de Matemática de 2013, as Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas, a Organização Curricular, os manuais utilizados na escola; e os documentos já disponibilizados sobre o PAFC, bem como as articulações destes com as práticas didático-pedagógicas, com a contextualização; com a utilização de recursos para o ensino de geometria e, em particular, das transformações geométricas, das isometrias e das simetrias. Também utilizamos referências sobre Formações de Professores, seus modelos e abordagens, desafios e estratégias, questões persistentes em torno no ensino e da aprendizagem e estratégias e experiências para sucesso educativo.

Incluímos também nesta categoria a análise realizada em algumas produções dos formandos ao longo da OFD e antes dela, como por exemplo:

→ **Planificações Anteriores (PA):** planificações utilizadas pelos professores participantes da Oficina de Formação para o ensino de simetrias antes destes participarem da Oficina;

→ **Banco de Atividades (BA):** conjunto de atividades elaboradas para serem implementadas aos discentes. Estas atividades foram elaboradas de forma colaborativa pelos professores participantes da Oficina de Formação, durante a própria. Os recursos utilizados nas atividades foram recolhidos pelos próprios professores, através de fotografias obtidas por estes, livros, web e outros, e contaram também com a colaboração do próprio formador / investigador;

→ **Planificações Personalizadas (PP):** planificações criadas pelos professores participantes da Oficina de Formação para implementação mencionada anteriormente;

IV.2.3. Aprimoramentos e validações dos instrumentos

Na busca de utilizarmos instrumentos que avaliem o que se pretende (García, 2003) recorremos à apreciação de docentes especialistas e experientes nesta prática de aferição. A seguir apresentamos os trâmites de cada um destes instrumentos utlizados nesta investigação:

- **Questionários Q1 e Q2**: como já foi mencionado anteriormente, este questionário foi embasado por um questionário já utilizado em investigação doutoral (Maia, 2014). É composto por cinco parte, onde apenas a última parte (Parte V) visa a percepção do conhecimento científico dos respondentes. As quatro primeiras partes deste questionário foram validadas por dois doutores, docentes da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidde de Coimbra. A Parte V foi validada pela própria autora do questionário em que este se embasou, doutora docente da Escola Superior de Educação do Porto na Unidade Técnico-Científica de Matemática, Ciências e Tecnologias. Como as características do questionário Q2 já apresentada anteriormente, este foi validado em consequência daa validação da Parte V do questionário Q1.
- ***Focus* grupo FG1 e FG2**: Estas duas entrevistas foram validadas por dois doutores, um docente da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidde de Coimbra e outro docente da Faculdad de Formación de Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid.

IV.2.4. Análises dos dados

Numa investigação educativa, geralmente é a análise dos dados que a enquadra numa metodologia qualitativa, e não seus dados propriamente ditos. A análise qualitativa dos dados refere-se à utilização de linguagem como forma de representação e processamento das informações recolhidas. Assim, é possível que uma análise qualitativa ocorre sem realização de medidas (León &

Montero, 2015). Há autores que defendem que pode-se realizar uma análise qualitativa sem mesmo utilizar números e, os mais radicais afirmam que os números desvirtuam a essência da informação e, consequentemente, dos fenómenos pesquisados (Denzin & Lincoln, 2011).

Para o tratamento dos dados qualitativos recolhidos em nossa investigação optamos pela técnica de Análise de Conteúdo. Segundo Bardin (1997, p. 31), a análise de conteúdo é "um conjunto de técnicas de análise das comunicações", não vista apenas como um instrumento, mas sim uma gama de ações associadas ou, sendo um único instrumento, que este seja adaptável à vasta esfera das comunicações. A desconstrução do discurso visa a produção de um novo discurso, "através de um processo de localização/atribuição de traços de significações, que resultam de uma relação dinâmica entre as condições de produção do discurso a analisar e as condições de produção da análise" (Almeida, 2011, p. 170).

Esta técnica está presente na história desde os primeiros ensaios da humanidade em busca de compreender os escritos antigos (Silva, Gobbi & Simão, 2005) e torna-se mais vultuosa com os estudos de Leavell acerca das propagandas lançadas na Primeira Grande Guerra (Trivinos, 1987). A referência utilizada atualmente é a notável publicação de Bardin (1977), *Analyse de Contenu*[68].

A utilização da análise de conteúdo é realizada em três fases, conde cada uma delas pode ter subfases específicas e bem definidas. Apresentaremos a seguir estas fases e subfases, bem como suas respectivas categorias.

Bardin (1977, p. 95) considera que a organização da análise se situa em três pólos cronológicos: a pré-análise; a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A seguir, apresentamos algumas características destas fases e de suas subfases (Bardin, 1977; Ramos & Salvi, 2009; Almeida, 2011):

---

[68] Bardin, L. (1977). Análise de conteúdo (LA Reto & A. Pinheiro, Trad.) Lisboa: Edições 70. *Trabalho original publicado em 1977*.

- 1ª fase - pré-análise: é a fase onde se escolhe os documentos e formula hipóteses e objetivos para a investigação pesquisa. É a “organização propriamente dita” (Bardin, 1977, p. 95). Esta fase é subdividida em subfases, como as que se seguem:

  (i) Leitura flutuante: o primeiro contato com os documentos que serão analisados.

  (ii) Escolha dos documentos: é importante que os documentos escolhidos constituam um *corpus*, ou seja, “o conjunto de documentos tidos em conta paea serem submetidos aos procedimentos analíticos” (Bardin, 1977, p. 96). Para isso, deve-se levar em conta quatro regras:

  > a) exaustividade: é preciso ter todos os documentos do corpus.
  >
  > b) representatividade: a escolha de participantes deve representar o universo inicial.
  >
  > c) homogeneidade: os documentos devem respeitar critérios precisos de escolha.
  >
  > d) pertinência: os documentos devem ser propícias fontes de informação e cumprirem ao objetivo da análise.

  (iii) Formulação das hipóteses e dos objetivos: A hipótese é uma afirmação provisória que nos dispomos a verificar e o objetivo é a finalidade geral (Bardin, 1977).

  (iv) Referenciação dos índices e a elaboração de indicadores.

  (v) Preparação do material: uma espécie de edição formal.

- 2ª fase - exploração do material ou codificação: é a fase onde se aplicam técnicas específicas de acordo com os objetivos e “consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (Bardin, 1977, p. 101). É onde os dados brutos são transformados sistematicamente e separados em unidades que permitem uma descrição clara das características pertinentes do conteúdo. Esta fase se divide em três subfases:

  i) o recorte: seleção das unidades

  ii) a enumeração: seleção das regras de contagem

  iii) a classificação e agregação: seleção das categorias

- 3ª fase - tratamento dos resultados e interpretações ou categorização, que associa os resultados obtidos ao marco teórico, e viabiliza avançar para conclusões que alcance avanços da pesquisa. Há de se considerar os seguintes critérios:

(1) A exclusão mútua – cada elemento não pode identificar-se em mais de uma categoria.

(2) A homogeneidade – a organização debe ser orientada por uma única classificação da categoria.

(3) A pertinência – as categorias devem estar adequadas ao material de análise e pertencer ao mesmo quadro teórico.

(4) A objectividade e a fidelidade – diferentes partes de um mesmo material (mesma grelha categorial), devem ser codificadas da mesma forma, inclusive quando submetidas a diferentes análises.

(5) A produtividade – as categorias devem fornecer resultados férteis em índices de inferência, novas hipóteses e na exatidão dos dados.

Consideramos a utilização desta técnica com a finalidade de interpretar inferencialmente as mensagens disponibilizadas pelos participantes através das entrevistas. Para Almeida (2011), a "inferência torna-se, assim, veículo do conhecimento, mais do que obstáculo ao mesmo, e permite equacionar as possibilidades e limites de cada uma das situações a analisar" (p. 170).

Este procedimento através da análise de conteúdo foi auxiliado pelo uso do software Atlas.ti. A utilização de *software* para estes fins contribui "para conferir a este tipo de abordagem o estatuto que lhe era devido no âmbito dos trabalhos em Ciências Humanas e Sociais" (Martins & Pinto, 2015, p. 8). Segundo Silva (2016), o principal objetivo deste *software* é "ajudar o pesquisador a organizar, registrar os dados e possibilitar o acompanhamento dos registros efetuados, contribuindo para a análise dos dados empíricos que foram relacionados com categorias elencadas previamente" (p. 4), adequando-se com facilidade a "grandes quantidades de dados textuais". De entre as vantagens em detrimento às antigas técnicas utilizadas na análise de conteúdo, Silva (2016) destaca a possibilidade de, com o Atlas.ti,

> (…) realizar anotações e comentários sobre os dados empíricos, elaborar relatórios da organização dos dados segundo as categorias (em formas de redes semânticas), criar definições ou esclarecimentos a respeito das categorias à luz de um quadro teórico (denominados memorandos), dispor informações sobre os sujeitos respondentes (…) (p. 4).

Mesmo com todos os benefícios em consequência da utilização do *software*, o autor destaca que suas funções não alcançam resultados independentemente da ação do pesquisador, sendo necessário a este o domínio das funcionalidades e potencialidades disponibilizadas com o *software* para que este se adeque “à teoria de base utilizada na análise” (p. 17).

Como foi dito no início deste capítulo, esta investigação enquadra-se numa perspectiva metodológica predominantemente qualitativa, pois apesar de parte dos dados recolhidos serem perguntas fechadas, estes são poucos e não necessitam de um tratamento avançado, como através da utilização de um *software* específico como SPSS, por exemplo. Assim, o tratamento a estes dados foi realizado simplesmente através do *Microsoft Excel* apenas para fornecer gráficos e percentagens. Tais informações auxiliaram as interpretações realizadas através dos dados qualitativos.

IV.2.5. Triangulação

Considerado por Miguélez (2001) como um recurso heurístico, a triangulação é cada vez mais utilizada em investigações das ciências humanas. Através desta ferramenta, realizam-se interseções das diversas fontes de informação utilizadas e de diferentes pontos de vista (Hernandez Sampieri *et al*., 2014; Cabrera, 2011; Selva, 2010; McMillan y Schumacher, 2007; Miguélez, 2001), confrontando distintas considerações dos próprios atores do processo e dos dados recolhidos. Isto permite conformar dados e aumenta notoriamente a credibilidade dos resultados obtidos com a investigação.

Optamos por triangular instrumentos, técnicas e dados durante a apresentação, análise e interpretação dos dados, baseando-nos nas necessidades dos objetivos específicos.

IV.3. Plano de trabalho

Esta investigação ocorre em quatro fases que nomeamos de acordo com as etapas da investigação-ação e que se encontra amplamente apresentada, assim como as demais características da investigação-ação, na seção III.3 do capítulo III da parte teórica desta pesquisa. A fase de ação desta investigação-ação é onde se inicia uma nova investigação-ação, vivenciada pelos docentes participantes e com a participação mais ativa destes, sendo a nossa intervenção propriamente dita. A seguir apresentamos detalhadamente estas fases.

IV.3.1. Fases da investigação

- **Reflexão inicial da investigação:** A identificação do problema de investigação direcionou nossa atenção a uma ampla revisão bibliográfica, principalmente focada nos documentos educacionais, na melhoria no ensino e na aprendizagem e nas formações de professores. Nos muitos documentos oficiais e normativos que acedemos destacava-se a oscilação da importância dada à temática desta investigação ao longo de suas atualizações. Sobre ensino e aprendizagem, dedicamos especial atenção no debate de possíveis consequências de uma abordagem contextualizada, utilizando recursos diversos, contudo não muitos se referiam de forma ampla e abrangente às expressões artísticas e culturais, tampouco ao património. A respeito de formações de professores, nos atemos principalmente em seus modelos e abordagens, desafios e estratégias em busca do que mais se correspondesse com os objetivos do estudo à época e nota-se que poucos são os trabalhos com este perfil e referências (estratégias, recursos, estudos) com o foco na formação de professores. Percebemos que seria bastante adequado que desenvolvêssemos uma oficina de formação de docente em que nela pudéssemos debater a temática por vários ângulos.
- **Planificação da investigação:** Para se implementar uma formação de professores são necessárias de algumas ações prévias, de extrema importância, e é aí que começa a planificação da investigação.

  Escolhemos então o agrupamento de escolas que autorizasse a implementação da formação de professores, informando que esta seria uma das etapas da investigação doutoral. Este agrupamento é muito conhecido por se disponibilizar para implementações de pesquisas educacionais diversas, muita delas oriundas da própria Universidade de Coimbra. Após a proposta ser apresentada pessoalmente à Diretora do agrupamento, que a recebeu com interesse, fomos encaminhados à Coordenadora do 1º CEB para viabilizar a apresentação das nossas intenções. Paralelamente a este trâmite, fomos orientados a procurar o Centro de Associação de Formação de Escolas responsável por tais ações no agrupamento, para que procedêssemos às acreditações necessárias. Tanto a Ação de Formação quanto o Formador proponente da Ação devem ser acreditados de acordo com os termos do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores[69]. Para realizar estas acreditações é necessário que o Formador realize seu cadastro junto ao Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua (C.C.P.F.C.), o qual procederá à acreditação tanto da ação de formação contínua quanto do Formador. Os procedimentos necessários para esta conquista se iniciaram em setembro de 2016 e concluíram-se com a acreditação da Ação de Formação e do Formador em janeiro de 2017. Este período também foi concomitantemente dedicado à preparação de alguns dos instrumentos de recolha de dados e os devidos encaminhamentos aos especialistas visando as necessárias validações. Entre as primeiras versões e a validação final dos especialistas, apoiado pela contínua revisão bibliográfica sempre em paralelo, foi necessário realizar alterações nestes instrumentos, alterações estas que se concluíam em tempo, antes das implementações.

- **Ação da investigação (fase de intervenção):** desde a idealização da OFD, sempre consideramos como motivo basilar o ato de desenvolver colaborativamente uma proposta de ensino contextualizado das simetrias para o 1º CEB , visando contribuir para superar, embora em pequena escala de abrangência, parte de um processo histórico de abstração do conhecimento, corresponsável por tamanha fragmentação que tanto desmotiva docentes e discentes. Como consequência, vislumbramos levar os docentes ao conhecimento científico e didático-pedagógico de simetrias e, consequentemente, alcançar melhorias no ensino e na aprendizagem deste tema. A partir deste princípio, a intervenção inerente a esta investigação se enquadrou, segundo os critérios do Centro de Associação de Formação de Escolas, na modalidade de Oficina dado o seu distanciamento comparativamente a

[69] Decreto-Lei n.º 22/2014 de 11 de fevereiro.

prática docente mais habitual e a abordagem através da metodologia de investigação-ação. Nesta modalidade a OFD se desenvolveu através de 20 horas presenciais divididas em oito sessões sequenciais de 2,5 horas e 20 horas de trabalhos autónomos divididos em seis sessões sequenciais de 2 horas, 3 horas, 2 horas, 2 horas, 6 horas e 5 horas, respectivamente. Apresentamos a seguir, na sequência ocorrida, os diversos momentos enquanto sessões ou encontros de trabalhos presencias e sessões de trabalhos autónomos com as respectivas ações previstas:

- O primeiro momento, um encontro de trabalho presencial foi dedicado às apresentações entre formador e formandos e explanação dos objetivos e faseamento da Oficina. A partir daí, procedeu-se à aplicação do questionário Q1, respondido individualmente pelos professores participantes. Em seguida, iniciou-se a entrevista em *focus* grupo FG1. Na sequência ampliamos a discussão com os temas e desafios no ensino e aprendizagem de matemática, as geometria e simetrias; as vantagens da aprendizagem de geometria e simetrias, a transversalidade e a contextualização; o ensino de matemática através de recursos, incluindo artísticos, culturais e patrimoniais e formação de professores.
- No segundo momento, e também o segundo encontro de trabalho presencial, iniciamos pela apreciação conjunta de documentos oficiais e normativos, como o Currículo Nacional, os Programas de Matemática do Ensino Básico de 2007 e de 2013, as Metas Curriculares de Matemática de 2013, o Calendário de Implementação das Metas, as Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas, a Organização Curricular, e os manuais utilizados na escola, entre outros, com o objetivo de perceber como os conceitos de simetrias são abordados, tanto na teoria quanto nos exercícios propostos. Vimos também alguns documentos educacionais brasileiros, como por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e de Artes. Na sequência, transitamos para a abordagem da discussão

matemática propriamente dita dos conceitos de simetrias, iniciamos por um contexto histórico e relação intrínseca desta temática ao longo dos tempos com diversas outras áreas do saber, como a física, a química, a biologia, a cristalografia, a arquitetura, a pintura, a escultura, a arte, a psicologia, a antropologia, a história, a prosa, a música entre outras, e suas diferentes faces e definições consideradas com o passar do tempo. O último passo antes de iniciarmos as atividades previstas foi a apresentação brevemente o programa *Visual Thinking Strategies* (V.T.S.), com o qual valemo-nos nos debates de cada motivo artístico, cultural ou patrimonial presentes nas atividades que vieram pela frente. Depois de realizarmos todos estes feitos anteriores, demos início às atividades que nortearam a apresentação dos conceitos. A primeira atividade é então iniciada, projetada por *DataShow*, com o tema *Catedrais pelo Mundo*. Algumas imagens são apresentadas seguidas de breve, porém não tanto, descrição. Depois projetamos uma única imagem com a qual iniciaremos a atividade. Com esta projetada, utilizamos o programa V.T.S. e perguntamos, na sequência do debate, que material poderíamos utilizar para verificar as respostas dadas às questões do programa. O debate ampliava-se à medida que as atividades iam sendo desenvolvidas. Os materiais foram distribuídos aos professoras para que realizassem as atividades. As definições conceituais abordadas somente eram reveladas após a realização das etapas previstas à atividade, de uma forma socioconstrutivista. A partir da primeira atividade definimos *Eixo de Reflexão* ou *Eixo de Simetria de Reflexão* e *Simetria* de *Reflexão*, e, sequencialmente, avançamos para as definições de *Centro de Rotação* ou *Centro de Simetria de Rotação* e de *Simetria de Rotação*. A seguir, com o tema de Calçadas Portuguesas, alcançamos de forma análoga as definições de *Direção da Translação* ou *Direção da Simetria de Translação* e *Simetria de Translação* e *Direção da Reflexão Deslizante* ou *Direção da Simetria* de *Reflexão Deslizante* e *Simetria de*

Reflexão Deslizante. Totalmente guiadas por uma prática socioconstrutivista e não se esquecendo da frase "*Pratique o que você prega*" já mencionada, as atividades iam sendo realizadas e, somente ao final de cada uma delas, a definição do conceito ali presente era, então, revelado. Em uma sátira[70] bastante esclarecedora sobre este dilema, Carlos Mathias diz que primeiramente é preciso entender a essência do conceito para, somente depois disso, entender sua definição. Para ele, "o conceito, sua compreensão e suas definições são elementos históricos diferentes, que são variáveis" (Mathias, 2015, p. 13).

Para exemplificar e ratificar a presença cotidiana destes motivos seguimos com a apresentação e discussão de alguns belíssimo estudos como o *Roteiro de Frisos da Cidade da Horta*, realizado pelo Professor Ricardo Cunha Teixeira e o *Roteiro de Frisos de Ponta Delgada* e o *Roteiro de Varandas da Cidade de Ponta Delgada*, ambos realizados pela Professora Vera Raposo Moniz, Professora Susana Goulart Costa e Professor Ricardo Cunha Teixeira. Finalizamos este segundo encontro presencial com a conceitualização de *rosáceas*, *frisos* e *padrões*; *transformações geométricas*; *movimento rígido de um plano*; *isometria* e *simetria* e terminamos com uma intensa e rigorosa discussão para esclarecer a diferença de entre isometria e simetria.

- O terceiro momento foi o primeiro trabalho autónomo a ser realizado pelos formandos, que procederam, individualmente, à recolha de recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Assim, deram início à elaboração das atividades de forma a contemplar todos os conceitos de simetrias inerentes ao 1º CEB. Os formandos foram orientados pelo investigador, em carácter de sugestão, a recolherem imagens que lhes servissem para a elaboração das atividades a serem implementadas aos discentes num futuro próximo.

[70] Mathias, C. E. M. (2015). Trocando em miúdos… Indefinindo a Definição. *Jornal Dá Licença*. Edição Ano XX, n. 64.

- O quarto momento, terceiro encontro de trabalho presencial, foi dedicado às apresentações dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais recolhidos pelos formandos no momento anterior. Estas apresentações estavam planificadas para ocorrer através de impressos ou *slides*, porém, todos os participantes preferiram enviar os motivos para o investigador. Este, por sua vez, formatou a apresentação em *slides* a serem projetadas através de *PowerPoint*, enquanto os autores da recolha se manifestavam em explanar suas motivações na escolha dos recursos aos demais participantes na Oficina. Salientamos a importância sobre a referência de imagens recolhidas da *internet*, por uma questão de ética com os autores. Também, nesta sessão, retomarmos a discussão conceitual de diferenciação entre isometria e simetria. Apresentamos também exemplos contidos em manuais escolares com questões polémicas e ambíguas acerca deste conceito. Na sequência deste mesmo encontro, iniciamos a criação do Banco de Atividades. Nomeamos assim o conjunto de atividades que estavam sendo criadas colaborativamente pelos formandos com o auxílio facilitador do investigador na qualidade de formador. A realização destas atividades era do conhecimento de todos os participantes dado que todos os envolvidos sabiam dos objetivos da investigação e da OFD, direcionadas à promoção do ensino de simetrias. Os recursos serviriam para promover o ensino de simetrias de forma contextualizada. Neste momento, estávamos produzindo apenas as primeiras versões das atividades, as quais seriam aprimoradas de forma colaborativa em momentos futuros. Importou que os docentes tivessem todos os recursos necessários para resolver as atividades propostas. Gradativamente, com base num trabalho colaborativo, na participação efetiva dos formandos e de uma forma socioconstrutivista, é possível relacionar os melhores recursos e formas de uso aos diferentes tipos de atividades a serem resolvidas. É adequado que ocorra um espaço de exposição de experiências e ideias e de amplos e intensos debates, em prol da realização de um produto personalizado feito com a colaboração de diferentes atores.

- O quinto momento desta intervenção foi o segundo trabalho autónomo realizado pelos participantes. Este foi dedicado a uma primeira versão das atividades, que se iniciariam pela elaboração individual das atividades por parte deles, utilizando os recursos recolhidos anteriormente. As orientações para esta ação indicavam que fossem elaboradas no mínimo quatro atividades de forma a que cada uma comtemplasse um dos quatro conceitos de simetria abordados na Oficina. Nos casos de professores de 1º, 2º e 3º anos do 1º CEB, consideramos a adequação de que tais atividades abordassem apenas os conceitos que os respectivos professores haviam previamente planificados para aquele ano letivo, embora o total de quatro questões se manteve.
- O sexto momento da intervenção, quarto encontro de trabalho presencial, foi destinado à apresentação das atividades elaboradas, aprimoramentos pelos formandos e continuação da criação do Banco de Atividades. As atividades elaboradas individualmente foram, então, apresentadas e diversas sugestões foram proferidas pelo formador e formandos com o objetivo de aprimoramentos das mesmas para então comporem o Banco de Atividades. A partir deste momento, foi dada continuidade aos devidos e reconhecidos aprimoramentos e elaboração colaborativa de novas atividades nos casos necessários. As atividades foram elaboradas e aprimoradas consoante as necessidades particulares de cada atividade, de cada docente participante e de acordo com a realidade dos discentes para os quais estas serão implementadas mais adiante. Ainda neste momento da intervenção e de comum acordo entre todos, consideramos pertinente adiar a aplicação do questionário Q2 aos formandos para a próxima sessão presencial. Esta decisão também foi motivada pela perceptível necessidade que demonstravam em querer notar seus avanços em relação aos conhecimentos científicos abordados na Oficina até ao momento.

Duas outras alterações no planeamento inicial também foram propostas nesta sessão. Uma delas diz respeito ao terceiro trabalho autónomo, que seria o próximo momento. A princípio este seria destinado à primeira etapa da elaboração dos planeamentos por parte dos professores. Seria uma elaboração prévia dos planeamentos de implementação das atividades, que ainda estavam em desenvolvimento, aos seus discentes. Porém, percebemos conjuntamente que seria mais proveitoso que este trabalho autónomo fosse dedicado aos aprimoramentos dessas atividades em criação. Outro motivo determinante para esta alteração do nosso plano inicial foi a alegação dos formandos de que a criação de atividades no formato que a Oficina propunha demandava mais atenção e tempo de dedicação do que a elaboração de um planeamento para a sua implementação, uma vez que não são atividades comuns de suas práticas. A partir desta constatação, alteramos o cronograma deixando apenas o quarto trabalho autónomo, precisamente o que seria a segunda parte da elaboração dos planeamentos, como fase única de elaboração dos mesmos. De acordo com a experiência profissional dos participantes da Oficina, elaborar um planeamento é uma tarefa bastante elementar, mesmo que tal instrumento seja referente a novas abordagens de ensino.

A outra alteração no planeamento inicial surge como uma consequência da alteração anterior. Com a percepção de não haver necessidade em dedicar-se tanto tempo ao planeamento, tampouco uma sessão presencial inteira para conclusão e compartilhamento entre os participantes, a sexta sessão presencial que estava planejada para estas ações foi substituída por uma visita de campo ao Museu Monográfico de Conimbriga. Com isso, a elaboração das planificações poderia iniciar-se concomitantemente à conclusão das atividades, amentando a demanda destinada ao próximo momento.

- O sétimo momento desta intervenção, terceiro trabalho autónomo, assume então o objetivo primordial de conclusão das atividades e, se possível, um primeiro esboço das respectivas planificações para as implementações das mesmas. Aos poucos os formandos enviavam suas versões por *email* ao investigador e, como já havia sido acordado entre todos, algumas eram compartilhadas com os colegas. Como não se tratava ainda de versões finais, nem das atividades nem das planificações, os compartilhamentos via *email* somente ocorriam quando algum participante manifestava certa dificuldade na realização de alguma dessas tarefas, seja nas atividades ou nas planificações. Todos os participantes foram incentivados a priorizarem a elaboração das atividades, pois, além de esta função demandar maior entusiasmo e criatividade, já estava replaneado um momento dedicado à conclusão das planificações.

- No oitavo momento da intervenção e quinto encontro ou trabalho presencial estava inicialmente planeado ocorrerem a entrevista em *focus* grupo FG2 e as resoluções colaborativas de todas as atividades, seguidas pela selecção, por parte dos professores, das atividades a serem implementadas junto aos discentes. Como foi acordado na sessão presencial anterior, incluímos nesta sessão a aplicação do questionário Q2. Esta aplicação foi a primeira ação desta sessão e, na sequência, realizamos a entrevista em *focus* grupo FG2.

  Continuando as metas previstas para esta sessão, distribuímos aos formandos as atividades impressas elaboradas por eles. Diante de todo o ocorrido nesta sessão, muitos perceberam que deviam realizar algumas alterações nas atividades e a troca entre os participantes foi bastante intensa. De forma colaborativa, as atividades iam sendo resolvidas e anotações eram realizadas para que se procedessem aos ajustes necessários antes das implementações. Esses ajustes poderiam incidir em algum erro de conhecimento científico ou por considerarem ter percebido uma forma mais adequada de abordagem ou apresentação. A maioria dos professores utilizaram as atividades por si desenvolvidas, mas contaram com a colaboração entre todos para realizar os ajustes necessários.

Terminamos esta sessão ainda sem ter as versões definitivas das atividades, adiando esta conclusão a ser enviada juntamente com o término da respectiva planificação, no próximo momento da investigação, precisamente o quarto trabalho autónomo.

- O nono momento da intervenção, quarto trabalho autónomo, que a princípio seria destinado à elaboração da planificação para as implementações das atividades, agora teve agregada a função de conclusão destas atividades. Novamente os *e-mails* eram trocados, mas desta vez com as versões definitivas, em sua maioria, das atividades e as respectivas planificações para tais implementações. Num destes emails aproveitamos para marcar um horário adequado a todos na porta do Museu Monográfico de Conímbriga, onde ocorreria a visita de campo. Previamente, o investigador contactou o diretor do museu com o intuito de pleitear a gratuidade ou descontos nos valores dos bilhetes de entrada, bem como a possibilidade de uma ocorrência de uma visita guiada a fim de conhecermos mais profundamente a história do local e os recursos oferecidos por ele. Prontamente obtivemos a resposta do diretor do museu informando-nos da gratuidade dos bilhetes e oferecendo ainda disponibilizar, caso fosse do nosso interesse, alguns mosaicos que estavam em manutenção no momento. Esta ação não nos foi necessária, pois a grande diversidade já disponível atendia nossas necessidades.
- O décimo momento e sexto encontro ou sessão de trabalho presencial iniciou-se diretamente na porta do Museu Monográfico de Conimbriga, no horário marcado. Antes de entrar no Museu, tivemos uma pequena conversa onde foram apresentados os objetivos da visita. Os formandos foram informados que deveriam registrar, de entre os mosaicos do museu, um mosaico que represente cada um dos quatro conceitos de simetria: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Estes registros deverão fazer parte do relatório final dos formandos, não necessariamente

associados a uma atividade. Estes relatórios finais foram produzidos, após o fim da Ação de Formação, individualmente pelos professores participantes da OFD. Os formandos foram instruídos a elaborarem-no através de um discurso coerente, sem ambiguidade, utilizando terminologia em contexto, redatando sobre suas expectativas iniciais; a descrição das atividades da formação; uma reflexão, como formando(a), sobre o trabalho realizado, tanto em nível individual quanto em nível de grupo; o contributo da ação para o seu desenvolvimento pessoal e profissional e uma auto-avaliação. Foi dado o livre arbítrio a ampliarem o relato a outros assuntos, como, por exemplo, sugerirem outros contextos para futuras formações. Este Relatório Final também foi um dos instrumentos de avaliação dos formandos na Oficina de Formação, de acordo com as normas do Centro de Associação de Formação de Escolas. A visita começou pela Casa dos Repuxos, onde todos interagiram e registraram as imagens, e avançou pelas ruínas que também contêm mosaicos, onde muitos detalhes foram sendo esclarecidos. Debatíamos todos, investigador e investigados e muito também entre eles. Circundamos as ruínas e passamos na parte com ruínas, sem mosaicos porém com algumas simetrias.

- O décimo primeiro momento, quinto trabalho autónomo, esteve destinado primeiramente às implementações. Os professores implementaram, nas salas de aula em que atuam comumente, o conjunto de atividades selecionadas previamente no Banco de Atividades, colocando em prática o planeamento também elaborado durante a Oficina de Formação. Estas implementações necessitaram, em alguns casos, de apenas um encontro e em outros de mais de um, de acordo com características intrínsecas da turma e do ano de escolaridade. O investigador acompanhou três destas implementações utilizando o instrumento de recolha de dados de observação direta não participante onde os dados coletados ajudaram também as discussões nos próximos encontros. O objetivo era descrever e analisar as práticas docentes utilizadas durante a implementação das atividades e a boa utilização dos recursos selecionados previamente, além de verificar se, por parte do professor, esta abordagem implicava em satisfação e percepção de aprendizagem profissional. Estas três implementações foram seguidas de entrevista individual com o professor. O objetivo principal desta entrevista foi perceber a opinião do professor acerca da experiência vivida imediatamente após a sua ocorrência. Esses três professores que foram observados pelo investigador aquando da realização de suas observações e os demais professores que implementaram e não foram observados responderam a uma entrevista individual online com os mesmos objetivos das entrevistas individuais mencionadas anteriormente.

- **Retroalimentação da investigação e da intervenção:** os próximos três momentos (12º, 13º e 14º) que serão apresentados, fazem parte das fases de retroalimentação tanto da investigação quanto da intervenção. Findo estes três momentos, se encerra também a intervenção direta e presencial realizada através da OFD, porém a retroalimentação da investigação continua.
    - O décimo segundo momento, sétimo encontro ou sessão de trabalho presencial, foi dividido em dois enfoques chave. No primeiro enfoque os professores compartilhavam com todos os demais participantes da Oficina a sua experiência com a implementação das atividades aos seus respectivos alunos. Projetavam a apresentação, referindo na íntegra como fora realizada com os alunos e relatavam as vivências em pormenores. Ao longo das apresentações dos professores, o formador teve uma postura de expectador como os demais professores, porém, quando considerava necessário, incentivava-os a explicitarem a experiência, sobre a satisfação em realizá-la, sobre a percepção de aprendizagem discente e a relação desta com a utilização dos recursos.

      Finda as apresentações de todos os professores, iniciamos o segundo enfoque previsto para esta sessão. Este foi a discussão conjunta sobre os resultados apresentados e teve por objetivo deixá-los à vontade para acrescentar algo ainda não dito, como possíveis apontamentos pertinentes por parte de todo o grupo, formador e formandos, a gerar mais argumentos para que os formadores elaborem seus Relatórios Finais. Esta discussão conjunta foi mais curta do que o previsto, possivelmente devido a maior intensidade nas trocas de impressões aquando das apresentações das implementações. Não foi apontado nada de relevante que não tenha sido abordado no enfoque anterior.

Os dados obtidos desta sessão foram registrados em um diário de campo.

- O décimo terceiro momento, oitavo e último trabalho ou sessão presencial, ocorreu logo no dia seguinte ao momento anterior. Este encontro foi iniciado com a apresentação de *slides*, realizada pelo formador, numa forma de resumo dos acontecimentos ao longo da Formação. Parte dos recursos utilizados pelos professores foram apresentados em *PowerPoint* com o objetivo de relembrar a criação realizada por eles, enquanto autores das atividades e atores das implementações. Todos se mostravam motivados e surpresos com a qualidade do trabalho alcançado em uma temática cuja lecionação, na fase prévia à OFD, desconfortava a todos.

  Em seguida, realizamos um debate de avaliação dos procedimentos utilizados ao longo da Oficina, dos recursos criados e das possíveis e consequentes melhorias causadas no ensino e na aprendizagem através das implementações das atividades. Na sequência deste encontro, e por se tratar de ser o último momento presencial da Oficina de Formação, delineamos conjuntamente um formato para a preparação dos Relatórios Finais por parte dos professores participantes, com os assuntos que necessariamente deviam ser abordados, podendo, no entanto, extrapolar na abordagem do que considerassem necessário, além de decidir também uma espécie de *template* para a apresentação deste Relatório.

    - O décimo quarto momento, sexto trabalho autónomo e último momento desta Oficina, destinou-se exclusivamente à preparação dos Relatórios Finais por parte dos professores participantes. Como fora acordado conjuntamente no momento imediatamente anterior, estes relatórios deveriam necessariamente abordar temas como as suas expectativas iniciais em relação à Formação; o cumprimento dos conteúdos e a descrição das atividades da formação; a reflexão, como formando / formanda, sobre o trabalho realizado por si, tanto em nível individual quanto em nível de grupo; o contributo da ação para o desenvolvimento pessoal e profissional e uma autoavaliação. Tudo isso deveria ser produzido valendo-se de um discurso coerente, sem ambiguidade e utilizando terminologia em contexto. Foi ainda sugerido que também sugerissem outros contextos para futuras formações de professores.

- **Retroalimentação da investigação (continuação):** esta fase de retroalimentação da investigação continua com a análise e interpretação mais profunda dos dados e as conclusões obtidas com ela. Este estudo será entregue a todos os participantes da OFD, a fim de que sirva de ferramenta para iniciar novos ciclos futuros, de acordo com suas necessidades profissionais próprias.

Apresentaremos a seguir (Quadro 11) um esquema linear apenas devido à cronologia das fases e seus respectivos momentos.

Quadro 11: Esquema linear das fases da pesquisa

<table>
<tr><th>INVESTIGAÇÃO</th><th>FASES</th><th>INTERVENÇÃO</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Reflexão Inicial</td><td>Inferência do problema</td><td rowspan="9"></td></tr>
<tr><td>Revisão bibliográfica</td></tr>
<tr><td>Constatação do problema</td></tr>
<tr><td>Idealização da Formação</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Planificação</td><td>Escolha do agrupamento</td></tr>
<tr><td>Divulgação da pesquisa</td></tr>
<tr><td>Elaboração dos instrumentos</td></tr>
<tr><td>Acreditação da Oficina</td></tr>
<tr><td>Escolha dos participantes</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Ação</td><td>1º momento da intervenção</td><td rowspan="2">Reflexão Inicial</td></tr>
<tr><td>2º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>3º momento da intervenção</td><td rowspan="8">Planificação</td></tr>
<tr><td>4º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>5º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>6º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>7º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>8º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>9º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>10º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>11º momento da intervenção</td><td>Ação</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Retroalimentação</td><td>12º momento da intervenção</td><td rowspan="3">Retroalimentação</td></tr>
<tr><td>13º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>14º momento da intervenção</td></tr>
<tr><td>Tratamento dos dados</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Conclusões</td></tr>
</table>

Certos de que este processo é cíclico, apresentamos a seguir o nosso modelo de investigação-ação desenvolvido para esta pesquisa. Trata-se de um esquema cónico (Figura 66) em que a linha vermelha representa a trajetória do investigador e a linha azul representa a trajetória dos docentes participantes. As linhas temporais se iniciam no vértice deste cone e avançam pelas suas geratrizes.

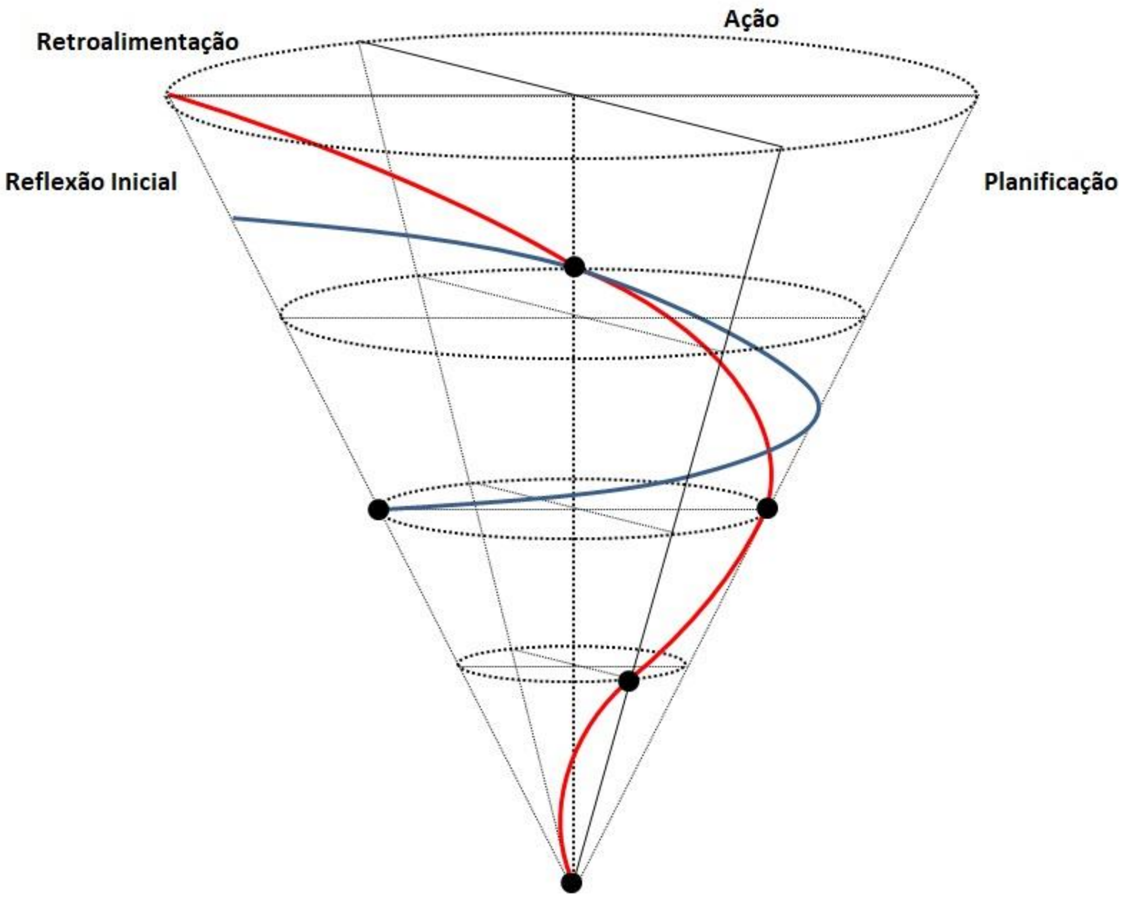


Figura 66: Esquema cónico da investigação-ação desta pesquisa

É de notar que a faixa (intervalo de tempo) que compreende a ação do investigador, é a mesma que compreende a reflexão inicial, a planificação e a ação por parte dos docentes participantes. Visando a maior percepção deste e de outros aspectos, apresentamos também este esquema cónico na forma planificada (Figura 67).

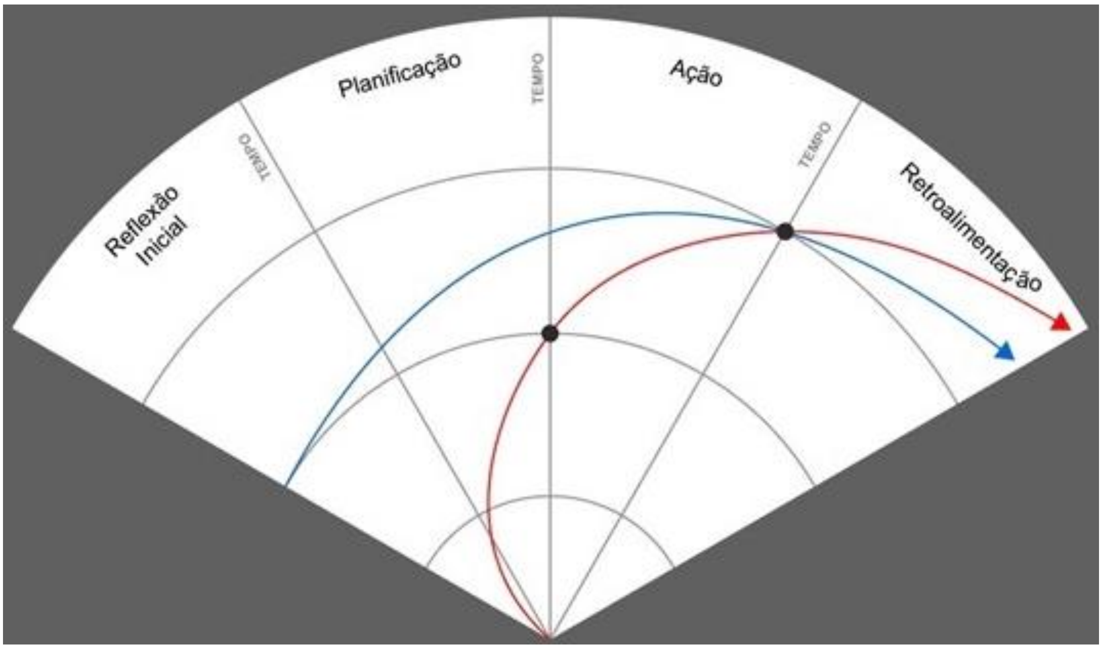


Figura 67: Esquema cónico planificado da investigação-ação desta pesquisa

IV. 3.2. Cronograma da intervenção

Quadro 12: Cronograma da intervenção

TRABALHO PRESENCIAL	DESCRIÇÕES DAS ETAPAS DA OFICINA DE FORMAÇÃO	TEMPO PREVISTO	TRABALHO AUTÔNOMO	PERÍODO 2017
1º P	❖ P.1.1: Boas-vindas, apresentações	20 min		10 FEV
	❖ P.1.2: Questionário Q1	30 min		
	❖ P.1.3: Debate diagnóstico inicial – FG1	50 min		
	❖ P.1.4: Discussão sobre ensino e aprendizagem	50 min		
2º P	❖ P.2.1: Apreciação do programa e metas e manuais	60 min		17 FEV
	❖ P.2.2: Discussão matemática dos conceitos de simetrias	90 min		
	○ A.1.1: Recolha de recursos artísticos, culturais e patrimoniais	120 min	1º A	
3º P	❖ P.3.1: Apresentações dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais	60 min		03 MAR
	❖ P.3.2: Início da criação do “Banco de Atividades”	90 min		
	○ A.2.1: Elaboração de atividades	180 min	2º A	
4º P	❖ P.4.1: Apresentação das atividades elaboradas e aprimoramentos	60 min		17 MAR
	❖ P.4.2: Continuação da criação do “Banco de Atividades”	90 min		
	○ A.3.1: Conclusão das atividades	120 min	3º A	
5º P	❖ P.5.1: Entrevista – Focus Grupo FG2	50 min		31 MAR
	❖ P.5.2: Questionário Q2	30 min		
	❖ P.5.3: Resolução e Seleção colaborativa das atividades	70 min		
	○ A.4.1: Elaboração dos planeamentos	120 min	4º A	
6º P	❖ P.6.1: visita ao Museu Monográfico de Conimbriga	150 min		21 ABR
	○ A.5.1: Implementação das atividades selecionadas aos alunos	330 min	5º A	24 ABR 19 MAI
	○ A.5.2: Entrevistas Individuais	30 min		
7º P	❖ P.7.1: Apresentações dos resultados das implementações	80 min		08 JUN
	❖ P.7.2: Discussão sobre os resultados apresentados	70 min		
8º P	❖ P.8.1: Debate de avaliação dos procedimentos, recursos e impactos	90 min		09 JUN
	❖ P.8.2: Discussão sobre os Relatórios Finais	60 min		
	○ A.6.1: Elaboração dos relatórios finais	300 min	6º A	

IV.4. Aspectos éticos

A proximidade entre investigador e investigado é uma característica mais comum nas metodologias qualitativas, motivo que demanda maior atenção às questões éticas da pesquisa (Martins, 2004). É importante que o investigador esteja atento às responsabilidades éticas e limitações legais inerentes tanto à recolha de dados quanto à utilização e publicação futura da pesquisa (McMillan & Schumacher, 2005, p. 173). León & Montero (2015) definem como ética da investigação "o conjunto de valores que orienta a atuação dos investigadores. Fundamentalmente, avalia a relação custo-benefício do conhecimento e as considerações com os participantes" (p. 66).

Independentemente de onde uma investigação atue, deve-se considerar preocupações ética como demanda da comunidade científica internacional (Simons & Usher, 2012). Maia (2014, p. 178) apresenta algumas das principais diretrizes consideradas por especialistas (*American Educational Research Association*, 2011; Bogdan & Birklen, 2013; Fiorentini & Lorenzato, 2007) e que também consideramos adequadas à nossa pesquisa:

- *Anonimato* – Os questionários foram respondidos sem identificação do investigado, tendo por consequência a interpretação dos dados de forma impessoal.
- *Consentimento livre e esclarecido* – Todos os participantes foram informados da investigação em questão e os dados recolhidos com consentimento e colaboração dos mesmos. Os preenchimentos dos questionários e as participações nas entrevistas foram facultativos, mesmo assim todos os presentes não se opuseram em colaborar nas sessões em que estes foram aplicados.
- *Confidencialidade* – A recolha e o tratamento dos dados foram realizados exclusivamente pelos investigadores e nenhuma outra pessoa teve acesso a estes dados. Com os devidos consentimentos de todos os envolvidos, a divulgação dos dados e suas respectivas interpretações dar-se-á, baseada na ética científica, apenas para fins de investigação.
- *Responsabilidade do investigador* – "Respeitar a integridade moral dos participantes no estudo ao não revelar elementos que os possam

identificar mas, ao mesmo tempo, tentarmos ser devotos e fiéis aos dados recolhidos" (p. 178). Os dados obtidos não sofreram algum tipo de manipulação ou foram relacionados de forma a não condizer com a realidade.

Outro ponto a destacar é o ocorrido durante a escolha dos participantes desta investigação. Em comum acordo com a Coordenação do agrupamento onde ocorreu o estudo, não consideramos que seria ético selecionar os participantes apenas por conveniência da pesquisa em apreço. A partir disto, agregar a opção pela escolha por voluntariado permitia a participação de todos os professores do 1º CEB daquele agrupamento que estivessem interessados em assim fazer.

Relativamente aos docentes das turmas escolhidas por conveniência para grupo de controle, após a implementação do teste foi-lhes oferecido a oportunidade de participação em uma nova Ação de Formação, na qual seria apresentada uma forma resumida da OFD ocorrida anteriormente. Esta Ação de Formação de curta duração abordaria primordialmente a metodologia de implementação das atividades de simetrias utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais, como realizado na Oficina desta investigação.

Por fim, corroborando com Bernal (2010), reconhece-se a ciência moderna como uma das maiores aquisições da humanidade, gerida por ideologias fundamentadas na ciência e no uso dos instrumentos por ela desenvolvidos. Cabe, então, aos investigadores utilizarem estes instrumentos de maneira eticamente correta, por que, assim como ciência fomenta o progresso também pode causar destruição (Bernal, 2010). Nas investigações em geral, a ética deve ser mais do que uma prioridade, uma primordialidade. Através desta consideração a ciência "se orienta a formar melhores pessoas, mais humanas e respeitosas delas mesmas, dos demais e do meio ambiente onde vivem" (Bernal, 2010, p. 18).

Aliás, como reflexo das mudanças sociais, as mudanças educacionais devem ultrapassar "a alfabetização e de habilidades básicas em matemática para focar em ambientes de aprendizagem e novas abordagens à aprendizagem, em busca de mais justiça, equidade social e solidariedade mundial" (UNESCO, 2016b, p. 15). D'Ambrósio (2009) em torno da matemática Crítica, apoia suas propostas de educação matemática nos ensinamentos de dois dos matemáticos mais renomados da história, Albert Einstein e Bertrand Russel, com os quais diz ter aprendido não só de matemática, mas sobretudo de humanidade. Em um de seus livros, D'Ambrosio (2009) revive uma frase desses dois inspiradores matemáticos durante o Manifesto Pugwash de 1955, dizendo "Esqueçam-se de tudo e lembrem-se da humanidade" (p. 11).

IV. 5. Limitações e debilidades

Sobre a importância em revelar as limitações e debilidades de uma investigação científica, esta enquanto única causadora de conhecimento científico válido. Jaki (1991) salienta a humildade em superar o reducionismo em função de, do contrário, fadar-se à causa substancial da falência cultural. Diz ainda, o autor, que não existe forma específica de conhecimento que contemple toda a complexidade da experiência humana, porque discordando disto, permanecerá "o debate infrutuoso e estéril entre os humanistas e os científicos, pela crescente insatisfação com os resultados ou usos do conhecimento científico porque não dá mais do que a ciência pode dar" (Jaki, 1991, p. 53). Como exemplo, Bernal (2010) bem relembra a humildade de Einstein em suas realizações e revelações de limitações pessoais e científicas.

Referentemente à esta investigação, revelamos as limitações e debilidades identificadas ao longo de todos os seus processos.

No primeiro contato com os docentes do Agrupamento donde os participantes estão integrados, apresentamos a pesquisa com suas características e propostas a todos os prodessores do 1º CEB. Estavam presentes 42 professores, dos quais 21 manifestaram interesse em participar. Aquando da formalização da inscrição na Ação de Formação, apenas 11 destes docentes assim procederam. Além disso, um destes abandonou a formação após o primeiro trabalho presencial e outro participou ativamente apenas da metade destes. Consideramos que a remediação diante da quantidade reduzida de docentes fosse a ampliação de critérios a serem avaliados, a partir dos quais emanaram ainda mais instrumentos de recolha de dados. Avaliamos que, apesar da quantidade reduzida de docentes, estes foram aferidos de forma contínua e intensa, não permitindo margem para descrédito da pesquisa.

Durante a aplicação do questionário Q1, presenciamos alguns curtos diálogos entre os participantes, ocorrência que considerávamos previsível desde o planejamento. No entanto, não consideramos que este fato tenha influenciado os resultados deste instrumento, uma vez que muitas das questões que demandavam algum conhecimento prévio não foram respondidas ou foram, assim, sem sentido. Quando já contávamos com nove participantes na OFD, apenas seis tiveram presentes no dia previsto para a aplicação do questionário Q2. Assim, antes do trabalho presencial seguinte, enviamos este questionário aos demais três docentes, os quais o responderam sem alguma supervisão. Estes docentes garantiram terem assim feito de forma individual e sem consulta a qualquer fonte.

Em relação aos instrumentos, consideramos que deveriam ser mais amplamente validados, com pareceres de mais especialistas a fim de aumentar sua fiabilidade. Além disso, não submetemos os instrumentos a alguma prova piloto.

Sobre as entrevistas, tanto as individuais quanto as em focus grupo, seria mais adequado, como refere Bogdan e Biklen (1994), evitarmos perguntas que pudessem ser respondidas por *sim* ou *não*. Apesar de não termos atentado para este fato em todas as perguntas e pelo fato de todas estas entrevistas terem sido semiestruturadas, muitas delas foram procedidas por outras perguntas que chamamos de *perguntas de recurso*, as quais serviam para permitirem aos respondentes complementarem os questionamentos prévios.

CAPÍTULO V – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS RESULTADOS

O presente capítulo é dedicado à apresentação dos resultados obtidos com base no estudo descrito no capítulo anterior, cujos objetivos gerais incidem nas seguintes vertentes:

I. caracterização do conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da OFD, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico (ensino e planificações e recursos) e considerações DOCENTES a partir destes conhecimentos;
II. planificação, implementação, análise e avaliação de uma proposta de ensino de simetrias no 1º CEB através de uma OFD utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais;
III. avaliação das melhorias alcançadas na aprendizagem docente e verificação das consequências na aprendizagem discente, ambas em relação ao ensino de simetrias no 1º CEB utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

A apresentação e análise interpretativa dos dados recolhidos baseiam-se fundamentalmente na análise de conteúdo (Bardin, 1977, 1997; Almeida, 2011; Silva, Gobbi & Simão, 2005; Trivinos, 1987; Ramos & Salvi, 2009). A análise de conteúdo das unidades de registro emergentes de todos os instrumentos de recolha de dados permitiu identificar um conjunto de categorias e subcategorias, que podem ser apreciadas no Quadro 13, a seguir.

Quadro 13: Matriz Conceitual: categorias e subcategorias

O. E.[71]	CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS
I-i	Conhecimento Científico Prévio (CoCiP)	Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos
		Reconhecimento de dificuldades
		Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos)
I-ii	Conhecimento Curricular Prévio (CoCuP)	Percepções das características dos documentos orientadores sobre a na abordagem das simetrias no 1º CEB nos últimos PMEB
		Percepções sobre RACP e currículo
		Reconhecimento de dificuldades
I-iii	Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: ensino (CoDiPeP/e)	Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos didático-pedagógicos
		Experiências docentes no ensino de simetrias
		Reconhecimento da importância no 1º CEB
		Recursos utilizados no ensino de simetrias até ao momento
		RACP no ensino de simetrias
		Debilidades e Dificuldades
		Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas
		Percepções sobre colaboratividade
	Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e	Embasamento (PA)
		Objetivos gerais (PA)
		Objetivos específicos (PA)

[71] A designação dada aos objetivos específicos (O.E.) fazem referência também a associação destes com o objetivo geral ao qual este está atrelado. Por exemplo, *II-i* refere-se ao objetivo específico *i* que está atrelado ao objetivo geral *II*. O mesmo será considerado nos quadros subsequentes.

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">recursos
(CoDiPeP/p-r)</td><td>Conceitos (PA)</td></tr>
<tr><td>Recursos utilizados e possibilidades</td></tr>
<tr><td>Estratégias (PA)</td></tr>
<tr><td>Avaliação (PA)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">II-iv</td><td rowspan="4">Banco de Atividades
(BA)</td><td>Preparação para a criação</td></tr>
<tr><td>Exigências e dificuldades inerentes ao processo de criação</td></tr>
<tr><td>Potencialidades</td></tr>
<tr><td>Satisfação docente com a criação</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Planificações Personalizadas
(PP)</td><td>Objetivos gerais (PP)</td></tr>
<tr><td>Objetivos específicos (PP)</td></tr>
<tr><td>Recursos (PP)</td></tr>
<tr><td>Estratégias (PP)</td></tr>
<tr><td>Avaliação (PP)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">II-v</td><td rowspan="5">Implementações
(Imp)</td><td>Expectativas dos docentes em relação à implementação das atividades</td></tr>
<tr><td>Estratégias durante as implementações</td></tr>
<tr><td>Necessidades de adequações durante as implementações</td></tr>
<tr><td>Percepção de melhorias</td></tr>
<tr><td>Dificuldades</td></tr>
<tr><td rowspan="5">III-vi</td><td rowspan="5">Satisfação e Aprendizagem Docentes
(SADoc)</td><td>Percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos</td></tr>
<tr><td>Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2)</td></tr>
<tr><td>Evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos diante das conceitualizações discentes</td></tr>
<tr><td>O papel da OFD na aprendizagem docente</td></tr>
<tr><td>O papel dos RACP na aprendizagem docente</td></tr>
</table>

		Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo
		Melhorias alcançadas com as PP
		Dificultador e aspectos a melhorar
III-vii	Satisfação e Aprendizagem Discentes (SADis)	Percepções sobre a satisfação discente
		Percepção sobre a aprendizagem discente
		Aprendizagem discente (Resultados dos Testes Discentes (TD)
		O papel dos RACP na aprendizagem discente

A apresentação dos resultados será feita sistematicamente de acordo com a sequência de categorias e subcategorias identificadas. Assim, cada subcategoria será apresentada e analisada interpretativamente de forma individual, já associada a um determinado objetivo específico desta investigação, relação que também pode ser percebida no Quadro 13.

A referida apresentação e análise interpretativa dos dados recolhidos serão, quando necessário, subdivididas em indicadores, inerentes às subcategorias, que auxiliaram a distribuição daqueles (Apêndice 6). Em alguns casos, optamos por apresentar e analisar conjuntamente os dados de dois ou mais indicadores de uma mesma subcategoria, e não indicador a indicador, com o objetivo de proporcionar uma visão mais global da subcategoria em questão. Também, em cariz complementar e visando sustentar as percepções resultantes, bem como identificar e aprofundar as suas representações, apresentamos nos apêndices (7 ao 41) os quadros que contém todas as unidades de registros que embasam as considerações analisadas, quando for demasiado exaustivo apresentar todas no trato do próprio indicador.

Os dados oriundos dos questionários Q1 e Q2 e do Teste Discente (TD) apresentar-se-ão através de suas questões e seus respectivos itens, enquanto que os dados provindos das observações diretas não participantes (ODNP), entrevistas individuais (EI), entrevistas em *focus* grupo FG1 e FG2, questionário *online* (QO), diários de campo (DC), planificações anteriores (PA) e planificações personalisadas (PP), serão apresentados, quando necessário, através dos quadros elaborados a partir de trechos de alguns intrumentos e de transcrições de entrevistas. Cabe ainda destacar, também motivado pelo fato de todas as entrevistas terem sido semiestruturadas, que, por vezes, as respostas se desviaram do tema principal da pergunta, enquadrando-se em outro tema em apreço. Logo, o fato de apresentarmos poucas citações num determinado quadro não significa que ocorreram apenas estas citações, mas que algumas respostas ou comentários podem estar integradas noutros tópicos e, de alguma forma, estão presentes neste capítulo.

Ao final das apresentações e análises interpretativas de cada categoria ou categorias correspondentes a um mesmo objetivo específico, será apresentada uma síntese baseada nos resultados aí obtidos, tendo em conta também os estudos teóricos apresentados nos capítulos I, II e III.

Conhecimento Científico Prévio (CoCiP)

Iniciamos pela apresentação e análise interpretativa dos dados referentes à categoria Conhecimento Científico Prévio (CoCiP), que é representada por três subcategorias e contribuirá para a consolidação do objetivo específico *I-i*.

Na sequência, e assim como procederemos na apresentação e análise interpretativa das demais categorias, detalharemos cada uma das subcategorias associadas através dos indicadores que a estas estão relacionados. Adiantamos que mesmos os dados provindos de perguntas fechadas ou escolha múltipla foram integrados na matriz conceitual de categorias e subcategorias que foi considerada.

- **Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos**

Esta subcategoria foi estabelecida com base nas respostas à questão 11, presente na Parte II do Q1. Cada respondente podia selecionar mais de uma opção de entre as apresentadas. Trata-se de uma questão de escolha múltipla de leque aberto, que previa sete alternativas de resposta, recodificadas em quatro indicadores (Quadro 14), que correspondem as alternativas com pelo menos uma incidência de resposta.

Quadro 14: CoCiP – Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos	Formação inicial
	Manuais escolares
	Internet
	Ação de formação

Seguimos com a análise interpretativa dos dados relativos aos quatro indicadores desta subcategoria.

- **Formação inicial; Manuais escolares; Internet; Ação de formação**

Apresentamos o Gráfico 1 a seguir com as frequências de respostas em cada uma das opções, onde se pode notar que as opções *Ainda não adquiri tais conhecimentos*, *Li sobre o tema em outras referências bibliográficas* e *De outra forma. Qual?* não tiveram incidência de resposta:

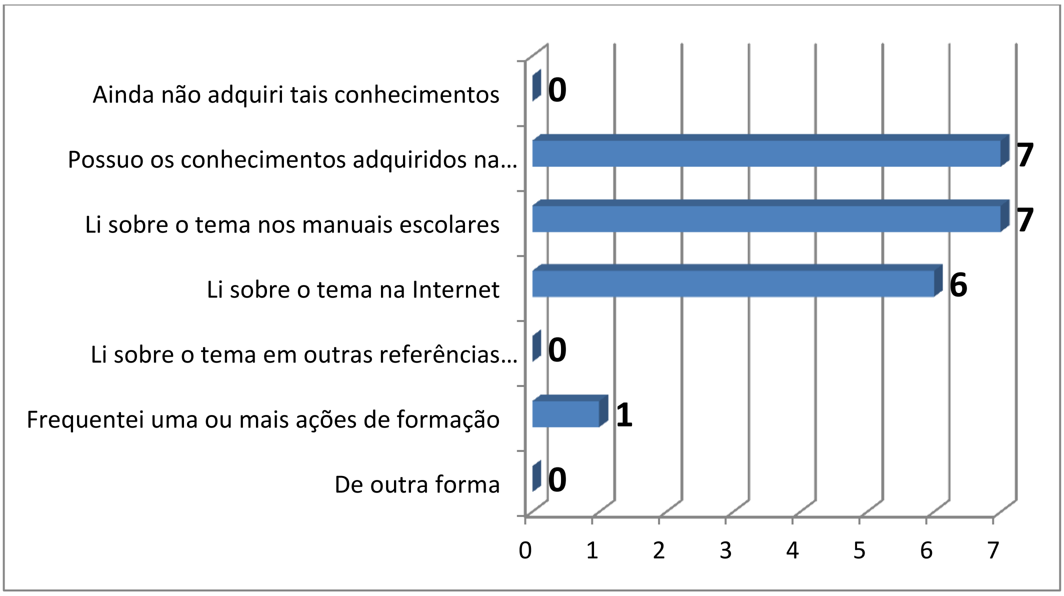


Gráfico 1: Resultado da questão 11 do Q1 – Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos

O único respondente que optou por *Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema, totalizando ___ horas somente dedicadas às simetrias* revela ter sido apenas uma ação, e, ainda assim, não indica o total de horas dedicadas a esta.

Durante a FG1, realizada logo após a aplicação do questionário Q1, destacamos o comentário do docente D4 ao afirmar "*(...) o que aprendi, aprendi por mim. Vi nos manuais, vi na internet, tiramos umas coisas aqui, ali...*" (D4/FG1). Assim, afirmamos que a predominância de formas e fontes de aquisição e atualização do conhecimento científico de simetrias dos participantes tem origem dos manuais escolares, da própria formação inicial e de buscas na *internet*.

- **Reconhecimento de dificuldades**

Passamos à esta subcategoria, que está apresentada no Quadro 15, juntamente com os seus três indicadores.

Quadro 15: CoCiP – Reconhecimento de dificuldades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Reconhecimento de dificuldades	Desconhecimento e complexidade dos termos e conceitos
	Formação inicial incompleta e desatualizada
	Insegurança para lecionar, em relação aos conhecimentos científicos

Seguimos com os indicadores desta subcategoria.

- **Desconhecimento e complexidade dos termos e conceitos (Apêndice 7)**

Todos os onze docentes manifestaram-se durante a FG1 sobre esta dificuldade em relação ao conhecimento científico de simetrias. Segundo D6, “*(…) até para nós ficam, assim, um bocado complicado as vezes, não é?*” (D6/FG1). D4 disse: “*(…) vi aqui [no questionário Q1] termos que eu própria não domino*” (D4/FG1). Em verdade, consideramos que o conjunto de citações referentes a este assunto indicam a não detenção de conhecimento científico sobre o assunto. Duas citações deste indicador fazem menção direta a conceitos específicos. D6 apontou que *“A reflexão está acessível, mas… (…) as vezes complica”* (D6/FG1) e D3 disse *“eu própria tenho dificuldade em fazê-los (aos discentes) perceber que tipo de rotação é que é…”* (D3/FG1).

- **Formação inicial incompleta e desatualizada (Apêndice 8)**

Considerando as duas *focus* grupo, FG1 e FG2, destacamos a participação ativa de oito docentes[72] na revelação das debilidades de suas próprias formações profissionais. Os docentes demonstram reconhecer o risco em contarem com o conhecimento científico oriundo das suas formações iniciais, seja pela abordagem deficiente desse conhecimento científico na própria formação, ou pela diferença de abordagem à época em que ocorrera face às atuais necessidades. D3 disse que “*(…) a nossa formação não contemplou muitas das coisas (conteúdos/conceitos) que agora estamos a dar*” (D3/FG1) e sobre o comentário "*Eu acho que na verdade, surgiram novas*

[72] D2, D3, D4, D6, D7, D8, D9 e D10 (Apêndice 8).

lacunas (dúvidas conceituais acerca das simetrias) que a gente não sabia que tinha dúvida naquilo (conceitos)" (Investigador/FG2), todos os presentes manifestaram-se em concordância.

- **Insegurança para lecionar, em relação aos conhecimentos científicos**

O indicador Insegurança para lecionar, em relação aos conhecimentos científicos, foi estabelecido a partir das informações obtidas com a questão 10 do Q1.

A questão 10 do Q1 aferiu a autocaracterização dos docentes sobre a segurança, a nível de conhecimento científico, em lecionar tais conceitos. Os dados obtidos foram recodificados em dois níveis, a saber, *Sinto segurança, ao nível do conhecimento científico, para ensinar simetrias* e *Não sinto segurança, ao nível do conhecimento científico, para ensinar simetrias*. Dez respondentes revelaram estarem inseguros em lecioná-los.

- **Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos)**

O Quadro 16, a seguir, apresenta a última subcategoria da categoria sobre conhecimento científico prévio e seus sete indicadores.

Quadro 16: CoCiP – Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos)	Desconhece propriedades de isometria
	Reconhece isometria de translação
	Reconhece isometria de rotação
	Reconhece isometria de reflexão
	Desconhece isometria de reflexão deslizante
	Desconhece relação entre isometria e simetria
	Desconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras

A análise interpretativa dos conhecimentos científicos foi feita a partir das respostas às questões 19 até 25, e seus respectivos itens, num total de treze unidades de aferição que compõem a Parte V do Q1. Estas unidades aferiam conhecimentos científicos sobre transformações geométricas, isometrias e simetrias, além de conceitos correlatos, como rosáceas, frisos e padrões.

Além disso, em cada uma destas unidades de aferição, as respostas, ou ausência delas, foram subdividas em três classes[73] de resposta – não respondida / errada; parcialmente correta; correta – tendo em conta todas as respostas provindas do Q1 e Q2. Estas três classes são consideradas independentemente de conter, ou não, respostas de apenas um ou de nenhum destes dois questionários, tendo em vista facilitar a apresentação do resultado global comparativo entre Q1 e Q2, que constitui um objetivo do estudo e será apresentado na subcategoria Evolução do nível do conhecimento científico: Comparação entre resultados do Q1 e do Q2, da categoria Aprendizagem Docente (SADoc).

Com o mesmo propósito de favorecer a comparação dos resultados, que será analisado subcategoria já mencionada, relembramos que o Q1 contou com onze respondentes enquanto o Q2 contou nove. Por este motivo e para facilitar a comparação entre os resultados obtidos com estes dois instrumentos, os resultados serão prioritariamente apresentados em pontos percentuais devidamente aproximados, salvo exceções em unidades de aferição que são permitidas a escolha de mais de uma alternativa de resposta (caso da questão 23, por exemplo).

De acordo com a divisão dos indicadores desta subcategoria, procedemos à análise interpretativa de cada uma das unidades de aferição e seus respectivos resultados, optando pela apresentação, na íntegra, apenas das unidades que contém figuras.

[73] Optamos por designar por *classe* de resposta o que comumente se designa por *categoria* de respostas. O objetivo desta opção foi não confundir com o uso do termo *categoria* já utilizado a partir da matriz conceitual.

- **Desconhece propriedades de isometria**

Este indicador compreende os resultados de quatro unidades de aferição: 19.1, 19.2, 20 e 21.

Iniciamos pela questão 19, em seu item 19.1. Esta unidade de aferição apresentou exemplos de transformações geométricas e questionou, de entre os exemplos apresentados, quais pertencem ao grupo das isometrias no plano euclidiano.

As respostas, ou a ausência dela, foram divididas em três classes:

- não respondida / errada, que inclui as respostas do tipo '*Desconheço*' ou equivalentes;
- parcialmente correta, incluindo respostas incompletas como *translação, rotação e reflexão*;
- correta, contando apenas com respostas equivalentes a *translação, rotação e reflexão e reflexão deslizante*.

A análise das respostas evidencia que a maioria dos participantes desconhece o conceito em apreço. Apenas dois participantes do Q1 responderam a este item, ambos citando *translação, rotação e reflexão*, tendo, um destes dois respondentes, escrito, previamente, *Desconheço! (Talvez)*. As duas respostas foram alocadas na classe parcialmente correta.

O item 19.2, relacionado ao mesmo texto-base da questão 19, questionava que propriedades têm em comum as transformações geométricas referidas na pergunta anterior para que pertençam ao grupo das isometrias.

Consideramos as três classes de resposta previstas. A classe de respostas corretas inclui as que fazem menção à preservação de distâncias. Não houve necessidade de definir parâmetros para a classe parcialmente correta, uma vez que todas as respostas, considerando os dois questionários, enquadravam-se ou na classe não respondida / errada ou na correta.

Em particular, nenhum dos onze participantes do Q1 respondeu a esta unidade de aferição.

A questão 20 abordou composição de reflexões. A partir da afirmação de que todas as isometrias podem ser obtidas através da composição de, no máximo, *n* reflexões, questionava-se a concordância desta afirmação e, em caso afirmativo, qual seria o valor de *n*.

As respostas, ou a ausência dela, foram subdivididas em três classes:

- não respondida / errada, onde incluímos as unidades não respondidas e as respostas *Não* à afirmação;
- parcialmente correta, englobando as respostas *Sim* à afirmação, porém não seguidas de complemento para valor de *n* ou seguidas de complementos diferentes do valor *3*;
- correta, abarcando respostas corretas por completo, ou seja, *Sim* em resposta à afirmação, seguidas do complemento *3*.

Novamente, nenhum dos onze respondentes do Q1 apresentou alguma resposta.

A questão 21 incidiu sobre a designação de um conceito não existente, o de *reflexão rotacional*, perguntando por que motivo, à semelhança do que acontece com a reflexão deslizante, a aplicação a uma dada figura de uma reflexão seguida de uma rotação não tem também uma designação própria, por exemplo de reflexão rotacional.

Consideramos as três classes de resposta previstas para manter o propósito de auxiliar na comparação futura dos resultados obtidos com o Q1 e o Q2. A classe de respostas corretas incluiriam as que alegassem não existir *reflexão rotacional* pelo fato de a própria reflexão deslizante ser capaz de corresponder a uma reflexão seguida de uma rotação. No entanto, à semelhança dos critérios considerados na unidade de aferição 19.2, não houve necessidade de definir parâmetros para a classe correta, nem mesmo para a classe parcialmente correta, uma vez que todas as respostas, considerando o Q1 e o Q2, se enquadram ou na classe não respondida / errada ou na correta. Novamente, nenhum dos onze participantes do Q1 respondeu a esta unidade de aferição.

Em suma, constata-se que os participantes têm lacunas ao nível de conhecimento científico das propriedades de isometria, uma vez que a classe de respostas não respondida / errada têm 95% de frequência e a classe parcialmente complementa com os demais 5%.

- **Reconhece isometria de translação**

Este indicador inclui o resultado do item *d*[74] da questão 22. Adiantamos que os indicadores seguintes compreenderão outros itens desta mesma questão, que é subdividida em cinco itens, de *a* a *e*. Todos estes itens apresentam uma imagem contendo duas figuras congruentes – figura 1 e figura 2 –, no entanto, diferentes (figura 1 ≠ figura 2). A partir daí, questionam a possibilidade de afirmar a existência de uma isometria capaz de transformar uma na outra. Estes itens contavam com três alternativas de resposta: □ *Sim. Qual?*; □ *Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso*; □ *Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra*.

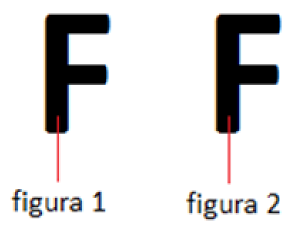
Em todos estes itens, o fato de as figuras serem congruentes faz com que a resposta seja afirmativa, existindo uma isometria própria para a transformação mencionada, não havendo nessecidade de contar com a composição de duas isometrias, embora a composição de duas isometrias também seja uma isometria. Além disso, como as figuras são diferentes, apesar de congruentes, a transformação geométrica que transforma uma na outra é uma apenas isometria, não sendo, esta, uma simetria. Não cabe, nos cinco itens, o julgamento a respeito do conceito de *globalmente invariante*. Assim, diante das alternativas de resposta de cada item, a correta nos cinco casos apresentados, é primeira, cabento ao respondente apenas apresentar que isometria é esta.

O item *d* (Figura 68), é especificamente sobre isometria de translação.

---

[74] A sequência considerada para os indicadores (translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante) está de acordo com a do Capítulo I, que é a mesma considerada por Veloso (2012). A questão 22, contida no Q1 e no Q2, apresentava os itens na sequência *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, normalmente.

d)



Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? ______________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

Figura 68: Enunciado do item *d* da questão 22 – Isometria de translação

Separamos as respostas, ou a ausência delas, em três classes:

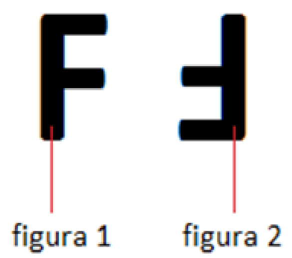
- não respondida / errada, que inclui as unidades não respondidas;
- parcialmente correta, que admite as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Simetria de translação*;
- correta, que abarca as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Isometria de translação* ou apenas *Translação*.

Dois participantes do Q1 não apresentaram resposta e nove respostas enquadraram-se na classe correta.

- **Reconhece isometria de rotação**

Este indicador inclui o resultado do item *a* da questão 22 (Figura 69).

a)



Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? __________________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

Figura 69: Enunciado do item *a* da questão 22 – Isometria de rotação

As respostas, ou a ausência dela, foram divididas em três classes:

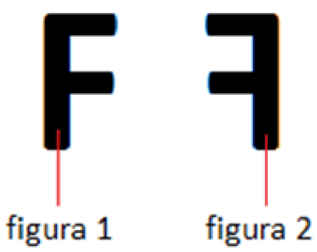
- não respondida / errada, que abarca, além das unidades não respondidas, as respostas *Sim. Qual?*, porém complementadas por algo bem distante do sentido da resposta correta, como por exemplo, *Dilação Rotativa*;
- parcialmente correta, que engloba as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Simetria de rotação*;
- correta, que inclui as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Isometria de rotação* ou apenas *Rotação*.

Assim, detectamos três respostas, ou ausências de resposta, na classe não respondida / erradas e oito respostas na classe correta.

- **Reconhece isometria de reflexão**

Este indicador inclui o resultado do item *c* da questão 22 (Figura 70).

c)



Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? ________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

Figura 70: Enunciado do item *c* da questão 22 – Isometria de reflexão

Separamos as respostas, ou a ausência delas, em três classes:

- não respondida / errada, que inclui as unidades não respondidas;
- parcialmente correta, que admite as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Simetria de reflexão*;
- correta, que abarca as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Isometria de reflexão* ou apenas *Reflexão*.

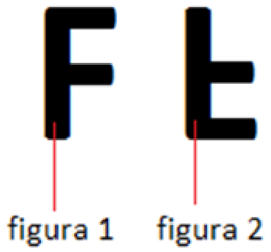
Dois participantes do Q1 não apresentaram resposta e nove respostas se enquadraram na classe correta.

- ### Desconhece isometria de reflexão deslizante

Este indicador inclui os resultados dos itens *b* e *e* da questão 22.

Começamos pelo item *b* (Figura 71).

b)



Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? ______________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

Figura 71: Enunciado do item *b* da questão 22 – Isometria de reflexão deslizante

As respostas, ou a ausência dela, foram divididas em três classes:

- não respondida / errada, que aloca, além das unidades não respondidas, as que optaram pela última alternativa de resposta;
- parcialmente correta, que inclui as respostas *Sim. Qual?*, porém não apresentavam complemento algum;
- correta, que compreende as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Isometria de reflexão deslizante* ou apenas *Reflexão deslizante*.

Dez de entre os participantes do Q1 não apresentaram resposta ou responderam de acordo com os parâmetros da classe não respondida / erradas e apenas a resposta de um participante se enquadrou na classe parcialmente correta.

Passamos ao item *e* (Figura 72), também sobre reflexão deslizante.

e)

figura 1 figura 2

Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? ______________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias dentre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

Figura 72: Enunciado do item *e* da questão 22 – Isometria de reflexão deslizante

As respostas, ou a ausência dela, foram divididas em três classes:

- não respondida / errada, que admite, além das unidades não respondidas, as que optaram pela segunda ou terceira alternativas de resposta;
- parcialmente correta, que compreende as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Simetria de reflexão deslizante*;
- correta, que inclui as respostas *Sim. Qual?*, complementadas por *Isometria de reflexão deslizante* ou apenas *Reflexão deslizante*.

Oito de entre os participantes do Q1 não apresentaram resposta ou responderam de acordo com os parâmetros da classe não respondida / erradas e a resposta de três participantes se enquadrou na classe correta.

Considerando conjuntamente estas cinco unidades de aferição de conhecimentos científicos que compõem a questão 22, temos os seguintes resultados (Gráfico 2).

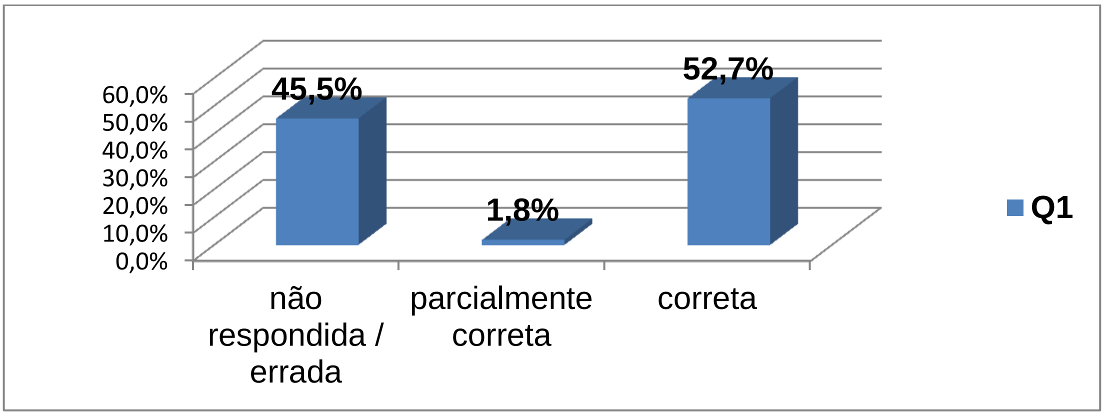


Gráfico 2: Resultados conjuntos dos itens da questão 22 – Reconhecimento de cada uma de entre as quatro isometrias existentes

Optamos por apresentar exclusivamente estes resultados por pontos percentuais com uma casa decimal para facilitar a apresentação, destes mesmos quatro itens, aquando dos resultados comparativos entre Q1 e Q2, na subcategoria Evolução do nível do conhecimento científico: Comparação entre resultados do Q1 e do Q2.

- **Desconhece relação entre isometria e simetria**

Este indicador inclui o resultado da questão 23. Esta questionou a relação entre os conceitos de simetria e isometria, oferecendo cinco alternativas de resposta: □ *Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças*; □ *Qualquer simetria é uma isometria*; □ *Qualquer isometria é uma simetria*; □ *Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra*; □ *Outra. Qual?*.

A única alternativa correta desta questão é *Qualquer simetria é uma isometria*.

No Gráfico 3 apresentam-se os resultados obtidos.

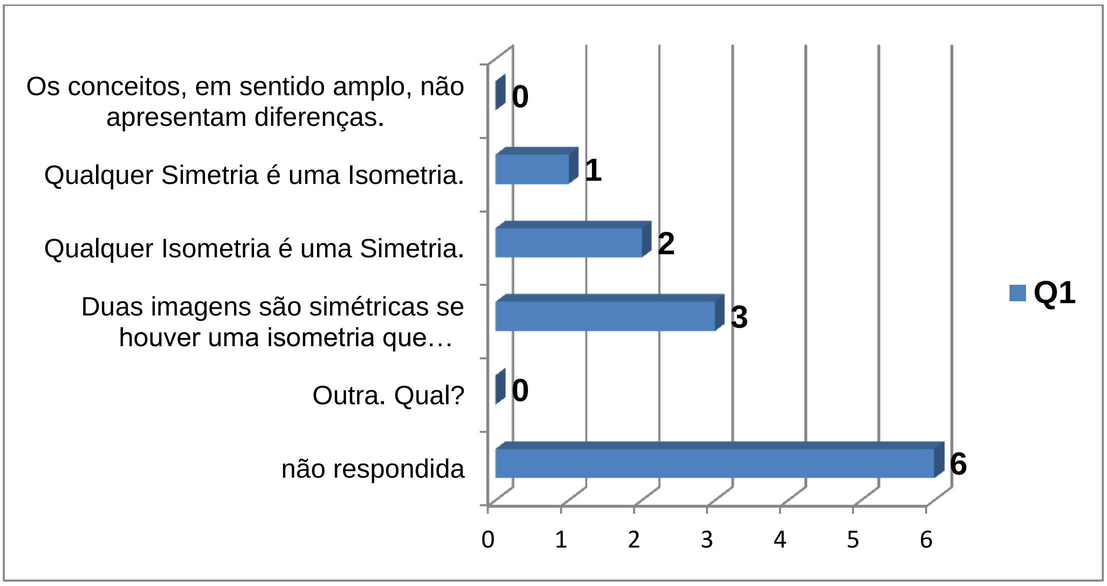


Gráfico 3: Resultado da questão 23 do Q1 – Relação entre isometria e simetria

A partir do Gráfico 2 é possível perceber que a soma dos valores referentes às respostas obtidas superam o total de respondentes do Q1, fato decorrente da possibilidade de os respondentes escolherem mais de uma alternativa de resposta. Apenas um de entre os respondentes do Q1 se valeu desta possibilidade, escolhendo as alternativas *Qualquer isometria é uma simetria* e *Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra*.

Consideramos as três classes de respostas, ou a ausência dela:

- não respondida / errada, que compreende, além das unidades não respondidas, as que optaram por uma ou mais alternativas, não incluindo a alternativa correta;
- parcialmente correta, que admite as opções por mais de uma alternativa de resposta, estando a alternativa correta entre as opções; e
- correta, que inclui as respostas onde a única opção feita pelo respondente foi pela alternativa correta.

A classe não respondida / errada contou com dez frequências, enquanto a classe correta contou com apenas uma.

Cabe destacar que a opção de resposta *Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra* remete em concordância à conceitualização antiga de simetria devido ao fato de referenciar a duas figuras (Maia, 2014). Para Maia (2014), "alguns professores parecem possuir ainda a conceitualização antiga de simetria associando-a a uma transformação que ocorre entre duas imagens" (p. 239).

- **Desconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras**

Este indicador inclui os resultados dos itens 24.1, 24.2 e 24.3 da questão 24 e dos itens 25.1 e 25.2 da questão 25.

Começamos pela questão 24. Esta incide sobre as considerações a respeito de rosáceas, frisos e padrões, a partir da seguinte afirmação: *Para estudar, comparar e classificar as figuras características da arte decorativa, do ponto de vista geométrico, não devemos considerar a natureza dos tais elementos que se repetem, mas sim pelo modo como se processa essa "repetição", ou seja, pela estrutura ou organização. Assim, se duas figuras têm a mesma organização, apesar de motivos artísticos distintos, estas devem ser classificadas como "do mesmo tipo"* (Veloso, 2012).

Diante da consideração anterior, os itens 24.1, 24.2 e 24.3 questionavam, respectivamente, a quantidade de rosáceas, frisos e padrões existentes. Assente nas bibliografias utilizadas durante a OFD, as respostas corretas destes três itens são, respectivamente, *Infinitas*, *7* e *17*. Assim, subdividimos as respostas, e a ausência delas, em três classes:

- não respondidas / errada, que engloba as ausências de resposta;
- parcialmente correta, que compreende as questões que apresentam um ou dois itens respondidos corretamente, estando um terceiro item respondido incorretamente;
- correta, que inclui as respostas apresentadas estando os três itens corretos.

Dez de entre os participantes do Q1 não apresentaram resposta e apenas um participante apresentou respostas que se enquadram nos parâmetros da classe parcialmente correta. Mesmo assim, cabe revelar que esta resposta da classe parcialmente correta foi conferida devido o participante ter respondido *Infinitas* em todos os três itens, acertando, assim, apenas o item 24.1.

O item 25.1 está relacionado com a implicação *se um friso tem simetria de reflexão deslizante, então, também tem simetria de reflexão de eixo horizontal*, e o item 25.2 com a reciprocidade desta implicação. Ambos admitiam apenas as opções *Sim* ou *Não* para respostas, sendo correta a resposta *Não* nos dois itens.

Por tratar-se de dois conceitos, um em cada item, apresentamos o resutado dos dois separadamente. Em ambos, não consideramos plausível a designação da classe parcialmente correta. Assim, em cada item, subdividimos as respostas, ou ausência delas, em apenas duas classes:

- não respondida / errada, que inclui, além das unidades não respondidas, as respostas *Sim*;
- correta, que admite as respostas *Não*.

No item 25.1, detectamos a frequência de dez na classe não respondida / errada e de apenas uma na classe correta. Já no item 25.2, a frequência na classe não respondida / errada foi de onze, total de participantes do Q1.

Considerando, agora, todas as treze unidades de aferição de conhecimentos científicos dos professores participantes da OFD, designamos três classes de respostas: não respondida / errada, parcialmente correta e correta. Aglutinando todas as respostas, ou ausência delas, numa mesma classe correspondente, tem-se o seguinte resultado global das unidades de aferição de conhecimento científico do Q1 (Gráfico 4).

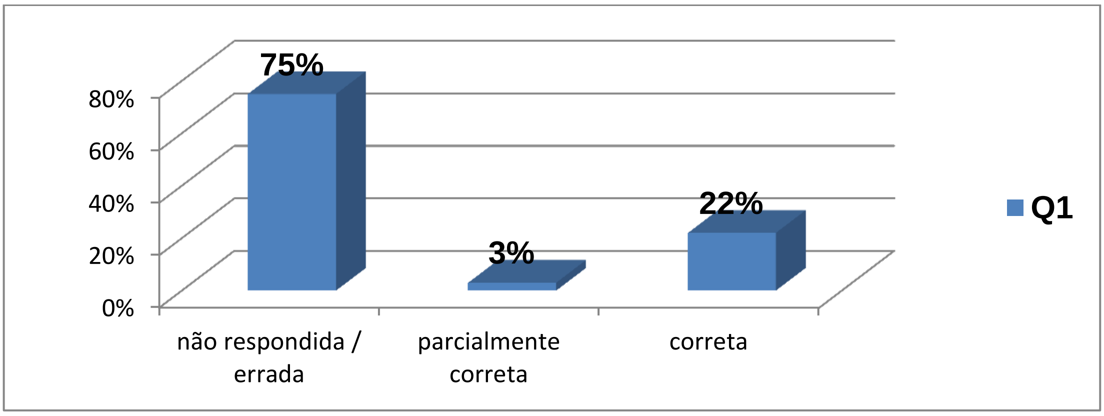


Gráfico 4: Resultado Global – Conhecimento Científico

Em síntese – Conhecimento Científico Prévio (CoCiP):

Diante da apresentação e análise interpretativa dos dados referentes à caracterização do conhecimento científico prévio dos participantes, destacamos que a maioria destes tem os manuais escolares e a formação inicial própria como a fonte de aquisição de conhecimentos científicos de simetrias, fontes e formas estas que colocam em risco o nível de conhecimento científico dos docentes. Esta consequência também é considerada nos estudos realizados por Henderson e Rodrigues (2008) e Price e Ball (1997), que revelam deveras limitações por parte dos docentes investigados, nomeadamente na forma de questionamento pouco profunda, provindas de textos de apoio ou manuais escolares, refletido por as respostas conceitualmente fracas e reveladoras de suas próprias limitações.

Também em relação aos conhecimentos científicos, quase a totalidade dos professores participantes do Q1 sentem-se inseguros em lecionar simetrias, em consequência do desconhecimento e complexidade dos termos e conceitos e da formação inicial incompleta e desatualizada.

Em relação aos resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos, os dados apontam que os docentes reconhecem, *a priori*, as isometrias de translação, de rotação e de reflexão, embora desconhecem a isometria de reflexão deslizante, algumas propriedades de isometria, a relação entre isometria e simetria e a classificação e conjunto de simetrias de figuras. O resultado global das treze unidades de aferição de conhecimentos científicos dos participantes, revela que 75% das respostas compões a classe não respondida / errada e apenas 22% a classe correta. É importante destacar que estas unidades de aferição abordavam conceitos científicos que, aquando da aplicação do Q1, ainda não tinham sido abordados na ação de formação.

São poucos os estudos sobre o conhecimento docente em relação às transformações geométricas (Gomes, 2012), e este conhecimento deve ser incluído na formação inicial de matemática, pois, do contrário, estes docentes terão dificuldades em ensiná-los (Thaqi, 2009).

Conhecimento Curricular Prévio (CoCuP)

Passamos, agora, para a apresentação e análise interpretativa dos dados referentes à categoria Conhecimento Curricular Prévio (CoCuP), que é representada por duas subcategorias e contribuirá para a consolidação do objetivo específico *I-ii*.

- **Percepções das características dos documentos orientadores sobre a na abordagem das simetrias no 1º CEB nos últimos PMEB**

O Quadro 17 apresenta esta subcategoria e seus indicadores.

Quadro 17: CoCuP – Percepções das características dos documentos orientadores sobre a na abordagem das simetrias no 1º CEB nos últimos PMEB

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepções das características dos documentos orientadores sobre a na abordagem das simetrias no 1º CEB nos últimos PMEB	Acompanhamento das mudanças ocorridas
	Propostas curriculares desajustadas ao nível de escolaridade a que se destinam
	Metas Curriculares constituem um bom guião passo-a-passo para os professores

Vamos aos indicadores.

- **Acompanhamento das mudanças ocorridas nos documentos**

A questão 16 da Parte III do Q1 permitia saber se o respondente acompanhou as mudanças ocorridas nos documentos orientadores. Cinco docentes revelaram não terem acompanhado estas mudanças e cinco revelaram a terem acompanhado. Note que um docente não apresentou resposta.

Esta questão é de escolha múltipla de leque aberto[75] (Pardal & Lopes , 2011), contendo três alternativas, sendo as duas últimas com possibilidade de o respondente apresentar um complemento de resposta. Assim, quanto as

[75] Chamadas de *mistas* por Fiorentini e Lorenzato (2007).

respostas a estas duas últimas alternativas nos permite detectar dados para a análise do próximo indicador.

- **Propostas curriculares desajustadas ao nível de escolaridade a que se destinam**

De entre os cinco docentes que revelaram ter acompanhado tais mudanças, quatro consideraram que a abordagem presente no PMEB atual é menos adequada ao 1º CEB. Destes quatro respondentes, dois justificaram ser *mais exigente* e os outros dois pela *falta de maturidade e capacidade de abstração* dos alunos nesta faixa etária. O único respondente que revelou ter acompanhado tais mudanças e considera que a abordagem do PMEB atual é mais adequada ao 1º CEB, alegou que as crianças estão mais *despertas* para tal, apesar de considerar esta abordagem mais complicada para os professores.

Na FG1, dois docentes manfestaram-se diretamente a respeito do nível de abordagem de simetrias sugerido no PMEB atual como ponto negativo deste documento. D7 considera que as metas curriculares "*(…) estão muito exageradas para o nosso nível de ensino*" (D7/FG1) e D3 completa dizendo que "*Não só com as simetrias, mas com todos conteúdos que está numa complexidade, numa extensão tal, que é muito difícil para nós, portanto, conseguirmos resultados bons (…)*" (D3/FG1).

- **Metas Curriculares constituem um bom guião passo-a-passo para os professores**

Durante a FG1, os mesmos docentes que se manifestaram acerca das inadequações consideradas nos documentos – D3 e D7 citados no indicador anterior – apontaram alguns aspectos que jugam ser adequados nos documentos. Segundo D7, "*as metas curriculares estão muito bem elaboradas*" (D7/FG1) e configura-se como "*um facilitador para o professor (…) Numa forma teórica parece-me [bem]…*" (D7/FG1) e "*se nós pegarmos naquilo direitinho, também tem como devemos tratá-los*" (D7/FG1). D3 considera que, "*se aquilo [PMEB] resolve todos os problemas na aplicação, isso aí já é outra questão. Mas eu penso que sim…", pois "aquilo [PMEB] tem uma apresentação boa*" (D3/FG1).

A respeito das orientações presentes no PMEB, consideramos as explanações de três docentes[76]. Os docentes D7, D10 e D3 reconhecem as orientações didáticas do PMEB atual como uma sequência a ser seguida, passo-a-passo. Segundo estes docentes, "*Tem é que seguir os passos que lá estão, não saltar nenhum para conseguir…*" (D7/FG1) pois as orientações "*estão estruturadas para não começarmos no segundo patamar quando ainda não se domina o primeiro*" (D10/FG1), ou seja, "*aquilo é gradativo para que seguimos os passos…*" (D3/FG1).

- **Percepções sobre RACP e currículo**

O Quadro 18 apresenta esta subcategoria e seus indicadores.

Quadro 18: CoCuP – Percepções sobre RACP e currículo

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepções sobre RACP e currículo	Conhecimento diminuto sobre os RACP sugeridos no currículo
	Reconhecimento das potencialidades do uso de RACP

Seguimos com os indicadores.

- **Conhecimento diminuto sobre os RACP sugeridos no currículo**

Os docentes parecem não perceber realmente os recursos artísticos, culturais ou patrimoniais que são sugeridos nos documentos orientadores, embora afirmem saber que constam, nos documentos, orientações à utilização destes recursos. Sobre isso, apenas D10 se manifestou na FG1 dizendo que, de entre os recursos sugeridos, destacam-se "*Principalmente mosaicos e coisas da nossa cultura*" (D10/FG1).

- **Reconhecimento das potencialidades do uso de RACP**

O mesmo docente mencionado no indicador anterior, D10, completa sua colocação atribuindo alguns benefícios em consequência a utilização dos recursos mencionados. Para ele, os recursos "*contribuem não só para os*

[76] D3, D7 e D10.

aspectos matemáticos mas também estéticos" (D10/FG1) e "*É uma coisa prática, plástica e eles gostam*" (D10/FG1). D4 manifestou-se em concordância.

Apesar de pouco ser mencionado sobre os recursos sugeridos pelos documentos orientadores, é reconhecido algum benefício em sua utilização no ensino das simetrias. Reiteramos que estas opiniões foram expressas pelos docentes tão logo no primeiro encontro presencial da OFD desenvolvida nesta investigação.

- **Reconhecimento de dificuldades**

Avançamos para a segunda e última subcategoria estabelecida sobre o conhecimento curricular prévio dos docentes, que consta no Quadro 19 juntamente com seus dois indicadores.

Quadro 19: CoCuP – Reconhecimento de dificuldades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Reconhecimento de dificuldades	Dificuldade em acompanhar as sucessivas mudanças
	Necessidade de formação contínua

Seguimos com a apresentação e análise interpretativa dos dados que incidem sobre os dois unicos indicadores desta subcategoria.

- **Dificuldade em acompanhar as sucessivas mudanças**

Da FG1, detectamos as dificuldades docentes devido às mudanças constatando a exposição explícita de dois docentes[77]. Enquanto D7, referindo aos demais presentes nesta entrevista, disse que *"nós próprios temos dificuldades em acompanhar [as mudanças]…"* (D7/FG1), D10, na mesma entrevista, completou afirmando que *"(…) quando nós estamos a começar a dominar, ou a perceber melhor a intensão do programa ele muda. Sem que seja feita uma grande avaliação, se aquilo resultou ou não resultou. (…) não se faz uma avaliação das coisas que foram feitas antes e… pronto"* (D10/FG1).

[77] D7 e D10.

- **Necessidade de formação contínua**

Revelando a necessidade de formação contínua em consequência às alterações nos documentos orientadores, detectamos a participação efetiva de três docentes[78]. D7, destacando a necessidade de atualizar os docentes diante das mudanças, alega que "*formação destinada aos professores, de uma forma geral, foi muito pouca e muito rápida*" (D7/FG1) e que "*não se investiu nos professores*" (D7/FG1), ou então "*Investiu-se em poucos professores para dar formação a nível nacional*" (D7/FG1). O mesmo docente completa afirmando que "*Continua-se a achar que o professor é um autodidata, que aprende sozinho*" (D7/FG1). Estes docentes consideram que as mudanças curriculares ocorrem sem avaliação prévia adequada e sem discussões necessárias ao bom andamento, não havendo ainda uma divulgação efetiva. D10 considera que "*as mudanças foram feitas, sem discussão*" (D10/FG1). Na EI, em relação à dificuldade enfrentada diante às mudança curriculares, D4 completa dizendo que "*temos que nos ir reciclando*" (D4/FG1).

Em síntese – Conhecimento Curricular Prévio (CoCuP):

Apenas cinco dos onze respondentes participantes iniciais da OFD revelam terem acompanhado as mudanças ocorridas nos documentos orientadores, e afirmam considerar o PMEB atual (Bivar *et al.*, 2013) menos adequado às características dos discentes a que se destina. Em pequeno número, alguns docentes consideram que o nível de abordagem sugerido no programa atual é exagerado e complexo, mas reconhecem as orientações lá presentes como um facilitador ao professor. Praticamente os mesmos docentes que se manifestaram quanto ao nível de abordagem e às qualidades do atual programa, também revelam que este instrumento orienta seu uso de forma gradual e que assim resulta em benefícios. Alguns docentes revelam ter dificuldades de adequação ou readequação e evidenciam a carência de discussão e oferta de formação docente em consequência as mudanças, em consonância ao que considera Costa (2008). Pouco foi falado das orientações presentes nos documentos orientadores sobre o uso de recursos artísticos, culturais e patrimoniais para o ensino de simetrias, embora houve manifestação

[78] D4, D7 e D10.

em concordância a estes recursos constituírem como potencialidades ao ensino. Assim como o conhecimento científico, o conhecimento curricular é um dos pilares no qual o conhecimento matemático para o ensino se apoia (Ferreira, 2014), sendo, assim, de grande importância sua abordagem na formação docente (Shulman, 1986).

Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio (CoDiPeP)

Damos seguimento com a apresentação e análise interpretativa dos dados referentes a duas categorias relacionadas com o Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio (CoDiPeP): Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: ensino (CoDiPeP/e) e Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r). Juntas, estas subcategorias contribuirão para a consolidação do objetivo específico *I-iii*.

Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: ensino (CoDiPeP/e)

Iniciamos pelo tratamento das oito subcategorias de Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: ensino (CoDiPeP/e) e seus os respectivos indicadores.

- **Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos didático-pedagógicos**

O Quadro 20 apresenta a primeira subcategoria e seus indicadores.

Quadro 20: CoDiPeP/e – Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos didático-pedagógicos

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos didático-pedagógicos	Formação inicial
	Manuais escolares
	Internet
	Ação de formação

À semelhança da questão 16, presente na Parte II do Q1, a questão 11 desta mesma parte, agrega dados relativos aos quatro indicadores desta subcategoria.

- **Formação inicial; Manuais escolares; Internet; Ação de formação**

Esta questão revela as fontes e formas que os conhecimentos didático-pedagógicos sobre simetrias foram adquiridos por parte dos docentes. Novamente, os respondentes podiam selecionar mais de uma opção de entre as apresentadas.

Seguem, no Gráfico 5, os resultados obtidos.

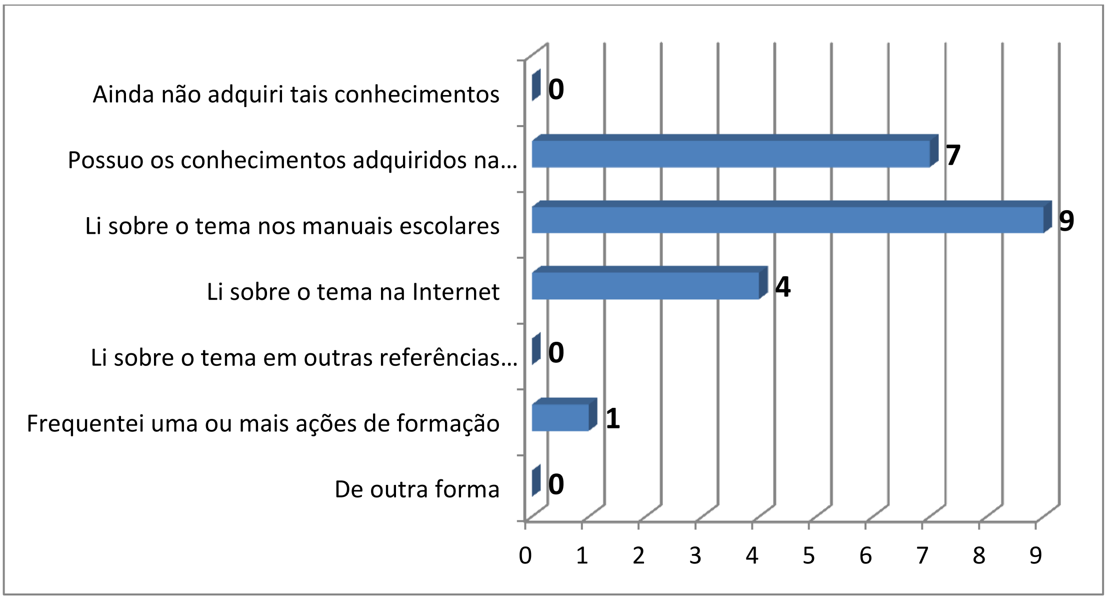


Gráfico 5: Resultado da questão 13 do Q1 – Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos diddático-pedagógicos

O único docente que alegou ter frequentado uma ou mais ações de formação também revela ter sido apenas uma e não indica o total de horas. Como vemos, a predominância de formas e fontes de aquisição e atualização do conhecimento didatico-pedagógico de simetrias pelos participantes provém da própria formação inicial, sete docentes, e nos manuais escolares, nove docentes, tendo esta última um pequeno destaque em relação a anterior. Na FG2, D3 destaca que "*Fazia o que tava no manual (livro didático utilizado pelos discentes)*" (D3/FG2) e é corroborado pela concordância de outros docentes.

- **Experiências docentes no ensino de simetrias**

Esta subcategoria e seus respectivos tópicos constam no Quadro 21.

Quadro 21: CoDiPeP/e – Experiências docentes no ensino de simetrias

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Experiências docentes no ensino de simetrias	Experiência prévia em lecionar simetrias
	Abordagem preliminar de conceitos básicos nos anos iniciais de escolaridade

- **Experiência prévia em lecionar simetrias**

A questão 9 do questionário Q1, a primeira questão da Parte II deste instrumento, serviu apenas para certificar se os respondentes já haviam lecionado a temática em questão. O resultado nos revelou que todos os onze docentes que responderam a este questionário afirmaram já terem lecionado essa temática.

- **Abordagem preliminar de conceitos básicos nos anos iniciais de escolaridade (Apêndice 9)**

Durante a discussão da primeira pergunta da FG1, "*(…) qual a sua opinião sobre a necessidade e a importância do ensino de simetria no 1º ciclo?*" (Investigador/FG1), seis docentes[79] se manifestaram a respeito do nível em que as simetrias devem ser abordadas no 1º CEB. Estes docentes consideram que a abordagem de simetrias no 1º CEB deve ser de forma simples, através de conceitos básicos. D9 diz-nos que "*(…) não devo fazer de uma forma tão complicada, nessa faixa etária*" (D9/FG1) e "*(…) não assim em profundidade (…) não ir tanto ao pormenor*" (D9/FG1), o que é corroborado por D8. Segundo D4, esta abordagem deve ocorrer, "*Mas não também de forma exaustiva nem muito aprofundado, sobretudo nos termos*" (D4/FG1).

D7 disse que *"Logo no 1º ano nós começamos a trabalhar os frisos. Talvez não olhemos para o friso com uma simetria (…). Não os damos é nomes"* (D7/FG1). Com isso, infere-se que a generalização feita por D7 refira que os docentes iniciam o ensino de simetrias logo a partir das séries iniciais, porém de uma forma mais preliminar, com menor prioridade às definições.

- **Reconhecimento da importância do ensino de simetrias no 1º CEB**

Esta subcategoria não requer o estabelecimento de indicadores.

Retomamos a primeira pergunta da FG1: "*(…) qual a sua opinião sobre a necessidade e a importância do ensino de simetria no 1º ciclo?*" (Investigador/FG1). Dois docentes[80] manifestaram em concordância e D7 e D9 ainda completaram, dizendo ser "*fundamental*" (D7 e D9/FG1).

- **Recursos utilizados no ensino de simetrias até ao momento**

Avançamos para a quarta subcategoria e seus respectivos indicadores (Quadro 22).

---

[79] D3, D4, D6, D7, D8 e D9 (Apêndice 9).
[80] D7 e D9.

Quadro 22: CoDiPeP/e – Recursos utilizados no ensino de simetrias até ao momento

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Recursos utilizados no ensino de simetrias até ao momento	Predomínio do 4º ano de escolaridade
	RCAP numa abordagem diferente da OFD
	Materiais manipuláveis
	Receptividade discente diante à utilização de recursos
	Satisfação docente com as experiências realizadas
	Ausência de experiência com AGD

O item 18.2 da questão 18 da Parte IV do Q1 foi respondida apenas pelos participantes que responderam *Sim* à questão 18 ou ao item 18.1, ou seja, pelos respondentes que afirmaram já terem planificado com algum tipo de recurso estático ou dinâmico (questão 18) ou artístico, cultural ou patrimonial (item 18.1). Os dados da questão 18 e do item 18.1 serão tratados mais adiante, na subcategoria Recursos utilizados e possibilidades da categoria Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r), entretanto, devido ao teor dos dados do item 18.2, consideramos mais adequados apresentarmos e analisarmos nesta subcategoria atual.

No item 18.2, o respondente tinha a oportunidade de descrever características da experiência na abordagem dos recursos mencionados, apresentando o ano de escolaridade, a receptividade dos alunos, o grau de satisfação docente com os diferentes recursos utilizados e os pontos fortes e fracos da metodologia utilizada. Todos os dados aferidos a partir do item 18.1 estam contemplados pelos indicadores desta subcategoria.

Vamos aos indicadores.

- **Predomínio do 4º ano de escolaridade**

Sobre o ano de escolaridade que a experiência foi realizada, temos os resultados no Gráfico 6.

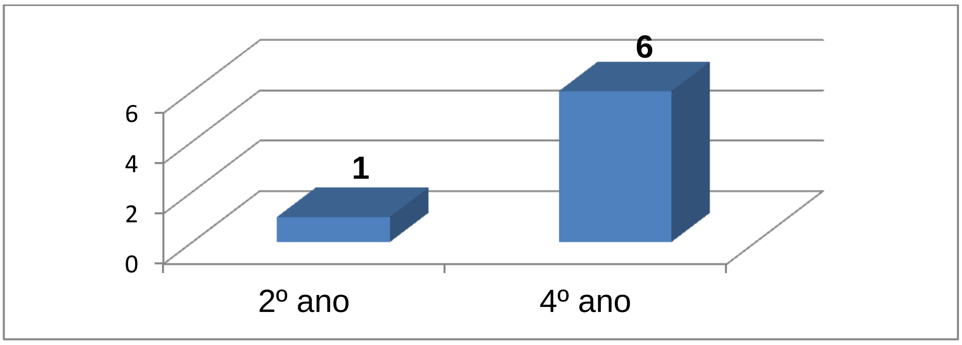


Gráfico 6: Resultado parcial (a) do item 18.2 – Ano de escolaridade das experiências realizadas

Predominam os docentes que realizaram atividades com algum recurso no 4º ano de escolaridade.

- **RCAP numa abordagem diferente da OFD**

Na FG1, o investigador instigou os docentes a falar sobre alguma prática já vivida por eles ao ensinarem simetrias. O contexto foi iniciado pela seguinte pergunta: "*Eu queria saber sobre suas práticas no ensino de simetrias: Considera que a forma na qual procedeu até agora resultou como o esperado? (…) E como vocês procederam?*" (Investigador/FG1). No entanto, D4 foi mais além e se manifestou em revelar uma experiência promovida em conjunto com uma professora de EVT (Educação Visual e Tecnológica) através da obra de Kandinsky. Segundo o docente, "*o (…) trabalho conjunto resultou nalguma coisa*" (D4/FG1). Contudo, de acordo com a dinâmica utilizada por D4, sua prática foi completamente diferente da proposta desenvolvida na OFD.

- **Materiais manipuláveis**

O docente D7 apontou, no QO e na EI, algumas de suas práticas utilizando recursos em geral, embora se percebe a predominância em abordagens tradicionais, basicamente as que servem para o ensino de simetria de reflexão. Este diz-nos que "*Como simetria de reflexão, trabalhava a dobragem de uma folha e punha pingos grossos de tinta num dos lados (…)*" (D7/QO) e que trabalhou "*através de desenho e de eles completarem imagens…*" (D7/EI) e "*simetrias de reflexão de polígonos*" (D7/EI).

- **Receptividade discente diante à utilização de recursos**

Ainda no item 18.2, os docentes tiveram a oportunidade de revelar suas considerações a respeito da receptividade discente diante à utilização de recursos. Os resultados constam no Gráfico 7.

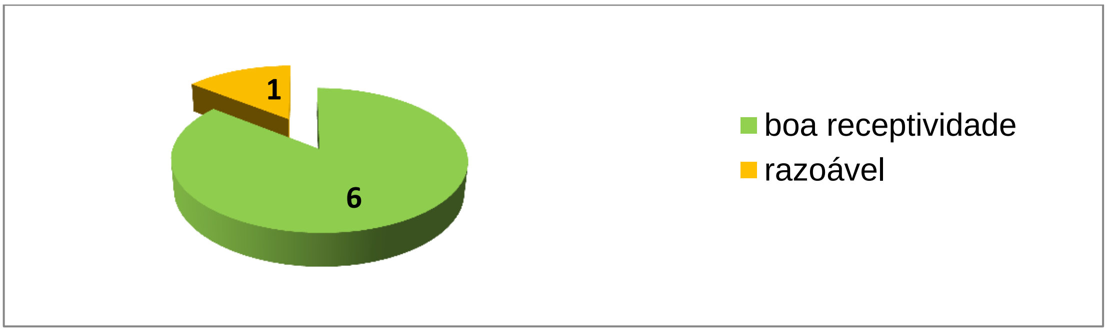


Gráfico 7: Resultado parcial (b) do item 18.2 – Receptividade discente com as experiências realizadas

Entre os participantes que responderam *boa receptividade*, um deles acrescentou que, desta forma, os alunos "*começaram a aperceber-se (de bastante) que o nosso património era rico em simetrias*" e outro que, apesar da boa receptividade, completou expondo que "*alguns alunos não gostam de atividades artísticas e foram menos aplicados*". Os demais respondentes, inclusive o que revelou ser razoável, não apresentaram maiores esclarecimentos.

- **Satisfação docente com as experiências realizadas**

Sobre o grau de satisfação docente com a utilização dos recursos (Gráfico 8):

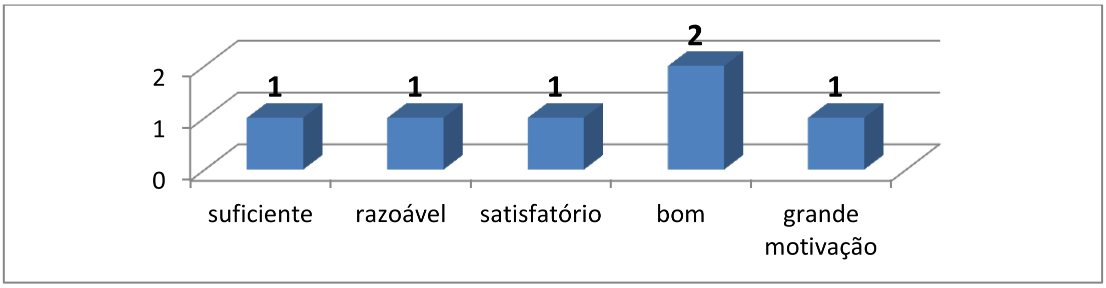


Gráfico 8: Resultado parcial (c) do item 18.2 – Satisfação docente com as experiências realizadas

Quanto aos pontos fortes da metodologia, foram apresentadas as categorias "*criação de um painel*", "*envolvimento e dinâmica*", "*motivação da aprendizagem*" e "*facilita a percepção de erros*", com uma incidência em cada.

Quanto aos pontos fracos da metodologia, apenas uma resposta foi apresentada, citando "*irregularidades na postura*".

- **Ausência de experiência com AGD**

A questão 14 do questionário Q1, em sua Parte II, perguntava sobre a utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) em contexto de sala de aula para ensinar transformações geométricas, isometrias ou simetrias, e a opinião sobre a relevância destes recursos. A consideração acerca da relevância da utilização de AGD poderia ser justificada pelo respondente.

Todos os onze docentes responderam na questão 14 que nunca o utilizaram. No item 14.1, um deles respondeu que não considera o uso relevante enquanto cinco consideram relevante esta utilização. Destes cinco docentes, três não alegaram o motivo desta escolha no subitem 14.1.1 e os outros dois consideram tais recursos, a princípio, motivadores. Salientamos que, apesar da consideração destes dois últimos docentes bem como todos os demais respondentes que assim opinaram, estes também nunca utilizaram AGD. Também temos, da EI, a afirmação de D4 sobre já ter utilizado, uma única vez, um "*simulador de simetria*" (D4/EI), no entanto o docente não soube explicar com clareza que tipo de simulador era, informando apenas tratar-se de algo simples e limitado. Perguntado sobre a possibilidade de ter sido os mais comumente utilizados, D4 negou e disse que o utilizado não é amplamente conhecido.

- **RACP no ensino de simetrias**

Esta subcategoria e seus indicadores estão apresentados no Quadro 23.

Quadro 23: CoDiPeP/e – RACP no ensino de simetrias

SUBCATEGORIA	INDICADORES
RACP no ensino de simetrias	RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes no início da OFD
	RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes no início da OFD
	Reconhece o prejuízo do ensino sem RACP
	Afirmam a pouca utilização dos RACP
	Sugestões de utilização dos RACP

- **RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes no início da OFD (Apêndice 10)**

Seguimos agora com a apresentação e análise interpretativa a respeito do reconhecimento dos RACP enquanto potenciadores de contextualização que, aliás, é exatamente o cerne da proposta da OFD.

Três docentes[81] expuseram diretamente suas opiniões, todas convergentes ao reconhecimento dos RACP como potenciadores de contextualização. Este reconhecimento pode ser estendido aos demais participantes pela percepção do investigador expressa no DC, a qual diz "*por muitas vezes os relatos pessoais revelavam a importância dada por eles à proposta a ser desenvolvida*" (Investigador/DC). Durante a FG1, instigados pelo investigador através da questão "*(…) como é que você vê essa metodologia de abordar o ensino da simetria através (…) de recursos artísticos, patrimoniais e culturais?*" (Investigador/FG1), todos os onze docentes manifestam-se positivamente, dizendo "*Eu acho bem…*" (Todos/FG1).

[81] D7, D9 e D10 (Apêndice 10).

D10 disse que acha "*bastante interessante*" e que, em relação aos discentes, "*é importante a gente começar a alertá-los*" (D10/FG1). Ressalta ainda que "*É o [ensino] que sai (extrapola) do manual*" (D10/FG1) e D9 refere-se à possibilidade em abordar as simetrias "*com um património nosso, com riqueza realmente do nosso país (…)*" (D9/FG1). De acordo com D7, o uso de RACP serve para *"para eles (discentes) serem criativos"* (D7/FG1).

- **RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes no início da OFD**

Aqui podemos apontar apenas a manifestação direta de três docentes[82]. D3 considera que a utilização dos RACP *"vai permitir aos alunos, mais tarde, desenvolverem outro tipo de raciocínio mais elaborados, mais complexos"* (D3/FG1) e D7 completa ao afirmar que também serve *"Para terem uma capacidade de raciocínio"* (D7/FG1). Na mesma perspectiva que D7, D10 salienta que serve para que *"eles (discentes) consigam, depois mais tarde, terem a tal maturidade e a tal capacidade de abstração"* (D10/FG1).

Em resposta a "*(...) você considera que, através desses recursos, isso pode oferecer uma mais-valia para a aprendizagem do aluno (...)? De uma forma mais adequada*" (Investigador/FG1), todos respondem *"Sim… sim…"* (Todos/FG1).

As unidades de registro dos dois últimos indicadores analisados demonstram o reconhecimento dos docentes face a importância dos RACP. Salientamos que estas unidades de registro remetem aos momentos iniciais da OFD, nomeadamente ocorridas durante a FG1, ou seja, no primeiro trabalho presencial.

- **Reconhece o prejuízo do ensino sem RACP**

Durante a FG1, D10 demonstra considerar que a não utilização de RACP faz com que o ensino seja pouco atrativo e não favorável à aprendizagem. Quando D10 diz "*Quando nós não temos estes recursos, não temos essas ideias (...) tentamos só com uma folha de papel quadriculado, e conceitos, (…) expostos, ou mesmo que a gente mostre, no quadro, assim…*"

[82] D3, D7 e D10.

(D10/FG1). Outro docente[83] completa, dizendo "*[os discentes] Olham com mais dificuldade…*" (?/FG1), e D10 concorda. Em relação à maneira como procedia anteriormente à OFD, D3 reconhece na FG2 que "*Aquilo (ensino sem RACP) parecia desgarrado*" (D3/FG2).

- **Afirmam a pouca utilização dos RACP**

Completamos com algumas unidades de registro que revelam o desuso dos RACP por parte dos docentes, antes da OFD. Em referência ao recurso utilizado no desenvolvimento das atividades a serem implementadas aos seus discentes, D3 diz que "*Conhecia alguma coisa, mas não conhecia verdadeiramente. Nunca havia ido buscar o porquê que existia ou para quê que existia e qual era a função das mandalas*" (D3/FG2). D7 revelou que "*Não era feito com isto, não era através de… não se partia do estado da arte, da cultura, do que nos rodeia*" (D7/EI). Também D2 afirma, sobre o uso de RACP que, "*(...) para matemática nunca… nunca utilizei não, nem PowerPoint nem nada*" (D2/EI).

Ou seja, os RACP não faziam parte das atividades praticadas pelos docentes em suas atuações laborais.

- **Sugestões de utilização dos RACP**

Três docentes[84] referiram algumas sugestões, ou possibilidades, de como os RACP devam ser utilizados em favor do ensino de simetrias. D4 defendeu que esta abordagem deva ser feita "*pela percepção que eles têm de si próprios junto ao espaço (…) A partir de observação direta do património*", com "*Visitas no terreno ou observação, in locus*" (D4/FG1). Salienta ainda que deve ser feito "de uma forma lúdica…" (D4/FG1). D10 soma ao dizer que "*É preciso muito do concreto*" (D10/FG1). D3 contribui, dizendo mais adiante afirmando que "*Ainda que se faça inicialmente com concretização (…) depois deve-se graficamente representá-lo*" (D3/FG2).

[83] Durante a transcrição da FG1, de onde provém esta unidade de registro, não é claro o docente que profere esta citação.
[84] D3, D4 e D10.

- **Debilidades e dificuldades**

Apresentamos esta subcategoria e seus indicadores no Quadro 24.

Quadro 24: CoDiPeP/e – Debilidades e dificuldades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Debilidades e dificuldades	Insegurança em lecionar, em relação aos conhecimentos didático-pedagógicos
	Percepções de dificuldades discentes
	Necessidades de aquisição de conhecimentos didático-pedagógicos

- **Insegurança para lecionar, em relação aos conhecimentos didático-pedagógicos**

Neste indicador, consideramos dados oriundos do Q1, da FG1, da FG2 e da EI. Embora a FG2 e a EI tenham ocorrido, respectivamente, em meados da OFD e após as implementações das atividades, os dados destes dois instrumentos fazem referência ao passado, antes da OFD. Posto isto, dividimos a apresentação e análise interpretativa deste indicador em duas partes. Na primeira constam os dados provenientes do Q1, a partir de uma questão específica para estes fins, e na segunda constam os dados das entrevistas mencionadas.

Considerando as duas partes, percebemos que dez docentes manifestam suas inseguranças em lecionar as simetrias.

A questão 12 da Parte II do Q1 é análoga a questão 10 do mesmo questionário, diferindo apenas por incidir sobre a autocaracterização dos docentes sobre a segurança, a nível de conhecimento didático-pedagógico, em lecionar tais conceitos, e não a nível de conhecimento científico. Os dados obtidos foram recodificados em dois níveis, a saber, *Sinto segurança, ao nível do conhecimento didático-pedagógico, para ensinar simetrias* e *Não sinto segurança, ao nível do conhecimento didático-pedagógico, para ensinar simetrias*. Nove respondentes revelaram estarem inseguros em lecioná-los e os outros dois respondentes optaram pela alternativa que corresponde a não possuir conhecimento didático-pedagógico suficiente para lecioná-los.

Este resultado está de acordo com os dados obtidos através da FG1. Em relação a este instrumento, destacamos as citações de D2 e de D4. Segundo D2, "*(…) temos que sentir que dominamos os conceitos para sabermos passar para os [discentes]…*" (D2/FG1), pois "*(…) ninguém consegue ensinar algo que não domina*" (D2/FG1). Expandindo suas considerações aos demais participantes da *focus* grupo, D2 afirma que "*se nós não tivermos segurança naquilo que temos para ensinar (…) não conseguimos ensinar*" (D2/FG1). D4 disse que *"Eu faço o que penso que está correto, mas, se calhar posso, assim, estar fazendo um bocadinho mal"* (D4/FG1).

Na mesma perspectiva, D2 afirma que *"(…) estava muito insegura (…) em qualquer um deles (conceitos de simetria)"* (D2/EI). D9, se referindo às consequências negativas para os discentes pelo fato de os docentes não se sentirem seguros em relação aos conhecimentos didático-pedagógicos, disse que "*(…) se não [nos] sentirmos [seguros] com eles (discentes), eles vão (…) balançar (sentirem-se inseguros)*" (D9/FG2).

- **Percepções de dificuldades discentes (Apêndice 11)**

Este indicador contém citações provenientes da FG1 e FG2. Embora a FG2 tenha ocorrido em meados da OFD, as duas citações deste instrumento têm o mesmo teor das demais citações expressas na FG1 e por este motivo são apresentadas em conjunto com estas.

Três docentes[85] evidenciaram, durante as entrevistas em *focus* grupo, reconhecer as dificuldades enfrentadas pelos discentes na aprendizagem de simetrias. Para D4, esta dificuldade é motivada pois algumas simetrias são "*um bocadinho complexas até para estrutura mental da criança*" (D4/FG1). Segundo D3, "*há um poder da abstração que eles (discentes) têm que ter*" (D3/FG2) e que, para D10, "*(…) não têm ainda*" (D10/FG1), "*pois não é só a idade que conta, não é… a maturidade conta*" (D3/FG1).

[85] D3, D4 e D10 (Apêndice 11).

- **Necessidades de aquisição de conhecimentos didático-pedagógicos**

Em complemento a necessidade de aquisição de conhecimentos científicos já apresentada anteriormente, durante a FG1, três docentes[86] também se manifestaram em razão da necessidade docente de aquisição de conhecimentos didático-pedagógicos para lecionar simetrias. Em referência a haver necessidade de formações profissionais que os atualizem, D2 considera que "*(…) tem que haver isto também em termos científicos e didático*" (D2/FG1) e, expandindo aos demais docentes, diz que "*(…) é por isso que estamos aqui [na OFD]*" (D2/FG1), onde é corroborado por D10 ao dizer que "*E agora estamos a tentar fazer alguma coisa…*" (D10/FG1). D3 é mais específica ao afirmar que *"(…) devíamos estar preparados para ensinar, convenientemente, da forma como eles (discentes) devem aprender e na faixa etária deles (…) mas devemos (…) saber como é que se inicia, como é que fazemos essa abordagem*" (D3/FG1).

- **Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas (Q1)**

Esta subcategoria e seus indicadores constam no Quadro 25 a seguir.

Quadro 25: CoDiPeP/e – Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas (Q1)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas (Q1)	Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Q1)
	Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Q1)
	Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Q1)
	Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Q1)

[86] D2, D3 e D10.

A apresentação e análise interpretativa deste indicador é feita a partir das respostas aos itens 26.1, 26.2, 26.3 e 26.4 da questão 26. Estas quatro unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos compõem a Parte V do Q1. Cada um destes itens pertence a um dos indicadores presentes no Quadro 23.

Com o propósito de, posteriormente, verificar a evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos dos docentes, as mesmas quatro unidades de aferição foram aplicadas aos participantes em meados da OFD, através do questionário Q2 em sua Parte V, à semelhança da forma como procedemos aquando da verificação prévia e evolução do nível de conhecimento científico dos docentes. Aqui, os critérios considerados para as classes de respostas também são análogos aos das unidades da Parte V do Q1 já apresentadas e analisadas interpretativamente (CoCiP) e os resultados serão prioritariamente apresentados em pontos percentuais devidamente aproximados, pelos mesmos motivos já justificados.

A questão 26, última questão da Parte V do Q1 e do Q2, apresentava o seguinte enunciado: *No desenvolvimento de uma aula sobre isometrias houve diversas generalizações produzidas e proferidas pelos alunos (situações hipotéticas). Todas estão conceitualmente ERRADAS*. A partir disto, os quatro itens – do 26.1 ao 26.4 – apresentam situações hipotéticas de considerações discentes equivocadas, a partir das quais o participante deve analisar e se pronunciar, apresentando como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro, indicando em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

Passamos aos indicadores, cada um contendo o respectivo item.

- **Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Q1)**

Iniciamos pelo item 26.1, que incide num caso particular em que a reflexão e a rotação de meia-volta se equivalem. Objetivou-se, exatamente, que fosse percebido que se trata de um caso em particular (Figura 73).

26.1. Aluno: *"Professora, a reflexão é o mesmo que a rotação de meia-volta"*. Para exemplificar o aluno exibiu a imagem da Figura 3:

Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

____

____

____.

Figura 3

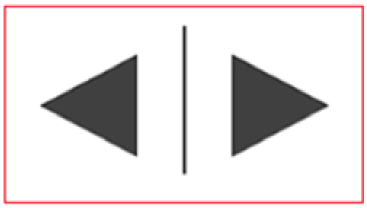


Figura 73: Enunciado do item 26.1 da questão 26 do Q1 – Diferenciação entre reflexão e rotação de meia-volta

As respostas, ou a ausência dela, foram divididas em três classes:

- não respondida / erradas, que inclui, além das unidades não respondidas, as respostas nada esclarecedoras, como apenas citar um instrumento, como '*Espelhos'* ou '*Papel Vegetal*', por exemplo.
- parcialmente correta, que aloca respostas que mencionavam o uso de espelhos, miras ou papel vegetal e algum contexto que sugere a tentativa razoavelmente aceitável de esclarecimento da situação fictícia, mas não argumentam de forma convincente e esclarecedora diante à generalização suposta.
- correta, que abarca as respostas convincentes, de alguma forma, para confrontar a generalização suposta, podendo ser através da apresentação de um contra-exemplo.

Dez unidades se enquadram na classe não respondida / erradas e apenas uma na classe parcialmente correta.

- **Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Q1)**

O item 26.2 objetivou a percepção, por parte dos respondentes, de diferenciação entre eixo de simetria e eixo de isometria (Figura 74).

26.2. Aluna: *"Professora, observei que na Figura 4 estão dois triângulos congruentes e a reta r. Essa reta r é um eixo de simetria dos triângulos."*

Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

____.

Figura 4

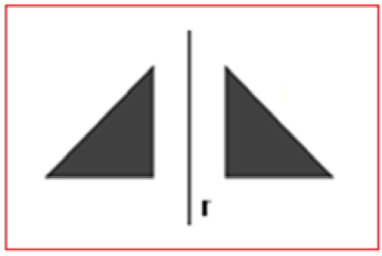


Figura 74: Enunciado do item 26.2 da questão 26 do Q1 – Diferenciação entre eixo de simetria e eixo de isometria

De acordo com as respostas obtidas neste item e considerando critérios análogos aos do item anterior, distribuimos as respostas em apenas duas classes: não respondida / errada e correta. Esta última inclui respostas que, com alguma clareza, demonstram a percepção da diferenciação dos ditos conceitos.

A classe não respondida / errada contou com a frequência de todos os onze participantes de acordo com as respostas oferecidas ou a ausência delas.

- **Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Q1)**

O item 26.3 (Figura 75) apresenta uma reflexão seguida de uma translação cuja direção não é paralela ao eixo da reflexão. A partir desta situação, o item objetiva aferir a capacidade de percepção do respondente diante da afirmação equivocada, por parte de um aluno, que a composição destas duas isometrias equivale a uma reflexão deslizante.

26.3. Aluno: "Professor, a figura C é uma reflexão deslizante da figura A, pois fiz uma reflexão da imagem A e depois deslizei a imagem obtida (B)" (Fig. 5).
Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

Figura 5

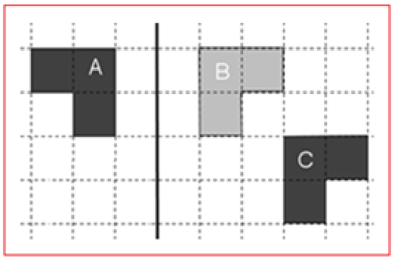


Figura 75: Enunciado do item 26.3 da questão 26 do Q1 – Paralelismo entre a direção da translação e o eixo de reflexão numa reflexão deslizante

À semelhança dos critérios considerados no item anterior, as respostas obtidas neste item também foram distribuidas em apenas duas classes: não respondida / errada e correta. A classe correta engloba as respostas que revelam, com alguma clareza, que o participante reconhece a necessidade de, sendo a reflexão deslizante a composição T●G, o segmento orientado que define a translação T ser paralelo ao eixo que define a reflexão G.

Assim como os resultados do item anterior, a classe não respondida / errada, neste item, também contou com a frequência de todos os onze participantes de acordo com as respostas oferecidas ou a ausência delas.

- **Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Q1)**

Com o item 26.4, último item da questão 26 (Figura 76), buscou-se verificar se os respondentes reconhecem que a circunferência não é uma rosácea pelo fato de possuir infinitos eixos de reflexão. Segue o item:

26.4. Aluna: "Professor, a circunferência é uma rosácea especial por ter infinitos eixos de reflexão".
Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

Figura 76: Enunciado do item 26.6 da questão 26 do Q1 – Circunferência não é uma rosácea

Com os mesmos critérios dos dois últimos itens e as mesmas classes de respostas consideradas, tem-se que, novamente, a frequência da classe não respondida / errada foi de onze unidades.

Considerando as quatro unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos dos participantes da OFD, designamos três classes de respostas: não respondida / errada, parcialmente correta e correta. Aglutinando todas as respostas, ou ausência delas, numa mesma classe correspondente, tem-se o seguinte resultado global (Gráfico 9) das unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos do Q1:

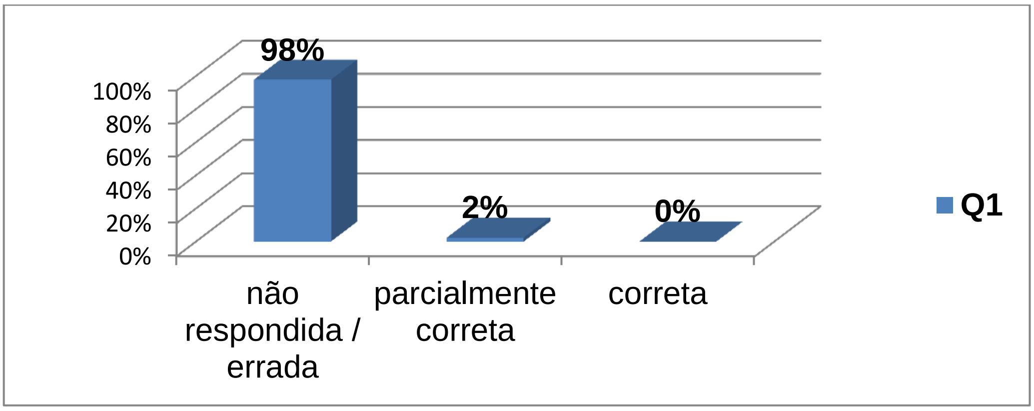


Gráfico 9: Resultado Global – CoDiPeP/e

De acordo com os critérios considerados para as classes de respostas, o gráfico revela apenas uma resposta alocada na classe parcialmente correta, estando todas as demais na classe não respondida / errada, o que reflete um nível muito baixo de conhecimento didático-pedagógico dos docentes.

- **Percepções sobre colaboratividade**

Chegamos a esta subcategoria, que consta no Quadro 26 com seus indicadores.

Quadro 26: CoDiPeP/e – Percepções sobre colaboratividade

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepções sobre colaboratividade	Carência de formações colaborativas
	Reconhecimento da importância da colaboratividade na formação

Por tratar-se de uma OFD colaborativa, a opinião dos docentes sobre as decisões a serem tomadas ao longo da formação foi levada em consideração em todas as etapas.

- **Carência de formações colaborativas**

À semelhança dos critérios considerados no indicador Percepções de dificuldades discentes da subcategoria Debilidades e dificuldades, também optamos por apresentar aqui, conjuntamente, dados oriundos da FG1, FG2 e DC pelo fato de estes dados terem o mesmo teor, independentemente do momento da OFD em que foram expressos.

Quatro docentes[87] manifestaram-se diretamente sobre a carência de formações colaborativas. Bastante incisiva, D7 afirmou que "*formação, em tipo de colaboração, nunca [participei]*" (D7/FG1). Segundo D10, "*agora as coisas não estão estão direcionadas para isso (formação colaborativa)*" (D10/FG1). D3 disse que "*não se encontra tanto esta forma colaborativa*" (D3/FG2) e D4, mas especificamente em relação as características da OFD desta investigação, afirma que "*(…) [criando] um banco de recursos [disponível a todos]? Não, não tem havido… Não se tem encontrado…*" (D4/FG2). O DC aclara que as citações ocorridas durante a FG2 foram concordadas por todos os docentes presentes, a saber, D2, D3, D4, D6, D8 e D9. Com este instrumento, o investigador registra que, no 4º trabalho presencial, os presentes "*Salientaram que nunca tinham participado de uma proposta como esta, com tanta colaboratividade e, as que pareciam ter, não eram de forma real e intensa*" (Investigador/DC).

- **Reconhecimento da importância da colaboratividade na formação**

Durante a FG1, três docentes[88] demonstram explicitamente o reconhecimento da importância da característica colaborativa da OFD e, consequentemente, contaram com a concordância dos demais presentes nesta entrevista em focus grupo. D7 disse que "*Se nós todos, colaborarmos na execução (…) aí vamos enriquecer de certeza, certamente…*" (D7/FG1), D9

[87] D3, D4, D7 e D10.
[88] D4, D7 e D9.

aponta que “*É uma mais-valia também*” (D9/FG1) e D4 concorda, dizendo “*Sim, sim…*” (D4/FG1), seguido pela manifestação positiva dos demais presentes.

Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r)

Avançamos para tratamento das subcategorias de Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r) e seus os respectivos indicadores.

- **Embasamento (PA)**

Iniciamos pela subcategoria Embasamento (PA), que não subentente indicador algum.

Esta subcategoria foi estabelecida com base nas respostas à questão 15 da Parte III do Q1, e buscava saber em que os docentes se embasavam para elaborarem as planificações. Apresentavam-se cinco alternativas de resposta e foi permitido optar por mais de uma alternativa.

Os resultados desta questão estão a seguir, no Gráfico 10.

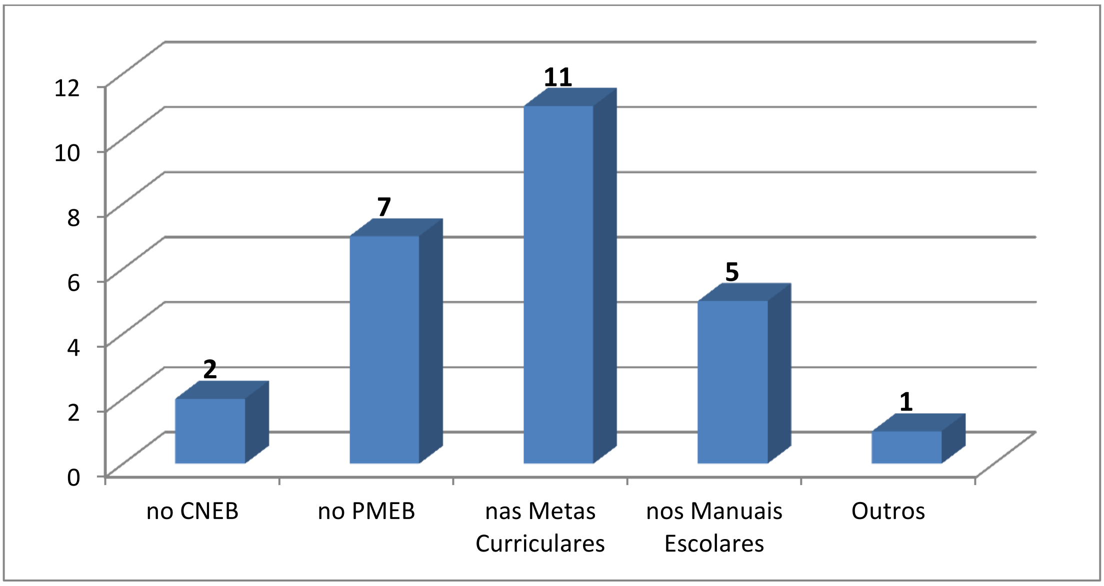


Gráfico 10: Resultado da questão 15 do Q1 – Embasamento das PA

Todos os onze respondentes alegaram basearem suas planificações nas Metas Curriculares. O PMEB também é utilizado como documento embasador da planificação da maioria dos docentes. O único respondente que selecionou a alternativa Outros, indicou também basear-se em outros *programas e dossiês pedagógicos*, ambos obtidos através de busca na *web*.

Três docentes[89] ainda apresentaram algum manifesto que reafirma o que a questão 15 revela. D7 generalizou, estendendo a todos os demais dez docentes presentes na FG1, dizendo que "*nós planificamos e programamos através das metas*" (D7/FG1) e D3 corroborou dizendo que "*(…) [metas] é o que nós utilizamos nas planificações e é essa a orientação que seguimos*" (D3/FG1). D2 disse: "*só me baseei nos livros*" (D2/EI).

- **Objetivos gerais (PA)**

Esta subcategoria consta no Quadro 27 a seguir, com seus indicadores.

Quadro 27: CoDiPeP/p-r – Objetivos gerais (PA)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Objetivos gerais (PA)	Formulados de maneira explícita (PA)
	Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais (PA)
	Reconhecer propriedades geométricas e completar padrões

A partir daqui, apresentaremos e analisaremos interpretativamente cada um dos indicadores.

- **Formulados de maneira explícita (PA)**

Uma de entre as demandas da OFD aos docentes foi a apresentação de suas planificações (PA) utilizadas para o ensino de simetrias antes da participação na OFD. À época desta demanda, a OFD contava com nove docentes, os mesmos que concluiram esta Ação de Formação. Contudo, apenas seis docentes[90] apresentaram suas PA.

Como não houve um padrão para a elaboração destas planificações, até porque estes docentes não trabalhavam todos juntos à época da elaboração

[89] D2, D3 e D7.
[90] D1, D2, D3, D4, D6 e D9.

das PA apresentadas, quatro das seis PA apresentavam explicitamente um objetivo geral.

- **Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais (PA)**

D1 apresenta, como objetivo geral, "*Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais*" (D1/PA).

- **Reconhecer propriedades geométricas e completar padrões**

D2 e D4 apresentam "*Reconhecer propriedades geométricas*" (D2 e D4/PA) e D6 expõe dois, sendo "*A aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como para identificar propriedades das figuras geométricas*" (D6/PA) e "*Reconhecer formas geométricas simples, bem como aptidão para descrever figuras geométricas e para completar e inventar padrões*" (D6/PA).

- **Objetivos específicos (PA)**

Esta subcategoria é apresentada no Quadro 28 com seus respectivos indicadores.

Quadro 28: CoDiPeP/p-r – Objetivos específicos (PA)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Objetivos específicos (PA)	Identificação de simetrias e eixos de simetria (PA)
	Construção de frisos (PA)

Em consonância com as seis PA que tivemos acesso, destacamos dezesseis objetivos específicos provenientes de cinco[91] destas PA. Os objetivos, de uma forma geral, são restritos a dois indicadores, que seguem apresentados a seguir.

- **Identificação de simetrias e eixos de simetria (PA) (Apêndice 12)**

De forma direta, D1, D2 e D6 apresentaram, entre os seus objetivos específicos, o de "*identificar simetrias*" (D1, D2 e D6/PA) e D3 considerou "*Descobrir diferentes simetrias*" (D3/PA). Todos os cinco docentes também consideraram o objetivo de identificar eixos de simetria.

[91] D1, D2, D4, D6 e D9 (Apêndice 12).

- **Construção de frisos (PA)**

Três docentes[92] apontaram o objetivo de "*Construir frisos*" (D1 /PA). D6 aponta "*Construir frisos identificando simetrias (translação, reflexão, reflexão deslizante, rotação)*" (D6/PA) e D2 destaca "*Construir frisos usando figuras dadas*" (D2/PA) e "*Representar frisos com simetrias de reflexão*" (D2/PA).

- **Conceitos (PA)**

Esta subcategoria e seus respectivos itens estão apresentados no Quadro 29 a seguir.

Quadro 29: CoDiPeP/p-r – Conceitos (PA)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Conceitos (PA)	Reflexão (PA)
	Rotação (PA)
	Translação (PA)
	Reflexão deslizante (PA)

À semelhança de como procedemos na apresentação e análise interpretativa dos indicadores Formação inicial, Manuais escolares, *Internet* e Ação de formação, pertencentes a subcategoria Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos da categoria Conhecimento Científico Prévio (CoCiP), aqui também optamos por apresentar e analisar os dados relativos aos quatro indicadores desta subcategoria.

- **Reflexão (PA); Rotação (PA); Translação (PA); Reflexão deslizante (PA)**

Contamos aqui com dados provenientes da questão 17, da Parte IV do Q1, e das seis PA disponibilizadas pelos docentes.

Primeiramente, apresentamos e analisamos os dados da questão 17. As respostas a esta questão permitiu identificar, de forma direta, quais os conceitos de simetria já planificados pelos docentes. Como previsto, os conceitos citados pertenciam ao rol das quatro simetrias: reflexão, rotação,

[92] D1, D2 e D6.

translação e reflxão deslizante. Novamente, os respondentes poderiam, e deveriam, apresentar todos os conceitos já utilizados em suas planificações anteriores (Gráfico 11).

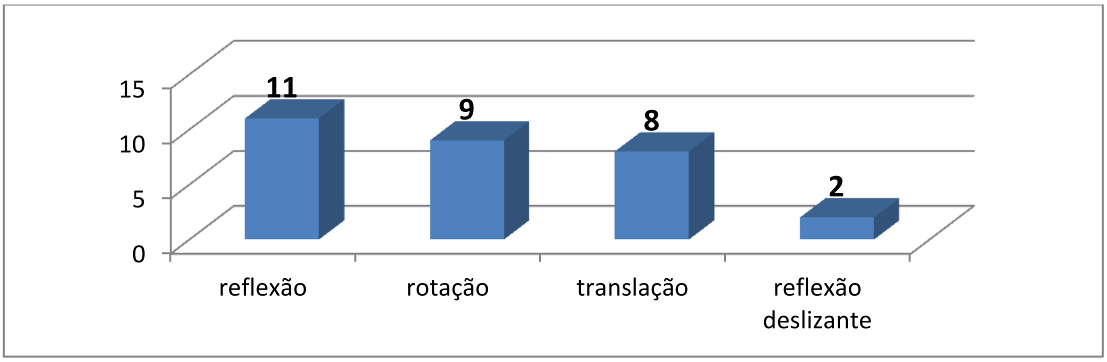


Gráfico 11: Resultado da questão 17 do Q1 – Conceitos já planificados

Constata-se que o conceito de simetria de reflexão já esteve presente em planificações anteriores de todos os docentes participantes e os conceitos de simetria de rotação e de translação em planificações anteriores da maioria deles. A simetria de reflexão deslizante revela-se como um conceito pouco planificado pelos docentes, quando apenas dois dos investigados alegam já o terem lecionado.

Sabendo-se que cada docente deveria revelar os conceitos de simetria já lecionados, temos que alguns deles apresentaram mais de um conceito. Assim, a disposição destes dados pode ser apresentada por outra perspectiva, no intuito de apresentar o resultado de forma mais reveladora diante das respostas oferecidas pelos docentes (Gráfico 12).

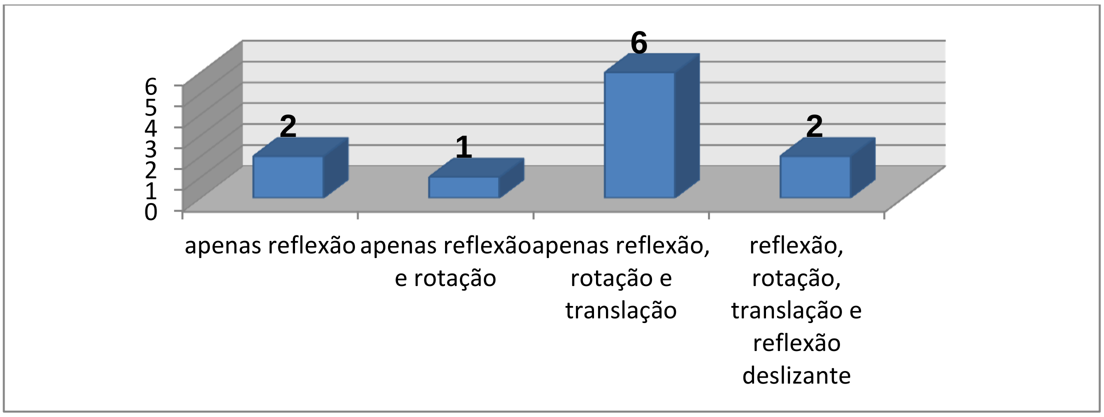


Gráfico 12: Resultados acumulativos dos dados da questão 17 do Q1 – Conceitos já planificados em conjunto

Os dados da PA para este indicador (Apêndice 13) são bastante parecidos com os revelados pela questão 17 e, de uma forma geral, apenas reafirmam o que esta questão revelou. Posto isto, em relação aos conceitos expressos nas PA, optamos por apresentar o Gráfico 13 que segue os mesmos critérios considerados no Gráfico 12, porém com os dados das PA.

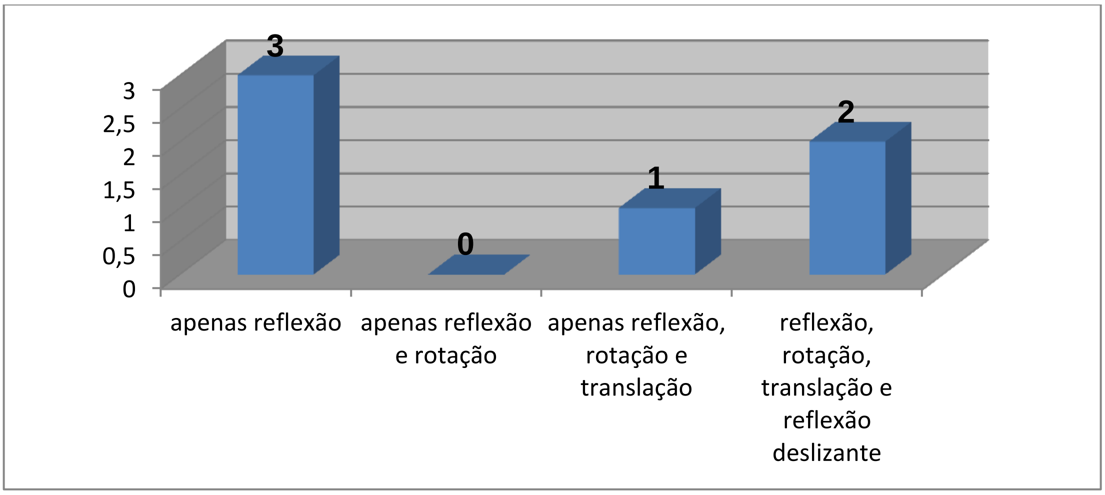


Gráfico 13: Resultados acumlativos dos dados das PA – Conceitos já planificados em conjunto

Estas perspectivas sugerem que os conceitos são disseminados de forma acumulativa e sequencial – reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante – onde um próximo conceito somente é abordado após o anterior, ou os anteriores, já terem sido lecionados.

Diante das debilidades docentes tratadas na categoria anterior (CoDiPeP/e), a falta ou presença do termo *simetria* em algumas PA não parece estar sendo empregadas para diferenciar isometria de simetria, propriamente dita. Inferimos que os docentes utilizam este termo de forma aleatória, pois não demonstraram conhecer a diferença destes conceitos.

- **Recursos utilizados e possibilidades**

Esta subcategoria e seus indicadores constam no Quadro 30.

Quadro 30: CoDiPeP/p-r – Recursos utilizados e possibilidades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Recursos utilizados e possibilidades	Recursos estáticos: espelho, mira, papéis, etc
	Recursos dinâmicos: dobragens, simulador, etc
	RACP já planificados
	RACP considerados viáveis

- **Recursos estáticos: espelho, mira, papéis, etc (Apêndice 14)**

Aqui alocamos, primeiramente, dados provenientes da questão 18 da Parte IV do Q1 e das PA e, na sequência, dados da FG1, FG2 e QO. Embora a FG2 e o QO foram realizados após algumas sessões da OFD, os dados provenientes destes instrumentos se referem a ações anteriores a mesma.

Considerando os dados do Q1 e das PA, vimos que todos os onze docentes revelam já terem utilizados estes tipos de recursos.

A questão 18 da Parte IV do Q1 questionou a utilização de recursos e, em caso de resposta afirmativa, é possível responder se trata-se de recursos estáticos ou dinâmicos, além de exemplificar livremente com quantos recursos considerassem conveniente. Também era possível escolher as duas opções, estáticos e dinâmicos. Apresentaremos os dados a respeito dos recursos dinâmicos no próximo indicador.

Dividirmos os resultados em duas partes. Os primeiro resultados, revelados no Gráfico 14, revelam as opções *Sim* ou *Não* em relação a já terem planificado recursos estáticos ou dinâmicos.

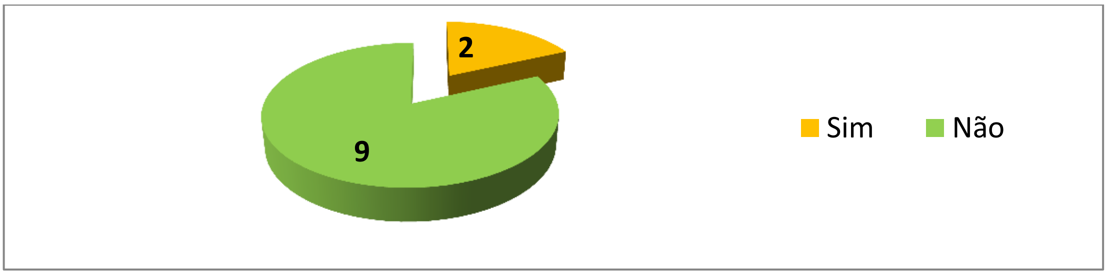


Gráfico 14: Resultado parcial (a) da questão 18 do Q1 – Planificação de recursos estáticos ou dinâmicos

De entre os que alegaram *Sim*, os resultados das respostas complementares a afirmação seguem nos Gráficos 15 e 16.

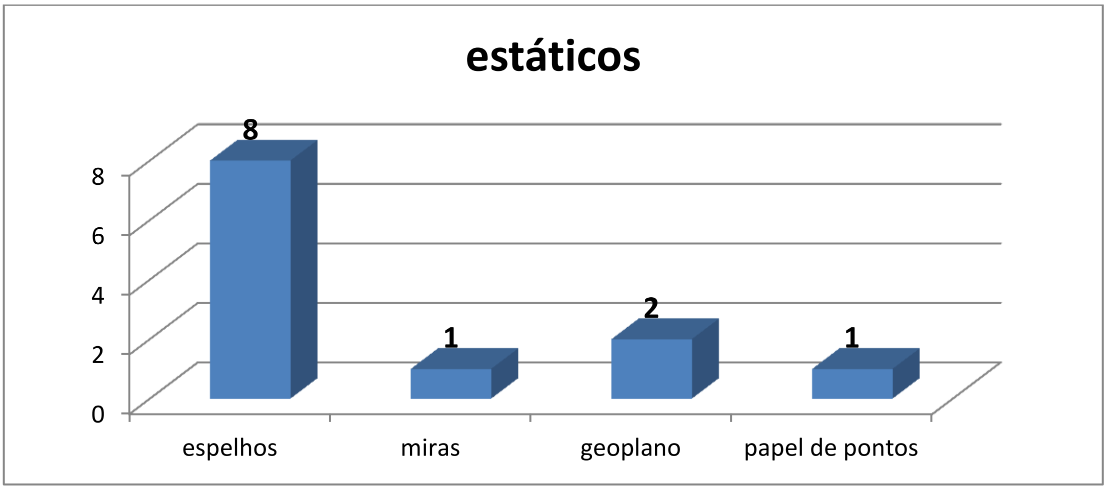


Gráfico 15: Resultado parcial (b) da questão 18 do Q1 – Recursos estáticos já planificados

As PA também revelam o uso de imagens em papel e do manual, papel quadriculado e papel vegetal, entre outros.

Na FG1, D3 também diz que "*nos primeiros anos era tinta e cola (…)*" (D3/FG1) e D10 diz que "*Muitas das abordagens vem dos próprios livros*" (D10/FG1). Na FG2, o mesmo docente demonstra reconhecer a limitação de recursos utilizados pelos docentes, dizendo que faz-se "*um quadriculado com uma casinha para completar ou um barquinho e pronto*" (D3/FG2) e completa afirmando que se "*Fazia o que tava no manual (...) me limitava a… fazia a borboleta…*" (D3/FG2). No QO, D4 revela já ter utilizado "*utilização de espelhos (…); utilização de papel vegetal/construção de padrões...*" (D4/QO) e D1 alegou que utilizava "*os exemplos apresentados nos manuais, ou fichas de trabalho teóricas com exercícios exemplificativos*" (D1/QO).

Entre os resultados a respeito dos recursos estáticos, nitidamente temos o destaque do uso de espelhos como material estático.

- **Recursos dinâmicos: dobragens, simulador, etc**

À semelhança da apresentação anterior, seguimos com os dados do item 18.1 da questão 18 da Parte IV do Q1. Sobre a utilização de recursos dinâmicos, as respostas dos docentes constam no Gráfico 13 a seguir.

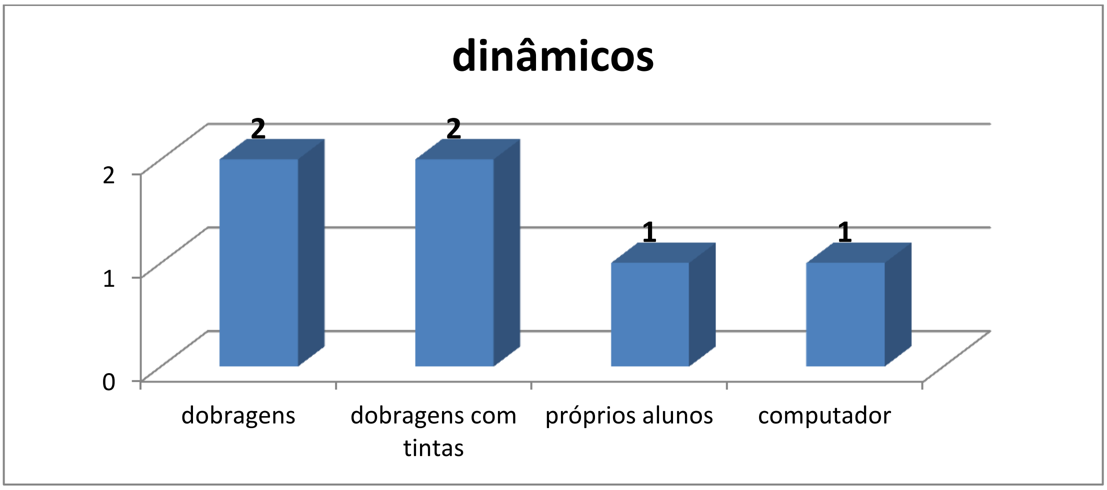


Gráfico 16: Resultado parcial (c) da questão 18 do Q1 – Recursos dinâmicos já planificados

As PA revelaram o uso de simulador de simetrias (D4/PA), de dobragens (D4 e D6/PA) e de tintas (D3/PA).

Do item 18.1 e das PA, vemos, a respeito dos recursos dinâmicos, a predominância de recursos relacionados com dobragens.

Apresentamos também algumas citações provenientes da FG1, FG2, QO e DC que fazem referência a atitudes anteriores a OFD.

Os docentes revelaram, durante as entrevistas em *focus* grupo, outros recursos já utilizados por eles para ensinar simetrias. D4 relembra "*daqueles jogos que fazemos com espelho*" (D4/FG1) e, mais adiante, diz já ter utilizado "*dobragens e recortes (…) jogos corporais*" (D4/QO). D3 também citou atividades "*com o corpo [dos discentes]*" (D3/FG1). O mesmo docente disse que ter feito "*dobra (isometria de reflexão por dobragem de papel)…*" (D3/FG1) e "*manchas (tinta e dobragens de papel)*" (D3/FG2). Mais adiante, no 7º trabalho presencial, penúltimo momento coletivo da OFD, o docente D7 revelou que "*antes da OFD usavam apenas borrões de tinta, dobragens e cortes*" (D7/DC) e contou com a concordância dos demais presentes.

- **RACP já planificados**

Analogamente a questão 18, o item 18.1 questiona a utilização de recursos e, em caso de resposta afirmativa, é possível responder se trata-se de recursos artísticos, culturais ou patrimoniais, além de exemplificar livremente com quantos recursos considerassem conveniente. Novamente era possível escolher mais de uma opção.

Iniciamos, com o Gráfico 17, com a apresentação dos resultados *Sim* ou *Não* em respeito à utilização.

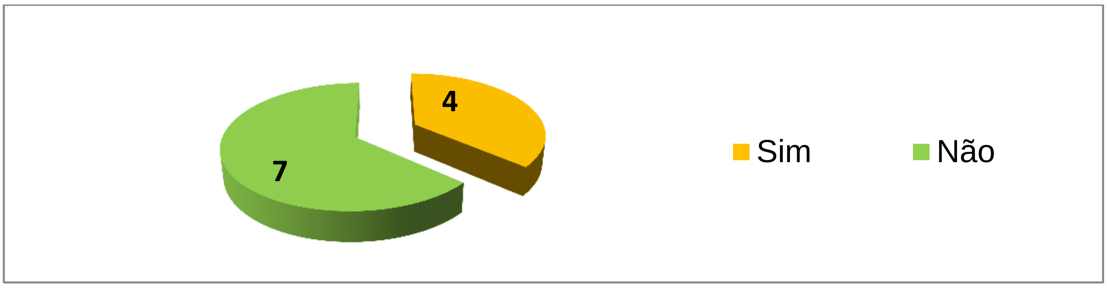


Gráfico 17: Resultado parcial (a) do item 18.1 – Planificação de recursos artísticos, culturais ou patrimoniais

Os docentes que responderam *Sim* poderiam completar a resposta expondo mais de um exemplo. Diante disto, apresentamos os exemplos revelados em cada caso.

Relativamente aos recursos artísticos já utilizados, os resultados constam no Gráfico 18 a seguir.

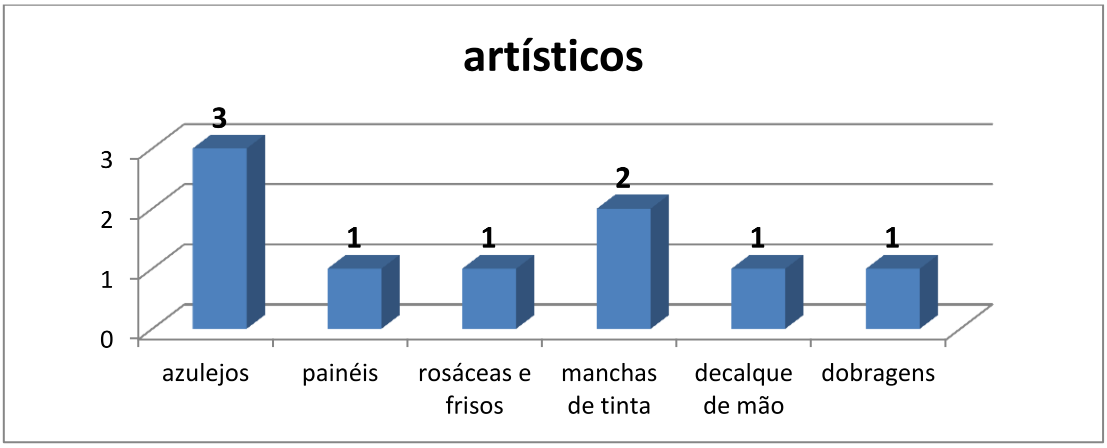


Gráfico 18: Resultado parcial (b) do item 18.1 – Recursos artísticos já planificados

O recurso mais citado foi *azulejos*, mesmo assim com a incidência de apenas três docentes. Dois docentes também alegaram já terem utilizado *manchas de tinta*. De acordo com o resultado de tópicos anteriores como Práticas utilizando recursos, Estratégias (PA) e Recursos materiais (PA), o recurso *manchas de tinta* é utilizado pelos docentes, como exemplifica D7 no QO, da seguinte forma: "*Como simetria de reflexão, trabalhava a dobragem de uma folha e punha pingos grossos de tinta num dos lados partindo do eixo da dobragem. Juntava as duas partes e espalmava a folha dobrada para a tinta se misturar. Abria a folha e falava da simetria de reflexão e do eixo de simetria*"

(D7/QO). Não trata-se de utilizar alguma obra de arte de algum artista em específico, e sim de uma estratégia de ensino desenvolvida de forma tradicional, pelos próprios docentes. A exceção dos *azulejos* e de acordo com os dados já apresentados até aqui, o mesmo parece ocorrer com o uso dos termos *painéis*, *rosáceas e frisos*, *decalque de mão* e *dobragens*.

Em relação aos recursos culturais já utilizados, apenas um dos onze docentes participantes informou já ter utilizado, exemplificando ter ocorrido através de *dobragens*. Em relação ao termo *dobragens*, aqui também se aplicam as mesmas considerações relativas ao uso dos recursos artísticos, apresentadas a pouco.

Sobre o uso dos recursos patrimoniais, obtivemos os seguintes resultados constantes no Gráfico 19.

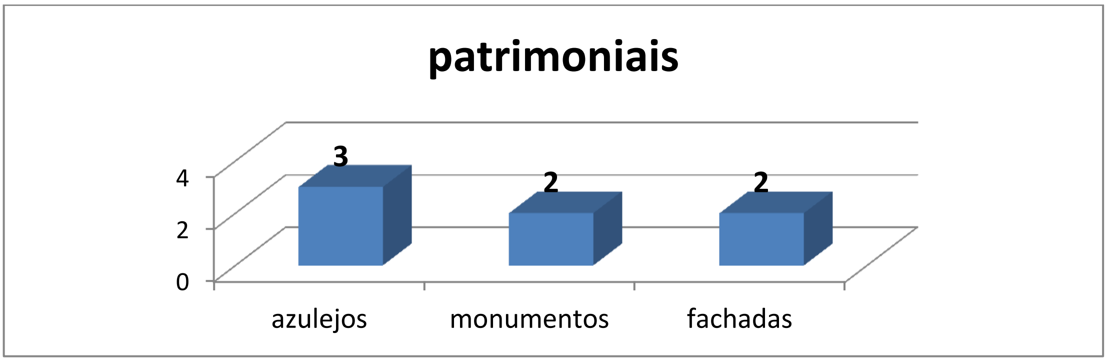


Gráfico 19: Resultado parcial (c) do item 18.1 – Recursos patrimoniais já planificados

Durante a FG1, D4 mencionou novamente sua experiência com algum recurso mais próximo do que propomos com a OFD, referindo "*O Kandinsky, e eu este ano já o abordei também…*" (D4/FG1). Já após a implementação das atividades aos discentes, o mesmo docente revela, no QO novamente já ter utilizado observação de quadros de kandinsky e adiciona "*observação e pintura de mandalas*" (D4/QO).

Considerando todas as seis PA disponibilizadas pelos docentes, apenas um RACP foi mencionado. Novamente nos referimos às "*pinturas de Kandinsky*" (D4/PA).

- **RACP considerados viáveis**

Logo no início da OFD, durante a FG1, os docentes mencionaram alguns RACP que consideram viáveis. D10 aponta a "*uma cestaria típica, na aldeia de São Gonçalo, na Guarda*" (D10/FG1) e "*mosaicos e coisas da nossa*

cultura" (D10/FG1). Também diz "*Viseu*", mas sem especificar algum recurso em particular. D9 indica "*mosaicos portugueses do século XVII*" (D9/FG1).
A esta fase, os docentes não demonstram ainda reconhecerem a variedade de exemplos de RACP a serem utilizados no ensino de simetrias.

- **Estratégias (PA)**

Esta subcategoria consta no Quadro 31 com seus respectivos indicadores.

Quadro 31: CoDiPeP/p-r – Estratégias (PA)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Estratégias (PA)	Menção a simetrias em figuras geométricas diversas
	Menção direta a rosáceas, frisos e padrões

Todas as seis PA disponibilizadas continham estratégias de ação para ensinar simetrias, as quais foram assim consideradas pelo investigador de acordo com a característica do conteúdo e do contexto em que se apresentavam na PA. Em alguns casos, estas estratégias eram apresentadas com outro título, como por exemplo, *Processo de Operacionalização*, porém entendia-se como estratégias de ensino vislumbradas pelo docente.

Dividimos as 32 unidades de registro desta subcategoria nos dois indicadores considerados no Quadro 97, os quais apresentamos a sequir.

- **Menção a simetrias em figuras geométricas diversas (Apêndice 15)**

Considerando as PA disponibilizadas por seis docentes, foram detectadas 25 uniades de registro que se enquadram aos critérios deste indicador. Predominantemente, estas estratégias adotam uma postura de ensino comumente designado por tradicional, com ações restritas e pouco reveladoras, privilegiando as que remetem a um direcionamento apenas a abordagens de isometria de reflexão e simetria de reflexão, ainda assim, sem enfoque na diferenciação destes conceitos. Destacamos três destas unidades de registro, que se diferenciam, de alguma forma, das demais. D3 considera a estratégia de "*Identificação de simetrias na natureza*" (D3/PA) e D4 aponta "*Fazer recortes variados (obter bordados)*" (D4/PA) e "*Experimentação de atividades no simulador de simetrias*" (D4/PA).

- **Menção direta a rosáceas, frisos e padrões (Apêndice 16)**

Podemos identificar sete unidades de registro, provenientes das PA de quatro docentes[93], que se enquadram neste indicador. As que mais se destacam ainda revelam as mesmas características apontadas no indicador anterior, restringindo-se a polígonos ou figuras. Exemplificamos pelas unidades "*Construir pavimentações com polígonos todos iguais*" (D2/PA) e "*Construção de frisos utilizando diferentes figuras como modelo*" (D6/PA).

- **Avaliação (PA)**

Apesar de esta subcategoria conter apenas duas unidades de registro, provindas de dois docentes[94], dividimos-as em dois indicadores que seguem apresentados no Quadro 32 a seguir.

Quadro 32: CoDiPeP/p-r – Avaliação (PA)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Avaliação (PA)	Observação direta de atitudes discentes
	Observação de registros

- **Observação direta de atitudes discentes**

Como critérios avaliativos, D2 apontou "*Participação / interesse nas atividades; Observação direta*" (D2/PA) e D4 apontou "*Participação dos alunos; Diálogos e reflexões*" (D4/PA).

- **Observação de registros**

Neste indicador, apenas alocamos o registro de D4, que apontou "*Observação direta da resolução de tarefas; Observação de registos escritos (Dossiê / Caderno Diário); Trabalho de pares/grupo*" (D4/PA).

[93] D1, D2, D4 e D6 (Apêndice 16).
[94] D2 e D4.

Em síntese – Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio (CoDiPeP)

Sobre o ensino, percebemos que todos os docentes participantes da OFD já lecionaram simetrias e a maioria considera que o nível de abordagem deste ensino no 1º CEB deva ser de forma básica, pouco aprofundada.

Simetria de reflexão é o conceito comumente lecionado pelos docentes participantes da OFD e este ensino geralmente ocorre de forma descontextualizada, sem o uso de RACP, o que pode ter consequências prejudiciais à aprendizagem (Mashingaidze, 2012; Hawking, 1999; Bansilal & Naidoo, 2012; Timmer & Verhoef, 2012; Andrade *et al*., 2007; Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992). Nenhum docente teve experiência com AGD, embora a maioria considere que seu uso seja relevante.

A semelhança dos resultados referentes a caracterização própria do nível de conhecimento científico, quase todos os docentes também alegam possuir conhecimento didático-pedagógicos de simetrias, oriundos principalmente dos manuais escolares e da formação inicial, porém sentem-se inseguros em lecioná-los (Curi, 2004). Nota-se o reconhecimento docente da necessidade, para além da perspectiva científica, de abordagem didático-pedagógica nas formações inicial e contínua (Abrantes & Ponte, 1982; Ponte, 2005; Gatti, 2010; Ferreira, 2014; Shulman, 1986) e que, em relação às transformações geométricas e às simetrias, não são presentes nem nas Universidades nem nas Escolas Superiores de Educação (Veloso, 2012).

Os docentes demonstraram deterem diversas debilidades em relação às simetrias, alegando inclusive já terem ensinado certos conceitos de forma superficial, ratificanto o que aponta Mashingaidze (2012). A diferenciação entre os conceitos de isometria e de simetria e a compreensão do conceito de reflexão deslizante se destacaram como os pontos de maior dificuldade. Além disso, segundo os docentes, os discentes do 1º CEB têm dificuldades em acompanhar o ensino de simetrias devido suas estruturas mentais, capacidade de abstração, maturidade, complexidades inerentes ao próprio conteúdo entre outros motivos. As unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos revelam algumas dificuldades enfrentadas pelos docentes em relação às transformações geométricas, isometrias e simetrias, o que consideramos estar diretamente relacionado às mesmas dificuldades reveladas em relação aos conhecimentos científicos. Os resultados globais, considerando as quatro unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos a frequência de 98% das respostas na classe não respondida / errada e 2% na classe parcialmente correta. Estes resultados sugerem que os docentes não reconhecem a diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes, a diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria, não percebem que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos e que a circunferência não é uma rosácea.

Apesar das dificuldades reveladas, os docentes reconhecem a importância do ensino de simetrias no 1º CEB, inclusive a partir dos anos iniciais (Ponte *et al*., 2007; Alves & Santana, 2009; NCTM, 2008), e que o uso de RACP na promoção deste ensino configura-se em uma mais-valia em favor também da aprendizagem discente (Veloso, 2012; Fainguelernt, 1999; Andrade *et al*., 2007; Amaral, 2015; Gandulfo *et al*., 2013; Alsina & Canals, 2000).

Reconhecem a própria participação na OFD como uma forma de aquisição também de conhecimento didático-pedagógico e atualização profissional e revelaram que há certa carência de formações colaborativas e que, para eles, este requisito é importante, gera boas consequências a todos e torna a formação mais satisfatória.

Em relação às planificações, os docentes revelam que baseavam suas planificações no PMEB e nas Metas, com apoio dos conteúdos presentes nos manuais escolares (Henderson & Rodrigues, 2008). Os objetivos gerais e específicos expostos nas planificações que elaboravam eram pouco reveladores sobre a forma de abordagem das simetrias, demonstrando determinadas dificuldades em lecionar a temática. Muitos dos conceitos previstos pareciam estar em desacordo com o que realmente era praticado, pois revelaram não dominarem certos conceitos ou os abordar de forma desajustada ou superficial. Praticamente nada foi mencionado sobre RACP, enquanto que a maioria mencionou dobragens e tinta, apesar de, com estes recursos, não ser possível o ensino de todos os conceitos de simetria.

Banco de Atividades (BA) e Planificações Personalizadas (PP)

Avançamos para a apresentação e análise interpretativa dos dados relativos as categorias Banco de Atividades (BA) e Planificações Personalizadas (PP). As subcategorias destas duas categorias incidem na criação colaborativa de um banco de atividades adequadas ao ensino de simetrias utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e elaboração de uma planificação personalizada para a implementação destas atividades. Juntas, estas subcategorias contribuirão para a consolidação do objetivo específico *II-iv*.

Banco de Atividades (BA)

Começamos pelo tratamento das subcategorias e os respectivos indicadores intrínsecos a categoria **Banco de Atividades (BA)**. Esta é estabelecida por três subcategorias.

As atividades pertencentes ao BA possuem características específicas, bastante diferentes das atividades comuns, comumente designadas por tradicionais, até então, desenvolvidas pelos docentes, de acordo com os dados já analisados. O investigador apresentou algumas possibilidades, como *templates*, e, em conjunto com os participantes durante a OFD, decidiu-se seguir um determinado formato bastante flexível. Neste formato, as atividades iniciavam-se a partir de uma breve descrição de um determinado recurso elencado pelo docente, com textos e imagens. O vocabulário e a extensão dos textos foram adaptados pelo docente consoante as características das turmas às quais as atividades seriam propostas. Poderia, ainda, conter vídeos ou outros apoios que, juntamente com a breve descrição, tinham o propósito de motivar os discentes a perceberem a presença das simetrias em outros contextos, nomeadamente, artísticos, culturais e patrimoniais. Após este início, algumas imagens eram distribuídas e apresentadas através de projeção, enquanto os docentes questionavam os discentes, utilizando ou não o *Visual Thinking Strategies* (V.T.S.), sobre as características presentes na imagem em apreço. Os discentes podiam conferir algumas hipóteses com o auxílio de materiais concretos e assim os conceitos iam sendo definidos.

- **Preparação para a criação**

O Quadro 33 apresenta a esta subcategoria e seus respectivos indicadores.

Quadro 33: BA – Preparação para a criação

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Preparação para a criação	Fonte de ideias para as primeiras versões das atividades
	Ligação a outras atividades em curso e disciplinas

- **Fonte de ideias para as primeiras versões das atividades (Apêndice 17)**

A preparação para a criação destas atividades também requereu ações especialmente novas às suas práticas educacionais. Referindo-se a esta preparação três docentes[95] manifestaram-se diretamente durante a FG2. D2 considera que "*(…) os azulejos era mais fácil eles (discentes) aplicarem com a [reflexão] deslizante do que na pavimentação*" (D2/FG2) e D4, na mesma entrevista, disse que *"Eu queria partir dum centro de interesse que… de algo em que já vos (aos discentes) disseste alguma coisa"* (D4/FG2). Diante da exposição das primeiras versões das atividades elaboradas, D3 reconhece a qualidade do que está sendo elaborado pelos docetes e diz que vai "*utilizar os trabalhos que eu sei, que estão aqui feitos, muito interessantes…*" (D3/FG2).

- **Ligação a outras atividades em curso e disciplinas**

Os docentes D3 e D4 apresentam citações que revelam reconhecer as possibilidades de ligação do ensino de simetrias a partir dos RACP com outras disciplinas que lecionam. D3 disse que *"De todos os temas [utilizados nas elaborações das atividades] que estão, há de haver coisas bem interessantes para pegar em certas ocasiões"* (D3/FG2). D4 salienta, de forma mais direta, ao dizer *"E como já estivemos a dar a história de Portugal, eu virei (direcionei a busca) então aos palácios portugueses, para arquitetura e, especificamente, os*

[95] D2, D3 e D4 (Apêndice 17).

palácios portugueses porque estão ligados à história dos reis (...) para ter uma sequência e [para] que eles (discentes) se sentissem já motivados" (D4/FG2). Justifica ao dizer que *"seria interessante e giro, e por isso que mudei de tema e fui para os palácios de Portugal"* (D4/FG2), *"seja da arquitetura, ou seja da… é… São assuntos novos não é (?). São temas novos…"* (D4/FG2).

- **Exigências e dificuldades inerentes ao processo de criação**

O Quadro 34 apresenta a esta subcategoria e seus respectivos indicadores.

Quadro 34: BA – Exigências e dificuldades inerentes ao processo de criação

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Exigências e dificuldades inerentes ao processo de criação	Envolve muita pesquisa
	Dificuldades com a edição e referenciação das imagens

- **Envolve muita pesquisa**

Diante às características das atividades, a dedicação para esta criação requereu empenho e adequação às demandas inerentes ao processo. Três docentes[96] revelaram terem-se dedicado a esta criação das atividades com toda a especificidade necessária. Durante a FG2, D4 alegou "*fartei-me, pesquisei muito, e vi…*" (D4/FG2) e D2 "*eu fartei-me de procurar [recursos da web]*" (D2/FG2).

Na EI, D4 diz ainda que "*dá muito mais trabalho, e dá muitas horas, muitas horas (...)*" (D4/EI). No QO, destacamos a consideração de D9, alegando que "*foi uma formação que requereu bastante empenho e esforço da nossa parte, principalmente na preparação dos diversos materiais*" (D9/QO) e "*Envolveu-nos bastante e levou muitas, muitas horas até que estivesse finalizado*" (D9/QO).

[96] D2, D4 e D9.

- **Dificuldades com a edição e referenciação das imagens (Apêndice 18)**

Algumas dificuldades foram relatadas principalmente por quatro docentes[97]. Estas, nomeadamente, referiam-se a alguma característica relacionada com as imagens a serem utilizadas nas atividades. Inferimos que os docentes não têm prática em buscar imagens na *internet*, e também enfrentam alguma dificuldade para formatar estas imagens de maneira a servirem adequadamente para uso em atividades discentes. D2 apontou como dificuldade o fato de ter que "*identificar (referenciação da página da web de onde a imagem foi utilizada) as pavimentações (imagens de calçadas)*" (D2/FG2) e D4 enfrentou dificuldades com a busca na qualidade das imagens utilizadas, alegando que "*ao ampliar a imagem para ir buscar algum elemento específico, desfigurava um bocadinho*" (D4/FG2). O DC destaca que D7 "*revela sua dificuldade com alguns pormenores em algumas imagens utilizadas por ela*" (Investigador/DC).

Podemos afirmar que as dificuldades consideradas rondaram em pormenores das imagens utilizadas.

- **Potencialidades**

O Quadro 35 a seguir apresenta esta subcategoria e seus indicadores.

Quadro 35: BA - Potencialidades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Potencialidades	Potencialidades para o ensino
	Potencialidades para a aprendizagem

- **Potencialidades para o ensino (Apêndice 19)**

Seis docentes[98] manifestaram-se quanto às potencialidades da utilização dos RACP no ensino de simetrias. D3 afirmou "*E a diversidade dos trabalhos que vão ser apresentados, acho que é um complemento ao trabalho total (...). E, ao juntar tudo, acho que o produto só pode ser o melhor…*" (D3/FG2). Em resposta a "*O que considera que possam ser as potencialidades das atividades*

[97] D2, D3, D4 e D7 (Apêndice 18).
[98] D1, D2, D3, D4, D6 e D9 (Apêndice 19).

utilizadas?" (Investigador/QO), D6 responde que considera ser "*A parte prática, o uso dos materiais*" (D6/QO) e D1 salienta que serve para "*Uma melhor exemplificação dos conceitos trabalhados*" (D1/QO).

- **Potencialidades para a aprendizagem (Apêndice 20)**

Quatro docentes[99] apontaram diretamente o potencial do BA para a aprendizagem discente. Nas suas perspectivas, a utilização de RACP facilita e motiva essa aprendizagem. Segundo D2, esta abordagem consegue "*Levar os alunos à aprendizagem de todos os conceitos de simetria*" (D2/QO) e, para D4, leva os alunos a terem "*(...) um maior interesse e motivação*" (D4/QO). D7 considera que esta abordagem alcança "*A motivação para a matemática; a descoberta de regularidades; o desenvolvimento do espírito crítico; potencia a atenção/concentração*" (D7/QO).

- **Satisfação docente com a criação**

Esta subcategoria foi estabelecida apenas pelo indicador Devido à pesquisa e diversidade de materiais encontrados.

- **Devido à pesquisa e a diversidade de materiais encontrados (Apêndice 21)**

Mesmo com determinadas dificuldades, bastante específicas, a enfrentar, a satisfação de todos os docentes em relação à criação das atividades foi notada em várias etapas da OFD, tanto em citações dos próprios docentes quanto em observações realizadas pelo investigador. O DC do 3º trabalho presencial, na presença de dez docentes[100], aponta para a satisfação e entusiasmo de todos os docentes com a criação do BA com o registro de que "*A diversidade de recursos revelou o grande entusiasmo e envolvimento dos formandos na atividade*" (Investigador/DC). Também D2 revelou que o seu "*grau de satisfação manifestou-se desde que comecei a fazer a pesquisa do material para a elaboração do PowerPoint e durante a preparação da aula*" (D2/QO). D4, em referência à criação das atividades, disse "*Eu própria fiquei deslumbrada com o que vi*" (D4/QO). D3, em relação ao recurso que optou

[99] D2, D4, D7 e D9 (Apêndice 20).
[100] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9 e D10 (Apêndice 21).

utilizar, disse que *"Foi engraçado (interessnate) porque conheci um bocadinho mais do fundamento das mandálas"* (D3/FG2).

Planificações Personalizadas (PP)

Passamos para o tratamento das subcategorias que incidem sobre as Planificações Personalizadas (PP) e que será realizado de maneira semelhante a procedida com os dados das PA.

Assim como as PA foram demandadas aos docentes durante a OFD, a elaboração de uma PP foi parte das atividades que os docentes deveriam realizar. Cabe destacar que, nesta fase da OFD, contávamos com a participação de nove[101] dos onze docentes que iniciaram a formação.

Em consequência de valermos da colaboratividade durante toda a Oficina, a elaboração destas PP também ocorreu de forma colaborativa, onde todos os docentes entre si, e valendo-se da colaboração do investigador, interagiram de forma a preparar um instrumento norteador, bastante personalizado às especificações planeadas. Todas as PP elaboradas, embora semelhantes, são diferentes, não havendo um padrão para esta elaboração mas sim um norteador comum embasado nas discussões ocorridas na OFD. Todos os nove docentes participantes da OFD aquando da demanda da PP apresentaram a sua.

- **Objetivos gerais (PP)**

O Quadro 36 a seguir apresenta esta subcategoria e seus indicadores.

Quadro 36: PP – Objetivos gerais (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Objetivos gerais (PP)	Formulados de maneira explícita (PP)
	Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria (PP)
	Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria utilizando a arte a tradição (PP)

[101] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9.

- **Formulados de maneira explícita (PP)**

Embora a elaboração das PP tenha sido uma demanda da OFD, não houve um padrão para esta elaboração. Assim, dos nove docentes que apresentaram as PP, apenas cinco docentes[102] explicitaram o objetivo geral de forma clara. Estes cinco objetivos gerais foram divididos nos dois indicadores a seguir, de acordo com suas intenções.

- **Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria (PP)**

D4 e D5 apresentam diretamente o objetivo geral "*facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria*" (D4 e D5/PP).

- **Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria utilizando a arte a tradição (PP)**

Juntamos os objetivos gerais apresentados por D2, D8 e D9 neste indicador pois a diferença entre estes objetivos gerais são bem pequenas. Enquanto D2 apresentou "*Facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria tendo como inspiração a arte*" como objetivo geral, D8 e D9 apresentaram "*Facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria tendo como inspiração a arte & tradição*".

Consideramos que a proximidade das intenções de todos os cinco objetivos gerais apresentados é consequência direta da colaboratividade com a qual nos valemos, todos, durante a elaboração deste instrumento.

- **Objetivos específicos (PP)**

O Quadro 37 apresenta esta subcategoria e seus indicadores.

[102] D2, D4, D5, D8 e D9.

Quadro 37: PP – Objetivos específicos (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Objetivos específicos (PP)	Incide na identificação de simetrias e eixos de simetria (PP)
	Incide no desenvolvimento do espírito de observação e percepção de regularidades e articular saberes geométricos e artísticos (PP)
	Incide na livre expressão da criatividade (PP)

- **Incide na identificação de simetrias e eixos de simetria (PP)**

Todos os nove docentes[103] apreentam, em suas PP, formas de identificar simetrias e eixos de simetria. As planificações destes docentes apresentavam objetivos específicos como:

- Identificar simetrias;
- Identificar no plano, eixos de simetria de figuras;
- Identificar simetrias de reflexão e rotação;
- Identificar uma simetria de reflexão, se a imagem possuir um ou mais eixos de reflexão;
- Verificar que uma imagem pode possuir eixos de reflexão vertical, horizontal e diagonal;
- Reconhecer os casos em que o eixo de reflexão pode ser na diagonal.
- Identificar no plano, eixos de reflexão em figuras artísticas

- **Incide no desenvolvimento do espírito de observação e percepção de regularidades e articular saberes geométricos e artísticos (PP)**

Dos nove docentes que apresentaram as PP, o objetivo específico *Desenvolver o espírito de observação e percepção de regularidades* e *Articular saberes geométricos e artísticos* não estavam presente apenas na PP de D7.

[103] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9.

- **Incide na livre expressão da criatividade (PP)**

Dos nove docentes que apresentaram as PP, o objetivo específico *Exprimir livremente a sua criatividade* não estava presente apenas nas PP de D6 e de D7.

- **PP: Conceitos (PP)**

Nesta subcategoria, procedemos de forma análoga à subcategoria Conceitos (PA) da categoria Conhecimento Didático-pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r). Apresentamos no Quadro 38 a atual subcategoria, Conceitos (PP), e seus indicadores.

Quadro 38: PP – Conceitos (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Conceitos (PP)	Reflexão (PP)
	Rotação (PP)
	Translação (PP)
	Reflexão deslizante (PP)

Aqui também optamos por apresentar e analisar conjuntamente os dados relativos aos quatro indicadores desta subcategoria.

- **Reflexão (PP); Rotação (PP); Translação (PP); Reflexão deslizante (PP)**

De acordo com as indicações presentes nas PP, podemos separar as alegações de oito[104] das nove PP apresentadas, em três grupos. D1, D2, D4, D5 e D8 alegaram os quatro conceitos de simetria – reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante – enquanto D3 e D9 não incluíram apenas a reflexão deslizante e D6 alegou apenas reflexão e rotação. A PP apresentada por D7 ateve-se apenas à simetria de reflexão pois esta destinava-se a uma turma de 2º ano do 1º CEB.

[104] D1, D2, D3, D4, D5, D8 e D9.

De acordo com estes dados, apresentamos o Gráfico 20 que revela a incidência, separadamente, em cada indicador.

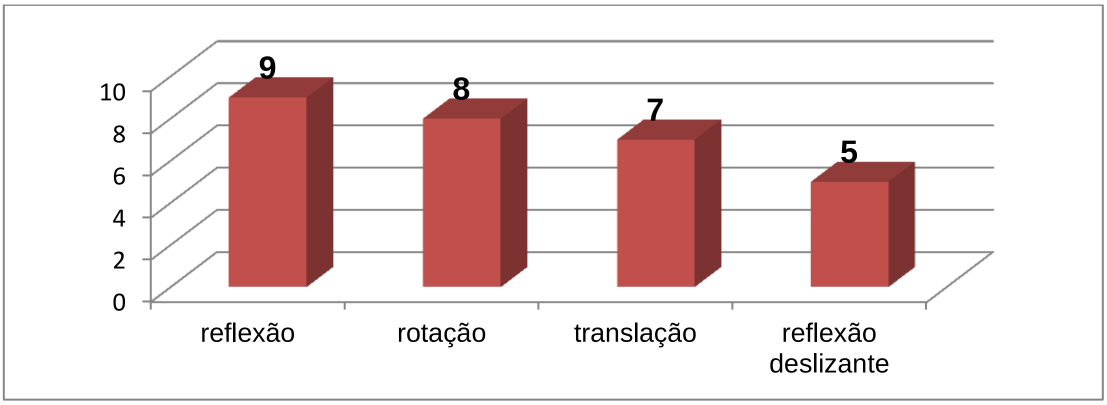


Gráfico 20: Conceitos separados (PP)

Analogamente ao que apresentamos na subcategoria Conceitos (PA), apresentamos Gráfico 21 os dados desta subcategoria sob outra perspectiva.

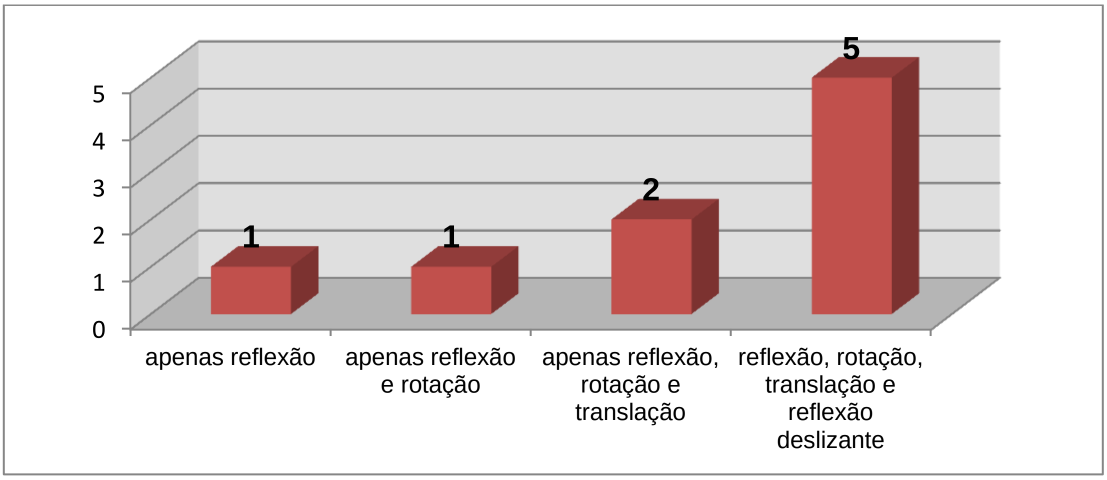


Gráfico 21: Resultados acumulativamente dos dados das PP – Conceitos

Assim como os dados da subcategoria Conceitos (PA) revelaram, estes dados da subcategoria Conceitos (PP) reafirmam que é considerada uma forma acumulativa e sequencial – reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante – para o ensino dos conceitos de simetria, onde um próximo conceito somente é abordado após o anterior, ou os anteriores, já terem sido lecionados.

- **PP: Recursos (PP)**

Esta subcategoria foi estabelecida por apenas dois indicadores (Quadro 39).

Quadro 39: PP – Recursos (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Recursos (PP)	Recursos materiais, em geral, e TICs (PP)
	RACP (PP)

Optamos assim, diferentemente de quando apresentamos e analisamos os dados da subcategoria Recursos utilizados e possibilidades (PA), pois o teor principal das PP foi sobre a utilização de RACP.

- **Recursos materiais, em geral, e TICs (PP)**

De seis[105] PP, de entre os nove participantes, foi possível destacar os recursos materiais, em geral, e TICs. Cinco docentes[106] alegaram exatamente os mesmos recursos: "*Computador – PowerPoint*", "*Imagens em papel*", "Espelhos/miras", "Papel vegetal" e "*material de desenho (lápis, régua…)*" e D7 apresentou apenas "*Suporte de papel*" e "*PowerPoint*". Novamente salientamos que a proximidade entre as PP nos parece ser um reflexo da característica colaborativa da OFD.

Estes dados também não diferem muito dos apresentados como recursos nas PA, embora aqui o recurso "Imagens em papel" aparece com maior destaque do que anteriormente, o que é uma consequência da metodologia de abordagem desenvolvida na OFD.

- **RACP (PP)**

Neste indicador, apresentaremos os RACP que foram utilizados pelos docentes na elaboração das atividades, e que se encontram presentes nas PP. A grande variedade de RACP nos fez optar por apresentar o Quadro 40 por completo, não separando-os em indicadores.

[105] D2, D4, D5, D7, D8 e D9.
[106] D2, D4, D5, D8 e D9.

Quadro 40: RACP (PP)

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PA	*monumentos*
		azulejos
		grades
D2	PA	*azulejos*
D3		*mandalas*
D4	PA	*palácios*
		mosaicos portugueses
D5	PA	*calçadas portuguesas*
D6	PA	*azulejos*
		monumentos
D7	PA	*Monumentos de Coimbra*
		Portas - Azulejos e Jardins
		Grades de Angra do Heroísmo
		Brasões de Famílias
D8	PA	*Tecidos Kente do Quénia*
D9	PA	*Kolams de Tamil Nadu*

Apenas azulejos e monumentos foram RACP apresentados por mais de um docente, mesmo assim, as atividades elaboradas por estes eram diferentes pelas imagens e descrições utilizadas.

- **PP: Estratégias (PP)**

Esta subcategoria e seus indicadores constam no Quadro 41 a seguir.

Quadro 41: PP – Estratégias (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Estratégias (PP)	Observação/exploração de imagens, figuras, filme, vídeo (PP)
	Identificação e criação de simetrias e eixos (PP)
	Uso de mira, régua e dobragem para reconhecer simetrias de reflexão (PP)

- **Observação/exploração de imagens, figuras, filme, vídeo (PP) (Apêndice 22)**

Todas as nove PP apresentadas continham estratégias que se enquadram neste indicador. A PP de D7 considerou como estratégia, neste indicador, "*Observa imagens em suporte papel e em PowerPoint*" (D7/PP) e todas as demais PP continham a indicação da estratégia associada ao RACP elencado pelo docente, como por exemplo, "*Observação/exploração de imagens de calçadas portuguesas*" (D5/PP) e "*Observação/exploração de pequenos vídeos e imagens de Tecidos Kente do Quénia*" (D8/PP). Também destacamos como estratégia a "*Exploração de imagens*" (D3/PP) e "*exploração pormenorizada de imagens*" (D1, D2, D4, D5, D6, D8 e D9/PP).

- **Identificação e criação de simetrias e eixos (PP) (Apêndice 23)**

Três docentes[107] consideraram estratégias que cabem a este indicador, de acordo com os critérios tomados. D1, de forma mais sucinta, apresentou "*Criar simetrias*" (D1/PP) e D6 considerou "*Construção de figuras com eixo de simetria*" (D6/PP). D7 revelou "*Reflete sobre questões colocadas sobre as imagens; Inferir partindo da observação da imagem; Traça os eixos de reflexão existentes na imagem; Reconhece quando uma imagem possui simetria de reflexão*" (D7/PP).

[107] D1, D6 e D7 (Apêndice 23).

- **Uso de mira, régua e dobragem para reconhecer simetrias de reflexão (PP) (Apêndice 24)**

Este indicador conta com quatro estratégias, todas presentes na PP de D7. Este docente considerou "*Utilizar a mira, verticalmente, como objeto que reflete metade da imagem, sobrepondo-a sobre a outra metade; Traçar, com a régua, uma linha reta sobre a posição em que a mira foi colocada; Reconhece quando uma imagem possui eixo de reflexão na diagonal, através da dobragem na diagonal de um quadrado e de um rectângulo; Utiliza meios que comprovem a sua afirmação, como, por exemplo, a mira*" (D7/PP). Cabe destacar que D7 realizou as implementações das atividades numa turma de 2º ano de escolaridade e optou, naquele momento, por abordar apenas a simetria de reflexão.

- **Avaliação (PP)**

À semelhança dos critérios adotados aquando da apresentação e análise dos dados da subcategoria Avaliação (PA), esta subcategoria foi estabelecida por dois indicadores com a mesma designação, como consta no Quadro 42 a seguir.

Quadro 42: PP – Avaliação (PP)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Avaliação (PP)	Observação direta de atitudes discentes (PP)
	Observação de registros (PP)

- **Observação direta de atitudes discentes (PP) (Apêndice 25)**

Todas as nove PP apresentadas continham unidades de registro alocadas neste indicador. Estas unidades são iguais ou equivalentes a "Participação/interesse nas atividades iniciais" e "Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula" em todas elas.

- **Observação de registros (PP) (Apêndice 26)**

Assim como no indicador anterior, todas as PP continham unidades de registro são iguais ou equivalentes "*Realização e apresentação do trabalho final*". Destacamos da PP de D7 as considerações "*Registros orais; Registros escritos*" (D7/PP).

Novamente, cabe apontar que a semelhança entre diversos critérios das PP se dá devido a característica colaborativa da OFD. Ainda assim, consideramos que, de uma forma geral, os critérios avaliativos considerados nas PP se assemelham aos já revelados pelas PA.

Em síntese – Banco de Atividades (BA) e Planificações Personalizadas (PP)

Entendemos que a manifestação explícita sobre a dedicação durante a criação do Banco de Atividades, embora de apenas três participantes – D4 na FG2 e na EI, D2 na FG2 e D9 no QO – correspondem a dedicação dos demais participantes. Juntamente com esta dedicação, a preparação necessária à criação do BA despertou considerável interesse dos docentes, os quais ressignificaram os recursos e ainda houve, em um caso específico, uma associação ao conteúdo de Estudo do Meio que estava por lecionar. Em respeito às dificuldades enfrentadas nesta etapa, as alegações não ultrapassaram a encontrar a fonte das figuras selecionadas e a busca de melhor qualidade destas. Todos os docentes manifestaram satisfação diante da criação do Banco de Atividades, revelando interesse e entusiasmo desde a recolha dos motivos a serem utilizados até à preparação do *PowerPoint* para apresentação aos discentes.

Nas cinco PP em que o objetivo geral foi exposto de forma direta, este incidia sobre facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Nos objetivos específicos notam-se metas bastante distintas das projetadas nas PA. Articular saberes geométricos e artísticos, desenvolver o espírito de observação e percepção de regularidades e exprimir livremente a sua criatividade estão presentes em praticamente todas as PP, o que consideramos refletir a influência e motivação emanadas da participação na OFD. O mesmo é possível notar através das estratégias e RACP apresentados, as quais revelam a abundante variedade de RACP utilizados, no entanto os recursos materiais presentes nas PP são praticamente os mesmos revelados pelas PA.

Diante de demasiadas possibilidades de abordagens e da possibilidade de implementação em diferentes anos de escolaridade, todos os nove docentes que participaram até as últimas etapas da OFD reconhecem a necessidade de adequações nas atividades desenvolvidas. As PP revelam que os conceitos abordados estão de acordo com o ano de escolaridade em que as atividades foram implementadas, embora algumas PP revelavam ainda mais conceitos do que a sugestão curricular daquele determinado ano de escolaridade.

A colaboratividade intrínseca à criação das atividades e das PP, foi um dos aspectos primordiais para a superação dos desafios impostos pela OFD (Machado & Formosinho, 2009; Flores & Veiga Simão, 2009; Snoek, 2008; Forte & Flores, 2011; Retallick, 1999; Zeichner, 2010; Nóvoa, 2009; Matos, 2011) e impactou diretamente na qualidade de todo material elaborado pelos docentes.

Implementações (Imp)

Chegamos à apresentação e análise interpretativa dos dados referentes à categoria Implementações (Imp) que contribuirá para a consolidação do objetivo específico *II-v*.

A implementação das atividades aos discentes também foi uma das demandas da OFD aos docentes. A altura desta demanda, a OFD contava com a participação dos mesmos nove docentes[108] que participaram desde o início até a última etapa. Cabe relembrar que nós acompanhamos as implementações das atividades aos discentes por parte de três docentes: D2, D4 e D7. Estas ações foram realizadas pelo investigador através de Observação Direta Não Participante (ODNP). Estes três docentes contaram também com a possibilidade em se expressar diretamente, sobre essas implementações, através das EI que foram realizadas logo a seguir às implementações. Além disso, todos os docentes puderam manifestar-se através do QO e das próprias sessões de formação, as quais recolhemos dados através do DC.

- **Expectativas dos docentes em relação à implementação das atividades**

Vamos a primeira subcategoria, que é presente no Quadro 43, assim como seus indicadores.

Quadro 43: Imp – Expectativas dos docentes em relação à implementação das atividades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Expectativas dos docentes em relação à implementação das atividades	Expectativa de boa recetividade dos discentes
	Promover a curiosidade dos discentes

[108] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9.

- **Expectativa de boa receptividade dos discentes**

Desde o início da OFD já havia alguma expectativa dos docentes acerca da boa receptividade dos discentes em relação à implementação das atividades. Durante a FG2, ocorrida entre o início da OFD e as implementações das atividades, em resposta a *"(…) você já consegue imaginar se a receptividade e o envolvimento desses alunos, com essas atividades, com esse formato que vocês estão elaborando, será positiva, despertando maiores interesse e participação ativa deles?*" (Investigador/FG2), D4 prontamente respondeu "*Sim, sim…*" (D4/FG2) e foi completado por D3, que disse "*É claro que sim… Isso não há dúvidas (…)"* (D3/FG2).

- **Promover a curiosidade dos discentes**

Os docentes expressaram também a expectativa de, através das atividades, conseguir promover a curiosidade dos discentes. A este propósito, D3 refere "*Acho que [os discentes] vão ficar com um bichinho (curiosidade) já até para o próximo ano letivo, que é o 4º ano, e irem já com outro olhar sobre o que vão fazer, não é (?)*" (D3/FG2).

- **Estratégias durante as implementações**

Esta subcategoria e seus indicadores constam no Quadro 44.

Quadro 44: Imp – Estratégias durante as implementações

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Estratégias durante as implementações	Utilização de imagens variadas
	Utilização das características dos RACP para o ensino de conceitos de simetrias
	Utilização dos RACP para fazer relações com outras áreas
	Utilização das imagens para uma abordagem gradativa da complexidade dos conceitos

- **Utilização de imagens variadas**

D3 alega ter utilizado "*imagens bastante variadas para realizar a aprendizagem do tema*" (D3/QO).

- **Utilização das carateristicas dos RACP para ensinar conceitos de simetria**

D2 revela que utilizou *“(…) a arte dos azulejos para ensinar o conceito de simetria de reflexão e a de translação e da calçada portuguesa para motivar os alunos para a aprendizagem das simetrias de rotação e a de simetria de reflexão deslizante*” (D2/QO).

- **Utilização dos RACP para fazer relações com outras áreas**

Percebemos que D4 *“inicia perguntando onde está a matemática que nos rodeia”* (Investigador/ODNP). O mesmo docente *“pergunta aos alunos: Que relação existe entre a matemática e a arte?”* (Investigador/ODNP). A partir desta primeira interação com os discentes, D4 apresenta um pequeno vídeo introdutório que revela alguns dos palácios de Portugal e é *“Muito boa a condução da professora”* (Investigador/ODNP). Findo o vídeo, a descrição é estreitada ao Palácio de Sintra, e a partir daí, apresenta-se uma janela em particular, a partir da qual inicia um debate. Conduzindo para as atividades, D4 explanou “*a descrição dos palácios de maneira muito adequada, associando a aulas anteriores sobre os reis de Portugal*” (Investigador/ODNP).

D2, na primeira aula de implementação *“inicia a aula referindo-se à orquestra naquele dia na escola, antes desta aula”* (Investigador/ODNP). Em seguida, o mesmo docente *“Fala sobre as simetrias presentes no pátio da escola, onde ocorrem os intervalos das aulas”* (Investigador/ODNP).

- **Utilização das imagens para uma abordagem gradativa da complexidade dos conceitos**

Em relação a D7, apresentamos uma passagem das ODNP onde revea que “*A estratégia da professora foi bastante adequada em avançar gradativamente a complexidade das percepções das imagens. Bem interessante!*” (Investigador/ODNP).

Entendemos que todo o dinamismo na condução das aulas observadas pelas ODNP são consequência da utilização dos RACP, acompanhado de motivação e segurança na lecionação por parte dos docentes.

- **Necessidade de adequação durante as implementações**

Foram necessárias algumas adequações às estratégias durante as próprias implementações. Estas foram notadas pelo investigador através das ODNP e integram a subcategoria apresentada no Quadro 45.

Quadro 45: Imp – Necessidades de adequações durante as implementações

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Necessidades de adequações durante as implementações	Diminuição da quantidade prevista de imagens
	Substituição do tipo de recurso visando uma adequação ao conceito científico
	Alteração da classificação do recurso em função de novas observações

- **Diminuição da quantidade prevista de imagens**

Logo no início da primeira aula de implementação de D2, o docente estava utilizando muitas imagens numa determinada atividade, o que causou certa dificuldade de administração didática. Entretanto, o docente percebeu tal situação como dificultadora e, prontamente, diminuiu a quantidade de imagens já para a implementação da atividade seguinte.

- **Substituição do tipo de recurso visando uma adequação ao conceito científico**

D2 disponibilizou algumas rosáceas aos alunos para a realização das atividades de translação, embora para abordagem deste conceito as rosáceas não sejam o recurso mais adequado, a menos que se utilize um recorte – friso ou padrão – pertencente à rosácea. Ao perceber que seria mais adequado utilizar apenas os frisos que o docente tinha disponível, procedeu adequadamente à substituição das rosáceas.

Na segunda aula de implementação, sobre a diferenciação entre isometria e simetria, D2 revelou certa dificuldade nesta diferenciação e contou com a ajuda do investigador para esclarecer os discentes. Cabe salientar que tal diferenciação ocorrera num momento bastante específico e de difícil clareza para a diferenciação. Um caso particular devido à imagem utilizada. A situação foi resolvida por completo no mesmo momento. Noutro momento, duas de entre as imagens distribuídas aos discentes estavam inclinadas, o que dificultava-os perceberem as simetrias do recurso. Em tempo, as imagens foram substituídas pelo docente e a atividade prosseguiu adequadamente.

D4, em sua única aula de implementação, vivenciou o momento em que dois alunos percebem duas esferas armilares na fachada do castelo apresentado, as quais invalidavam a imagem de admitir simetria de reflexão. Os próprios alunos dizem que as esferas armilares condizem com uma translação. O docente contornou muito bem este pormenor e aproveitou o ocorrido em favor do ensino, partilhando a percepção com os demais discentes.

- **Alteração da classificação do recurso em função de novas observações**

Durante a primeira aula de implementação de D7, um dos alunos notou a presença de um pequeno friso na parte de cima do brasão. O friso invalidava a imagem de admitir, como um todo, a simetria de reflexão. Foi uma percepção bastante perspicaz por parte do aluno, pois o friso era bem discreto, como um detalhe da imagem apresentada. Os demais discentes ficaram divididos em concordarem ou não com a colocação do aluno que divulgou sua percepção. Por fim perceberam, e assim consideraram que, interpretando o brasão por completo não há simetria de reflexão. A professora atuou de forma extremamente adequada na condução da situação, permitindo que os esclarecimentos emanem da discussão dos alunos e entre os próprios alunos. Prosseguiram, então, considerando a imagem do brasão e relevando a presença do pequeno friso. Entretanto, em todas as vezes que um pormenor como este era percebido numa imagem, de forma a inviabilizar a simetria na imagem como um todo, o docente contornava adequadamente a situação de forma clara, utilizando, o que poderia ser um problema, em favor de reforçar o conceito abordado.

Na segunda aula de implementação, sobre uma dúvida apontada por um aluno acerca da quantidade de eixos de simetria de reflexão presentes numa circunferência, D7 desafiou os discentes a perceberem cada vez mais eixos na circunferência, até que, por fim, um dos discentes utiliza a expressão “infinitos eixos". A partir daí, D7 define que a circunferência, então, não é considerada uma rosácea.

Podemos considerar que os desafios que surgiram durante as implementações de D2, D4 e D7 foram todos contornados da melhor maneira possível, dando-lhes maior segurança e favorecendo o ensino e a aprendizagem de muitos.

- **Percepção de melhorias**

Esta subcategoria e os indicadores que a estabelecem constam no Quadro 46 a seguir.

Quadro 46: Imp – Percepção de melhorias

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepção de melhorias	Satisfação docente nas implementações
	Promoção de um ensino rigoroso dos conceitos científicos
	Promoção de segurança na gestão da aula
	Reconhecimento das atividades como atrativas para os discentes
	Constatações docentes da boa receptividade discente

- **Satisfação docente nas implementações (Apêndice 27)**

Oito docentes[109] que responderam o QO se manifestaram positivamente quando questionados sobre a satisfação em utilizarem os RACP para ensinar simetrias. Em resposta a "*Como considera seu nível de satisfação na utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetrias?*" (Investigador/QO), D7 revela considerar-se "*bastante satisfeita (…)*" (D7/QO), classificando como "*um trabalho profícuo*" (D7/QO). D1 aponta o uso dos RACP como "*(…) enriquecedores e adequados*" (D1/QO). A ODNP aponta, em relação a D2, que todo o início da implementação ocorreu com "*bastante entusiasmo por parte da professora*" (Investigador/ODNP).

[109] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 27).

- **Promoção de um ensino rigoroso dos conceitos científicos**

Algumas das considerações de percepções positivas dizem respeito diretamente à lecionação das simetrias durante as implementações. Percebemos algumas passagens das ODNP que apresentam tais considerações. Durante a implementação das atividades por D4, o Investigador percebeu que "*A parte da apresentação dedicada as definições é feita com muito rigor matemático*" (Investigador/ODNP). Também durante as implementações das atividades por D4, "*As definições de direção da translação e de simetria de translação foram apresentadas adequadamente*" (Investigador/ODNP), e com bastante clareza. Também destacamos a correta utilização dos termos e conceitos de simetria, através de comunicação adequada, por parte de D2, D4 e D7, e destacamos a adequada "*diferenciação entre isometria e simetria*" (Investigador/ODNP) realizada por D2 e D4.

- **Promoção de segurança na gestão da aula (Apêndice 28)**

Detectamos algumas citações provindas de seis docentes[110] que remetem ao bom desenvolvimento das implementações da atividades. Em resposta a "*De maneira geral, como considera a aula realizada por você?*" (Investigador/QO), destacamos respostas como "*Mais seguro e ciente daquilo que estava a transmitir aos alunos estar correto*" (D6/QO) e "*fluiu com bastante naturalidade (…) houve bastante interesse e motivação por tudo o que estava a ser apresentado*" (D9/QO). Nas EI, questionados em a classificação dada a aula ocorrida, D2 alegou considerar "*suficiente (…) bem-sucedida…*" (D2/EI) e D7 disse que "*as aulas ocorreram muito bem, que o conceito em si foi muito bem trabalhado*" (D7/EI).

- **Reconhecimento das atividades como atrativas para os discentes (Apêndice 29)**

De uma forma geral, os docentes consideraram que as atividades implementadas foram atrativas. Oito docentes[111] que participaram do QO manifestarem-se positivamente em resposta a "*Considera que as atividades utilizadas na aula foram atrativas para os alunos?*" (Investigador/QO). D4

[110] D2, D3, D4, D6, D7 e D9 (Apêndice 28).
[111] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 29).

enfatizou mais ao responder que "*Avaliando a reação e participação dos mesmos, poderei acrescentar que sim*" (D4/QO). Na EI, antes deste docente ter respondido o QO, já considerava assim ao dizer que "*(…) lhes desperta muito para o ambiente, para tudo que vêem ao redor*" (D4/QO).

- **Constatações docentes da boa receptividade discente (Apêndice 30)**

Após as implementações, questionados novamente sobre este tema, os oito docentes[112] revelaram dados que demonstram a boa receptividade dos discentes. Segundo D3, "*Os alunos mostraram-se motivados e interessados durante o desenvolvimento das tarefas*" (D3/QO). D7, em resposta a "*Como considera a receptividade (…) dos seus alunos e alunas à abordagem utilizada na implementação?*" (Investigador/QO), respondeu que "*Os alunos/alunas estiveram bastante motivados, foram receptivos e bastante participativos*" (D7/QO). As ODNP também revelaram, diante da visão do investigador, que durante a implementação das atividades por D4, "*Os alunos manipulam muito bem os recursos e mostram-se muito interessados*" (Investigador/ODNP). O mesmo ocorreu aquando da implementação por D7, que "*Os alunos mostram-se bastante curiosos*" (Investigador/ODNP).

- **Dificuldades**

Chegamos a esta subcategoria, que consta no Quadro 47 co seus respectivos indicadores.

Quadro 47: Imp – Dificuldades

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Dificuldades	Fatores do contexto de sala de aula
	Uso inadequado de recursos

- **Fatores do contexto de sala de aula**

Apenas três docentes, D2, D6 e D7 alegaram dificuldades durante as implementações. D2, em resposta a "*E o que considera que possam ser as limitações?*" (Investigador/QO), aponta para o "*ruído realizado pelos alunos*" (D2/QO), D6 para o "*elevado número de alunos e não poder dar a todos o*

[112] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 30).

apoio desejável" (D6/QO) e D7 considerou o fato de "*não possuir miras*" (D7/QO). Em verdade, como aponta a ODNP, a implementação de D7 contou com são seis miras a serem utilizadas por nove duplas de discentes.

Não foram apontados dificultadores significativamente complicados.

- **Uso inadequado de recursos**

Houve também, em algumas poucas vezes, o uso inadequado dos recursos por parte dos docentes. Destacamos através da ODNP durante a segunda aula de implementação de D2 que "*duas imagens tinham apenas a simetria de rotação identidade, o que não facilita inicialmente a percepção do conceito por parte do aluno*" (Investigador/ODNP). O docente substituiu as imagens imediatamente após perceber a situação. Durante o 7º trabalho presencial, D3 revela que "*por falta de miras, seus alunos usaram espelhos para traças os eixos de reflexão*" (Investigador/DC). D6 também revelou, a seguida de D3, suas limitações durante as implementações ocorridas com a utilização dos espelhos em detrimento às miras.

Em síntese – Implementações (Imp)

A expectativa dos docentes acerca da boa receptividade discente diante das implementações foi grande. Os docentes revelam ter conseguido promover a curiosidade dos discentes, utilizando estratégias bastante adequadas a metodologia desenvolvida na OFP. As implementações foram ricas em imagens, em relações com outras áreas e promovidas através de uma abordagem gradativa da complexidade dos conceitos, utilizando recursos que, comumente, não eram utilizados anteriormente ou a utilização não ocorria de forma ampla. Também foi notório o dinamismo versátil das implementações, motivando os docentes e dando-lhes mais segurança em lecionar. Estes docentes também reconhecem as atividades como atrativas aos discentes, consideração constatada a partir da boa receptividade destes. Assim, os docentes consideram que esta proposta de ensino tem potencialidade, promove um ensino rigoroso dos conceitos científicos e, inclusive, favorece a satisfação de todos os envolvidos (Matos & Cabrita, 2012; Barros, 2017; Maciel, Rego & Carlos, 2017; Teixeira *et al.*, 2017; Souza, Quartieri e Marchi, 2017; Marchis, 2009; Nascimento, Benutti & Neves, 2007; Stylianou & Grzegorczyk, 2005; Gura, 1996; Gorini, 1993). As adequações necessárias diante os percalços ocorridos durante as implementações foram facilmente administradas pelos docentes e, segundo nossa análise, favoreceu ao ensino e à aprendizagem.

Satisfação e aprendizagem e docentes (SADoc)

Chegamos à apresentação e análise interpretativa dos dados referentes a categoria Aprendizagem e satisfação docentes (SADoc), que é representada por cinco subcategorias. Estas subcategorias incidem na verificação das melhorias alcançadas na aprendizagem docente em torno dos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de simetria abordados na OFD e contribuirão para a consolidação do objetivo específico *III-vi*.

- **Percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos**

Esta primeira subcategoria consta no Quadro 48 juntamente com seus indicadores.

Quadro 48: SADoc – Percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos	Aquisição de conhecimento científico como principal aprendizagem da OFD
	Reconhecimento de aprendizagem docente de conhecimentos científicos, inclusive de conceitos específicos: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante
	Reconhecimento do uso inadequado de termos e conceitos antes da OFD
	Impacto positivo da aprendizagem de conhecimentos científicos na autoconfiança

O que abarcamos aqui por percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos, são as considerações dos próprios docentes sobre sua aprendizagem, sem considerar um teste ou algo equivalente que demonstre este ganho ou aquisição. A aprendizagem de conhecimento científico propriamente dita, será tratada ainda neste objetivo, através da subcategoria Evolução do nível de conhecimento científico.

Seguimos com a apresentação e análise interpretativa dos dados referentes ao primeiro indicador desta subcategoria.

- **Aquisição de conhecimento científico como principal aprendizagem da OFD**

No 5º trabalho presencial, os docentes D2, D3 e D6 revelaram ainda que a essa aprendizagem docente de conhecimentos científicos foi a aprendizagem mais relevante durante a OFD. Em resposta a "*Qual foi a aprendizagem mais relevante para vocês aqui durante a formação?*" (Investigador/FG2), D3 respondeu "*a informação (formação) científica…*" (D3/FG2) e teve a concordância de D2 e D6.

- **Reconhecimento da aprendizagem docente de conhecimentos científicos, inclusive de conceitos específicos: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante (Apêndice 31)**

Com base nas respostas obtidas no QO e EI, podemos constatar que os nove docentes[113] afirmaram ter aprendido conceitos que, até então, não os dominavam ou utilizavam-no de forma incorreta. Soma-se a isso, as notas do DC que corroboram com esta mesma percepção. Em resposta a "*Aprendeu algum conceito de simetria que até ao momento não tinha aprendido ou utilizava-o de forma incorreta?*" (Investigador/QO), destacamos a resposta "*Aprendi todos os conceitos (…) aprendi noções que não dominava completamente*" (D2/QO). Na EI, em resposta a "*O que você pensa dos objetivos dessa minha investigação?*" (Investigador/EI), D4 disse que "*(…) estamos a falas da matemática especificamente, que realmente faz falta*" (D4/EI).

De entre os nove docentes participantes da OFD, apenas D8 não participou do QO e EI, dois dos três instrumentos que contêm registros a respeito desta subcategoria. Entretanto, durante o 5º trabalho presencial, este docente estava presente e, de acordo com a citação "*pareceu-nos haver uma evolução considerável na aquisição dos conceitos ao longo das sessões anteriores*" (Investigador/DC) referente a este momento, este docente também revelou perceber sua própria aquisição de conhecimento científico.

[113] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9 (Apêndice 31).

Seis docentes[114] revelaram especificamente alguns dos principais conceitos aprendidos ou aprimorados durante a OFD. Para cinco docentes[115], a simetria de reflexão deslizante figura entre os principais conceitos aprendidos durante a OFD, segundo afirmam no QO, embora houve pelo menos uma incidência de cada um dos demais conceitos. D2 aponta, além da simetria de reflexão deslizante, para a simetria de rotação e diz ter corrigido "*o [conceito] da reflexão*" (D2/EI).

- **Reconhecimento do uso inadequado de termos e conceitos antes da OFD**

Este indicador conta com unidades de registro provenientes do QO e da EI e que revelam a opinião dos docentes em referência uso inadequado de determinados termos e conceitos antes da OFD. Nestas citações, o uso do tempo verbal no pretérito perfeito nos sugere que as considerações equivocadas de alguns termos e conceitos foram superadas antes da aplicação destes dois instrumentos. Relembamos que o QO e as EI ocorreram após as implemetações das atividades aos dicentes e que entre a aplicação do Q2 e as implementações, diversas dúvidas foram abordadas durante as sessões da OFD.

Em resposta ao QO, D6 disse que *"considerava isometrias que não eram simetrias como se o fossem"* (D6/QO) e D7 afirmou que *"usava de forma incorreta o termo de isometria"* (D7/QO). Sobre o uso indiscriminado dos termos isometria e simetria, D7 apontou que "*um professor menos atento facilmente cai na esparrela de dar conceitos errados, ou não corretos, ou pelo menos não tão corretos*" (D7/EI).

D2 afirmou no QO que *"quando introduzia este conteúdo fazia-o com pouca segurança, nomeadamente a simetria de rotação e a de reflexão deslizante"* (D2/QO). Aliás, sobre reflexão deslizante, D3 disse que *"tinha algumas dificuldades em explicar a simetria de reflexão deslizante"* (D3/QO) e D7 afirmou que *"A de reflexão deslizante, eu tinha uma série de dificuldade em fazer entender"* (D7/EI). Ainda D7 disse que *"(…) sabia que o era reflexão deslizante mas não percebia muito bem porquê"* (D7/EI).

[114] D1, D2, D3, D5 e D6.
[115] D1, D2, D3, D6 e D7.

Durante a EI, D2 se referia ao passado, antes da OFD, apontando que detinha dificuldades com o conceito de reflexão. Após indicar que este conceito era o mais comumente ensinado, afirma que, após a OFD, tivera se apercebido de algumas dificuldades. Em relação ao passado, disse que, *“Embora tivesse um conceito errado de reflexão (…)”* (D2/EI). Em relação aos docentes, afirma *“chamávamos ao eixo de reflexão de eixo de simetria (…) copiávamos de um lado [de um eixo] para o outro, para nós aquilo era uma simetria”* (D2/EI).

- **Impacto positivo da aprendizagem de conhecimentos científicos na autoconfiança (Apêndice 32)**

A percepção de aprendizagem dos docentes ao nível de conhecimentos científicos foi capaz de gerar algumas consequências, das quais destacamos a sensação de autoconfiança dos docentes em lecionar simetrias a partir da OFD. Considerando os três intrumentos que fornecem registros referentes a esta subcategoria, FG2, QO e DC, seis docentes[116] revelaram-se mais seguros em relação ao tema em apreço. Estes docentes responderam positivamente às duas perguntas feitas pelo investigador: “*E hoje se sentem mais seguros, então?*” (Investigador/FG2) e “*Teve um avanço, não é?*” (Investigador/FG2). Para a primeira pergunta, D4 disse que *“neste momento* [tem] *mais ferramentas para desenvolver o conteúdo e para… de lhes (aos discentes) passar a informação*” (D4/FG2) e completou no QO, afirmando que “*proporcionou-me um conjunto de ferramentas para abordagem dos conteúdos em questão*” (D4/QO).

- **Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2)**

Seguimos com a apresentação e análise interpretativa dos dados que incidem sobre a subcategoria Evolução do nível do conhecimento científico – Comparação entre resultados do Q1 e do Q2 e que consta no Quadro 49 juntamente com seus sete indicadores.

[116] D2, D3, D4, D6, D8 e D9 (Apêndice 32).

Quadro 49: SADoc – Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2)	Reconhece propriedades de isometrias (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece isometria de translação (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece isometria de rotação (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece isometria de reflexão (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece isometria de reflexão deslizante (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece relação entre isometria e simetria (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras (Comparativo Q1/Q2)

Como já mencionado anteriormente, o Q2 continha apenas a Parte V, idêntica ao Q1, inclusive na sequência das questões e com a mesma numeração, para que facilitasse a comparação das respostas apresentadas. Relembramos que, das dezessete unidades de aferição desta parte dos instrumentos, as treze primeiras abordavam os conhecimentos científicos e as quatro subsequentes, os conhecimentos didático-pedagógicos, sendo estas últimas apresentadas mais adiante.

Este instrumento foi respondido por nove docentes[117], seis presencialmente e três à distância[118]. Devido à diferença entre o total de participantes destes dois questionários, consideramos mais adequado, por vezes, que a apresentação das incidências de respostas em cada classe seja

[117] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9.
[118] Os três docentes que responderam o Q2 a distância – D1, D5 e D7 – garantiram terem assim feito de forma individual e sem consulta a qualquer fonte.

feita de forma percentual devidamente aproximada. Isto facilita a comparação entre as respostas obtidas entre estes dois instrumentos.

Como todas as unidades de aferição desta parte já foram mencionadas aquando da apresentação e análise interpretativa dos resultados do Q1 – Nível prévio de conhecimento científico, da categoria CoCiP –, optamos, agora, apenas pela apresentação dos resultados das unidades, em ambos os instrumentos, e as análises interpretativas, afim de realizar a comparação. Relembramos que os critérios utilizados para a determinação das classes de respostas foram considerados a partir das respostas dos dois questionários e constam aquando da apresentação e da análise interpretativa dos dados do Q1 para estas unidades de aferição, na subcategoria Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos).

Vamos aos indicadores da subcategoria Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2).

- **Reconhece propriedades de isometria (Comparativo Q1/Q2)**

Iniciamos pelo item 19.1. Relembramos que este item apresentou exemplos de transformações geométricas e questionou, de entre os exemplos apresentados, quais pertencem ao grupo das isometrias no plano euclidiano.

No Q2, este item foi respondido por todos os participantes, onde os resultados comparativos estão no Gráfico 22 a seguir.

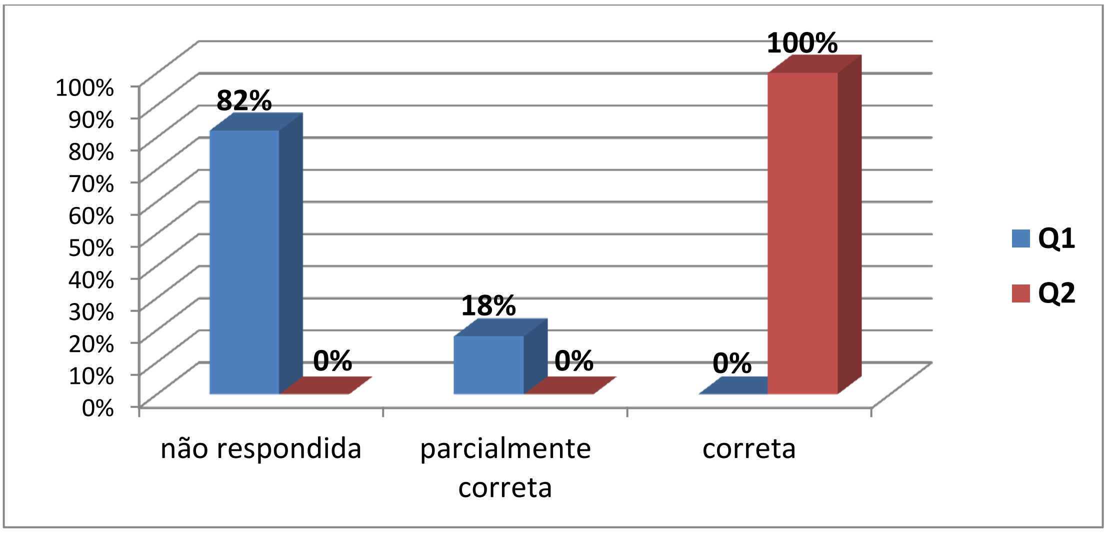


Gráfico 22: Resultado comparativo do item 19.1 – Grupo de isometrias

Verifica-se que todos os respondetnes do Q2 reponderam corretamente a este item, o que revela um resultado muito melhor do que o resultado deste item no Q1.

O item 19.2, relacionado ao mesmo texto-base da questão 19, questionava que propriedades têm em comum as transformações geométricas referidas na pergunta anterior para que pertençam ao grupo das isometrias.

Como já dito, nenhum dos participantes do Q1 o respondeu, deixando-o em branco, enquato que no Q2 todos responderam de forma correta. Assim, os resultados seguem no Gráfico 23.

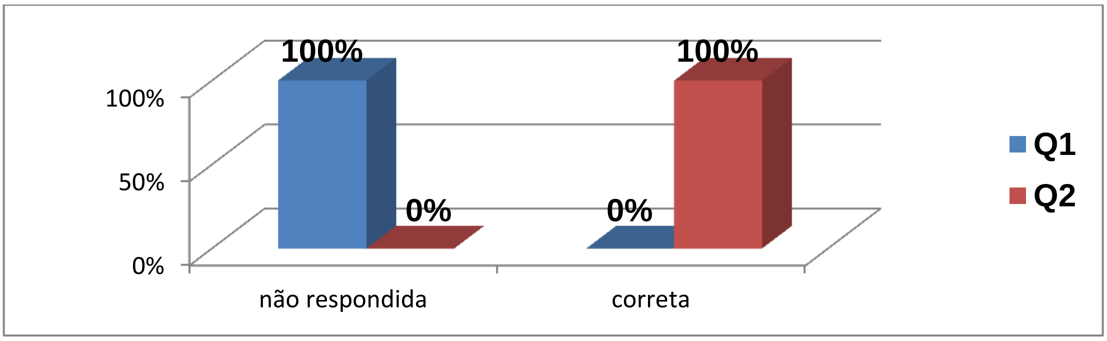


Gráfico 23: Resultado comparativo do item 19.2 – Propriedade comum às isometrias

Nestas duas primeiras unidades de aferição, nota-se que os resultados do Q2 se destacam positivamente em relação aos resultados do Q1.

A questão 20 abordou composição de reflexões. A partir da afirmação de que todas as isometrias podem ser obtidas através da composição de, no máximo, *n* reflexões, questionava-se a concordância desta afirmação e, em caso afirmativo, qual seria o valor de *n*.

Novamente, nenhum dos participantes do Q1 apresentaram resposta. Primeiramente, apresentamos os resultados referentes às opções entre as alternativas *Sim* ou *Não* no Gráfico 24 a seguir.

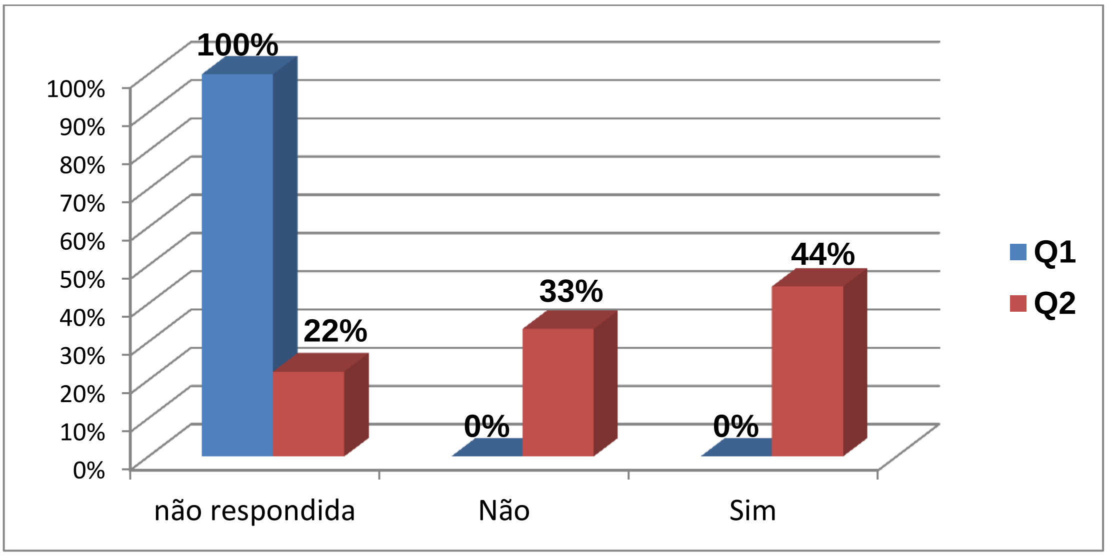


Gráfico 24: Resultado parcial comparativo da questão 20 – Isometrias enquanto composição de reflexões

Lembrando que a resposta correta é a opção por *Sim*, acompanhada pelo complemento *3* para valor de *n*.

De entre os quatro participantes do Q2 que responderam corretamente *Sim*, dois não apresentaram um valos para *n*, outro apresentou a resposta *infinito* e apenas um respondente continuou acertando, apresentando *3* para valor de *n*. Isto posto, o Gráfico 25 a seguir revela os resultados comparativos entre os dados provenientes do Q1 e do Q2:

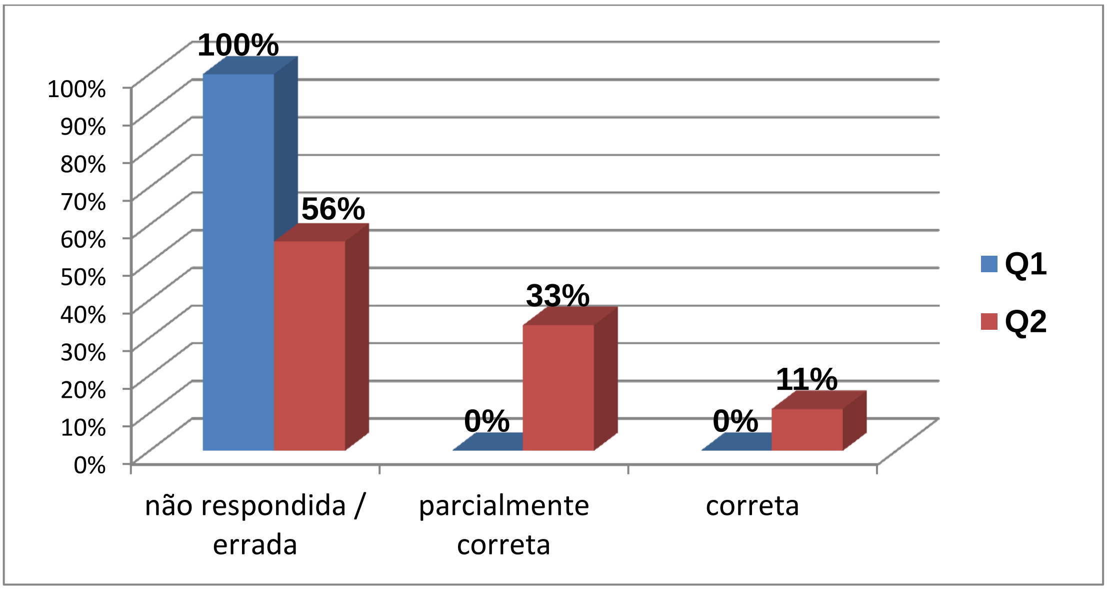


Gráfico 25: Resultado comparativo da questão 20 – Isometrias enquanto composição de, no máximo, três reflexões

Apesar de menos expressivo que os resultados das unidades de aferição anteriores, também temos, nesta unidade, melhorias alcançadas em relação aos resultados do Q1.

A questão 21 incidiu sobre a designação de um conceito não existente, o de *reflexão rotacional*, perguntando por que motivo, à semelhança do que acontece com a reflexão deslizante, a aplicação a uma dada figura de uma reflexão seguida de uma rotação não tem também uma designação própria, por exemplo de *reflexão rotacional*.

Apenas três dos participantes do Q2 responderam a esta questão, mesmo assim as respostas apresentadas não tinham sentido coerente. Embora previsível, o Gráfico 26 a seguir revela estes resultados.

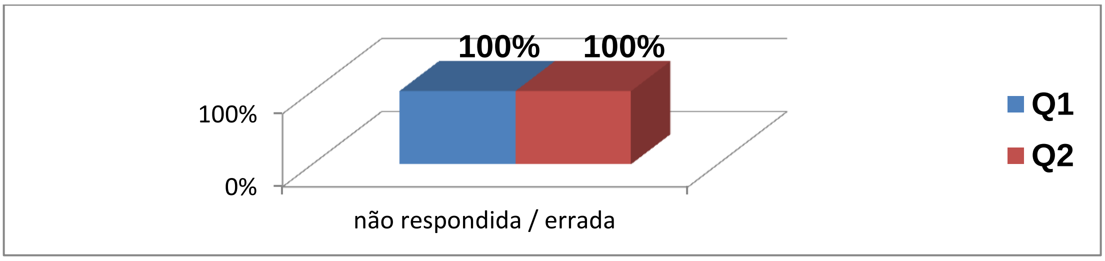


Gráfico 26: Resultado comparativo da questão 21 – Não existência de isometria designada por *reflexão rotacional*

Os resultados de ambos os instrumentos indicam que o assunto abordado nesta questão não foi compreendido, mesmo durante a OFD.

Considerando as quatro unidades de aferição que incidem sobre o reconhecimento de propriedades de isometrias, designamos três classes de respostas: não respondida / errada, parcialmente correta e correta. Aglutinando todas as respostas, ou ausência delas, numa mesma classe correspondente, tem-se o seguinte resultado global das unidades de aferição Reconhecimento de propriedades de isometria (Gráfico 27).

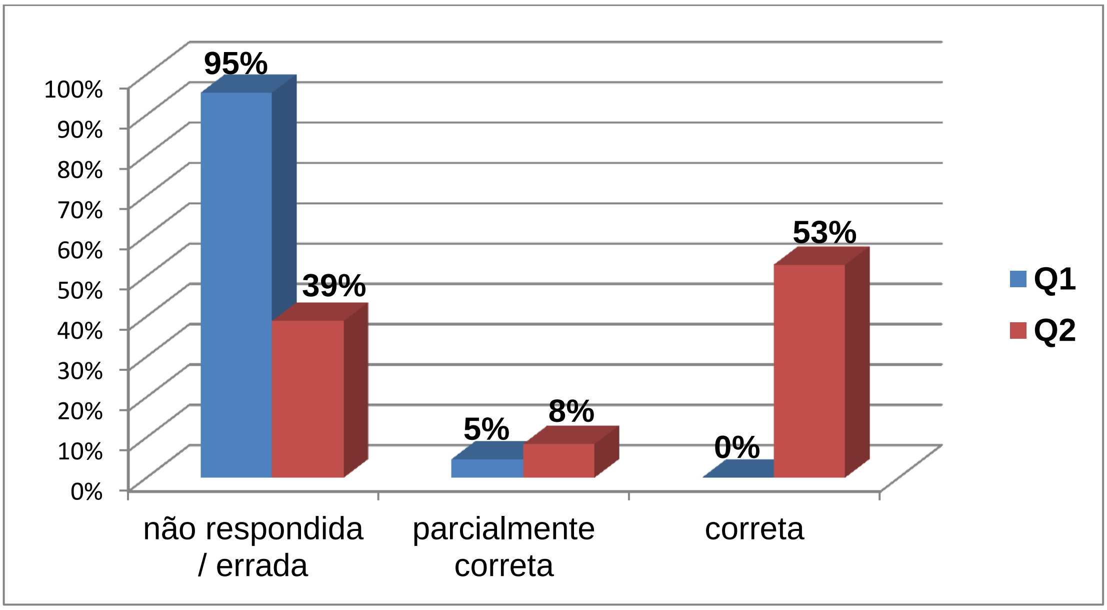


Gráfico 27: Resultado Global – Propriedades de isometria

Nota-se que os resultados do Q2 são expressivamente melhores do que os resultados do Q1.

Apresentamos, nos próximos quatro indicadores, os itens da questão 22. Relembramos que esta questão é subdividida em cinco itens, de *a* a *e*, e cada um destes itens apresenta uma imagem contendo duas figuras congruentes: figura 1 e figura 2 (figura 1 ≠ figura 2). A partir daí, questiona-se a possibilidade de afirmar a existência de uma isometria capaz de transformar uma na outra. Estes itens contam com três alternativas de resposta: □ *Sim. Qual?*; □ *Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso*; □ *Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra*.

Assim como afirmamos na subcategoria Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos), em todos estes itens, o fato de as figuras serem congruentes faz com que a resposta seja afirmativa, existindo uma isometria própria para a transformação mencionada, não havendo nessecidade de contar com a composição de duas isometrias, embora a composição de duas isometrias também seja uma isometria. Além disso, como as figuras são diferentes, apesar de congruentes, a transformação geométrica que transforma uma na outra é uma apenas isometria, não sendo, esta, uma simetria. Não cabe, nos cinco itens, o julgamento a respeito do conceito de *globalmente invariante*. Assim, diante das alternativas de resposta de cada item, a correta nos cinco casos apresentados, é primeira, cabento ao respondente apenas apresentar que isometria é esta.

- **Reconhece isometria de translação (Comparativo Q1/Q2)**

Os resultados comparativos do item *d* da questão 22, sobre isometria de translação, constam no Gráfico 28.

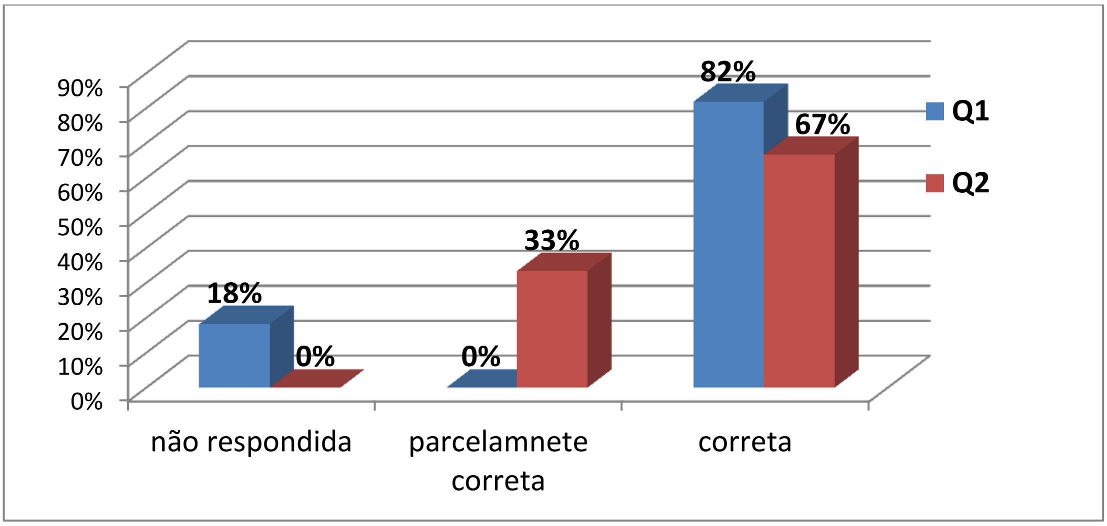


Gráfico 28: Resultado comparativo do item *d* da questão 22 – Isometria de translação

Relembramos que a resposta correta é a opção pela primeira alternativa, devidamente complementada por *Isometria de reflexão* ou apenas *reflexão*. A classe parcialmente correta é composta pelas respostas que optaram pela primeira alternativa, no entanto apresentaram foram complementadas por *Simetria de reflexão*.

Em relação aos resultados comparativos da classe de respostas corretas, os do Q1 são superiores aos do Q2. Inferimos que este efeito tenha ocorrido – o que se repete para o itens *c* desta mesma questão –, devido a OFD, após a abordagem direta de todos os conceitos em sua fase inicial, ter sido mais direcionada às simetrias do que às isometrias. Assim, como o Q2 foi aplicado em meados da ação de formação, os docentes, possivelmente, os participantes foram levados a considerarem que a transformação questionada neste item fosse uma simetria, para além de uma isometria. Já aquando da aplicação do Q1, os docentes utlizavam termos mais sucintos, como translação, por exemplo, tratando-se de isometria ou simetria. Daí, especificamente para este os cinco itens da questão 22, a resposta sucinta, apresentando apenas o termo *translação*, neste caso, já enquadrava a resposta a classe correta.

Sob um outro ponto de vista, o que aumenta nossas expectativas face à inferência há pouco mencionada, vemos que se considerarmos a união das classes parcialmente corretas e corretas, temos resultados superiores no Q2.

- **Reconhece isometria de rotação (Comparativo Q1/Q2)**

Passamos para o item *a* da questão 22, que incide sobre isometria de translação, onde os resultados comparativos estão no Gráfico 29 a seguir.

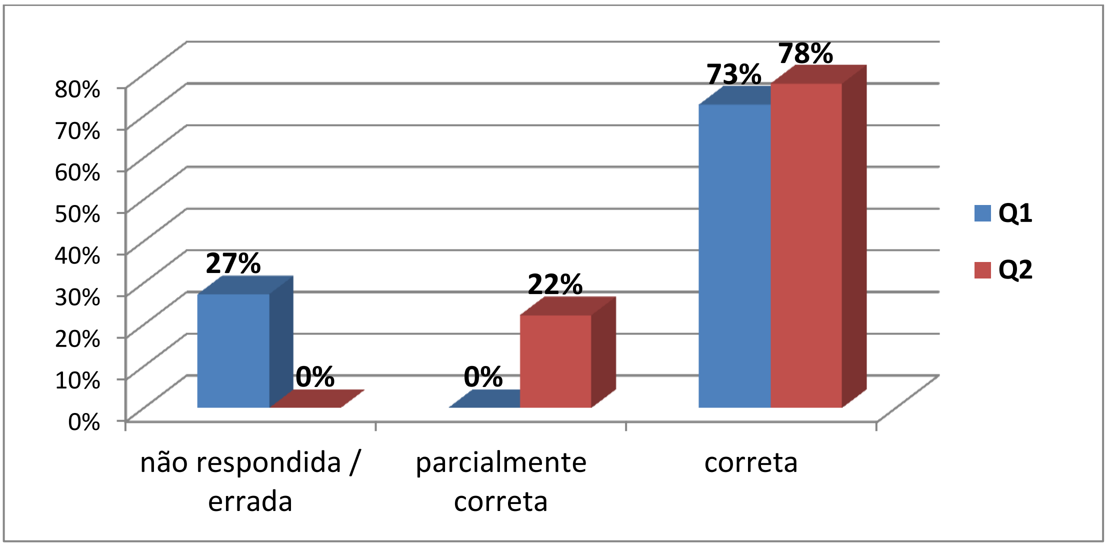


Gráfico 29: Resultado comparativo do item *a* da questão 22 – Isometria de rotação

Apesar de os resultados do Q1 não serem muito baixos, os resultados do Q2 foram ainda superiores. Se considerarmos a união das classes parcialmente correta e correta, os resultados do Q2 se tornam ainda mais expressivos.

- **Reconhece isometria de reflexão (Comparativo Q1/Q2)**

O item *c*, da questão 22, incide sobre isometria de reflexão. Considerando os resultados do Q2 para este item, as frequências de cada classe de resposta foram numericamente iguais aos resultados do item d desta mesma questão.

O Gráfico 30 apresenta os seguintes resultados comparativos para este item.

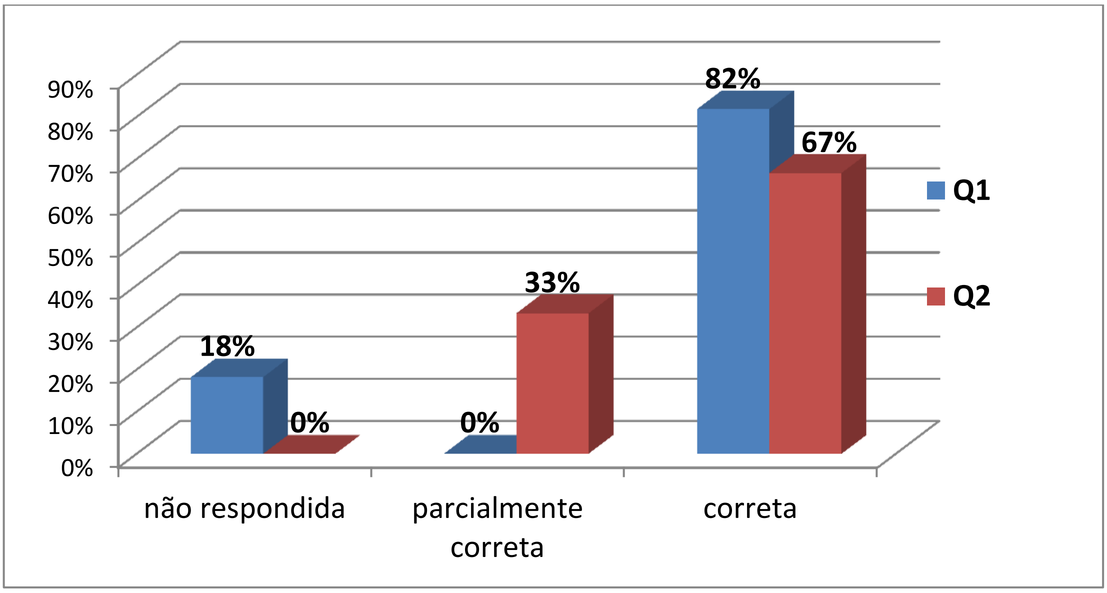


Gráfico 30: Resultado comparativo do item *c* da questão 22 – Isometria de reflexão

Em relação aos resultados da classe de respostas corretas, os do Q1 são superiores aos do Q2. Contudo, e motivados pelas mesmas considerações relatadas no indicador sobre isometria de translação, se considerarmos a união das classes parcialmente corretas e corretas, temos que os resultados do Q2 são superiores aos do Q1.

- **Reconhece isometria de reflexão deslizante (Comparativo Q1/Q2)**

Este indicador é contemplado pelos resultados comparativos provenientes dos itens *b* e *e* desta mesma questão, que incidem sobre isometria de reflexão deslizante.

O item *b* da questão 22 revela os seguintes resultados comparativos (Gráfico 31).

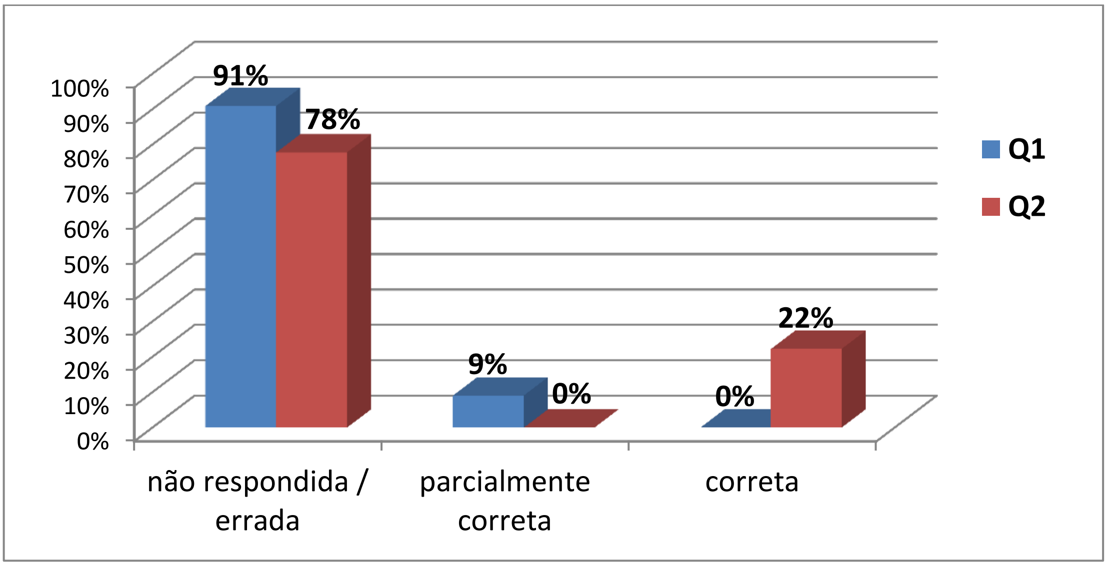


Gráfico 31: Resultado comparativo do item *b* da questão 22 – Isometria de reflexão deslizante

Os resultados de ambos os questionários para esta unidade de aferição foram insatisfatórios, no entanto, os resultados do Q2 são superiores aos do Q1.

O item *e* revela os seguintes resultados comparativos (Gráfico 32).

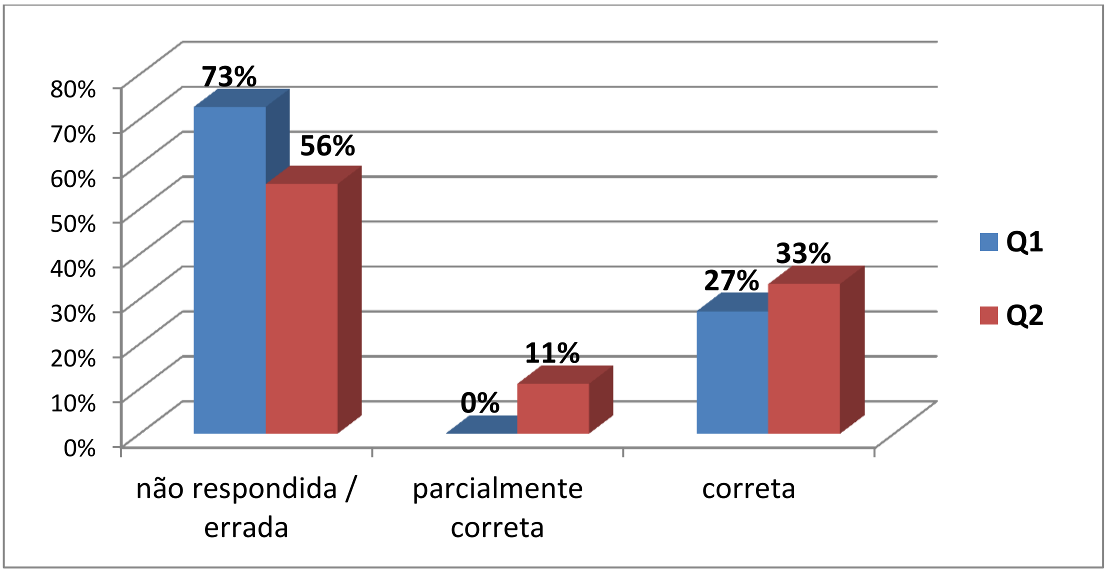


Gráfico 32: Resultado comparativo do item *e* da questão 22 – Isometria de reflexão deslizante

Assim como no item *b* desta mesma questão, no Q1 e no Q2 os resultados foram baixos, mas os resultados do Q2 são superiores aos do Q1.

Considerando as quatro unidades de aferição que incidem sobre o reconhecimento de cada uma de entre as quatro isometrias existentes, designamos três classes de respostas: não respondida / errada, parcialmente correta e correta. Aglutinando todas as respostas, ou ausência delas, numa mesma classe correspondente, tem-se o seguinte resultado global das unidades de aferição de reconhecimento de cada uma de entre as quatro isometrias existentes (Gráfico 33).

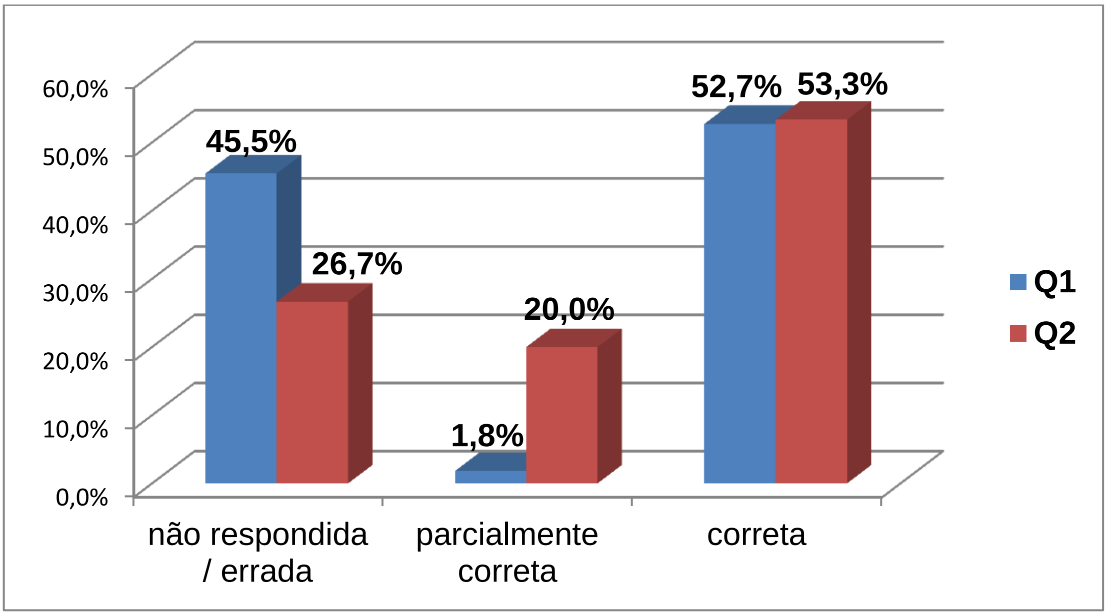


Gráfico 33: Resultado comparativo global – Reconhecimento de cada uma de entre as quatro isometrias existentes

Devido à proximidade entre os pontos percentuais das duas colunas da classe de respostas correta, optamos por apresentar estes percentuais com a aproximação de uma casa decimal.

Nota-se que, para a classe correta, os resultados do Q2 são sensivelmente superiores em relação aos do Q1. No entanto, e como já nos valemos aquando das análises dos resultados dos itens *c* e *d* desta questão, se considerarmos a união das classes parcialmente corretas e corretas, temos que os resultados do Q2 são ainda mais expressivos do que os do Q1. Note ainda, que os percentuais de respostas do Q1 na classe não respondida / errada são consideravelmente superiores aos do Q2 para a mesma classe.

- **Reconhece relação entre isometria e simetria (Comparativo Q1/Q2)**

Este indicador compreende os dados obtidos apenas pela questão 23. Relembramos que esta questão questionou a relação entre os conceitos de simetria e isometria, oferecendo cinco alternativas de resposta: *Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças*; *Qualquer simetria é uma isometria*; *Qualquer isometria é uma simetria*; *Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra*; *Outra. Qual?*.

Os resultados comparativos seguem no Gráfico 34.

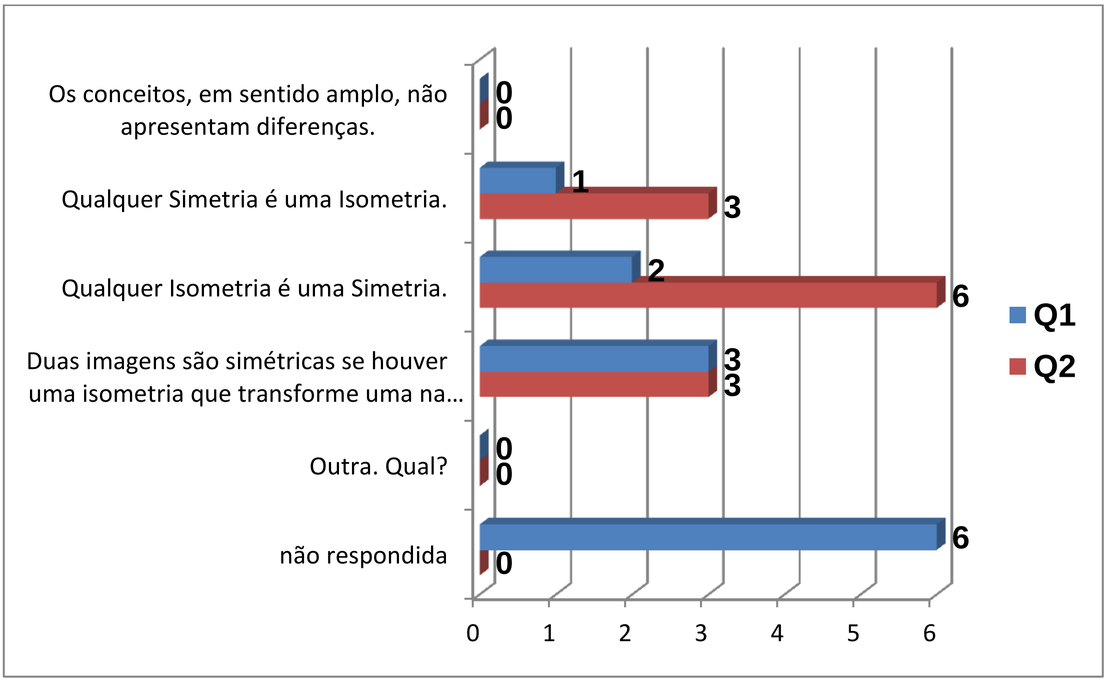


Gráfico 34: Resultado parcial comparativo da questão 23 – Relação entre isometria e simetria

Salientamos, novamente, que a soma dos valores referentes às respostas obtidas com um determinado questionário, Q1 ou Q2, superam o total de respondentes do intrumento, fato decorrente da possibilidade daqueles escolherem mais de uma alternativa de resposta.

De acordo com os critérios elencados para as classes de respostas, temos os seguintes resultados comparativos (Gráfico 35).

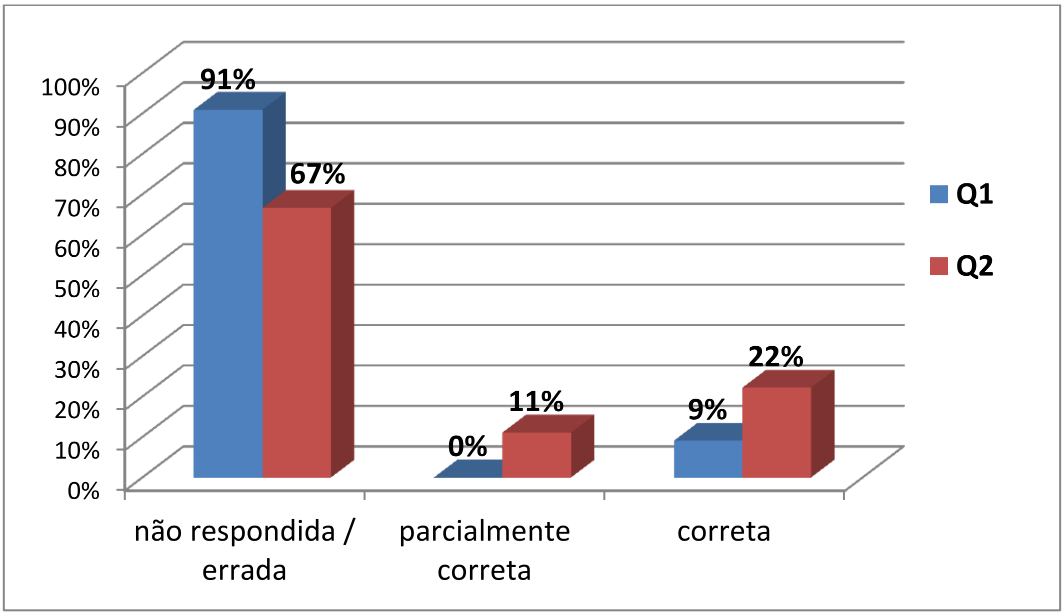


Gráfico 35: Resultado comparativo da questão 23 – Relação entre isometria e simetria

Verifica-se que os resultados do Q2 são superiores aos do Q1.

Os resultados da análise interpretativa dos resultados comparativos deste indicador reforçam o que inferimos nas análises apresentadas relativamente aos itens *c* e *d* da questão 22, no indicador anterior. Parece-nos que, até à aplicação do Q2 ainda persistiam dúvidas acerca da diferenciação entre os conceitos de isomteria e simetria.

- **Reconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras (Comparativo Q1/Q2)**

Como já mencionado, este indicador compreende os resultados da questão 24 e dos itens 25.1 e 25.2 da questão 25.

Os itens 24.1, 24.2 e 24.3 questionavam, respectivamente, a quantidade de rosáceas, frisos e padrões existentes, de acordo com a classificação considerada na OFD.

Considerando os mesmos critérios do Q1 para os itens 24.1, 24.2 e 24.3 no Q2, temos os resultados comparativos revelados no Gráfico 36 a seguir.

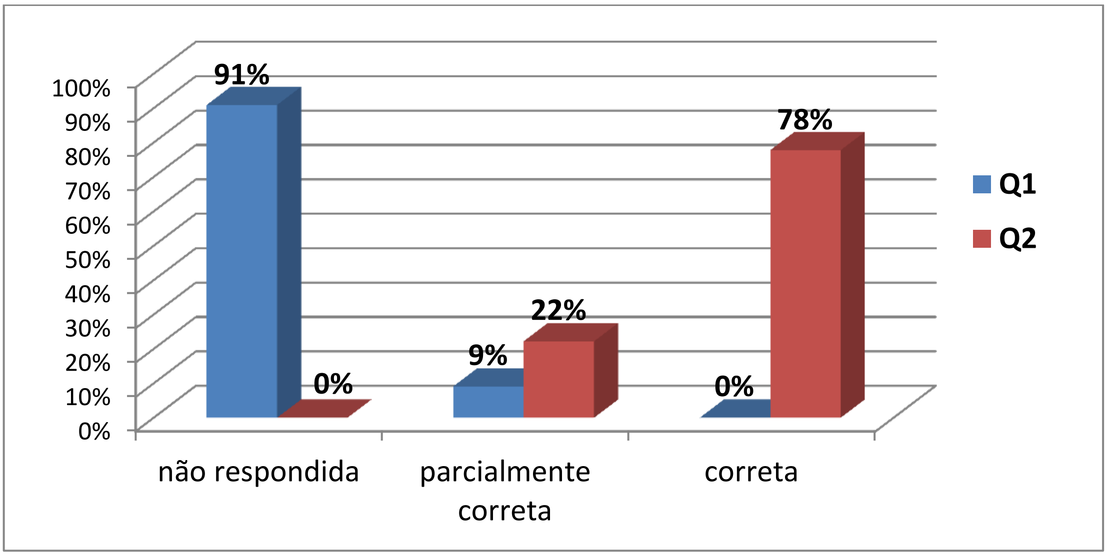


Gráfico 36: Resultado comparativo da questão 24 – Quantidade de rosáceas, frisos e padrões

Relembramos que, no Q1, a resposta que se enquadrou na classe parcialmente correta foi a que o participante respondeu *Infinitas* em todos os três itens, acertando, assim, apenas o item 24.1. Em relação aos dois respondentes do Q2 que estão nesta mesma classe, um deles procedeu da mesma forma que o respondente do Q1 já mencionado, enquanto que o outro, não tendo respondido ao item 24.1, respondeu os itens 24.2 e 24.3 corretamente. Com as respostas corretas dos outros sete participantes do Q2, temos os resultados mais satisfatórios a este segundo questionário.

Como já apresentamos no trato dos dados do Q1, o item 25.1 está relacionado com a implicação *se um friso tem simetria de reflexão deslizante, então, também tem simetria de reflexão de eixo horizontal*, e o item 25.2 com a reciprocidade desta implicação. Ambos admitiam apenas as opções *Sim* ou *Não* para respostas, sendo correta a resposta *Não* nos dois itens.

De acordo com os critérios adotados para a classificação das respostas aos itens 25.1 e 25.2, ambos os questionários contaram apenas com as classes de respostas não respondida / errada e correta.

O item 25.1 apresenta os seguintes resultados comparativos (Gráfico 37).

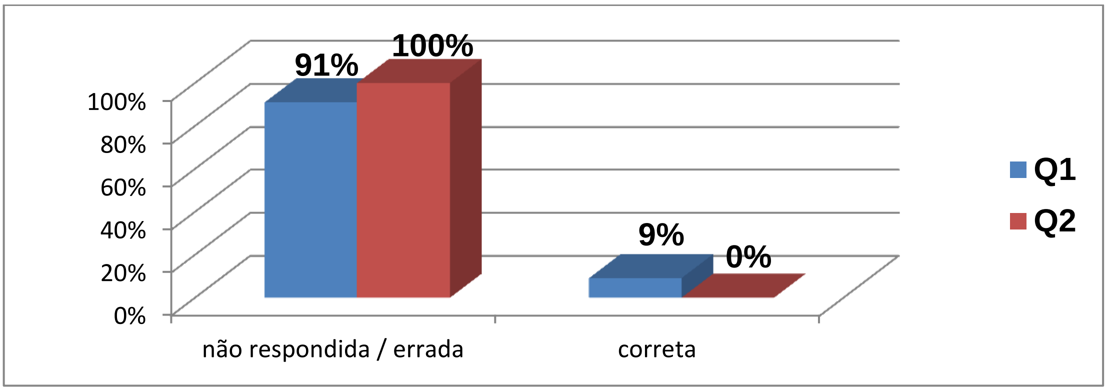


Gráfico 37: Resultado comparativo do item 25.1 – Relação entre reflexão deslizante e reflexão de eixo horizontal em um friso

Os resultados de ambos os questionário foram baixos, no entanto, os do Q2 foram os mais baixos possíveis.

Os resultados comparativos do item 25.2 são revelados pelo Gráfico 38.

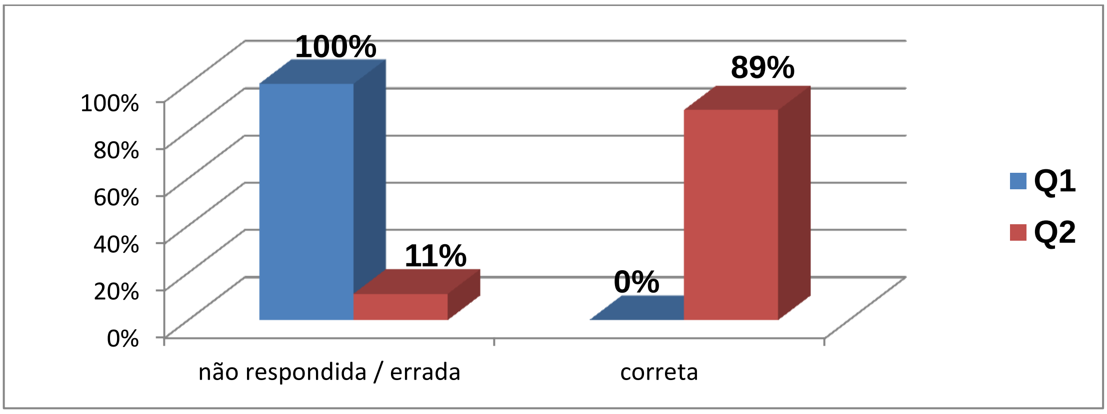


Gráfico 38: Resultado comparativo do item 25.2 – Relação entre reflexão deslizante e reflexão de eixo horizontal em um friso

Neste item, nota-se que os resultados do Q2 são bastante superiores aos do Q1, uma vez que os deste último foram os mais baixos possíveis.

Analogamente a procedimentos anteriores, considerando as quatro unidades de aferição que incidem sobre o reconhecimento das classificações e dos conjunto de simetrias de figuras, designamos três classes de respostas: não respondida / errada, parcialmente correta e correta. Aglutinando todas as respostas, ou ausência delas, numa mesma classe correspondente, tem-se o seguinte resultado global das unidades de aferição de reconhecimento das classificações e dos conjunto de simetrias de figuras (Gráfico 39).

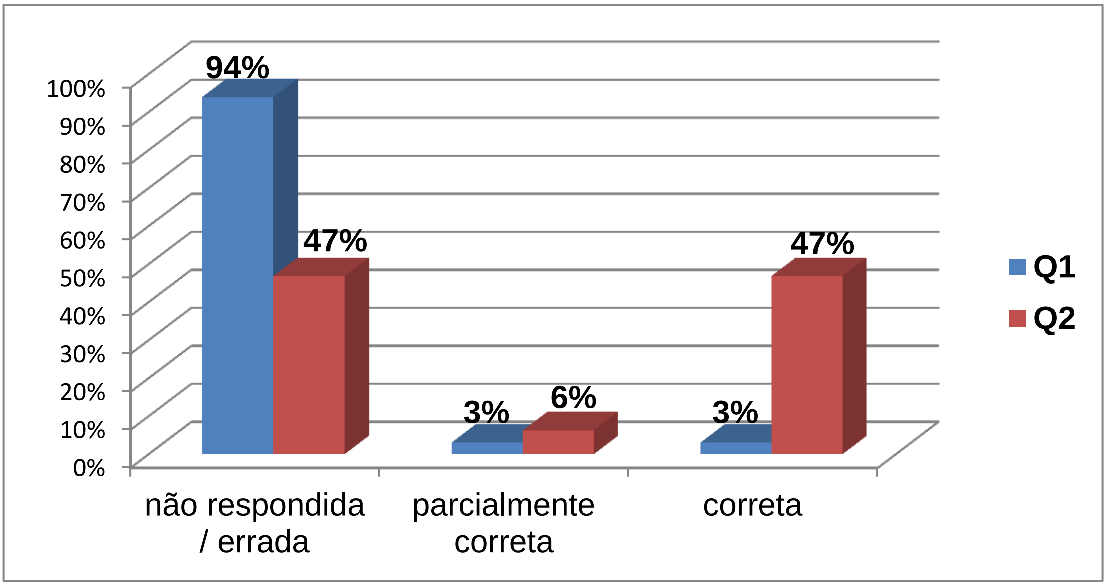


Gráfico 39: Resultado Global – Classificações e dos conjunto de simetrias de figuras

Os resultados global do Q2 relativamente a este indicador são consideravelmente superiores aos do Q1, que se destaca negativamente por revelar um percentual de 94% de respostas na classe não respondida / errada.

Assim como procedemos ao final da análise interpretativa da subcategoria Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos), agora, já de forma comparativa com os resultados do Q2, apresentamos os resultados globais. Para isso, novamente, considerando as treze unidades de aferição que, juntas, objetivam aferir os conhecimentos científicos dos docentes participantes da OFD e, com os mesmos critérios adotados nesta fase do Q1, temos os seguintes resultados comparativos (Gráfico 40).

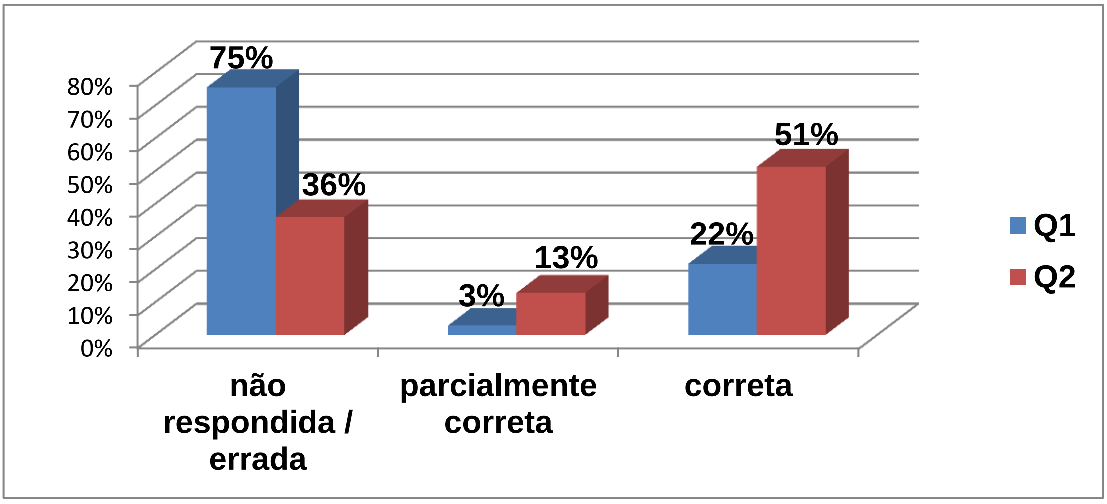


Gráfico 40: Resultado Global comparativo – Conhecimento Científico

Cabe destacar que apenas quatro unidades de aferição apresentaram resultados comparativos com comportamento que se desviam do perfil que percebemos neste resultado global. Referimo-nos aos resultados da questão 21, dos itens *c* e *d* da questão 22 e do item 25.1 da questão 25. Em relação à questão 21, ambos os questionários revelaram resultados com todas as respostas alocadas na classe não respondida / errada. Quanto aos itens *c* e *d* da questão 22, como já mencionamos, é importante perceber que se juntarmos os resultados das classes de resposta parcialmente correta e correta, podemos considerar que os resultados do Q2 se aproximam dos resultados comparativos globais, ou seja, sugerem que, de alguma forma, houve evolução na aquisição de conhecimentos científicos sobre os pontos abordados nestes itens. Quanto ao item 25.1, associamos o diferente comportamento dos seus resultados comparativos com o resultado global devido a pouca abordagem, durante a OFD, da conceitualização considerada neste item até a aplicação do Q2. Esta situação foi percebida em tempo e, imediatamente após a aplicação do Q2, as questões e seus itens foram amplamente discutidas entre investigador e docentes, esclarecendo diversos conceitos que ainda pareciam persistirem em dúvida. Inclusive, o DC referente ao 5º trabalho presencial da OFD, na presença de seis docentes[119], revela que "*A seguir ao Q2, os participantes manifestaram interesse em saber as respostas corretas do Q2, a fim de não manterem maiores dúvidas em pormenores*" (Investigador/DC). Desde o primeiro trabalho presencial, assim como as dúvidas foram evidenciadas, "*a*

[119] D2, D3, D4, D6, D8 e D9.

vontade de saná-las”[120] (Investigador/DC) também o era. Em resposta a “*Como você considera a necessidade a discussão matemática dos conceitos de simetria realizada ao longo das etapas aqui?*” (Investigador/FG2), D3 e D4 responderam “*Muito…*” (D3 e D4/FG2).

Também por estes motivos, nas sessões seguintes, ainda antes da implementação das atividades aos discentes, nos dedicamos a esclarecer pormenores acerca de definições e conceitualizações sobre simetrias. Todas as atividades implementadas aos discentes foram debatidas em grupo com o objetivo de minimizar, ou esgotar, possíveis erros conceituais.

- **Evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos diante das conceitualizações discentes equivocadas (Comparativo Q1/Q2)**

Chegamos a esta subcategoria que, à semelhança da subcategoria Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas (Q1), apresenta-se com os respectivos indicadores no Quadro 50 a seguir.

Quadro 50: SADoc – Evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos diante das conceitualizações discentes equivocadas (Comparativo Q1/Q2)

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos diante das conceitualizações discentes equivocadas (Comparativo Q1/Q2)	Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Comparativo Q1/Q2)
	Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Comparativo Q1/Q2)
	Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Comparativo Q1/Q2)
	Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Comparativo Q1/Q2)

[120] Percepção do investigador durante o 1º trabalho presencial da OFD, na presença de todos os docentes (Investigador/DC).

Em todos os aspectos, nesta subcategoria procedemos de forma análoga aquando da comparação entre os resultados do Q1 e do Q2 acerca dos conhecimentos científicos.

- **Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Comparativo Q1/Q2)**

Relembramos que o item 26.1 da questão 26 incide num caso particular em que a reflexão e a rotação de meia-volta se equivalem.

Juntamente com os dados do Q2, tem-se os seguintes resultados comparativos entre os dois questionários (Gráfico 41).

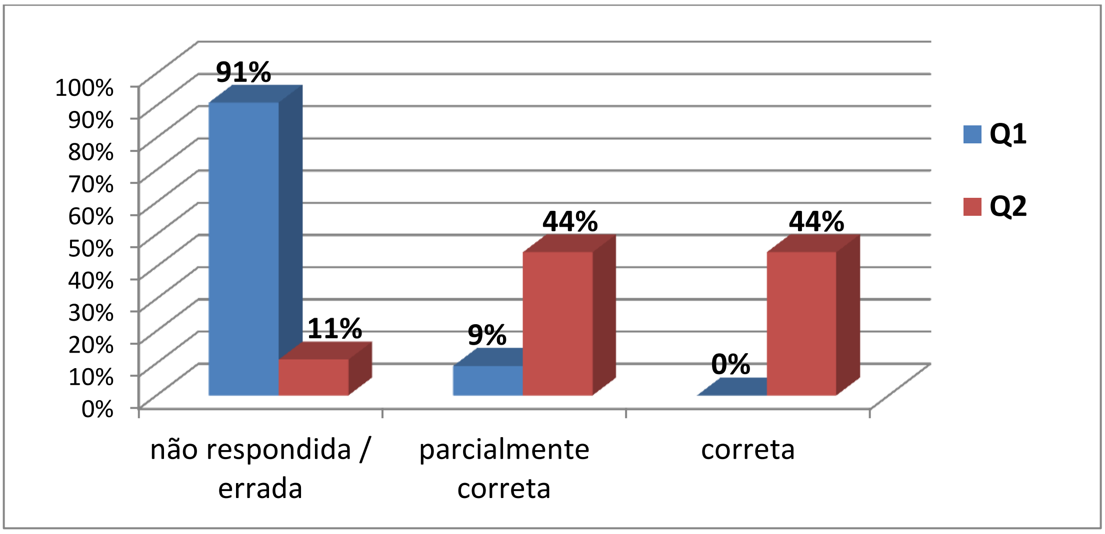


Gráfico 41: Resultado comparativo do item 26.1 – Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta

É de notar que o recultado do Q2 é superior ao resultado do Q1, ainda mais se juntarmos as frequências das classes parciamente correta e correta.

- **Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Comparativo Q1/Q2)**

Novamente, lembramos que o item 26.2 incide sobre a diferenciação entre eixo de simetria e eixo de isometria.

Os resultados comparativos dos dois questionários sobre o item 26.2 está no Gráfico 42.

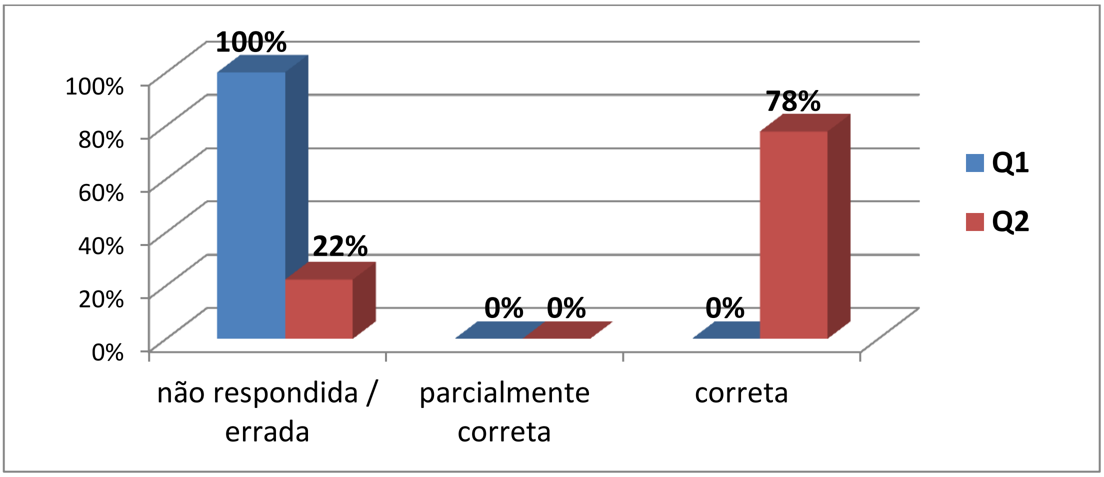


Gráfico 42: Resultado comparativo do item 26.2 – Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria

Novamente, os dados do Q2 são mais satisfatórios do que os dados do Q1.

- **Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Comparativo Q1/Q2)**

O item 26.3, como já revelado, objetiva aferir a capacidade de percepção do respondente diante da afirmação equivocada, por parte de um aluno, que a composição destas duas isometrias equivale a uma reflexão deslizante.

Os resultados comparativos para este item 26.3 são os que se seguem (Gráfico 43).

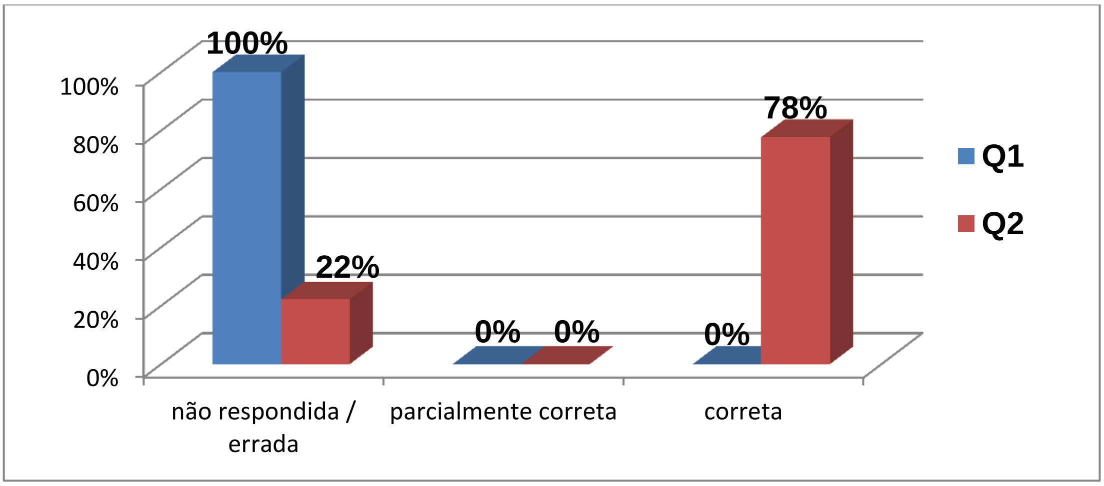


Gráfico 43: Resultado comparativo do item 26.3 – Paralelismo entre a direção da translação e o eixo de reflexão numa reflexão deslizante

Com frequências iguais aos resultados comparativos do item anterior, este item também revela que os dados do Q2 são mais satisfatórios do que os dados do Q1.

- **Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Comparativo Q1/Q2)**

O item 26.4 verificou se os respondentes reconhecem que a circunferência não é uma rosácea pelo fato de possuir infinitos eixos de reflexão.

Os resultados comparativos do item 26.4 (Gráfico 44).

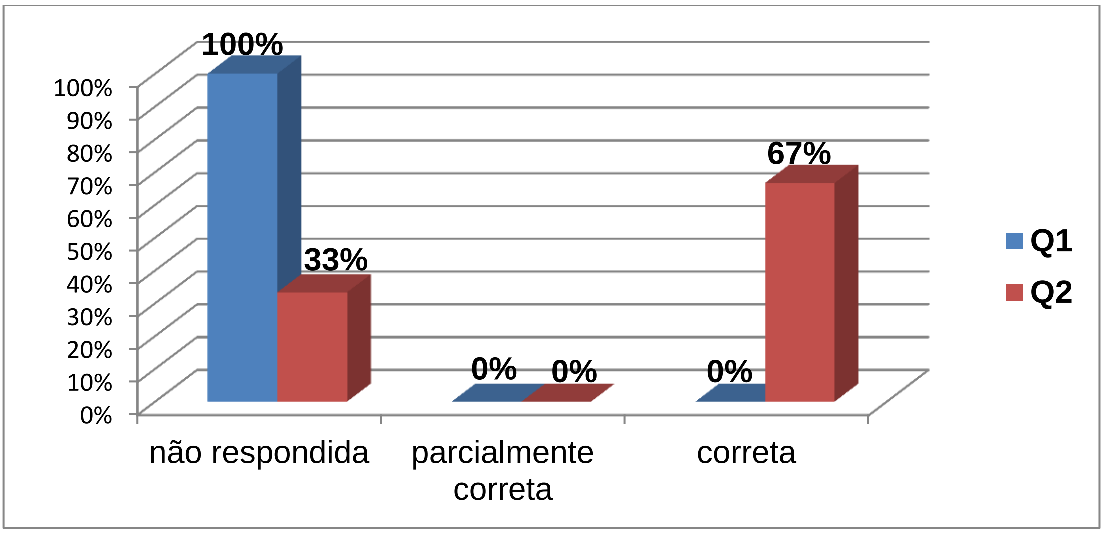


Gráfico 44: Resultado comparativo do item 26.4 – Circunferência não é uma rosácea

Assim como nos rsultados comparativos dos três itens anteriores, os deste item também revelam que o resultado do Q2 foi superior ao do Q1.

O Gráfico 45 apresenta o resultado global destes quatro itens, aglutinando as respostas em classes correspondentes.

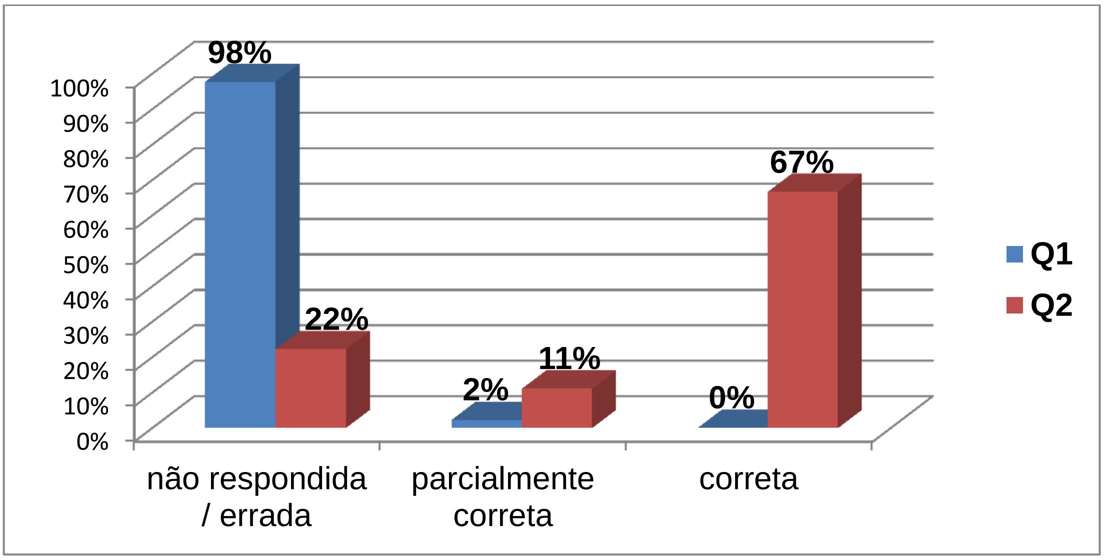


Gráfico 45: Resultado Global comparativo – Conhecimento didático-pedagógico

Considerando os resultados satisfatórios do Q2 para estes quatro itens, percebe-se que houve uma evolução expressiva do nível de conhecimentos didático-pedagógicos ao longo da OFD no que diz respeito aos quatro assuntos abordados pelos mesmos.

- **O papel da OFD na aprendizagem docente**

Esta subcategoria e seus indicadores estão apresentados no Quadro 51 a seguir.

Quadro 51: SADoc – O papel da OFD na aprendizagem docente

SUBCATEGORIA	INDICADORES
O papel da OFD na aprendizagem docente	Satisfação docente com as características da OFD
	Satisfação com a experiência colaborativa
	Reconhece fragilidades nas lecionações antes da OFD

Vamos aos indicadores.

- **Satisfação docente com as características da OFD (Apêndice 33)**

Diante das vivências na OFD, podemos estender a satisfação dos docentes às características da OFD, de uma forma geral. Em relação a estas características, todos os nove docentes[121] que participaram mais ativamente das etapas demonstraram considerável satisfação. Em resposta a "*Como considera seu nível de satisfação pela participação na OFD?*" (Investigador/QO), D4 respondeu "*bastante satisfeita*" (D4/QO) e D7 alegou considerar "*Excelente! Bastante elevada!*" (D7/QO). As notas do DC também revelam a satisfação de todos os nove docentes ao longo da OFD.

- **Satisfação com a experiência colaborativa**

Durante a FG2, foi perguntado aos seis docentes se eles consideravam, de fato, que a forma colaborativa em que as etapas da OFD foram vivenciadas tinha sido a mais adequada. Os seis docentes[122] presentes nesta entrevista em *focus* grupo manifestaram-se positivamente. D4 completou dizendo que "*É, muito… (…) e isso é bom*" (D4/FG2). Mais ao final desta mesma entrevista, questionados sobre quais os pontos positivos da OFD, D6 e D3, respectivamente, afirmaram ser "*a partilha (colaboratividade)*" (D6/FG2) e a "*colaboração (colaboratividade)*" (D3/FG2). D1 também disse considerar "*a partilha, em grande grupo, do trabalho realizado pelos diferentes formandos*" (D1/QO) como um dos contributos próprios dados à OFD. O DC revela que, no 4º trabalho presencial, num dia de formação na presença de seis docentes[123], estes apontaram que "*todos só têm a ganhar, inclusive os discentes*" (Investigador/DC). Satisfeita, D7 vai mais além, e afirma com esta característica, numa formação, "*(…) é fundamental*" (D7/EI).

- **Reconhece fragilidades nas lecionações antes da OFD**

Considerando dados provenientes do QO e das EI, três docentes[124] demonstraram reconhecer algumas fragilidades no ensino proposto antes da OFD. A exemplo disto, D6 afirmou, no QO, que *"utilizava (os conceitos de simetria) de forma incorreta"* (D6/QO) e, de maneira equivalente, D2 disse que "*cientificamente utilizava alguns termos incorretamente*" (D2/QO) e que "*estava a ensinar mal*" (D2/EI). D4 afirmou que "*(…) usava-os (conceitos de simetria) assim se forma mais aleatória (…) mais superficial*" (D4/EI).

[121] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9 (Apêndice 33).
[122] D2, D3, D4, D6, D8 e D9.
[123] D2, D3, D4, D6, D8 e D9.
[124] D2, D4 e D6.

- **O papel dos RACP na aprendizagem docente**

Esta subcategoria e seus indicadores estão apresentados no Quadro 52 a seguir.

Quadro 52: SADoc – O papel dos RACP na aprendizagem docente

SUBCATEGORIA	INDICADORES
O papel dos RACP na aprendizagem docente	RACP como facilitadores da aprendizagem docente
	Satisfação docente com o uso dos RACP

- **RACP como facilitadores da aprendizagem docente (Apêndice 34)**

Todos os nove docentes[125] revelam a associação da própria percepção de aprendizagem ao uso dos RACP. Dos oito respondentes do QO, sete docentes[126] posicionaram-se positivamente em resposta a "*Associa esta compreensão somente agora devido à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?*" (Investigador/QO). D7 complementou dizendo que "*É surpreendente as simetrias que encontramos ao nosso redor. Facilitou imenso a sua compreensão*" (D7/QO). Apenas D2 respondeu negativamente a esta mesma questão, o que, inicialmente, nos pareceu ser contraditório a todas as demais posturas deste docente ao longo de todas as etapas vivenciadas na OFD. Porém, considerando todo o contexto das outras respostas oferecidas na EI, concluimos que este docente não considera que a sua compreensão acerca dos conceitos de simetria tenha sido exclusivamente devido à associação do ensino ao uso dos RACP, mas que esta estratégia, de fato, facilitou tal compreensão. Em resposta a "*Como na nossa formação a gente também se valeu desses recursos, você acha que você também foi beneficiada por ter aprendido dessa forma também?*" (Investigador/EI) a resposta foi "*Sim, claro que sim*" (D2/EI).

A não participação de D8 no QO e o fato de não ter havido entrevista individual com o mesmo, não o exclui da opinião positiva sobre a associação aqui direcionada. O DC revela, a respeito de D8, que "*disse que não percebia a*

[125] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9 (Apêndice 34).
[126] D1, D2, D3, D4, D5, D6 e D7.

presença destes conceitos no dia-a-dia e que agora os vê com facilidade" (Investigador/DC). Outras citações deste mesmo instrumento incluem D8 em revelações que aludem a esta associação.

Assim, concluimos que todos os docentes consideraram que a compreensão dos conceitos de simetria por parte deles está associada ou foi consideravelmente facilitada devido a abordagem destes conceitos ter ocorrido utilizando os RACP.

- **Satisfação docente com o uso dos RACP**

Apenas dois docentes[127] se manifestaram diretamente sobre a satisfação própria com o uso dos RACP e demonstraram tê-la alcançada. D7 diz que "*O fazer-me a mim e aos meus alunos observar o que nos rodeia foi surpreendente*" (D7/QO). Em resposta a "*Você considerou-se mais satisfeita por utilizar os recursos artísticos, culturais e patrimoniais na promoção do ensino de simetrias?*" (Investigador/EI), o mesmo docente respondeu "*Ah, sem dúvida… muito mais*" e, mais adiante, completou alegando que "*É uma forma de me enriquecer pessoalmente como professora (…) o fato de me abrir outras perspectivas em relação ao ensino, só posso ser beneficiada*" (D7/EI). D4, diante da pergunta "*O que você achou da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetria?*" (Investigador/EI) a resposta foi "*Achei bem, achei giro, achei motivador, achei diferente, não é…*" (D4/EI).

- **Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo**

Passamos à subcategoria Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo e apresentamos o Quadro 53 a seguir, com seus indicadores.

[127] D4 e D7.

Quadro 53: SADoc – Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo	Contributo dos RACP para o desenvolvimento dos objetivos do currículo
	Convergência entre a utilização de RACP e os objetivos do currículo

Relembramos que aquando da apresentação dos dados na subcategoria Percepções sobre RACP e currículo, em seu indicador Reconhecimento das potencialidades do uso de RACP, D10 se manifestou durante a FG1 e teve a concorância de D4.

Seguimos com os indicadores.

- **Contributo dos RACP para o desenvolvimento dos objetivos do currículo**

Aqui consta uma citação de D4 no QO, realizado após a implemetação das atividades aos discentes.

Quando questionado sobre a relação existente entre a abordagem que propomos com a OFD e a oportunidade, oferecida aos alunos, de percepção da relação com o mundo real, D4 diz que os objetivos do PMEB atual incidem no "*desenvolvimento do sentido espacial*" (D4/QO) de forma a propor "*um maior enfoque na visualização e na compreensão das figuras geométricas no plano e no espaço, utilizando esses conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos*" (D4/QO).

- **Convergência entre a utilização de RACP e os objetivos do currículo**

Ainda em resposta ao QO, D4 reconhece que o PMEB atual "*reforça a importância da utilização dos materiais manipuláveis ao longo de toda a escolaridade, como ponto de partida para muitas tarefas escolares que visam promover atividades de investigação e a comunicação*" (D4/QO).

- **Melhorias alcançadas com as PP (Apêndice 35)**

Esta subcategoria e seus indicadores estão contemplados no Quadro 54 a seguir.

Quadro 54: SADoc – Melhorias alcançadas com as PP

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Melhorias alcançadas com as PP	Objetivos específicos (PP)
	Conceitos (PP)
	Recursos (PP)
	Estratégias (PP)

Todos os oito[128] participantes do QO, dos quais três[129] também participaram de EI, manifestaram de forma positiva, nestes dois instrumentos de recolha de dados, revelando muitas melhorias que foram alcançadas, principalmente em detrimento às PA. Em resposta a "*Como considera o planeamento utilizado nesta aula*" (Investigador/QO), D1 alega que foi "*bastante explícito, com exemplos e materiais adequados ao nível etário*" (D1/QO) e D2 considera ter sido de "*uma forma objetiva e clara*" (D2/QO). De uma forma mais comparativa com as PA, através da pergunta "*Como compara o planeamento utilizado para esta aula com os planeamentos utilizados anteriormente à OFD para o ensino de simetrias?*" (Investigador/QO), D4 considera o planeamento atual "*Mais completo, mais ousado e dinâmico*" (D4/QO) e D9 conclui dizendo ter recorrido "*à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para lecionar este conteúdo, ao contrário de planeamentos anteriores*" (D9/QO).

- **Objetivos específicos (PP)**

Consideramos que a grande diferença entre os objetivos específicos apresentados nas PA para os apresentados nas PP é a maior clareza do que se objetiva, de fato, conjugado com a alguma alusão à utilização de recursos, ao menos, artísticos. Também se pode notar o destaque dado ao

[128] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 35).
[129] D2, D4 e D7.

desenvolvimento do espírito de observação e percepção de regularidades e articular saberes geométricos e artísticos e ao favorecimento discente em exprimir livremente a criatividade.

- **Conceitos (PP)**

A maioria dos docentes planificou, nas PP, todas os quatro conceitos de simetrias, o que podemos considerar que, comparativamente aos dados das PA, os docentes começaram a se sentirem mais seguros em lecionar estes conceitos.

- **Recursos (PP)**

Em relação às PA, não podemos considerar diferenças notáveis em relação a recursos materiais, em geral. No entanto, nota-se que as PP apresentam uma grande variedade de RACP, em função das próprias características da OFD. Antes da OFD, poucos eram os RACP planificados pelos docentes, que demonstraram não serem capazes de explorar este tipo de recurso.

Além disso, algumas citações presentes nos DC revelam que, tanto durante a realização de atividades com os docentes, nas etapas da OFD, quanto durante as implementações de atividades junto aos discentes, os docentes perceberam os benefícios da utilização de miras, em detrimento ao uso de espelhos.

Durante o 2º trabalho presencial, a ampliação do debate ao longo da realização das atividades sugeria o convencimento, por parte dos professores, de que a mira é o recurso mais adequado na realização da atividade em questão. Alguns docentes dizem que o espelho pode ser adequado somente se a imagem for muito simples ou para completar as imagens (isometria e não simetria). D7 revelou, durante o 7º trabalho presencial, a experiência da diferença entre utilizar espelho e mira, provinda da aplicação das atividades. Outros três docentes concordaram com a colocação. No mesmo encontro, D4 compartilha considerar que "*para o ensino de reflexão, o melhor é mesmo o uso de miras*" (D4/DC).

Estas considerações foram percebidas na prática pelos docentes, durante a realização das atividades na OFD, não sendo adiantado pelo investigador.

- **Estratégias (PP)**

Consequentemente, as estratégias estavam em correspondência direta ao uso de materiais simples, como régua, espelhos e miras. A partir das demandas da OFD, é de notar que as estratégias presentes nas PP são diretamente relacionadas com a exploração de RACP, a partir da observação e exploração de imagens variadas, apresentação de vídeos e *PowerPoint*.

- **Dificultador e aspectos a melhorar**

Avançamos para esta subcategoria que consta no Quadro 55 com seus indicadores.

Quadro 55: SADoc – Dificultador e aspectos a melhorar

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Dificultador e aspectos a melhorar	Forma inadequada dos conceitos presentes nos manuais
	Adequações de pormenores, necessárias à reutilização das PP, em função do contexto
	Reutilizações futuras das PP

- **Forma inadequada dos conceitos presentes nos manuais**

Durante duas das três EI, detectamos citações de dois docentes[130] que consideram a forma como as simetrias estão presentes nos manuais escolares como um dificultador para a aprendizagem docente.

Para D2, "*os conceitos que vem no livro, só, é muito rudimentar, é muito pouco*" (D2/EI) e para D7, "*há uma mistura de conceitos e os próprios manuais escolares promovem essa confusão*" (D7/EI). Apesar de os manuais escolares estarem entre os principais embasadores deste saber, como apresentado no indicador Manuais escolares da subcategoria Formas e fontes de aquisição e

[130] D2 e D7.

atualização de conhecimentos científicos da categoria Conhecimento Científico Prévio (CoCiP), os próprios docentes reconhecem as limitações deste meio.

- **Adequações de pormenores, necessárias à reutilização das PP, em função do contexto (Apêndice 36)**

De entre os oito docentes[131] respondentes do QO, apenas D5 afirmou que não faria alterações na PP para reutilizá-la. No reconhecimento da necessidade de pequenas alterações na PP para reutilização futura, afirmado pelos demais sete docentes, dividimos as respostas e comentários disponíveis em quatro critérios, nos quais apresentamos um exemplo de cada. D1 revela que "*Possivelmente com novos recursos artísticos culturais e patrimoniais*" (D1/QO), D2 considera que "*Apenas limitaria o número de figuras na atividade 1 do PowerPoint (Simetria de reflexão)*" (D2/QO), D4 comenta que deva "*Apenas adaptar ao ano de escolaridade a que se destina*" (D4/QO) e D7, durante a EI, diz que alteraria "*a ordem (…)*" (D7/QO) apresentada.

Nota-se que as alterações consideradas objetivam apenas simples melhorias e atualizações.

- **Reutilizações futuras das PP (Apêndice 37)**

Diante das diversas melhorias alcançadas de acordo com as opiniões docentes, já apresentadas até aqui, oito docentes[132] foram questionados, através do QO e das EI, quanto a reutilização destas PP em lecionações futuras e todos afirmaram que reutilizaram esta PP. Em resposta a "*Utilizaria este planeamento novamente?*" (Investigador/QO), D3 vai mais além da afirmação e diz que "*sempre que volte a lecionar este conteúdo recorrerei a esta base de planeamento*" (D3?QO). O mesmo diz D7 ao enfatizar ainda que "*nos próximos anos letivos (3º e 4º anos) utilizarei a mesma metodologia*" (D7/QO).

[131] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 36).
[132] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 37).

Em síntese – Satisfação e Aprendizagem Docentes (SADoc)

De acordo com a apresentação e análise interpretativa desta categoria, concluímos que os nove docentes[133] que participaram de todas as etapas da OFD reconhecem a aprendizagem docente de conhecimento científico e correção de conceitos que utilizavam de forma incorreta. Consideram ainda que este foi um dos pontos de destaque da formação e que tem impacto positivo na autoconfiança docente, qualidade que eles não detinham antes da Oficina.

Os resultados comparativos das unidades de aferição de conhecimento científico revelam avanços em temas como propriedades de isometrias, relação entre isometria e simetria, classificação e conjunto de simetrias de figuras, isometria de translação, de rotação, de reflexão e de reflexão deslizante. Estes resultados revelam que as frequências de respostas nas classes parcialmente correta e correta foram, respectivamente, 13% e 51%, e são consideravelmente superiores aos resultados revelados inicialmente. Destacamos a aprendizagem ou aprimoramento da simetria de reflexão deslizante. Os avanços também puderam ser percebidos em relação aos conhecimentos didático-pedagógicos, através dos resultados globais comparativos das unidades de aferição destes conhecimentos. As frequências de respostas nas classes parcialmente correta e correta foram, respectivamente, 11% e 61%, e, novamente, são consideravelmente superiores aos resultados revelados inicialmente. Ambos os resultados comparativos globais, tanto acerca dos conhecimentos científicos quanto dos conhecimentos didático-pedagógicos, nos revelam consideráveis avanços na aquisição destes conhecimentos por parte dos docentes. Inferimos que, com toda a dedicação dada a estas aquisições após a última aferição destes níveis, aquando da aplicação do Q2, estes tenham aumentado em relação ao detectado no início da OFD pelo Q1.

Os docentes também demonstram a satisfação com a experiência colaborativa e outras características da OFD e reconhecem determinadas fragilidades nas lecionações antes da OFD. Consideram também que a própria aprendizagem está associada ou foi facilitada devido o uso dos RACP (Ma, 2009; D'Ambrósio, 2001; NCTM, 2008; Deasy, 2002; Antoniazzi, 2005;

[133] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8 e D9.

Fainguelernt & Nunes, 2006; Rossi & Bisognin, 2009; Gandulfo *et al*., 2013; Amaral, 2015; Zaleski Filho, 2013) e que estes recursos são um contributo para a concretização dos objetivos do currículo.

Em relação aos PA, as PP revelam melhorias, nomeadamente nos objetivos específicos, conceitos, recursos e estratégias consideradas, que estiveram em consonância com a variedade de RACP utilizados. O reconhecimento dos benefícios da utilização de miras em determinadas atividades também foi uma das percepções de aprendizagem dos docentes. As adequações de pormenores, necessárias à reutilização das PP, são simples de serem realizadas e os docentes afirmam que reutilizarão estas PP, devidamente adaptadas, para lecionações futuras.

Todo este avanço *a posteriori* foi o suficiente para a implemetação das atividades aos discentes, com o rigor científico necessário ao ensino dos conceitos abordados (Bulf, 2009; Bouckaert, 1995; Ferreira, 2014).

Satisfação e aprendizagem discentes (SADis)

A última categoria desta pesquisa, Satisfação e aprendizagem discentes (SADis), será apresentada e analisada interpretativamente a partir das quatro subcategorias estabelecidas. Esta categoria incide em verificar a satisfação e a aprendizagem discentes de simetrias associadas ao uso dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais no ensino e contribuirápara a consolidação do objetivo específico *III-vii*.

- **Percepções sobre a aprendizagem discente**

Chegamos a terceira subcategoria e seus indicadores (Quadro 56).

Quadro 56: SADis – Percepções sobre a satisfação discente

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepções sobre a satisfação discente	Percepção, por parte do investigador, da satisfação discente
	Reconhecimento docente da satisfação discente

- **Percepção, por parte do investigador, da satisfação discente**

As ODNP também apontam para a satisfação discente face à metodologia e o teor das atividades implementadas. Destacamos as segundas aulas de implementações de D7 e D2. Na de D7, "*os alunos se portam bem, parecendo curiosos e entusiasmados com o que será apresentado na sequência*" (Investigador/ODNP). Certo momento, "*Um dos alunos se adianta, dizendo 'Eu gostei muito disso'*" (Investigador/ODNP). Outra aluna diz que "*gosta muito de simetria de reflexão e completa, dizendo 'gostei de brincar'*" (Investigador/ODNP). Finda-se a aula de D7 "*com o investigador questionando aos alunos sobre a satisfação deles devido a abordagem utilizada. Todos manifestam-se positivamente*" (Investigador/ODNP).

Com D2 também destacamos durante as ODNP o "*interesse e satisfação transparecidos pelos alunos*" (Investigador/ODNP). A semelhança do ocorrido ao fim da aula de D7, "*Ao terminar estas últimas atividades, D2 pergunta aos alunos se eles gostaram da aula. Todos se manifestam positivamente*"

(Investigador/ODNP). Em seguida, "*O investigador pergunta aos alunos se preferem o ensino de matemática com a utilização de recursos, como fora procedido pela professora. Todos alegam que preferem através dos recursos. Justificam dizendo que é mais interessante, que aprendem mais e que é mais interessante quando tem 'coisas novas'*" (Investigador/ODNP).

- **Reconhecimento docente da satisfação discente**

Destacamos, aqui, algumas considerações de cinco docentes[134] a respeito da satisfação discente. Em resposta a "*Considera que as atividades utilizadas na aula foram atrativas para os alunos?*" (Investigador/QO), D3 diz que "*o que lhes foi pedido para realizar foi elaborado com entusiasmo*" (D3/QO) e que "*Houve entusiasmo perante os recursos apresentado*" (D3/QO). À mesma pergunta, D2 alega que "*Os alunos estiveram motivados e empenhados na realização das tarefas e na apresentação dos resultados do seu grupo de trabalho*" (D2/QO). D9 aponta que os discentes "*Adoraram ver na apresentação PowerPoint as figuras representadas e depois terem-nas ali à sua frente para puderem comprovar o tipo de simetrias que estava presente*" (D9/QO) e D7, na EI disse que, durante a implementação das atividades, os discentes "*se entusiasmaram de tal ordem que… eles querem mais, mais, mais… querem muito mais*" (D7/EI). D4, também na EI, completa que "*eles gostam de explorar esses… essa… e a arte, seja qual for o tipo de arte que tenhamos*" (D4/EI).

- **Percepções sobre a aprendizagem discente**

O Quadro 57 apresenta esta subcategoria e seus respectivos indicadores.

Quadro 57: SADis – Percepções sobre a aprendizagem discente

SUBCATEGORIA	INDICADORES
Percepções sobre a aprendizagem discente	Percepção, por parte do investigador, de aprendizagem discente dos conhecimentos científicos de simetrias
	Reconhecimento docente de aprendizagem discente dos conhecimentos de simetrias

[134] D2, D3, D4, D7 e D9.

- **Percepção, por parte do investigador, de aprendizagem discente dos conhecimentos científicos de simetrias (Apêndice 38)**

As ODNP permitiram destacar diversas passagens ocorridas durante as implementações das atividades aos discentes, por parte dos três docentes[135] acompanhados durante as implementações.

Durante a implementação das atividades realizada por D2, "*um dos alunos, que utilizava a imagem de uma estrela estampada em mosaico numa calçada portuguesa, percebeu que o número de 'pontas' da estrela é o mesmo número de sobreposições que ocorre quando se gira a imagem copiada no papel vegetal*" (Investigador/ODNP).

Na implementação realizada por D4, já próximo do fim, os alunos reconheceram a existência de simetria de rotação, reflexão e reflexão deslizante em um determinado friso apresentado pelo docente.

Uma aluna, durante a implementação realizada por D7, percebe um pequeníssimo friso no segundo brasão da família Pereira, o qual invalidava a simetria de reflexão. Esta percepção demonstrava o envolvimento bastante ativo dos discentes durante a realização das atividades.

- **Reconhecimento docente de aprendizagem discente dos conhecimentos de simetrias (Apêndice 39)**

Algumas considerações docentes, obtidas por diversos instrumentos usados na investigação, estão de acordo com as passagens percebidas ao longo da implementação. Os oito docentes[136] respondentes do QO revelaram considerar que seus discentes aprenderam as simetrias abordadas. Em resposta a "*(…) considera que seus alunos aprenderam os conceitos abordados durante a aula?*" (Investigador/QO), D4 diz que "*(…) a maioria dos alunos fez uma aprendizagem efetiva*" (D4/QO) e D7 alega que "*(…) o conceito foi claramente apreendido (…) Os alunos desceram ao pormenor na simetria de reflexão. Detectaram pormenores mínimos que, dentro da imagem, não possuíam simetria de reflexão*" (D7/QO). D2 garante que os discentes "*Aprenderam, sem dúvida*" (D2/EI).

[135] D2, D4 e D7 (Apêndice 38).
[136] D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D9 (Apêndice 39).

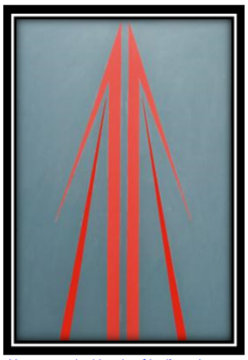
- **Aprendizagem discente**

Esta subcategoria é estabelecida apenas pelo indicador **Comparação entre os resultados do GA e do GC no Teste Discente (TD)**.

Para concretização do objetivo específico *III-vii*, apresentamos a seguir os dados aferidos através do TD. As questões deste instrumento têm o mesmo objetivo – aferir um ou mais conceitos de simetrias – e o mesmo perfil – apresenta-se uma imagem e, quando esta remete a um recurso artístico, cultural ou patrimonial, uma breve descrição sobre a mesma.

Estas questões e seus respectivos resultados, provenientes do Grupo de Ação (GA) e do Grupo de Controle (GC), serão aqui apresentados de forma comparativa entre estes dois grupos. Ao final das dez questões, apreentaremos um único resultado global comparativo.

Iniciamos pela questão 3 (Figura 77), a primeira questão deste instrumento que afere de forma direta algum domínio dos conceitos de simetria. Esta é uma rosácea e contempla apenas o conceito de simetria de reflexão de eixo vertical a partir de uma obra do artista português Fernando Lanhas.



https://www.cml.pt/cml.nsf/artigos/15604D3579BCDF0380257987005F0524

3. A Geometria, por muitas vezes, está presente em obras de arte de diversos artistas em todas as partes do mundo. O quadro ao lado é do pintor e arquiteto português, **Fernando Lanhas**. Esta obra de mais de meio século foi vendida por 55 mil euros.

Observa com atenção a imagem ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 77: Enunciado da questão 3 do TD – Simetria de reflexão (RACP)

Referentemente ao item *a)* desta questão, todos os 36 (100%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na imagem apresentada, enquanto que apenas 26 (68%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) procederam da mesma forma.

Considerandos válidas apenas as respostas dos discentes que afirmaram positivamente o item *a)*, apresentamos os resultados do item *b)* e, juntamente com, as indicações dos elementos (eixos, centro, direção ou outros) que caracterizam as simetrias percebidas na imagem, divididas em cinco classes de respostas:

- totalmente certa, quando as simetrias indicadas no item *b)* e a indicação dos elementos na imagem foram corretas;
- item *b)* correto, quando respondeu o item *b)* corretamente mas não indicou os elementos, os indicou de forma errada ou incompleta, na imagem;
- item *b)* parcialmente correto, quando respondeu o item *b)* indicando outras simetrias além da única simetria que a imagem do item admite;
- apenas elementos, quando apesar de não responder o item *b)* ou respondê-lo erradamente ou de forma confusa ou ainda indicar outras simetrias além das que a imagem do item admite, indicou os elementos na imagem de forma correta;
- branco / sem sentido, quando o item *b)* ou a indicação dos elementos na imagem estavam em branco ou sem sentido.

Em particular, nesta questão, alocamos na classe totalmente certa as respostas que consideraram apenas simetria de reflexão e as respostas de alguns respondentes que indicaram, para além da simetria de reflexão, a simetria de rotação, embora a única simetria de rotação que a imagem admite seja a identidade. Isto posto, os resultados foram os seguintes (Gráfico 46).

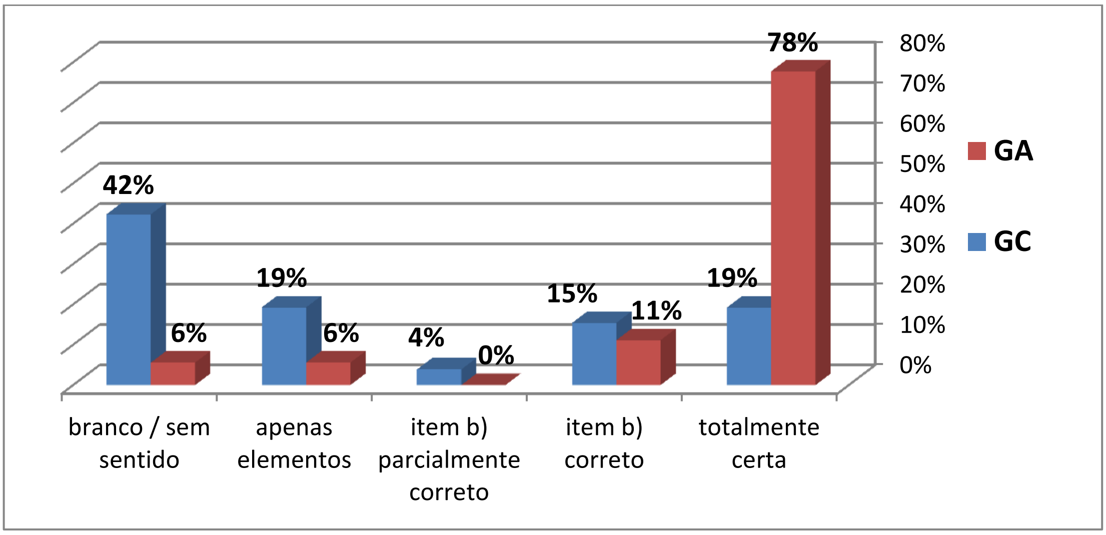
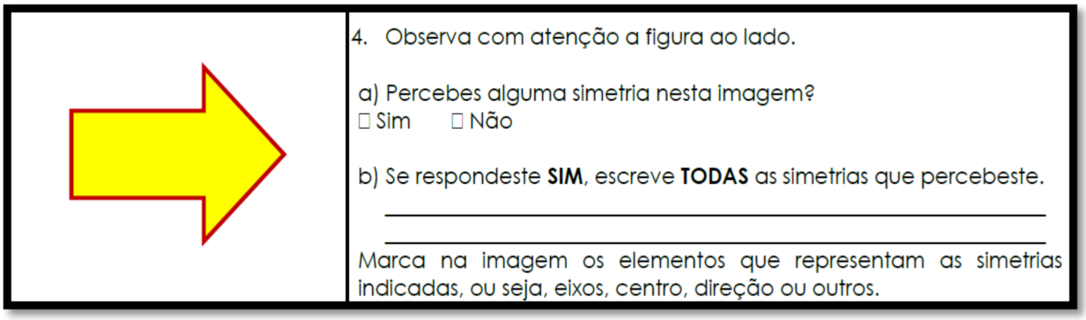


Gráfico 46: Resultado comparativo da questão 3 do TD – Simetria de reflexão (RACP)

Na sequência, apresentamos a questão 4 (Figura 78), que incide apenas sobre o conceito de simetria de reflexão de eixo horizontal a partir de uma rosácea não oriunda de RACP. Por este motivo e como mencionado anteriormente, note que esta questão não apresenta descrição referente a figura, que é uma


4. Observa com atenção a figura ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
□ Sim □ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 78: Enunciado da questão 4 do TD – Simetria de reflexão

Em relação ao item *a)* desta questão, 35 (97%) dos respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na figura apresentada, ao passo que apenas 27 (71%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) tiveram a mesma consideração.

A apresentação dos resultados do item *b)* desta questão, juntamente com as indicações dos elementos na figura, consideramos as mesmas classes de respostas e os respectivos critérios da questão anterior, exceto para a classe item *b)* parcialmente correto, que não se fez necessária nesta questão.

Além disso, da mesma forma como considerado na questão anterior, nesta questão também alocamos na categoria totalmente certa as respostas que consideraram apenas simetria de reflexão e as respostas que indicaram, para além da simetria de reflexão, a simetria de rotação, embora a única simetria de rotação que a figura admite seja a identidade.

A partir disso, os resultados foram os seguintes (Gráfico 47).

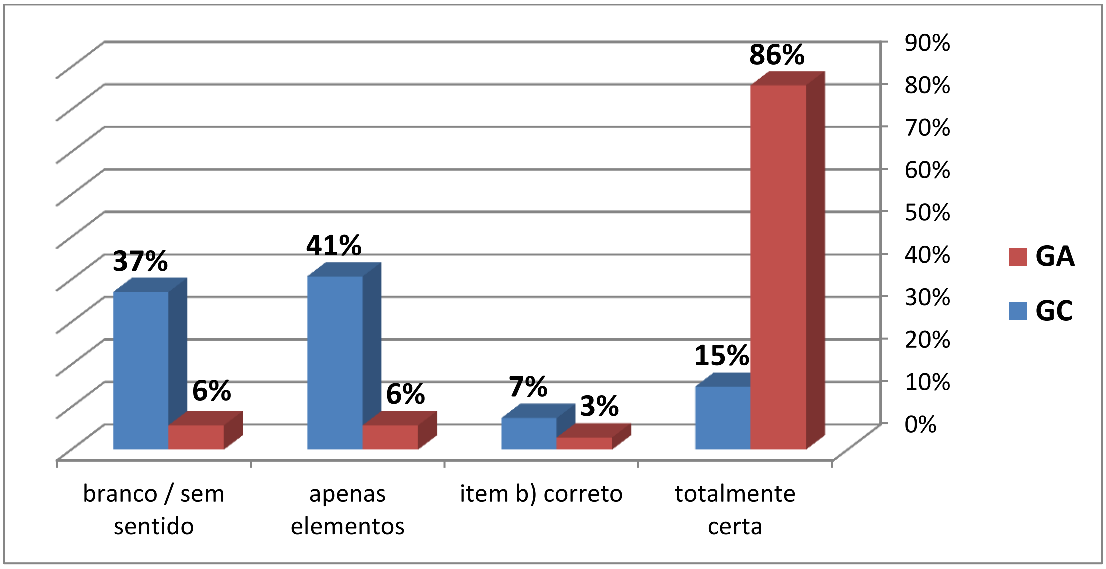
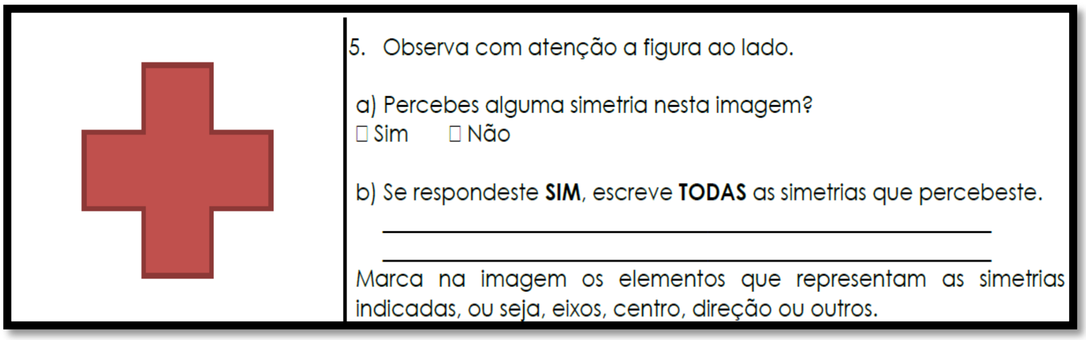


Gráfico 47: Resultado comparativo da questão 4 do TD – Simetria de reflexão

Continuando, apresentamos a questão 5 (Figura 79). Esta incide sobre os conceitos de simetria de reflexão com eixos vertical, horizontal e oblíquos, além de simetria de rotação diferente da identidade. À semelhança da questão anterior, a rosácea desta questão também não remete a RACP.


5. Observa com atenção a figura ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 79: Enunciado da questão 5 do TD – Simetria de reflexão e de rotação

No item *a)* desta questão, todos os 36 (100%) dos respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na figura apresentada, ao passo que apenas 28 (74%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) consideraram da mesma maneira.

Novamente considerando válidas apenas as respostas dos discentes que afirmaram positivamente o item *a)*, apresentamos os resultados do item *b)* e, juntamente com, as indicações dos elementos (eixos, centro, direção ou outros) que caracterizam as simetrias percebidas na figura, divididas em cinco classes:

- totalmente certa, quando as simetrias indicadas no item *b)* e a indicação dos elementos na figura foram corretas;
- item *b)* correto, quando respondeu o item *b)* corretamente mas não indicou os elementos, os indicou de forma errada ou incompleta, na figura;
- item *b)* parcialmente correto, quando a resposta do item *b)* refere-se corretamente a apenas uma das duas simetrias que a figura do item admite, independentemente dos elementos apresentados ou não na figura;
- apenas elementos, quando apesar de não responder o item *b)* ou responde-lo erradamente ou de forma confusa ou ainda indicar outras simetrias além das que a figura do item admite, indicou os elementos na figura de forma correta; e
- branco / sem sentido, quando o item *b)* ou a indicação dos elementos na figura estavam em branco ou sem sentido.

Assim, temos os resultados comparativos apresentados no Gráfico 48 a seguir.

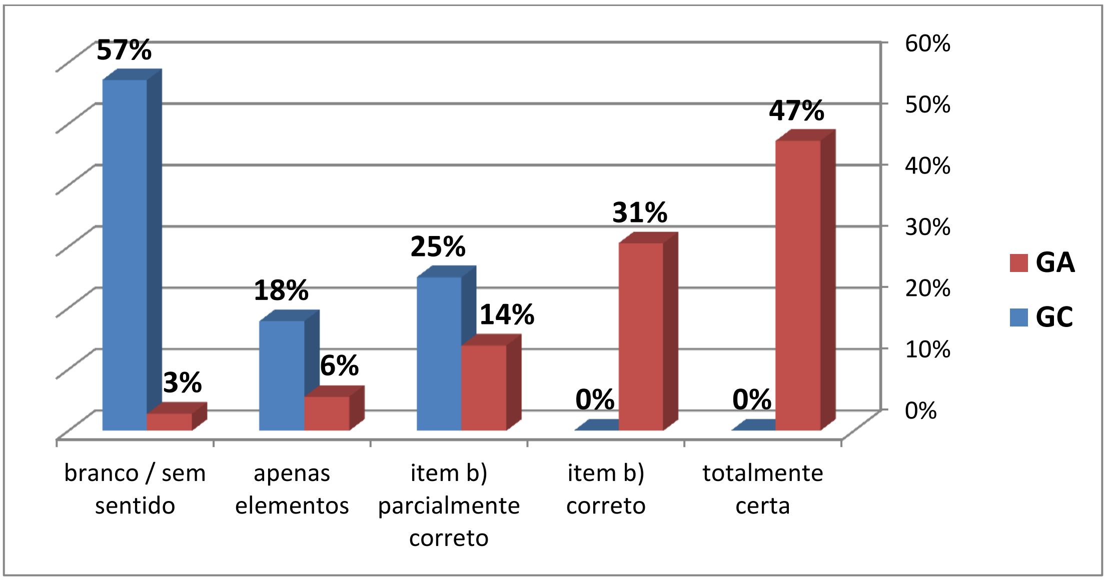


Gráfico 48: Resultado comparativo da questão 5 do TD – Simetria de reflexão e de rotação

Continuando, a questão 6 (Figura 80) apresenta a imagem de um Kolam, característico do sul da Índia. A imagem é uma rosácea e admite apenas simetrias de rotação.

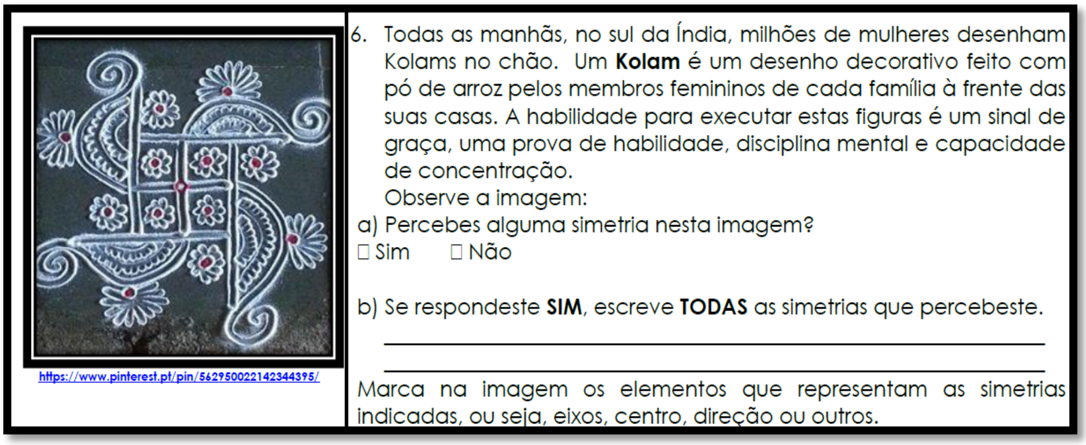


Figura 80: Enunciado da questão 6 do TD – Simetria de rotação (RACP)

Nesta questão, em seu item *a)*, 33 (92%) dos respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na imagem apresentada, enquanto apenas 14 (37%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) responderam assim.

Como anteriormente, considerando válidas apenas as respostas dos discentes que afirmaram positivamente o item *a)*, apresentamos os resultados do item *b)* e, juntamente com, as indicações dos elementos (eixos, centro, direção ou outros) que caracterizam as simetrias percebidas na imagem, divididas em três classes de respostas: totalmente certa, item *b)* correto e branco / sem sentido, mantendo os respectivos critérios aquando considerados nas questões anteriores.

Desta forma, obtivemos os seguintes resultados (Gráfico 49):

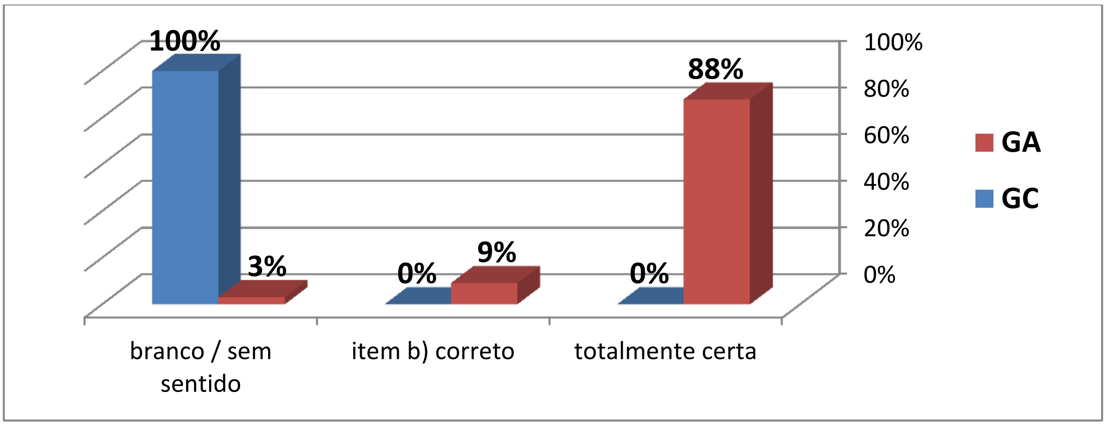


Gráfico 49: Resultado comparativo da questão 6 do TD – Simetria de rotação (RACP)

A questão 7 (Figura 81) apresenta a imagem de um azulejo a partir de uma rosácea, que, à semelhaça da questão 5 (Figura 79), admite simetria de reflexão com eixos vertical, horizontal e oblíquos, além de simetria de rotação.

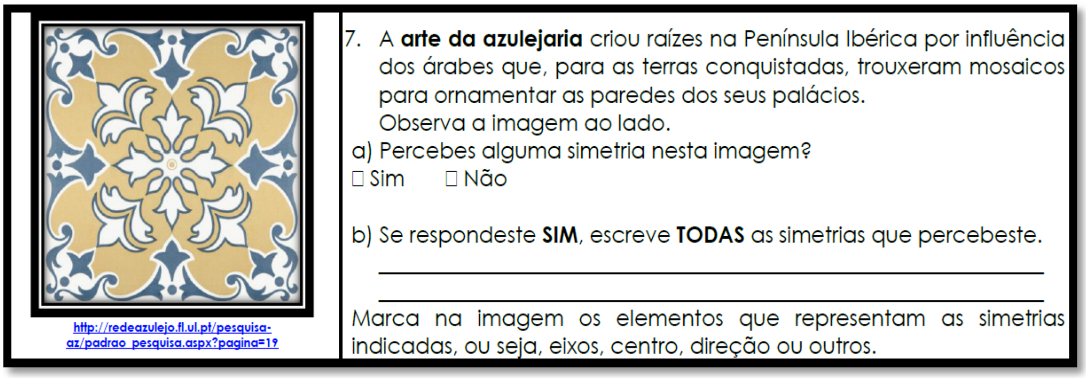


Figura 81: Enunciado da questão 7 do TD – Simetria de reflexão e de rotação (RACP)

Em relação ao item *a)* desta questão, todos os 36 (100%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na imagem apresentada, e apenas 24 (63%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) responderam da mesma maneira.

Para apresentar, a seguir, os resultados do item *b)* e das indicações dos elementos na imagem, consideramos as mesmas categorias e os respectivos critérios utilizados na questão 5. Assim, temos os seguintes resultados que se seguem (Gráfico 50).

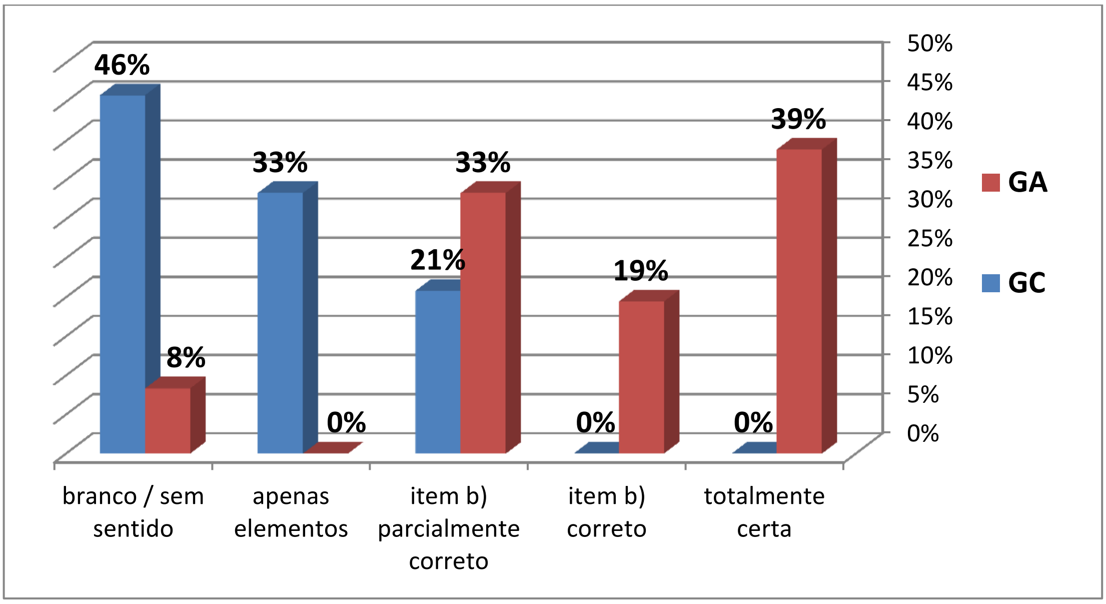


Gráfico 50: Resultado comparativo da questão 7 do TD – Simetria de reflexão e de rotação (RACP)

Seguimos com a questão 8 (Figura 82) que apresenta uma janela do Palácio de Monserrate, em Sintra. Esta figura também é uma rosácea e, à semelhança da questão 3 (Figura 77), admite apenas simetria de reflexão de eixo vertical.

https://www.infopedia.pt/$palacio-de-monserrate

8. É muito comum encontrarmos os conceitos de simetria nos castelos de todo o mundo. A imagem ao lado é uma das janela do **Palácio de Monserrate**, em Sintra, Portugal.
Observa bem a imagem.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 82: Enunciado da questão 8 do TD – Simetria de reflexão (RACP)

No item *a)* desta questão, 33 (92%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na imagem apresentada, ao passo que 25 (66%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) consideraram desta forma.

A seguir, para a apresentação dos resultados do item *b)* e das indicações dos elementos na imagem, consideramos critérios para as classes de respostas da questão 4. Ademais, à semelhança de como consideramos nas questões 3 e 4, nesta questão também alocamos na classe totalmente certa as respostas que consideraram apenas simetria de reflexão e as respostas de alguns respondentes que indicaram, para além da simetria de reflexão, a simetria de rotação, embora a única simetria de rotação que a imagem admite seja a identidade.

Isto posto, o Gráfico 51 a seguir revela os resultados.

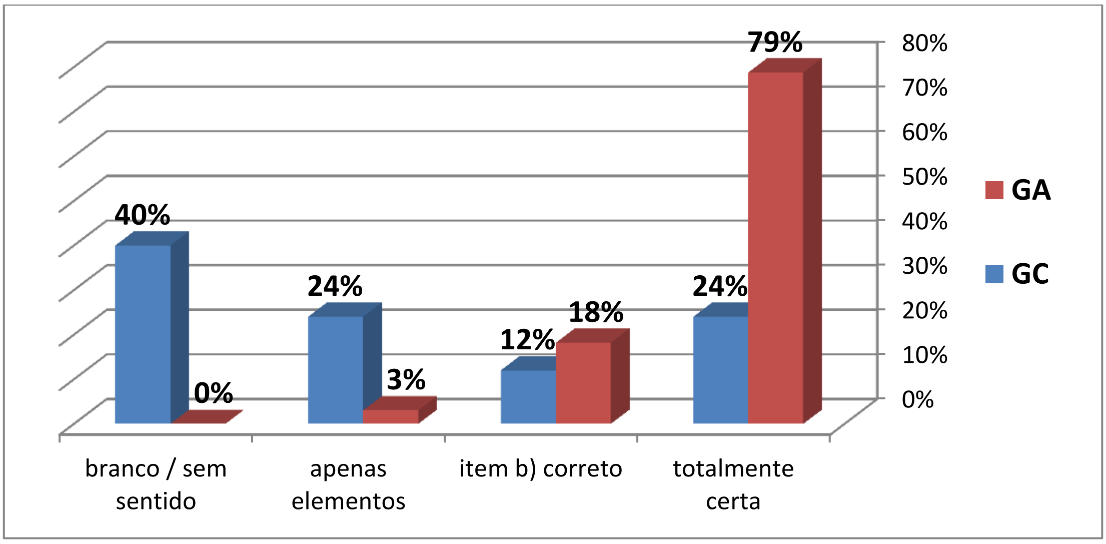
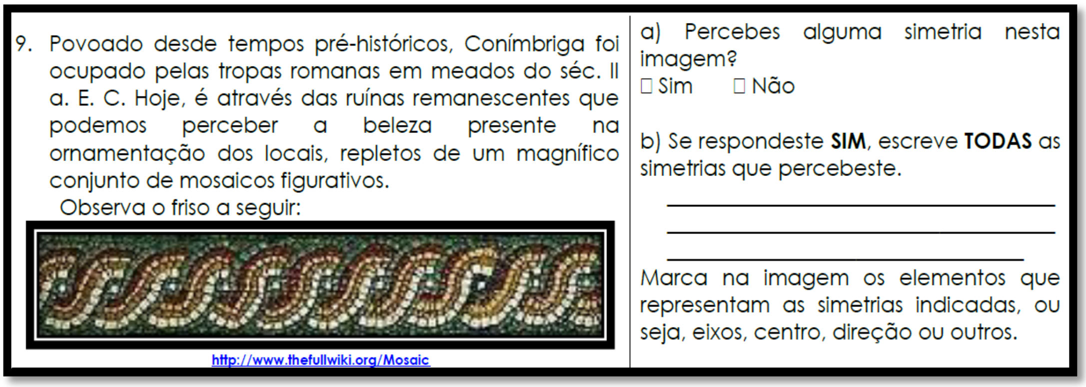


Gráfico 51: Resultado comparativo da questão 8 do TD – Simetria de reflexão (RACP)

Continuando, temos a questão 9 (Figura 83), que apresenta um friso do Museu Monográfico de Conimbriga. Este friso admite simetria de translação e de rotação de meia-volta.



9. Povoado desde tempos pré-históricos, Conímbriga foi ocupado pelas tropas romanas em meados do séc. II a. E. C. Hoje, é através das ruínas remanescentes que podemos perceber a beleza presente na ornamentação dos locais, repletos de um magnífico conjunto de mosaicos figurativos.
Observa o friso a seguir:

http://www.thefullwiki.org/Mosaic

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____
____
____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 83: Enunciado da questão 9 do TD – Simetria de translação e de rotação (RACP)

Em relação ao item *a)* desta questão, todos os 36 (100%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na imagem apresentada, e apenas 18 (47%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) consideraram assim.

Para as apresentações dos resultados do item *b)* e as indicações dos elementos na imagem, procederemos de forma análoga às apresentações anteriores. Dividimos as respostas apresentadas pelos discentes em apenas duas classes:

- item *b)* parcialmente correto, quando a resposta do item *b)* refere-se corretamente a apenas uma das duas simetrias que a imagem do item admite, podendo ou não indicar outras simetrias que a imagem do item não admita, independentemente dos elementos apresentados ou não na imagem; e
- branco / sem sentido, quando o item *b)* ou a indicação dos elementos na imagem estavam em branco ou sem sentido.

Desta forma, os resultados são os que se seguem no Gráfico 52.

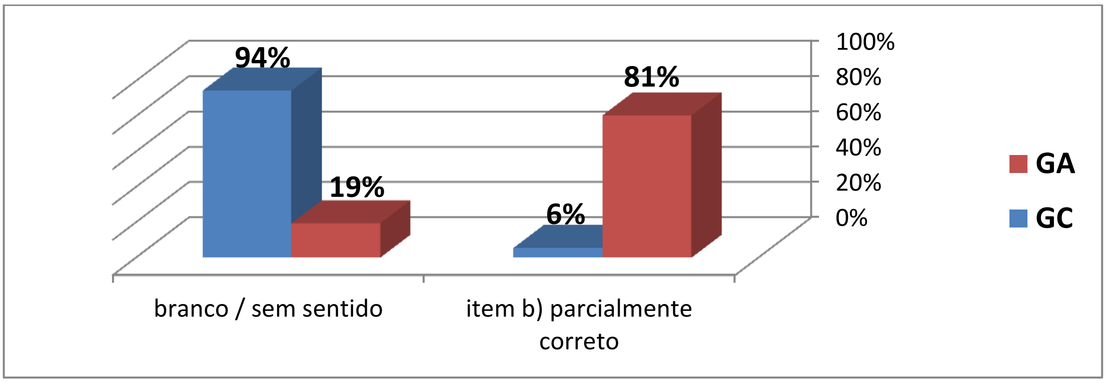
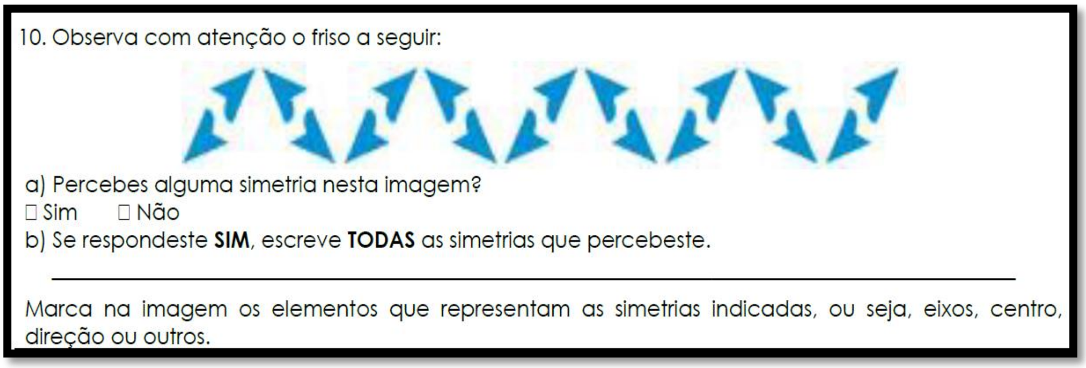


Gráfico 52: Resultado comparativo da questão 9 do TD – Simetria de translação e de rotação (RACP)

Segue-se com a apresentação da questão 10 (Figura 84), que conta com um friso não proveniente de algum RACP. Este friso admite simetrias de translação, de reflexão de eixo horizontal, de rotação de meia-volta e de reflexão deslizante.


10. Observa com atenção o friso a seguir:

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

□ Sim □ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 84: Enunciado da questão 10 do TD – Simetria de translação, de rotação, de reflexão e de reflexão deslizante

No item *a)* desta questão, 33 (92%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na figura apresentada, e apenas 17 (45%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) responderam da mesma maneira.

Nesta questão, as apresentações dos resultados do item *b)* e as indicações dos elementos na imagem também serão de forma análoga as apresentações anteriores. Além disso, é uma das duas questões do TD cuja a figura admite as quatro simetrias no plano euclidiano. Por este motivo, as respostas apresentadas pelos discentes estão dispostas em quatro classes. Designamos as classes:

- item b) parcialmente correto - 3, quando a resposta do item b) refere-se corretamente a três das quatro simetrias que a imagem do item admite, podendo ou não indicar outras simetrias que a imagem do item não admita, independentemente dos elementos apresentados ou não na imagem;
- item *b)* parcialmente correto - 2, quando a resposta do item b) refere-se corretamente a duas das quatro simetrias que a imagem do item admite, novamente, podendo ou não indicar outras simetrias que a imagem do item não admita, e independentemente dos elementos apresentados ou não na imagem;
- item *b)* parcialmente correto - 1, quando a resposta do item *b)* refere-se corretamente apenas uma das quatro simetrias que a imagem do item admite, e podendo ou não indicar outras simetrias que a imagem do item não admita, independentemente dos elementos apresentados ou não na imagem; e
- branco / sem sentido, quando inclui as respostas em que o item *b)* ou a indicação dos elementos na imagem estavam em branco ou sem sentido.

A partir destas considerações, seguem os resultados no Gráfico 53.

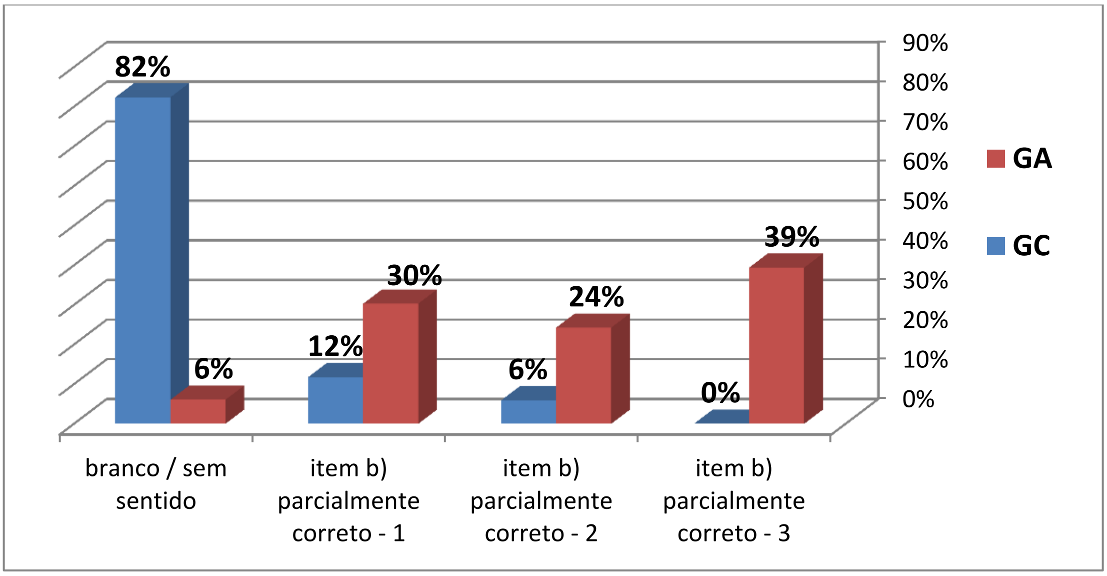


Gráfico 53: Resultado comparativo da questão 10 do TD – Simetria de translação, de rotação, de reflexão e de reflexão deslizante

Na sequência, apresentamos a questão 11 (Figura 85). Esta apresenta um friso, representativo das calçadas portuguesas, que admite simetrias de translação e de reflexão deslizante.

11. A beleza artística da expressão cultural que emana das **calçadas portuguesas** é considerada uma arte pública e destaca a sensibilidade nacional e sua influência em outras partes do mundo. Esta herança histórica é um misto da cultura e tecnologia de construção dos romanos e dos árabes, que acabou por se impor em Portugal no século XIV durante o reinado de D. João II.
Observa os frisos a seguir, nas duas próximas questões:

http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____
____
____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Figura 85: Enunciado da questão 11 do TD – Simetria de translação e de reflexão deslizante (RACP)

No item *a)* desta questão, 31 (86%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na figura apresentada, e apenas 17 (45%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) responderam da mesma forma.

Nas apresentações dos resultados do item *b)* e as indicações dos elementos na imagem, dividimos as respostas dadas pelos discentes em três classes:

- totalmente certa, como utilizada em questões anteriores;
- item *b)* parcialmente correto - 2, quando o respondente indica, além das duas simetrias que a imagem do item realmente admite, outras simetrias que a mesma imagem não admite;
- item *b)* parcialmente correto - 1, quando o respondente indica apenas uma das duas simetrias que a imagem do item realmente admite, indicando, ou não, outras simetrias que a mesma imagem não admite; e
- branco / sem sentido, também como utilizada em questões anteriores.

Ademais, analogamente como considerado nas questões 3, 4 e 8 deste mesmo teste (TD), nesta atual questão também alocamos na classe totalmente certa as respostas que consideraram as simetrias de translação e de reflexão deslizante, e as respostas de alguns discentes que indicaram, para além das simetrias de translação e de reflexão deslizante, a simetria de rotação, embora a única simetria de rotação que a imagem admite seja a identidade.

Assim, obtivemos os resultados apresentados no Gráfico 54.

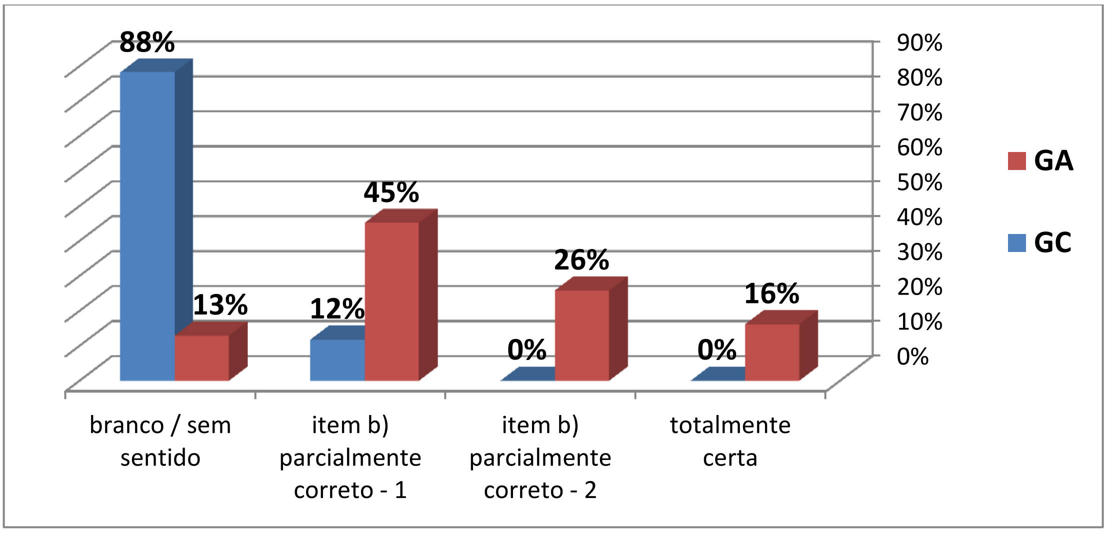


Gráfico 54: Resultado comparativo da questão 11 do TD – Simetria de translação e de reflexão deslizante (RACP)

A última questão do TD, a questão 12 (Figura 86), apresentava um friso, também representativo das calçadas portuguesas. Este friso admite as mesmas quatro simetrias admitidas pelo friso da questão 10 (Figura 84).

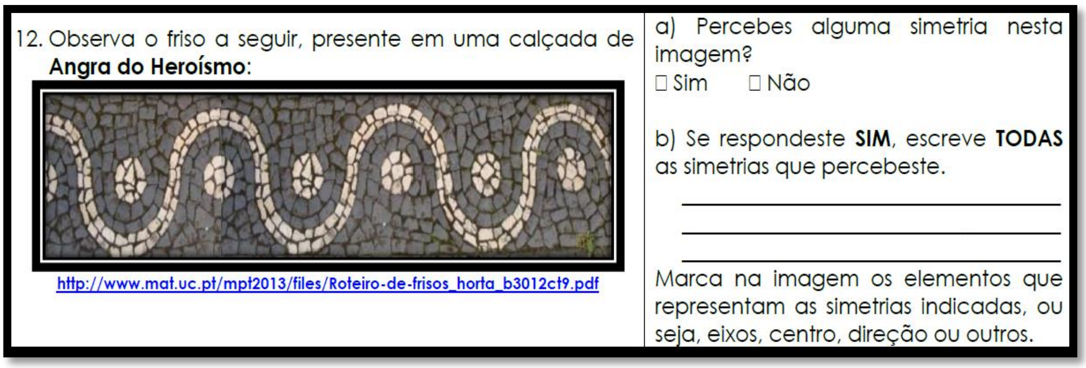


Figura 86: Enunciado da questão 12 do TD – Simetria de translação, de rotação, de reflexão e de reflexão deslizante (RACP)

Referentemente ao item *a)* desta questão, 32 (89%) respondentes do Grupo de Ação (GA) afirmaram positivamente terem percebido alguma simetria na figura apresentada, e apenas 20 (53%) dos respondentes do Grupo de Controle (GC) responderam da mesma forma.

Nesta questão, as apresentações dos resultados do item *b)* e as indicações dos elementos na imagem também serão de forma análoga as apresentações anteriores. Devido a semelhança das características da questão 10 (Figura 85), as respostas apresentadas pelos discentes estão dispostas em cinco classes, com critérios análogos aos utilizados anteriormente.

Os resultados foram os que se seguem no Gráfico 55 a seguir.

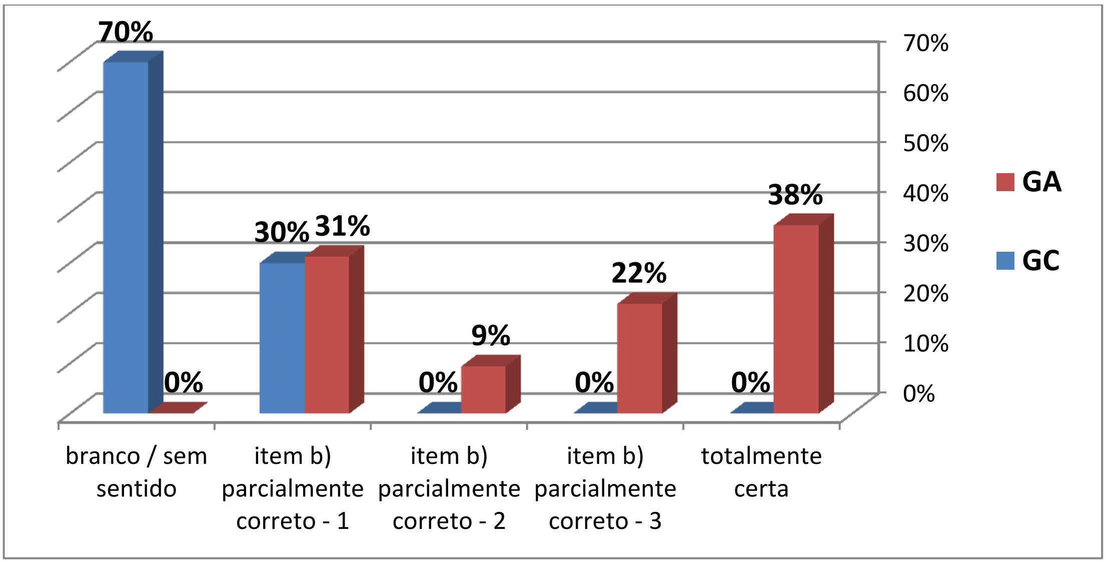


Gráfico 55: Resultado comparativo da questão 12 do TD – Simetria de translação, de rotação, de reflexão e de reflexão deslizante (RACP)

De forma similar à maneira como procedemos diante dos resultados comparativos entre os dados acerca da aquisição de conhecimento científico por parte dos docentes, provenientes da Parte V do Q1 e do Q2, aqui também procedemos assim, com o objetivo de verificar os resultados globais acerca da aferição do conhecimento científco dos discentes, comparando dados oriundos do GA com os do GC.

Relativamente ao item a) presente em todas as dez questões do TD – *Percebes alguma simetria nesta imagem?* –, aglutinando todas as respostas obtidas, temos o Gráfico 56.

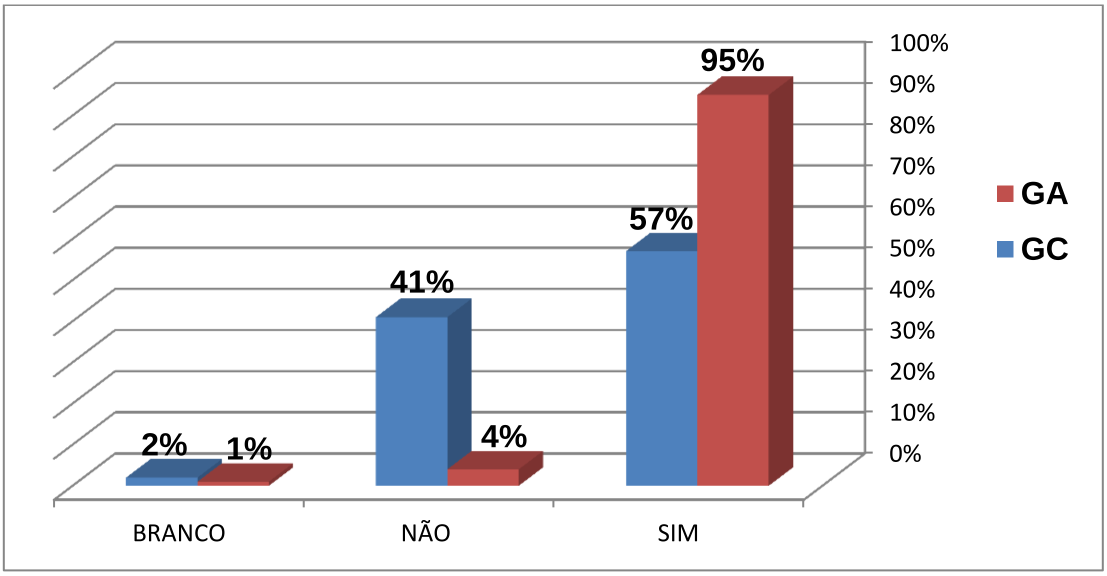


Gráfico 56: Resultado Global (Sim / Não) – Conhecimento Científico Discente

Quanto às classes de respostas de todas as dez questões do TD, pode-se perceber as seguintes: branco / sem sentido; apenas elementos; item *b)* parcialmente correto - 1; item *b)* parcialmente correto - 2; item *b)* parcialmente correto - 3; item *b)* parcialmente correto; item *b)* correto e totalmente certa. Para podermos juntar os dados de todas as dez questões, consideramos as seguintes classes: totalmente certa; parcialmente certa; apenas elementos e branco / sem sentido. As classes com a mesma designação utilizada anteriormente seguem as mesmas definições, nos cabendo, então, apenas juntar as classes item *b)* correto, item *b)* parcialmente correto, item *b)* parcialmente correto - 3, item *b)* parcialmente correto - 2 e item *b)* parcialmente correto - 1 numa mesma classe a qual designamos por parcialmente certa. A totalidade dos respondentes considerados em todas as quatro classes foi o total que respondeu positivamente ao item *a)* das questões, ou seja, 341 para o GA e 216 para o GC. Assim, temos os resultados no Gráfico 57 a seguir.

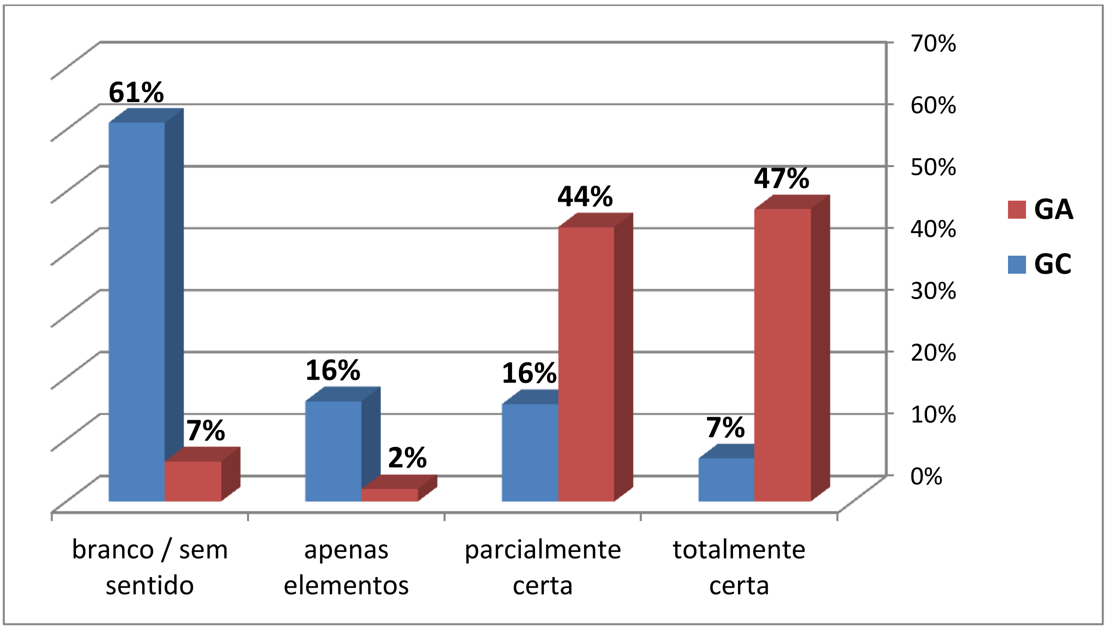


Gráfico 57: Resultado Global (Parte 1) – Conhecimento Científico Discente

Por fim, aglutinamos os dois gráficos com propósito de apresentar um único que remeta ao resultado global do TD. Assim, para que este resultado seja apresentado de maneira mais adequada, o universo da amostra considerado diz respeito ao total de respostas e ausência destas, ou seja, 380 unidades no GC e 360 unidades no GA. Isto posto, temos o seguinte resultado global comparativo para o TD, no Gráfico 58.

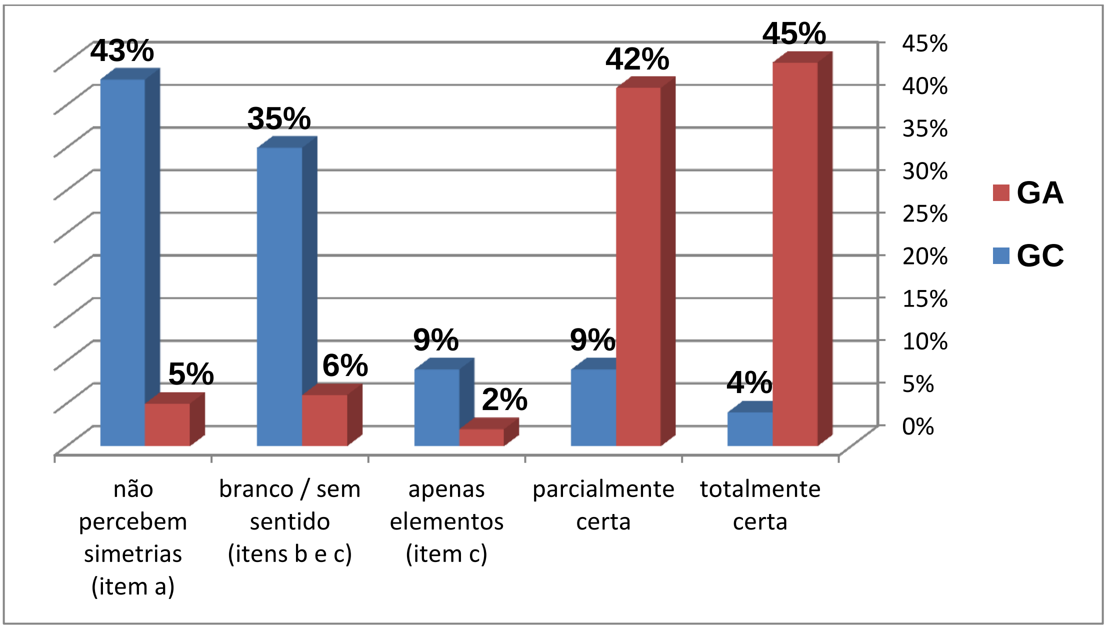


Gráfico 58: Resultado Global (Parte 2) – Conhecimento Científico Discente

Apesar do resultado da questão 11 (Gráfico 47) revelar um comportamento parcialmente diferente do comportamento do gráfico referente ao resultado glogal deste instrumento, consideramos que, de uma forma geral, as questões estão em consonância com o que o resultado global sugere. É possível perceber que o desempenho dos discentes componentes do GA é muito mais satisfatório do que o desempenho dos discentes do GC. Associamos esta característica como um reflexo de todas as qualidades revelas pelo trato dos dados inerentes a esta categoria.

- **O papel dos RACP na aprendizagem discente**

Esta subcategoria e seus indicadores estão apresentados no Quadro 58 a seguir.

Quadro 58: SADis – O papel dos RACP na aprendizagem discente

SUBCATEGORIA	INDICADORES
O papel dos RACP na aprendizagem discente	RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações
	RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações

- **RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações (Apêndice 40)**

Considerando a FG2, o QO e as EI, detectamos as manifestações de sete docentes[137] que consideram os ACP como potenciadores de contextualização. Segundo D6, *"[os RACP] fazem com que as pessoas olhem para arte com outros olhos"* (D6/FG2), e para D8, "*Quando [os discentes] saem com os pais, com a família… acabam por envolver a família [ao perceberem simetrias no cotidiano]*" (D8/FG2). No QO, D1 apontou que *"Os recursos artísticos dão-nos (docentes e discentes) uma visão realista"* (D1/QO) e que *"aguçou a sua (dos discentes) curiosidade para a pesquisa do seu património cultural"* (D1/QO). D4, também no QO, destaca que *"(…) possibilitamos aos*

[137] D1, D2, D3, D6, D7, D8 e D9 (Apêndice 40).

educandos nova forma de compreender o Mundo, desenvolvendo o pensamento crítico e criativo, desenvolvendo a sensibilidade. (…) (D4/QO) e D9 salienta que "*Torna-os (discentes) mais próximos e familiarizados com a arte e com a cultura*" (D9/QO).

- **RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações (Apêndice 41)**

Tendo em conta os dados da FG2, do QO e das EI, todos os nove docentes consideram que os RACP são promotores de aprendizagem e competências discentes. Na FG2, D8 disse os discentes, *"para além de aprenderem conteúdos matemáticos, despertam o gosto pela arte"* (D8/FG2). No QO, D4 alegou que *"[o uso de RACP] constituirá um recurso importante para a abordagem"* (D4/QO) e D3 considerou que *"Partindo do mundo real, o aluno realizará aprendizagens mais ricas e consistentes do mundo que o rodeia"* (D3/QO). Todos nós, docentes e discentes, *"Conseguimos visualizar melhor com exemplos [de RACP]"* (D5/QO), *daí [vão] motivar a aprendizagem das simetrias e consequentemente o gosto e interesse por aspetos ligados à arte"* (D2/QO). Os RACP podem "*Dar à geometria, e neste caso concreto à simetria, um sentido mais formal e mais lúdico pode despertar nos alunos maior interesse e gosto pela matemática e fazer com que a aprendizagem aconteça, de fato"* (D4/QO), e, por isso, *"faz todo o sentido que a aprendizagem deste conceito se faça a partir destes recursos"* (D9/QO).

Em síntese – Satisfação e Aprendizagem Discentes (SADis)

A satisfação discente foi percebida presencialmente pelo investigador através das ODNP e também pelos docentes. Estes docentes também consideram ter ocorrido a aprendizagem por parte dos discentes, o que pode ser percebido pelas diferentes citações em vários instrumentos. A utilização dos RACP é considerada pelos docentes como um dos principais fatores que influenciaram o alcance da aprendizagem discente o que ocorre com maior satisfação e entusiasmo através da variedade de recursos utilizados (Maia, 2014; Veloso, 1998, 2012; Yanik, 2011; Mashingaidze, 2012; Bansial & Naidoo, 2012; Figueira *et al*., 2017; Gerdes, 1992).

O resultado global comparativo do TD, aplicado ao GA e ao GC, foi bastante revelador, apresentando um desempenho muito maior por parte dos discentes aos quais o ensino das simetrias foi promovido através da utilização dos RACP e implementados de acordo com o desenvolvido colaborativamente na OFD, ao passo que os discentes do GC vivenciaram o ensino dos mesmos conceitos, porém sem uso de RACP e através de uma prática não contextualizada. Considerando as respostas do GA, as classes parcialmente correta e correta contam, respectivamente, com as frequências de 42% e 45% das respostas, enquanto que, em relação ao GC estas frequências são de apenas 9% e 2%, respectivamente. Estes resultados comparativos nos permitem acreditar que a aprendizagem das simetrias também pode ser melhor desenvolvida se o ensino proposto se vale da utilização de RACP.

CONCLUSÕES

Visando analisar o potencial educativo dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais, desenvolveu-se um estudo com os objetivos de caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico; planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais e avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente em relação ao ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico.

A base teórica desta pesquisa incidiu sobre os conhecimentos científicos, curricular e didático-pedagógicos de simetrias, a formação de professores e a investigação-ação. Esta base nos revela uma vasta gama de interpretações dada ao termo *simetria* ao longo dos anos. Sua abrangência alcançou, desde um passado longínquo até aos dias atuais, áreas diretamente ligadas à arte, à cultura e ao património de uma forma bastante ampla e harmónica. Seu uso nas mais variadas áreas científicas fez com que, gradativamente, seus termos e conceitos ganhassem certa formalização, mais rigorosa e delineada, até conquistar a interpretação que temos hoje.

Num contexto educacional, diversos movimentos reformistas do currículo, num âmbito internacional, arbitraram relevância pendular à geometria e, por consequência, às transformações geométricas e às simetrias. Em Portugal, foi no Programa de 2007 que estas temáticas atingiram seu ápice, com total reconhecimento de sua importância e benéficas consequências ao ensino e à aprendizagem. Este destaque foi diminuto com o programa seguinte, de 2013, embora algumas orientações metodológicas fossem mantidas. As vantagens do ensino e aprendizagem das simetrias são comprovadas há mais de um século, vantagens estas que extrapolam o conhecimento científico e alcançam, inclusive, o desenvolvimento da criatividade. Sua abordagem pode ser melhor aproveitada através do uso de recursos oriundos das mais variadas fontes, as quais optamos pela arte, cultura e património como instrumentos contextualizadores do ensino e da aprendizagem. Reconhecendo todos os conhecimentos docentes necessários à concretização do ensino, uma formação de professores participativa e emancipatória configura-se num instrumento fundamental para os princípios das práticas educacionais. A investigação-ação, com o propósito de compreender e solucionar problemas específicos e alcançar melhorias na prática consoante ao planeamento, permite a flexibilidade necessária ao desencadeamento – reflexão inicial, planificação, ação e retroalimentação – favorável ao objetivo comum.

O estudo empírico realizado envolveu o desenvolvimento, a planificação, a implementação e a análise de uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

Apresentaremos a seguir as conclusões finais emanadas desta e através desta pesquisa, as quais estarão dispostas sequencialmente de acordo com os três objetivos gerais.

Com base nos resultados obtidos é possível verificar algumas tendências que permitem responder às questões orientadoras e objetivos formulados.

Em relação ao Objetivo Geral *I* – caracterizar o conhecimento prévio, sobre simetrias, dos participantes da OFD, aos níveis científico, curricular e didático-pedagógico –, é possível responder as perguntas orientadoras *1* e *2*.

Detectamos que o manual escolar e a formação inicial própria são as principais fontes de conhecimento científico dos docentes participantes da OFD. No primeiro contato com os docentes participantes revelou que o conhecimento científico destes era frágil, proporcionando insegurança aos mesmos em lecionar tal temática. Constatamos que 75% das respostas das unidades de aferição de conhecimentos científicos não foi respondida ou foi respondida de forma errada, o que revela as referidas lacunas ao nível deste conhecimento. De forma similar, o resultado global das unidades de aferição de conhecimentos didático-pedagógicos teve um índice de 98% de respostas, ou ausências destas na classe não respondida / errada, frequência também reveladora de lacunas ao nível destes conhecimentos, novamente se baseando em manuais escolares e causando insegurança em lecionar estes temas. A maioria dos docentes demonstrou não ter acompanhado as alterações ocorridas nos documentos orientadores das práticas educativas e os que demonstram assim tê-las, consideram tais alterações menos adequadas à realidade enfrentada. Também referiram a falta de formação docente necessária ao conhecimento das referidas alterações, o que os deixa mais vulneráveis ao ensino em geral. Apesar de todos os docentes já terem, de alguma forma, ensinado simetrias, na maioria dos casos revelaram, que suas debilidades diante do conhecimento da temática em geral conduziram-os a lecionações superficiais dos conceitos a ela inerentes. Revelaram também que este ensino ateve-se à conceitualização antiga de simetria, em constante conflito com o conceito de isometria, comumente limitado a reflexão. A distinção entre os conceitos de isometria e de simetria destaca-se pela dificuldade enfrentada pelos docentes, assim como, em menor escala, a conceitualização de reflexão deslizante. Nenhum docente revelou já ter recorrido a algum AGD, embora a maioria considere que seu uso seja relevante. A utilização de recursos provenientes da arte, da cultura ou do património é praticamente nula, fazendo com que as práticas educativas sejam assentes em caracterizar de forma mais específica. Contudo, reconhecem a importância do ensino de simetrias a partir do 1º CEB e consideram que a utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais configura-se numa mais-valia ao ensino neste nível, uma vez que os discentes deste têm dificuldades em acompanhar o ensino de simetrias motivadas, segundo os participantes, pela exigência de abstração, maturidade, complexidades inerentes ao próprio conteúdo. Segundo os docentes, a utilização dos recursos é mais satisfatória aos próprios, no ato do ensino, e mais promissora à aprendizagem, devido à contextualização com a qual é apresentada aos discentes. Os resultados relativos às referências dos docentes à sua experiência de ensino de simetrias vão no mesmo sentido dos obtidos com base na análise das planificações sobre o tema, elaborados até ao momento da OFD. Estas revelaram ser embasadas pelo PMEB e pelas Metas. Os objetivos gerais e específicos lá presentes eram pouco reveladores em relação ao ensino das simetrias, o que endossa a falta de relação com o conteúdo. Além da ausência de referência a recursos artísticos, culturais e patrimoniais, os conceitos previstos pareciam estar em desajuste com a prática efetiva, o que reforça a abordagem, quando assim ocorrera, ser superficial e frágil. A dinâmica colaborativa da OFD foi muito apreciada pelos docentes, qualidade que alegam estar em falta nas formações em que já participaram.

Considerando o Objetivo Geral *II* desta investigação – planificar, implementar e analisar uma proposta de ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais –, é possível responder as perguntas orientadoras *3* e *4*.

Os dados relativos da análise das atividades e das planificações desenvolvidas pelos docentes e da sua implementação junto aos discentes permitem elaborar as seguintes conclusões

Reconhecemos a dedicação efetiva de todos os docentes durante as etapas da OFD e destacamos a ocorrida durante a criação do Banco de Atividades. Além dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais oferecidos pelo investigador, outros foram descobertos pelos participantes, o que os fez reconhecerem-se como atores fundamentais da dinâmica proposta. Poucas foram as dificuldades enfrentadas durante a criação do Banco, que consideramos exíguas diante do interesse, do entusiasmo e da satisfação alcançada pelos docentes nesta etapa. A elaboração das Planificações Personalizadas ao ensino de simetrias através da proposta desenvolvida foi uma etapa considerada bastante simples, o que vemos como um reflexo da colaboratividade envolvida também nesta fase. Tais planificações, comparadas com as planificações anteriores à OFD, eram muito mais explícitas em relação ao ensino das simetrias, contendo a utilização de recursos artísticos, culturais ou patrimoniais em todas elas, como o previsto. Termos como *saberes (…) artísticos*, *espírito de observação e percepção de regularidades* e *criatividade*, nunca utilizado aquando de planificações para esta temática, agora estão presentes em praticamente todos. O mesmo é notado na opção das estratégias de abordagem e nos recursos materiais, como miras e apresentações em *PowerPoint*. Considerando a possibilidade de futuras implementações das atividades desenvolvidas, e também implementações em outros anos de escolaridade, os nove docentes participantes de toda a OFD revelaram a necessidade de certas adequações das mesmas, seja na ordem da escolha de imagens ou na sequência apresentada. Todos os docentes afirmaram reconhecer as melhorias alcançadas com a prática desenvolvida, além de terem assim valido de maior satisfação durante todo o processo. Segundo os docentes, a boa receptividade dos discentes diante das imlementações das atividades, a curiosidade, interesse e motivação manifestados, esteve em consonância com a expectativa prevista inicialmente. Vemos esta relação como um reflexo das adequações metodológicas inerentes às implementações realizadas, consideravelmente distintas das práticas já ocorridas, e que perfizeram com notória segurança. Através de atividades atrativas aos discentes, os docentes as consideraram como potencialidades favoráveis à satisfação mútua, ao ensino e à aprendizagem.

Considerando o Objetivo Geral *III* – em relação ao ensino de simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB) utilizando recursos artísticos, culturais e patrimoniais, avaliar a satisfação e a aprendizagem docente e discente –, é possível responder as perguntas orientadoras *5*, *6* e *7* e estabelecer as seguintes conclusões.

Todos os docentes que participaram de toda a OFD revelaram a própria percepção de aprendizagem referentemente ao conhecimento científico abarcado, assim como o ajustamento de conceito utilizados, outrora, de forma incorreta. Para estes docentes, esta foi uma das características mais relevantes da OFD, o que associam diretamente à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Alegaram, ainda, no decurso da implementação das atividades planificadas, terem lecionado com maior confiança, diferentemente do que acontecia antes da participação na OFD. No Q2, considerando as respostas, ou ausência destas, referentes as unidades de aferição sobre os conhecimentos científicos, a classe de respostas corretas teve 61% de frequência e a classe de respostas parcialmente corretas teve 13% de frequência, o que, comparativamente com o resultado obtido com o Q1, pode ser considerado um grande avanço. Analogamente, as respostas das unidades de aferição correspondentes aos conhecimentos didático-pedagógicos, revelam que os resultados do Q2 foram ainda mais expressivos, sendo a classe de respostas corretas composta por 67% das respostas e a classe parcialmente correta por 11%, aclarando, novamente, um grande avanço em relação ao nível prévio destes conhecimentos. Estes avanços foram determinantes para o bom encaminhamento das implementações das atividades aos discentes, valendo-se dos rigores científico e didático-pedagógico necessários ao ensino dos conceitos abordados. Assim, os docentes também consideraram perceptível a aprendizagem discente, o que, segundo eles, está diretamente associada à utilização dos recursos selecionados. Também veem esta utilização como a causa de satisfação e entusiasmo discente, o que é corroborado com a percepção do investigador. Quanto a comparação dos resultados provenientes do Teste Discente, que aferiu a aquisição do conhecimento científico destes, considerando todas as unidades de aferição de todos os respondentes do Teste Discente e juntando as frequências das classes de resposta correta e parcialmente correta, temos um total de 87% das respostas do Grupo de Ação, grupo este composto pelos discentes dos docentes participantes da OFD, contra apenas 13% das respostas do Grupo de Controle. Aliás, cabe destacar que a classe de respostas, ou ausência de respostas, do Grupo de Controle que remete a não perceber a existência de simetria numa imagem, não apresentar resposta alguma ou respondê-la sem sentido algum, teve 78% de frequência, enquanto que esta mesma classe em relação ao Grupo de Ação teve apenas 11% de frequência. Posto isto, consideramos que também foram alcançadas melhorias na aprendizagem dos discentes aos quais foram implementadas as atividades de acordo com a metodologia desenvolvida na OFD, enquanto que discentes que vivenciaram um ensino sem os referidos recursos não obtiveram resultado satisfatório.

Diante às conclusões relativas a cada um dos objetivos específicos, apresentadas no capítulo V, conjuntamente com as conclusões relativas aos objetivos gerais que aqui apresentamos e em resposta à pergunta central da investigação, concluímos que o ensino de simetrias no 1º CEB pode ser mais apropriado e eficaz se este for proposto através da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais. Os resultados obtidos levam-nos a perceber os benefícios tendo em conta a satisfação e percepção de aprendizagem dos docentes e, mais especificamente, os resultados comparativos em respeito aos conhecimentos dos docentes e dos discentes são conclusivos às melhorias alcançadas neste nível.

Durante esta pesquisa se iniciou a implementação do Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular (PAFC) em Portugal. A quantidade de publicações sobre este projeto ainda é muito reduzida, não nos favorecendo confrontar diversos posicionamentos críticos em respeito à sua proposta.

Devido a alguns aspectos fora de nosso controle, a quantidade de docentes participantes, previstas inicialmente, não foi efetivamente cumprida. Diante deste cenário, aumentamos a quantidade de instrumentos a fim de recolher mais dados e analisá-los em profundidade.

Diante dos resultados positivos obtidos a partir desta investigação, consideramos que outras investigações podem ser desenvolvidas incidindo sobre outro público-alvo. Com as mesmas propostas desenvolvidas com esta pesquisa, pode-se implementá-las a docentes do 2º CEB e 3º CEB e seus respectivos discentes, salvaguardada as devidas proporções.

Também é pertinente testar esta proposta, utilizando recursos artísticos culturais e patrimoniais, mas com uso de TICs, nomeadamente, o GeoGebra, o GeCla ou GeCle mini, o C.a.R ou equivalentes. Estes programas podem auxiliar na realização das atividades de uma maneira bem dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Abrantes, P., & Ponte, J. P. (1982). Professores de matemática: Que formação. *Actas do Colóquio sobre o Ensino da Matemática*, *80*, pp. 269-292.

Akay, G. (2011). *The effect of peer instruction method on the 8th grade students' mathematics achievement in transformation geometry and attitudes towards mathematics*. Dissertação de mestrado, Middle East Technical University, Turquia.

Almeida, J. C. F. (2001). Em defesa da investigação-acção. *Sociologia, Problemas e Práticas [online]*, (37), pp. 175-176.

Almeida, M. T. (2011). *Desafios ao desenvolvimento profissional: do trabalho colaborativo ao nível da escola a um grupo sobre a escrita*. Tese de doutoramento, Educação (Formação de Professores), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Portugal.

Almeida, S., Roldão, M. C., Gonçalves, E., Batista, S., & Carvalho, M. J. (2017). Rede colaborativa de escolas no processo de gestão curricular contextualizada. Nota de abertura, 110. *Livro de Atas do 1º Congresso Internacional de Redes Sociais*. CICS.NOVA – Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais.

Alsina, A., & Canals, A. (2000). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*. Narcea, SA Ediciones, 2006. Madrid.

Altrichter, H., Posch, P., & Somekh, B. (1993). *Teachers investigate their work*. Londres: Routledge.

Alves, E., & Santana, E. P. (2009). A Dificuldade de Ensinar Geometria. Artigos. Obtido em 22 de Julho de 2016, de http://www.administradores.com.br/artigos/cotidiano/a-dificuldade-de-ensinar-geometria/55118/.

Amado, J. (2014). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (2ª ed). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amaral, A., Ralha, E., & Gomes, A. (2011). A história dos programas de matemática para a formação dos professores do 1º Ciclo do Ensino Básico em Portugal: o conceito fundamental de medida. In *Actas do I Congresso Iberoamericano de História de la Educacion Matemática*, pp. 95-109. APM.

Amaral, M. E. G. D. O. (2015). *Isometrias: uma abordagem interdisciplinar no 8º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado - Universidade de Aveiro.

Anderson, G. L., Herr, K., & Nihelen, A. S. (1994). *Studying your own school: an educator's guide to qualitative practitioner research*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Andrade, A. F., Kusmenkovsky, A. B., Cardoso, J. S., & Jacon, M. L. (2007). A modalidade d no conceito de simetria. In: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, VII. *Anais do Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, 13*, 2007. Paraná: Graphica 2007. Obtido em 8 de fevereiro de 2018, de http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/AMODALIDADE.pdf.

Antoniazzi, H. M. (2005). *Matemática e Arte: Uma associação possível*. Tese de Doutoramento, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Brasil.

Anunciato de Oliveira, R. M. M., & Brancaglion Passos, C. L. (2008). Promovendo o desenvolvimento profissional na formação de professores: a produção de histórias infantis com conteúdo matemático. *Ciência & Educação,14*(2). Bauru, SP.

Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., & Zúñiga, J. (2006). *Investigación Educativa I*. Chile: Universidad de Artes y Ciencias Sociales.

Arnheim, R. (1980). *Arte e Percepção Visual - Uma psicologia da Visão Criadora*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

Associação de Professores de Matemática (2009). *Renovação do Currículo de Matemática: Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988*. Lisboa: APM.

Bansilal, S., & Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South Africa Journal of Education, 32*, pp. 26-39.

Bansilal, S., & Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South Africa Journal of Education, 32*, pp. 26-39.

Barbosa, A. M. (2007). *Inquietações e Mudanças no Ensino da Arte*. São Paulo: Cortez.

Barbosa, J. C. (2004). A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. *Encontro Nacional de Educação Matemática, 8*, pp. 1-8.

Barros, P. B. Z. (2017). *A arte na matemática: contribuições para o ensino de geometria*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Docência para a Educação Básica – Universidade Estadual Paulista, Bauru, Brasil.

Bastos, R. (2006). Notas para o ensino da Geometria – sobre simetria. *Educação e Matemática, 88*, pp. 9-11.

Bastos, R. (2007). *Notas sobre o ensino da geometria – Transformações geométricas*. *Educação e Matemática, 94*, pp. 23-27.

Bernal, C. A. T. (2010). *Metodología de la investigación* (3ª ed). Bogotá: Pearson Educación, S. A.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.A. (2011). *Caderno de apoio 1º ciclo*. Lisboa: DGE.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., Damião, H., & Festas, I. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência.

Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática*, pp. 287-295. Portalegre: SPIEM.

Boavida, J. (2000). Ensino e a aprendizagem da Geometria discutidos num encontro no Fundão. *Educação e Matemática, 58*, pp. 44-46.

Boavida, J., & Amado, J. (2008). *Ciências da Educação: Epistemologia, Identidade e Perspectivas* (2ª ed). Coimbra: Universidade de Coimbra.

Bonilla-Castro, E., & Sehk, P. R. (2005). *Más allá del dilema de los métodos: La investigación en ciencias sociales*. Bogotá: Norma.

Bonito, J. (2014). Reorganização das metas curriculares no ensino básico Português: o caso das Geociências. *Terræ Didática, 10*(3), pp. 227-239.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), Números e Álgebra, pp. 193-211. Lisboa: SEM-SPCE.

Bouckaert, C. (1995). *Transformation geometry in primary school according to Michel Demal*. Obtido em 8 de março de 2018, de http://www.uvgt.net/GTcrem.pdf.

Boyer, C. B. (1998). *História da Matemática* (2ª ed). São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.

Boyer, C., Merzbach, U. C. (2012). *História da Matemática*. Tradução de Helena Castro (3ª ed). São Paulo: Blücher.

Brainerd, G. W. (1942). Symmetry in primitive conventional design, *American Antiquity 8*(2), pp. 164-166.

Brasil (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Artes*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental.. Brasília: MEC/SEF.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, L., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Bulf, C. (2009). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French secondary school. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello, *Proceedings of CERME, 6*, pp. 726-735. Lyon: Service des publications, INRP.

Cabrita, I., Pinheiro, L., Pinheiro, J. & Sousa, O. (2008). *Novas trajectórias em Matemática: programa de formação contínua com professores do 2.º ciclo do ensino básico da Universidade de Aveiro*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Canário, R. (1994). Centros de Formação das Associações de Escolas: Que Futuro? In: A. Amiguinho & R. Canário (Org.). *Escolas e Mudança: O Papel dos Centros de Formação*, pp. 13-58. Lisboa: Educa.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da matemática: duas professoras, dois currículos*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.

Canavarro, A. P., Tudella, C., & Pires, M. (2009). Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. Os nossos alunos merecem!. *Educação e Matemática, 105*(1), p. 1.

Cano Flores, M. (1997). Investigación participativa: inicios y desarrollos. Obtido em 27 de fevereiro de 2018, de https://www.uv.mx/iiesca/files/2013/01/investigacion1997.pdf.

Carr, W. Kemmis, S. (1986). *Becoming critical: education, knowledge and action research*. London: The Falmer Press.

Carson, T. R., & Sumara, D. J. (Orgs). (1997). *Action research as a living practice.* New York: Peter Lang Pub Incorporated.

Carvalho, A., Santos, C. P., Silva, J. N., & Teixeira, R. E. C. (2016). Pisando arte e matemática em Lisboa. Convocarte. *Revista de Ciências da Arte, 2*, pp. 136-159.

Castañon, G. A. (2015). O que é Construtivismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência, série 4, 1*(2), pp. 209-242. UNICAMP.

Cavalcanti, J. D. B. (2010). As tendências contemporâneas no ensino de Matemática e na pesquisa em Educação Matemática: questões para o debate i. Texto, na modalidade de resumo expandido, elaborado para participação na Mesa Redonda A Matemática e as Tendências Contemporâneas no Ensino e na Pesquisa, ao lado dos professores João Frederico da Costa Azevedo Meyer (UNICAMP), José Nilson Ferreira Roseira (UFRB).

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings*, pp. 203-233. Rotterdam: Sense Publishers.

Chaiklin, S. (1999). Developmental teaching in Upper-Secundary School. In: Hedegaard, M., Lompscher, J. (ed.). *Learning Activity and Development*. Aarthus (Dinamarca): Aarthus University Press.

Cifuentes, J., Negrelli, L., & Estephan, V. (2000). Apreciar la Matemática vs. Comprender la Matemática: Un Debate Didáctico. *Reunión de didáctica matemática del cono sur, 5*, 1-18.

Cobb, P., & Hodge, L. L. (2011). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research*, pp. 179-195. New York, NY: Springer.

Cohen, L., & Lawrence, M. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla, S.A.

Conde, F. (1995). Las perspectivas metodológicas cualitativa y cuantitativa en el contexto de la historia de las ciencias. In Delgado, J. M. y Gutiérrez, J. (Eds.) (1995): *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. Editorial Síntesis S.A., Madrid.

Conway, J., Burgiel, H., Goodman-Strauss, C. (2008). *The Symmetries of Things*, A K Peters.

Correia, A. M. A., & Ferreira, B. L. (2007). *Poliedros platônicos: dualidade simétrica*. Florianópolis: Graf Tec.

Costa, E. P., Torrego, J. C., Martins, A. M. de O., & Carrington, M. (2016). Desafios colocados pela avaliação de um projeto de mediação escolar. *Revista Eixo, 5*(3). Braília/DF.

Costa, M. S. (2008). *Discutindo o ensino de geometria com professores polivalentes*. Dissertação de Mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil.

Coutinho, C. P. (2005). *Percursos da Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal: uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas (1985-2000)*. Monografias em Educação. Braga: CIED / Universidade do Minho, Série 'Monografias em Educação'.

Coutinho, C. P; Sousa, A.; Dias, A; Bessa, F.; Ferreira, M. J. & Vieira, S. (2009). Investigação-Acção: Metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura, 13*(2), pp. 355-379.

Couto, R. A. I. D. (2017). *A janela na arquitectura*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Arquitectura. Universidade Lusíada de Lisboa.

Crowe, D. W. (s.d.). *Symmetries of culture*. Obtido em 10 de janeiro de 2018, de http://vismath6.tripod.com/crowe1/.

Crowe, D., & Thompson, T. M. (1987). Transformation Geometry and Archaeology. In NCTM, *Learning and Teaching Geometry, K-12*, pp. 106-109. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Curi, E. (2004). *Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos.* Tese de doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), Brasil.

D'Ambrósio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática. Elo entre as Tradições e a Modernidade*. Belo Horizonte: Ed. Autêntica.

D’Espíndula, T. S., & Sottile França, B. H. (2016). Aspectos éticos e bioéticos na entrevista em pesquisa: impacto na subjetividade. *Revista Bioética, 24*(3), pp. 495-502.

Daga, M. D. S. (2017). Uma análise da geometria fractal. Licenciatura em Ciências Naturais. Universidade de Brasília.

Damas, M. J., & Ketele, J. M. (1985). *Observar para avaliar*. Coimbra: Almedina.

Damazio, A. (2008). A inter-relação pesquisa e tendência em educação matemática: manifestações de inserção social. *Pesquisa, educação e inserção social: olhares da região sul*, pp. 99-119. Canoas, RS: ULBRA.

Damazio, A., & da Rosa, J. E. (2013). Educação matemática: possibilidades de uma tendência histórico-cultural. *Revista Espaço Pedagógico, 20*(1), pp. 33-53. Passo Fundo.

D'Ambrosio, B. S., & Steffe, L. R. (1994). O ensino construtivista. *Em Aberto, 14*(62), pp. 23-32.

Dana, M. E. (1994). Geometria – um enriquecimento para a escola elementar. In: M. M. Lindquist, A. P. Shulte. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento Profissional de Professores. Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora

Day, C. (2003). O desenvolvimento profissional dos professores em tempos de mudanças e os desafios para as universidades. *Revista de Estudos Curriculares,1*(2), pp. 151-188.

Day, C. (2004). *A paixão pelo ensino*. Porto: Porto Editora.

Day, C. (2004). *A paixão pelo ensino*. Porto: Porto Editora.

Dean J 1991. *Professional development in school: developing teachers and teaching*. Milton Keynes Open University.

Dean, J. (1991). *Professional Development in School*. Milton Keynes: Open University Press.

Deasy, R. J. (2002). *Critical Links: Learning in the Arts and Student Academic and Social Development*. Arts Education Partnership; Department of Education; National Endowment for the Arts (NFAH), Washington, DC., ISBN-1-884037-78-X. Obtido em 22 de Julho de 2016, de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466413.pdf.

Delgado, C. (2014). Viajando a Ítaca por los mares cuantitativos, *Manual de ruta para investigar en grado y en postgrado*. Salamanca: Amaru.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2011). *The Sage handbook of qualitative research*. Sage.

Departamento da Educação Básica (DEB) (1990). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico – 1º Ciclo*. Editorial do Ministério da Educação.

Departamento da Educação Básica (DEB) (1997). *Relatório do Projecto "Reflexão Participada sobre os Currículos do Ensino Básico"*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica. (AC-O,1)

Deshler, D., & Ewert, M. (1995). *Participatory action research: tradition and major assumptions*. Obtido em 1 de março de 2018, de http://www.PARnet.org/parchive/doc/deshler_95/.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Buffalo: Prometheous Books.

Dias, A. L. M. (2008). O movimento da matemática moderna: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria. *Jornadas Latino-Americanas de Estudos Sociais das Ciências e das Tecnologias, 1*, pp. 1-22.

Dias, H. N., & André, M. (2016). A incorporação dos saberes docentes na formação de professores. *Revista Internacional de Formação de Professores (RIFP), 1*(3), pp. 194-206. Itapetininga

Dick, B. (1999). *What is action research?*. Obtido em 5 de março de 2017, de http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/whatisar.html.

Dick, B. (2006). Action research literature 2004-2006: Themes and trends. *Action research, 4*(4), pp. 439-458.

Diniz-Pereira, J. E. (2011). A pesquisa dos educadores como estratégia para a construção de modelos críticos de formação docente. In J. E. Diniz-Pereira & K. M. Zeichner (Orgs), *A pesquisa na formação e no trabalho docente* (2ª ed), Cap. 1, pp. 6-30. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Duarte, J. M. (1988). A discutida Geometria. *Educação e Matemática, 6*, pp. 1-2.

Elam, K. (2010). *Geometria do design: estudos sobre a proporção e composição*. (Claudio Marcondes, Trad.). São Paulo: Cosac Naify.

Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Ernest, P. (1994). *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*. Washington, D. C.

Esteves, A. J. (1986). A investigação-ação. In A. S. Silva & J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das ciências sociais*, pp. 251-278. Porto: Edições Afrontamento.

Estrela, M. T. (2003). A Formação Contínua entre a Teoria e a Prática. In: Naura Ferreira (Org.). *Formação Continuada e Gestão da Educação*, pp. 43-63. São Paulo: Cortez.

European Commission, (2010). Teachers Professional Development – Europe in international comparison. *An analysis of teachers professional development based on the OECD's Teaching and Learning International Survey (TALIS)*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Union.

Fainguelernt, E. K. & Nunes, K. R. A. (2006). *Fazendo Arte com a Matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Fainguelernt, E. K. (1999). Educ*ação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Medicas Sul.

Fazenda, I. C. A. (1992). *Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia* (2ª ed). São Paulo: Edições Loyola.

Fedorov, E. (1891). *The Simmetry of Regular Systems of Figures (russo)*, A. Yakob, St. Petersburg Mineral Soc., Series 2.

Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, pp. 183-196.

Fejes Tóth, L. (1964). *Regular Figures*. Oxford: Pergamon Press.

Fernandes, A. C. (2015). Interdisciplinaridade, construtivismo e aprendizagem significativa: elementos facilitadores do ensino da nanotecnologia. *Revista Eixo, 4*(2). pp. 69-76.

Ferreira, M. C. C. (2014). Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor. Tese de Doutoramento, Educação – Universidade Federal de Minas Gerais.

Festas, M. I. F. (2015). Contextualized learning: foundations pedagogical and practices. *Educação e Pesquisa, 41*(3), pp. 713-727. https://dx.doi.org/10.1590/S1517-9702201507128518.

Figueira, C., Loureiro, C., Lobo, E., Rodrigues, M. P., & Almeida, P. (2007). *Visualização e Geometria nos primeiros anos. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos*. Obtido em 18 de janeiro de 2018, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/061_visualgeo.pdf

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké, 3*(4), pp. 1-38.

Fiorentini, D., & Lorenzato. S. (2007). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos* (2ª ed). São Paulo: Editores Associados.

Flores, M. A. (2004). *The Early Years of Teaching: issues of learning, development and change*. Porto: RÉS-Editora.

Flores, M. A., & Veiga Simão, A. M. (2009). *Aprendizagem e Desenvolvimento Profissional de Professores: Contextos e Perspetivas*. Mangualde: Edições Pedago.

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia de pesquisa científica*. Fortaleza: UEC.

Formosinho, J., & Machado, J. (2007). Nova profissionalidade e diferenciação docente. In: M. A. Flores & I. C. Viana (org). *Profissionalismo docente em transição: as identidades dos professores em tempos de mudança*. Pp. 71-91. Braga: CIEd, Universidade do Minho.

Forte, A., & Flores, M. A. (2011). Aprendizagem e(m) colaboração: reflexões sobre um projeto de intervenção/formação numa EB 2/3. *Revista Portuguesa de Pedagogia, 45*(2), pp. 93-131.

Freire, P. (1983). *Comunicação ou Extensão?* (7ª Ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and the teaching of geometry. In. *Topic Study Group 29 at the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen, Denmark.

Gallo, S. (2000). Transversalidade e educação: pensando uma educação não-disciplinar. *O sentido da escola, 2*, pp. 17-41.

Gandulfo, A. M. R., de Freitas Galletti, A. J., Ribeiro, C. G. C., dos Santos Morales, E., da Silva, F. P. F., & Parreira, G. A. (2013). Explorando a geometria euclidiana com materiais manipuláveis: polígonos e mosaicos. *XI ENEM–Encontro Nacional de Educação Matemática*.

García Alonso, M. L., Peralta, H., & Alaiz, V. (2001). *Parecer sobre o Projecto de Gestão Flexível do Currículo*. Departamento de Ensino Básico, Ministério da Educação (DEB).

García, J. L. (2003). *Métodos de Investigación en Educación*. (vol.II). Investigación.

Gaspar, J., & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais: uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 169-190. Braga: APM.

Gatti, B. A. (2010). Licenciaturas: crise sem mudança? In: A. Dalben, J. Diniz, L. Leal, L. Santos (Org.). *Convergências e tensões no campo da* *formação e do trabalho docente: didática, formação docente, trabalho docente*. pp. 485-508. Belo Horizonte: Autêntica.

Gatti, B. A. (2016). Formação de professores: condições e problemas atuais. *Revista Internacional de Formação de Professores, 1*(2), pp. 161-171.

Gerdes, P. (1992). *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: Editora da UFPR.

Gerdes, P. (2014). Reflexões sobre o ensino da matemática e diversidade cultural. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), pp. 108-118.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa-coordenado pela Universidade Aberta do Brasil–UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica–Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2(0), 120p.

Giannouli, V. (2013). Visual Symmetry Perception. *Encephalos, 50*, 31-42.

Gil, J. (1965). Fé numa outra Matemática para os liceus. *Labor, 29*, pp. 206-207

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas, EAESP / FGV*, *35*(3), pp. 20-29.

Gollete, G. & Lessard-Hebert, M. (1988). *La investigaciónacción: sus funciones, sus fundamentos, su instrumentación*. Barcelona. Laertes.

Gómez, M. C. S. (2015). La dicotomía cualitativo-cuantitativo: posibilidades de integración y diseños mixtos. *Campo Abierto* (Extra 0), pp. 11-30.

Gonçalves, F. M. B. (2007). *O movimento da matemática moderna: concepções, dinâmica e repercussões*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências – Universidade do Porto, Portugal.

Gordon, G. (1996). Using wallpaper groups to motivate group theory. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 6*(4), pp. 355-365. doi: 10.1080/10511979608965838.

Gorini, C. A. (1993). An art research project for a geometry course. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 3*(4), pp. 442-456. doi: 10.1080/10511979308965725.

Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática (GTG) (2006). Uma reflexão sobre o Grupo de Trabalho de Geometria. *Educação e Matemática, 88*, p. 25.

Guerra, C. (1995). Investigación-acción participativa en la periferia urbana de Salamanca. *Cuadernos de la Red, 3,* (Red CIMS), Madrid.

Guimarães, H. M. (2007). *Depois da Matemática Moderna: passos do discurso curricular sobre a resolução de problemas em Portugal*. Obtido em 10 de dezembro de 2017, de http://www.apm.pt/files/177852_C63_4dd79e809a3f1.pdf.

Gura, K. (1996). Growth and symmetry a mathematics course for liberal art students. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 6*(4), pp. 337-350. doi: 10.1080/10511979608965836.

Gutierre, L. D. S. (2008). *O ensino de Matemática no Rio Grande do Norte: trajetória de uma modernização (1950-1980)*. Tese de Doutoramento, Centro de Ciêncas Sociais Aplicadas - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA, 3*(3), pp. 193-220.

Hamido, G., Branco, N., & Machado, R. (2012). Desafios no ensino e na aprendizagem da matemática. *Interacções, 8*(20), pp. 1-8.

Handal, B., & Herrington, A. (2003). Mathematics Teachers’ Beliefs and Curriculum Reform. *Mathematics Education Research Journal, 15*(1), pp. 59-69.

Handal, B., & Herrington, A. (2003). Mathematics Teachers’ Beliefs and Curriculum Reform. *Mathematics Education Research Journal, 15*(1), pp. 59-69.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Alfragide: McGraw-Hill.

Hawking, S. (1999). *Previous Quotes of the Day*. Obrido em 4 de fevereiro de 2018, de http://www.skirtman.org.

Henderson, S., & Rodrigues, S. (2008). Scottish student primary teachers' levels of mathematics competence and confidence for teaching mathematics: some implications for national qualifications and initial teacher education. *Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy*, *34*(2), pp. 93-107. doi: 10.1080/02607470801979533.

Herandez Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Lucio, P. B. (2014). *METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN* (6ª ed.). México D.F.: McGRAW HILL.

Hernández Sampieri, R., & Mendoza, C. P. (2008) El matrimonio cuantitativo cualitativo: el paradigma mixto. In J. L. Álvarez Gayou (Presidente), 6*º* *Congreso de Investigación en Sexología*. Congreso efectuado por el Instituto Mexicano de Sexología, A. C. y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco, México.

Herrera, T. A., & Owens, D. T. (2001). The “New New Math”?: Two Reform Movements in Mathematics Education in Mathematics Education. *Theory into Practice, 40*(2), pp. 84-92. doi: 10.1207/s15430421tip4002_2.

Hess, R. (2006). Momento do diário e diário dos momentos. *Tempos, narrativas e ficções: a invenção de si. Porto Alegre: EDIPUCRS*, 89-103. In: E. C. Souza; M. H. M. B. Abrahão, (Orgs.). *Tempos, narrativas e ficções: a invenção de si*, pp. 89-103. Porto Alegre: EDIPUCRS.

Hill, S. (1975). Overview and analysis of school mathematics, grades K-12 (NACOME Report). In Washington, DC: *National Advisory Committee on Mathematical Education*, Conference Board of the Mathematical Sciences.

Hodgson, D. (2011). The first appearance of symmetry in the human lineage: Where perception meets art. *Symmetry, 3*, pp. 37-53.

Hollebrands, K. F. (2004). High School Students' Intuitive Understandings of Geometric Transformations. *Mathematics teacher, 97*(3), 207-214.

Hooks, B. (1994). *Teaching to transgress: education as the practice of freedom*. New York, NY: Routledge.

Jackson, K., Garrison, A. L., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2011). Investigating how setting up cognitively demanding tasks is related to opportunities to learn in middle-grades mathematics classrooms. In. National Council of Teachers of Mathematics Research Presession, Indianapolis, IN. Obtido em 7 de março de 2018, de http://www.cadrek12.org/resources/publications/investigating-how-settingcognitively-demanding-tasks-related-opportunities-l.

Jackson, S. B. (1975). Applications of Transformations To Topics in Elementary Geometry: Part I. *The Mathematics Teacher, 68*(7), pp. 554-562.

Jaki, S. L. (1991). *La ciencia, fe y cultura*. Madrid: Libros Mc.

Jones, O. (1868). *The grammar of ornament*. B. Quaritch.

Kaleff, A. M. M. R. (1994). Uma aplicação do conceito de simetria axial plana visando um ensino interdisciplinar. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 2*(2). pp. 85-91.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction*. (3º ed). Boston: Pearson Education, Inc.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes, S. A. de Ediciones.

Kemmis, S., & Wilkinson, M. (2011). A pesquisa-ação participativa e o estudo da prática. In J. E. Diniz-Pereira & K. M. Zeichner (Orgs), *A pesquisa na formação e no trabalho docente* (2ª ed), Cap. 2, pp. 31-48. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Kiraly, D. (2016). Além do socioconstrutivismo: complexidade e formação do tradutor. (S. H. Benchimol, Trad.). *ReVEL, 14*(27). Obtido em 28 de março de 2018, de www.revel.inf.br.

Klein, F. (1909). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus*. Teil II: Geometrie. Leipzig.

Kline, M. (1973). *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo: Ibrasa.

Kolodzieiski, J. D. F. (2016). Ensino da história e cultura Afro-Brasileira e Africana: práticas de professores de matemática. Tese de Doutoramento, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática - Universidade Federal do Paraná, Brasil.

Kvale, S. (1996). *InterViews. An introduction to qualitative research interviewing*, Londres: Sage.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: conocer y cambiar la práctica educative*. Barcelona: Graó.

Lee Olson, C., & Kroeger, K. R. (2001). Global competency and intercultural sensitivity. *Journal of studies in international education, 5*(2), pp. 116-137.

Leite, C., & Delgado, F. (2012). Práticas curriculares no ensino da matemática: perceções de alunos do 9ª ano de escolaridade e sua relação com a contextualização curricular. *Interacções, 8*(22), pp. 83-112.

León, O. G., & Montero, I. (2015). *Métodos de investigación en psicología y educación* (4ª ed). Madrid: McGRAW HILL.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues*, *2*(4), pp. 34-46.

Libâneo, J. C. (2008). Didática e epistemologia: Para além do embate entre a didática e as didáticas específicas. In: I. P. Veiga e C. M. D'Avila (Org.). *Profissão Docente: novos sentidos, novas perspectivas* (2ª ed). Campinas, SP: Papirus.

Libâneo, J. C. (2009). Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa: unindo ensino e modos de investigação. *Cadernos de Pedagogia Universitária, 11*. São Paulo: Edusp.

Libaneo, J. C. (2015). Formação de professores e didática para desenvolvimento humano. *Educação & Realidade, 40*(2), pp. 629-650. http://dx.doi.org/10.1590/2175-623646132

Lima, J. (2002). *As Culturas Colaborativas nas Escolas. Estruturas, processos e conteúdos*. Porto: Porto Editora

Lindquist, M. M., & Shulte, A. P. (1987). Learning and Teaching Geometry, K-12. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Liston, D. P., & Zeichner, K. M. (1991). *Teacher Education and the Social Conditions of Schooling*. New York: Routlege.

Liu, Y., & Toussaint, G. T. (2011). The marble frieze patterns of the cathedral of Siena: geometric structure, multi-stable perception and types of repetition. *Journal of Mathematics and the Arts, 5*(3), pp. 115-127. doi: 10.1080/17513472.2011.551933.

Llavador, F. B. (1991). *Política y Reformas curriculares*. Valência: Universitat de Valência.

Lo Bello, A. (2013). *Origins of Mathematical Words: A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Lobato, G. (1991). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário – que mudança? *Educação e Matemática, 19/20*, pp. 3-6.

Lucas, G. A., & Rosito, M. M. B. (2018). Experiência estética e Educação Matemática: reflexões sobre a formação docente. *Revista@mbienteeducação, 11*(1), pp. 163-179.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.

Mabuchi, T. S. (2000). *Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC, São Paulo.

Machado, J. & Formosinho, J. (2009). Professores, escola e formação. Políticas e práticas de formação contínua. In J. Formosinho (coord.). *Formação de Professores. Aprendizagem profissional e acção docente*, pp.287-302. Porto: Porto Editora.

Maciel, A. M., Rêgo, R. G., & Carlos, E. J. (2017). Possibilidades Pedagógicas do Uso da Imagem Fotográfica no Livro Didático de Matemática. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), pp. 344-364.

Maia, C. M. F. (2014). *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Departamento de Ciências da Educação e do Património. Universidade Portucalense, Portugal.

Maia, L., & Ramos, J. C. (2007). Realidades e desafios da educação matemática para os ticunas da comunidade do umariaçu – Tabatinga/Amazonas. In Crespo, Cecilia Rita (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 294-299. Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Malanchen, J. (2014). A Pedagogia Histórico-Crítica e o Currículo: para além do multiculturalismo das políticas curriculares nacionais. Tese de Doutorado defendida no Programa de Pós-graduação em Educação Escolar, da Faculdade de Ciências e Letras da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Araraquara.

Malaty, G. (1988). What is wrong with the 'back-to-basics' movement, and what was wrong with the 'new-math' movement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 19*(1), pp. 57-65. doi: 10.1080/0020739880190105.

Mandler, M. L., do Amaral, A., Gomes, M. A. O., & dos Santos, L. M. (2016). A Epistemologia da Educação Matemática e o conhecimento do professor de Matemática. *II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, 1*, pp. 97-111.

Mann P. H. (1975). *Métodos de investigação sociológica* (3ª ed). Rio de Janeiro: Zahar.

Martin, G. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, New York, Springer-Verlag.

Martins, J. P. (2017). A simetria dos azulejos históricos de Belém do Pará em uma proposta de ensino. *Rematec, 12*(24) pp. 89-102.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. Unión, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (5), pp. 91-110.

Matos, J. M. (Ed.) (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70. In J. Matos & W. Valente, *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos*, pp. 1-8. UIED - Coleção Educação e Desenvolvimento. Lisboa: Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Matos, L. F. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões – um estudo de caso com alunos do 9.º ano*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.

Matos, L., & Cabrita, I. (2012). Patterns and Techonology - A Creative Approach to Isometries. *Journal of Mathematics and System Science, 2*, pp. 320–326.

Matta, Alfredo Eurico Rodrigues. Desenvolvimento de metodologia de design socioconstrutivista para a produção do conhecimento. In: Gurgel, Paulo Roberto Holanda; Santos, Wilson Nascimento (Org.). *Saberes plurais: difusão do conhecimento e práxis pedagógica, 1*, pp .237-258.Salvador: EDUFBA, 2012.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ª). Madrid: Pearson Educación, S. A.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGE (2017a). Currículo do ensino básico e do ensino secundário – para a construção de aprendizagens essenciais baseadas no Perfil dos Alunos. Ministério da Educação. Direção-Geral da Educação (DGE). Obtido em 21 de março de 2018, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/ae_documento_enquadrador.pdf.

ME-DGE (2017b). Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Ministério da Educação. Direção-Geral da Educação (DGE). Obtido em 20 de março de 2018, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf.

ME-DGE (2017c). Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos. Ministério da Educação. Direção-Geral da Educação (DGE). Obtido em 20 de março de 2018, de http://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/ae_1oc_matematica.pdf.

Meneghetti, R. C. G., & Nunes, A. C. A. (2017). Aplicação de uma proposta pedagógica no ensino dos números racionais. *Educação Matemática em Revista, 20-21*, pp. 77-86.

Menezes, F. R. (2010). *Salazar - Uma biografia Política* (4ª ed). Lisboa: Dom Quixote.

Merlino, A., Menéndez, M. A., Baer, A., Beltramino, F., A Cisneros Puebla, C., Kornblit, A. L., … Vieytes, R. (2009). *Investigación cualitativa en ciencias sociales. Temas, problemas y aplicaciones* (1ª ed). Buenos Aires: Cengage Learning.

Miguel, A., Fiorentini, D., & Miorim, M. A. (1992). Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? *Pro-Posições, 3*(7), pp. 41-54.

Ministério da Educação (ME-DEB) (2004). *Organização Curricular e Programas – Programa de Estudo do Meio – 1º Ciclo*. Lisboa: ME – Departamento da Educação Básica.

Moliné, M. R. G. & Puig, N. S. (1996). La didáctica de las ciencias: una necesidad. *Educación química, 7*(3), pp. 156-167.

Mondin, E. M. C., & Dias, C. L. (2013). A profissão docente sob diferentes concepções psicológicas: O enfoque construtivista e o socioconstrutivista. *Psicologia Argumento, 31*(74), pp. 483-494.

Moniz, V. M. R. (2014). *Grupos de simetria: identificação de padrões no património açoriano*. Dissertação de Mestrado. Universidade dos Açores.

Montecinos, C., & Gallardo, J. (2011). Concepções de pesquisa-ação entre professores chilenos do ensino fundamental: colocando o 'nós' no centro. In J. E. Diniz-Pereira & K. M. Zeichner (Orgs), A pesquisa na formação e no trabalho docente (2ª ed), Cap. 6, pp. 119-151. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Moreira, L. S. (2016). A interdisciplinaridade no ensino da matemática pela perspectiva da pedagogia histórico-crítica: superando a pedagogia de projetos. Dissertação de Mestrado em Ciências. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Bauru-SP: UNESP.

Morin, E. (2003), *"A cabeça bem feita – Repensar a reforma, reformar o pensamento"* (8ª ed). Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Mueller, E. (1944). *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada*. Tese de Doutoramento. University of Zürich, Rüschlikon.

Nascimento, R. A.; Benutti, M. A.; Neves, A. F. (2007). Mandalas e rosáceas: em busca de novas abordagens para antigos conteúdos. In: *Graphica 2007 / International Congress on Engineering Graphics for Arts and Design, 7*, & *Anais do Simpósio Nacional de geometria descritiva e desenho técnico, 18*, Curitiba: Ed. UFPR.

National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) (1978). Position statements on basic skills. *Mathematics Teacher, 71*, pp. 147-152.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1985). *Agenda para a acção: recomendações para o ensino da Matemática nos anos 1980*. Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Trad), APM - Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the l980s*. Reston: NCTM

Noveli, M. (2010). Do Off-line para o Online: a Netnografia como um Método de Pesquisa ou o que pode acontecer quando tentamos levar a Etnografia para a Internet?. *Revista Organizações em Contexto-online, 6*(12), pp. 107-133.

Nóvoa, A. (1992a). Para uma Análise das Instituições Escolares. In A. Nóvoa (coord.). *As organizações escolares em análise*, pp. 13-43. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Nóvoa, A. (1992b). Formação de professores e profissão docente. In A. Nóvoa (Eds), *Os professores e a sua formação*, pp. 15-31. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Nóvoa, A. (2007). Percursos profissionais e aprendizagem ao longo da vida. In Direcção-Geral dos Recursos Humanos da Educação do Ministério da Educação, Portugal 2007: Presidência portuguesa do Conselho da União Europeia: *Conferência Desenvolvimento profissional de professores para a qualidade e para a equidade da aprendizagem ao longo da vida*, pp. 21-28. Lisboa: Ministério da Educação.

Nóvoa, A. (2008). O regresso dos Professores. In: Ministério da Educação (Org.). Desenvolvimento profissional de professores para a qualidade e para a equidade da Aprendizagem ao longo da Vida. *Conferência promovida no âmbito da Presidência Portuguesa do Conselho da União Europeia*. Lisboa: Ministério da Educação, pp. 21-39.

Nuñez, I. B., Paulino Filho, J. & Lima, A. A. (2004). O construtivismo no ensino de ciências da natureza e da matemática. In: I. B. Nuñez; B. L. Ramalho (Org.). *Fundamentos do ensino aprendizagem das ciências naturais e da matemática: O Novo Ensino Médio*. Porto Alegre: Sulina.

OCDE (2009). *Informe TALIS. La creación de entornos eficaces de enseñanza y aprendizaje. Síntesis de los primeros resultados*. Santillana Educación.

OECD (2005). *Teachers Matter: Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers*. Paris: OECD. Obtido em 22 de Julho de 2016, de http://www.oecd.org/dataoecd/39/47/34990905.pdf.

Ogliari, C. R. N. (2012). PDE/PR – Programa de desenvolvimento educacional do paraná: considerações sobre sua concepção e currículo. In. *XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino*, UNICAMP, Campinas.

Oliveira, A. F. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Oliveira, C. (2006). Mosaicos romanos: balanço de uma década de investigação em portugal (1995-2005). *Conimbriga, 45*, pp. 275-300.

Oliveira, M., & Freitas, H. M. R. (1998). Focus group – pesquisa qualitativa: resgatando a teoria, instrumentalizando o seu planeamento. *Revista de Administração, 33* (3), pp. 83-91.

Outhred, L., & Owens, K. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 83-115. Rotterdam: Sense Publishers.

Outhred, L., & Owens, K. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 83-115. Rotterdam: Sense Publishers.

Palhares, P. (Coord.) (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.

Paraná (2002). *Estudos complementares AVA 2000: Análise da resolução de questões em matemática*. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, Diretoria Geral, Núcleo de Informações Educacionais.

Pardal, L. A. (1993). *A Escola, o Currículo e o Professor*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Pardal, L., & Lopes, E. (2011). *Métodos e Técnicas de Investigação Social.* Porto: Areal Editores.

Pasquini, R. C. G., & Bortolossi, H. J. (2015). Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. *Série história da Matemática para o ensino, 9*.

Paulo, S. (1943). Gonseth, F. et G. Samuel - Élements de Géométrie - I Géométrie Plane (recensão). *Gazeta de Matematica, 17*, pp. 30-32.

Paulo, S. (1943). Gonseth, F. et G. Samuel — Élements de Géométrie – I Géométrie Plane (recensão). *Gazeta de Matematica, 17*, pp. 30-32.

Pereira, F., Mouraz, A., & Figueiredo, C. (2014). Student Participation in School Life: The “Student Voice” and Mitigated Democracy. *Croatian Journal of Education, 16*(4), pp. 935-975. doi:10.15516/cje.v16i4.742.

Perrenoud, P. (1993). *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas*. Lisboa: Dom Quixote.

Pessoa, M. (2005). Contributo para o estudo dos mosaicos romanos no território das civitates de Aeminium e de Conimbriga, Portugal. *Revista Portuguesa de Arqueologia, 8*(2), pp. 363-401.

Pessoa, P. (2010). Novo Programa de Matemática. Inovação de práticas e aprendizagens. *Educação e Matemática, 109*, pp. 25-31.

Piaget, J. (1973). *Psicologia e epistemologia: por uma teoria do conhecimento*. (A. Cretella Trad.). Rio de Janeiro: Forense [Original em francês: 1970].

Piaget, J. (1975). *A epistemologia genética*. (N. C. Caixeiro, Trad.). Rio de Janeiro: Vozes. [Original em francês: 1970].

Pinto, M. J. T. F. M. (2012). *Isometrias*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal.

Polya, G. (1924). XII. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials, 60*(1-6), pp. 278-282.

Pombo, O. (1993). A interdisciplinaridade como problema epistemológico e exigência curricular. *Inovação, 6*(2), pp. 173-180.

Pombo, O. (2004), *Interdisciplinaridade. Ambições e Limites*, Lisboa: Relógio d'Água.

Pombo, O. (2005). Interdisciplinaridade e integração dos saberes. *Liinc em Revista, 1*(1), pp. 3 -15.

Pombo, O., Guimarães, H. M., & Levy, T. (1993). *A interdisciplinaridade: reflexão e experiência*. Lisboa: Texto Editora, Coleção Educação Hoje.

Ponte, J. P. (1999). Encontro sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. *Educação e Matemática, 52*, pp. 7-8.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação, *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas*, pp. 21-56. Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. D. (2005). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. *Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes*, pp. 267-284.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico*, pp. 11-41. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). *O Novo Programa de Matemática no 1. º Ciclo. Concepções de Cinco Professoras*. Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação. Obtido em 22 de Julho de 2016, de http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1155/4/ProgramaMatematica.pdf.

Ponte, J., & Abrantes, P. (1983). Os problemas no ensino da Matemática. In SPM (Ed.), *Ensino da Matemática: anos 80*, pp. 201-213. Lisboa: SPM.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P., (2013). Sobre o Programa de Matemática para o Ensino Básico recentemente homologado. Obtido em 10 de dezembro de 2017, de http://www.apm.pt/files/205600__SobreProgrMatHomol(2013)-autores_525438d8479a4.pdf.

Price, J. N., & Ball, D. L. (1997). 'There's always another agenda': Marshalling resources for mathematics reform. *Journal of Curriculum Studies*, *29*(6), pp. 637-666. doi: 10.1080/002202797183810.

Raposo, E. (2009). Colunas do Templo de Eanna Uruk – *Antiga Mesopotâmia 3000 a.C.* Obtido em 22 de Juljo de 2016, de http://www.mosaicoraposo.com.br/pags_htm/pop_hist1.htm.

Retallick, J. (1999). Teachers' Workplace Learning: towards legitimation and accreditation. *Teachers and Teaching: theory and practice, 5*(1), pp. 33-50.

Rocha Silva, C., & Christo Gobbi, B., & Adalgisa Simão, A. (2005). O uso da análise de conteúdo como uma ferramenta para a pesquisa qualitativa: descrição e aplicação do método. *Organizações Rurais & Agroindustriais, 7*(1), pp. 70-81.

Rocha, E. Q., Barros, C., & Pereira, C. (2005). Perspectivas do método etnográfico em marketing: consumo, comunicação e netnografia. *Anais do 29º EnANPAD-Encontro da ANPAD*. Brasília. 1 CD-ROM.

Rodrigues, W. (2007). *Metodologia Científica.* Paracambi: Faetec/ist.

Rogers, C. (2002). Definig reflection: Another look at John Dewey and reflective thinking. *Teachers College Record, 104*(4), pp. 842-866. Nova York.

Roldão, M. (2000). O currículo escolar: da uniformidade à contextualização - campos e níveis de decisão curricular. *Revista de Educação, 9* (1), pp. 81-92. Lisboa: Departamento de Educação da FCUL.

Roldão, M. C. (1998). Gestão Curricular na área de História. In E. Medeiros (Coord.), *I Encontro de Didácticas no Açores*, pp. 133-145. Ponta Delgada: Universidade dos Açores.

Rose, R. (2002). The curriculum: A vehicle for inclusion or a lever for exclusion?. In C. Tilstone, L. Florian, & R. Rose (Eds.), *Promoting inclusive practice*, pp. 27-38. London/ New York: Routledge Falmer.

Rossi, G. R. & Bisognin, E. (2009). Explorando as Transformações Geométricas por meio da Arte. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Comunicação Científica*. GT 01- Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rowe, D. E. (2004). Making mathematics in an oral culture: Göttingen in the era of Klein and Hilbert. *Science in Context, 17*(1-2), pp. 85-129.

Sá, E. M. (2000). Problemas da formação de professores de Matemática. *O Ensino da Matemática na Universidade em Portugal e Assuntos Relacionados, 14*, pp. 22-29.

Sadovsky. P. (2010). *O ensino da matemática hoje: Enfoques, sentidos e desafios* (1ª ed.). São Paulo: Ática.

Salazar, M. C., Lewin, K., Tax, S., Stavenhagen, R., Borda, O. F., Zamosc, L., Rahman, A. (2006). *La Investigación-Acción Participativa. Inicios y Desarrolos*. Madrid: Editorial Popular.

Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw Hill.

Santos, E. C. (2008). As "Ticas" de "Matema" de Um Povo Africano: Um exercício para sala de aula Brasileira. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1*(2), pp. 27-50.

Santos, L., Canavarro, A., & Machado, S. (2007). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. *Actas do XV EIEM*. Monte-Gordo*, 7*.

Santos, P. J., & Barreiros, A. D. S. (2017). Sucesso académico em jovens que frequentam cursos de educação e formação. In. Livro do Programa e Resumos das Comunicações do XIV Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia, pp. 613-614. Braga.

Sauter, C. (s.d.). *Symmetry in Culture*. Obtido em 14 de outubro de 2017, de http://www.uh.edu/honors/Programs-Minors/honors-and-the-schools/houston-teachers-institute/curriculum-units/pdfs/1999/symmetry-patterns-and-designs/sauter-99-symmetry.pdf

Saviani, D. (2009). Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. *Revista brasileira de educação [online]*, *14*(40), pp. 143-155. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782009000100012.

Schattschneider, D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly, 85*(6), 439-450.

Schattschneider, D. (2009). Enumerating symmetry types of rectangle and frieze patterns: How Sherlock might have done it. In T. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world – Seventy-first yearbook*, pp. 17-32. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Schimitz Lopes, L., Pacheco Alves, G. L., & Andrejew Ferreira, A. L. (2015). A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação & Realidade, 40*(2), pp. 549-572. https://dx.doi.org/10.1590/2175-623646015.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books

Schor, I. (1991). *Empowering education: Critical teaching for social change*. Chicago: The University of Chicago Press.

Schubring, G. (1999). O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. *Zetetiké, 7*(11), pp. 29-50. Campinas, SP: FE/Unicamp.

Selener, D. (1992). *Participatory action research and social change: approaches and critique*. Nova York: Cornell University.

Selva, M. C. (2010). *El cine como recurso didáctico de educación para la muerte implicaciones formativas para el profesorado.* Universidad Autónoma de Madrid.

Serrazina, M. D. L. (2010). A formação continua de professores em Matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 2*(1), pp. 1-23

Shepard, A. O. (1948). *The Symmetry of Abstract Design with Special Reference to Ceramic Decoration*, Publicação 547, Contribuição 47, Carnegie Institution of Washington.

Sherard, W. H. (1981). Why Is Geometry a Basic Skill? *Mathematics Teacher, 74* (1). (Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca e Maria Laura Magalhães Gomes, Trad.). Por que a Geometria é uma competência básica? Obtido em 17 de janeiro de 2018, de https://pactuando.files.wordpress.com/2014/10/texto-por-que-geometria-c3a9-uma-competc3aancia-bc3a1sica.pdf.

Shirali, S. A. (2001). Symmetry in the World of Man and Nature. *Resonance, 6*(6), pp. 53-59.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9*(2), pp. 1-30.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), pp. 4-14.

Silva, A. R. G. D. (2010). *Programas de matemática do 1º ciclo: uma pesquisa histórica desde 25 Abril de 1974 até 1990*. Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal.

Silva, J. C. D., & Pietropaolo, R. C. (2014). Um Estudo sobre as Contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental. *Perspectivas da Educação Matemática, 7*(14), pp. 299-316.

Silva, J. S. (1955). Movimento Científico. Comissão Internacional do Ensino Matemático. Sub-comissão portuguesa. *Gazeta de Matemática, 60/61*, p. 33.

Silva, J. S. (1965-66). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. v. 2 e 3. Lisboa: MEN.

Silva, T. R. (1989). Contextualizando o currículo escolar. *Idéias, 6*, pp. 65-72.

Simons, H., & Usher, R. (2012). *Situated Ethics in Educational Research*. New York: Routledge.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2000). Cenários de investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática, 14*, pp. 66-91. Rio Claro.

Snoek, M. (2008). O envolvimento das escolas e dos professores na aprendizagem dos professores: ao encontro de parcerias e de comunidades aprendentes. In: Ministério da Educação (Org.). *Desenvolvimento profissional de professores para a qualidade e para a equidade da Aprendizagem ao longo da Vida*. Conferência promovida no âmbito da Presidência Portuguesa do Conselho da União Europeia, pp. 68-81. Lisboa: Ministério da Educação.

Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) (1982). Os programas em debate. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 5*, pp. 18-22.

Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) (1983). *Ensino da Matemática: anos 80*. Lisboa: SPM.

Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) (2018). *Parecer da Sociedade Portuguesa de Matemática relativo ao projeto de decreto-lei Currículo dos Ensinos Básico e Secundário*. Obtido em 30 de abril de 2018, de https://www.spm.pt/files/parecer%2030%20abril%20final.pdf.

Son, J. W. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, pp. 145-152. Praga: PME.

Sousa, A. B. (2005). *Investigação em Educação*. Lisboa: Livros Horizonte.

Souza, M. B., Quartieri, M. T., & Marchi, M. I. (2017). Matematicando: a geometria nas mandalas. *Revista Signos, 38*(1). doi:http://dx.doi.org/10.22410/issn.1983-0378.v38i1a2017.1387.

St. Aubyn, A. (1980). Matemática moderna em crise? *Inflexão, 2*, pp. 6-12.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*, pp. 22-28. [Tradução do artigo originalmente publicado em *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(*4), 268-275, em 1998].

Stenhouse, L. (1983). *Authority, Education and Emancipation*. London: Heinemann Educational Books

Stenhouse, L. (1985). El profesor como tema de investigación y desarrollo. *Revista de Educación*, *277*, pp. 43-53.

Storr, A. (1992). *Music and the Mind*. London:QPD.

Stufflebeam, D. L., & Shinkfield, A. J. (1987). *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica*. Barcelona: Paidós.

Stylianou, D. A., & Grzegorczyk, I. (2005). Symmetry in Mathematics and Art: An Exploration of an Art Venue for Mathematics Learning. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 15*(1), pp. 30-44. doi: 10.1080/10511970508984104

Sullivan, L. E. (Ed.). (2009). *The SAGE glossary of the social and behavioral sciences*. Sage.

Tabachnick, B. R., & Zeichner, K. M. (Orgs). (1991). *Issues and practices in inquiry-oriented teacher education*. London: Falmer Press.

Tardif, M. (2014). Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis, RJ: Vozes.

Tatto, M. T. (1999). Conceptualizing and studying teacher education across world regions: An overview. In *Trabajo preparado para la Conferencia "Los Maestros en América Latina: Nuevas Perspectivas sobre su Desarrollo y Desempeño"*. San José de Costa Rica, Junio (Banco Mundial y PREAL).

Teixeira, R. C. (2013). Simetrias que dão a volta à cabeça: roteiro de rosáceas, *Tribuna das Ilhas*, 19 de abril de 2013, p. 10. Obtido em 02 de maio de 2018, de http://hdl.handle.net/10400.3/2681.

Teixeira, R. C. (2014). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo, *Tribuna das Ilhas*, 18 de julho de 2014: p. 8. Obtido em 02 de maio de 2018, de http://hdl.handle.net/10400.3/3454.

Teixeira, R. C. (2015). Roteiro de Varandas da Cidade de Ponta Delgada, *Tribuna das Ilhas*, 26 de junho de 2015, p. 9. Obtido em 02 de maio de 2018, de http://hdl.handle.net/10400.3/3454.

Teixeira, R. C., Fialho, A., Medeiros, C., & Jarimba, I. (2017). Matemática & arte: a expressão plástica na descoberta de padrões matemáticos. *Jornal das Primeiras Matemáticas, 8*, pp. 127-143.

Timmer, M., & Verhoef, N.C. (2012). Increasing insightful thinking in analytic geometry. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/13* (3), pp. 217-219.

Torres, A. C. (2017). Vozes de alunos sobre estrutura e trabalho curricular à entrada do ensino secundário: ecos da dicotomia entre cursos científico-humanísticos e cursos profissionais. *Revista Portuguesa de Investigação Educacional, 17*, pp. 146-176.

Torres, L. L. (2011). A construção da autonomia num contexto de dependências: limitações e possibilidades nos processos de (in) decisão na escola pública. *Educação, Sociedade & Culturas, 32*, pp. 91-109.

Triviños, A. N. S. (1987). *Introdução à pesquisa em ciênciassociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas.

Tudichum, B., & Nunes, F. (1988). Da Matemática dos novos programas. *Educação e Matemática, 8*, pp. 23-25.

Umble, R., Han, Z. (2014). *Transformational Plane Geometry*, Series Textbooks in Mathematics, Taylor & Francis Group / CRC Press.

UNESCO (2016a). *Os desafios do ensino de matemática na educação básica* (Y. Y. Baldin, T. M. M. Campos, J. C. Silva, M. E. E. L. Galvão, J. F. Rodrigues, Trad.). São Carlos: EdUFSCar.

UNESCO (2016b). *Repensar a Educação – Rumo a um bem comum mundial?* Brasília: UNESCO.

UNESCO (2017). Competências de leitura, escrita e aritmética em uma perspectiva de aprendizagem ao longo da vida. *Resumo de Políticas 7 do UIL*. UNESCO Institute for Lifelong Learning.

Usiskin, Z., Andersen, K., & Zotto, N. (Eds.). (2010). Future curricular trends in school algebra and geometry. In: *Proceedings of the Second International Curriculum Conference*, The University of Chicago and The Field Museum, Chicago, Illinois, United States.

Vale, I. (2009). Mathematics and patterns in elementary schools: perspectives and classroom experiences of students and teachers. Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática / Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education, pp. 7-14.

Vasconcellos, M. (s/d). *O Ensino da geometria nas séries iniciais: A aprendizagem dos alunos da 4.º série e o ponto de visto dos professores*. Obtido em 27 de julho de 2017, de http://ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/ensino.pd.

Veiga Simão, A. M.; Flores, M. A. & Ferreira, A. (2007). Oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento profissional no local de trabalho: uma proposta de questionário. Arquipélago. *Ciências da Educação, 8*, pp. 59-116.

Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa. Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Textos de Geometria para professores. Lisboa: APM

Veloso, E., & Pinheiro, A. (1994). Renovação do ensino da geometria: contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro. *Educação e Matemática, 32*, pp. 21-24.

Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática, 123*, pp. 3-8.

Viñao, A. (2007). Culturas escolares y reformas (sobre la naturaleza histórica de los sistemas e instituciones educativas). *Revista Teias, 1*(2), pp. 1-25.

Vygotsky, L. (1984). A formação social da mente. Trad. do inglês de J. Cipolla, L.S.M. Barreto & S.C. Afeche. São Paulo: Martins Fontes. Em inglês: (1978). *Mind in society*. Org. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman. Cambridge (MA): Harvard University Press. Textos originais em russo até 1934.

Wertsch, J.V. (1998). A necessidade da ação na pesquisa sociocultural. In: Wertsch, J.V.; Del Rio, P. & Alvarez, A. (orgs.): *Estudos socioculturais da mente*. (M. G. G. Paiva & A. R. T. Camargo, Trad.). Porto Alegre: Artmed, pp. 56-71. [Original em inglês: 1995].

Westwood, P. (2011). The problem with problems: Potential difficulties in implementing problem-based learning as the core method in primary school mathematics. *Australian Journal of Learning Difficulties, 16*(1), pp. 5-18. doi: 10.1080/19404158.2011.563475.

Weyl, H. (2015). *Symmetry*. Princeton University Press.

Wielewski, G. D. (2008). O Movimento da Matemática Moderna e a formação de professores de Matemática no Brasil. *Atas do ProfMat2008*, pp. 1-10.

Yaglom, I. M. (1988). *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the idea of Symmetry in the nineteen Century*. (Sergei Sossinsky, Trad.). Birhäuser Boston, Estados Unidos.

Yamada, T. R. U. (2013). A Abordagem com Mandalas na Formação de Professores de Matemática. In: *Graphica 2013 / X International conference on Graphics Engineering for Arts and Design, 7*, & *Anais do Simpósio Nacional de geometria descritiva e desenho técnico, 18*, Curitiba: Ed. UFPR.

Yang Liu & Godfried T. Toussaint (2011) The marble frieze patterns of the cathedral of Siena: geometric structure, multi-stable perception and types of repetition, *Journal of Mathematics and the Arts, 5*(3), pp. 115-127, doi: 10.1080/17513472.2011.551933

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies of Mathematics, 78*, pp. 231-260. doi: 10.1007/1064901193243

Zabala, A. (2010). La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competência matemática. In M. L. Callejo & J. M. Goni (Coord.), *Educación Matemática y Ciudadania*, pp. 11-58. Barcelona: Editorial GRAÓ.

Zabala, I. (1998). *Valores distantes.* México: Porrúa / UNA de México.

Zaleski Filho, D. (2013). *Matemática e Arte*. Belo Horizonte: Autêntica.

Zeichner, K. M. (2011). A pesquisa-ação e a formação docente voltada para a justiça social: um estudo de caso nos estados unidos. In J. E. Diniz-Pereira & K. M. Zeichner (Orgs), *A pesquisa na formação e no trabalho docente* (2ª ed), Cap. 3, pp. 49-71. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Zeichner, K.M. (2010). Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. In: *Educação, 35*(3), pp. 479-504.

APÊNDICES

Apêndice 1

Questionário Q1

novaágora centro de formação de associação de escolas
Coimbra Sul | Condeixa-a-Nova | Lousã | Miranda do Corvo | Penela | Soure

GOVERNO DE PORTUGAL

OFICINA DE FORMAÇÃO – APD12-1

Simetrias: da presença na arte para a formação de professores do 1º Ciclo do Ensino Básico

Registo: CCPFC/ACC-89610/17, Nº Créditos: 1.6
Válida até: 14-11-2019; Estado: C/ Despacho – Acreditado
Registo do Formador: CCPFC/RFO-37717/17; C05 Didácticas Específicas (Matemática)

QUESTIONÁRIO Q1

Estimados Professores e Professoras:

Este questionário tem por objetivo caracterizar concepções e práticas educativas docentes sobre o ensino de Simetrias no 1º Ciclo do Ensino Básico. Agradecemos as suas respostas, que serão estritamente confidenciais e usadas apenas para fins de investigação educacional. Pedimos que responda com a máxima sinceridade.

Muito obrigado pela sua colaboração.

PARTE I – DADOS SOCIOPROFISSIONAIS

1. Idade: _____ anos

2. Gênero:
   ☐ Masculino ☐ Feminino ☐ Não especificado

3. Habilitações (indique o ano de conclusão e o nome da instituição):
   ☐ Bacharelato (_____) - ____
   ☐ Licenciatura (_____) - ____
   ☐ Mestrado (_____) - ____
   ☐ Doutoramento (_____) - ____
   ☐ Outra (_____) - ____

4. Vínculo profissional:
   ☐ Quadro da Escola (QE) ☐ Quadro da Zona Pedagógica (QZP)
   ☐ Contrato a Termo Certo ☐ Contrato a Termo Incerto
   ☐ Outro. __________________________

5. Ano(s) de escolaridade em atuação (ano letivo 2016-2017):
 ☐ 1º ano ☐ 2º ano ☐ 3º ano ☐ 4º ano

6. Leciona em turmas mistas (com alunos de mais de um ano de escolaridade):
 ☐ Sim ☐ Não

7. Tempo como docente no 1º CEB: ________ anos completos

8. Tempo como docente no 1º CEB neste agrupamento: ________ anos completos

PARTE II – EXPERIÊNCIA DOCENTE, PERCEPÇÃO, FORMAS E FONTES DE AQUISIÇÃO E ATUALIZAÇÃO DE CONHECIMENTO CIENTÍFICO E DIDÁTICO-PEDAGÓGICO SOBRE SIMETRIAS

9. Já ensinou *Simetrias* a seus alunos e alunas?
 ☐ Sim ☐ Não

10. Como caracteriza o seu nível de **conhecimentos científicos** sobre *Simetrias*?
 ☐ Não possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias*.
 ☐ Possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias*, mas **não me sinto seguro** em ensinar.
 ☐ Possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias* e **me sinto seguro** em ensinar.

11. Como adquiriu os seus **conhecimentos científicos** sobre *Simetrias*?
 ☐ Ainda não adquiri tais conhecimentos.
 ☐ Possuo os conhecimentos adquiridos na formação inicial.
 ☐ Li sobre o tema nos manuais escolares.
 ☐ Li sobre o tema na Internet.
 ☐ Li sobre o tema em outras referências bibliográficas. Exemplo: ____________
 ____
 ☐ Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema, totalizando ____ horas somente dedicado às *Simetrias*.
 ☐ De outra forma. Qual? ____

12. Como caracteriza o seu nível de **conhecimentos didático-pedagógicos** sobre *Simetrias*?
 ☐ Não possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias*.
 ☐ Possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias*, mas **não me sinto seguro** em ensinar.
 ☐ Possuo conhecimento suficiente para lecionar *Simetrias* e **me sinto seguro** em ensinar.

13. Como adquiriu os seus **conhecimentos didático-pedagógicos** sobre *Simetrias*?
    - ☐ Ainda não adquiri tais conhecimentos.
    - ☐ Possuo os conhecimentos adquiridos na formação inicial.
    - ☐ Li sobre o tema nos manuais escolares.
    - ☐ Li sobre o tema na Internet.
    - ☐ Li sobre o tema em outras referências bibliográficas. Exemplo: ____________ ____ ____
    - ☐ Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema, totalizando ____ horas somente dedicado às *Simetrias*.
    - ☐ De outra forma. Qual? ____

14. Já alguma vez procedeu à utilização de **Ambientes de Geometria Dinâmica** (AGD) em contexto de sala de aula para ensinar *Transformações Geométricas*, *Isometrias* ou *Simetrias*? ☐ Sim ☐ Não
    - 14.1. Considera relevante? ☐ Sim ☐ Não
        - 14.1.1. Por quê?

          ____
          ____
          ____.

PARTE III – DOCUMENTOS OFICIAIS E NORMATIVOS E ARTICULAÇÕES COM SUAS PRÁTICAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS

15. Na maioria das vezes, as **planificações** que utiliza para lecionar as *Simetrias* no 1º CEB basearam-se nas indicações metodológicas presentes:
    - ☐ no CNEB. ☐ no PMEB. ☐ nas Metas Curriculares.
    - ☐ nos Manuais Escolares. ☐ (Outros) _________________________________.

16. Sobre as mudanças ocorridas na abordagem das *Simetrias* no 1º CEB nos últimos **PMEB**.
    - ☐ Não acompanhei tais mudanças de abordagem.
    - ☐ Considero que a abordagem presente no PMEB atual é **mais** adequada ao 1º CEB, pois____ ____ ____ ____.
    - ☐ Considero que a abordagem presente no PMEB atual é **menos** adequada ao 1º CEB, pois ____ ____ ____ ____.

PARTE IV – SUAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DE SIMETRIAS

17. Quais as *Simetrias* que já fizeram parte das planificações que utilizou/elaborou para lecionar *Simetrias*?

    ____
    ____.

18. Nas planificações que elaborou para lecionar *Simetrias*, já alguma vez esteve prevista a utilização de recursos estáticos ou dinâmicos?

    ☐ Não.
    ☐ Sim, já utilizei...

    ☐ recursos estáticos, como, por exemplo ___________________________
    ____
    ____.

    ☐ recursos dinâmicos, como, por exemplo, _________________________
    ____
    ____.

18.1. Nas planificações que elaborou para lecionar *Simetrias*, já alguma vez esteve prevista a utilização de recursos artísticos, culturais ou patrimoniais?

☐ Não.
☐ Sim, já utilizei...

☐ recursos artísticos, como, por exemplo ___________________________
____
____.

☐ recursos culturais, como, por exemplo, ___________________________
____
____.

☐ recursos patrimoniais, como, por exemplo _________________________
____
____.

18.2. Caso tenha respondido "Sim" à questão 18 ou 18.1, pedimos que descreva as suas experiências:

- Ano de escolaridade: ________

- A receptividade dos alunos a esta prática:
  ____
  ____
  ____
  ____.

- O seu grau de satisfação com os diferentes recursos utilizados:
  ____
  ____
  ____
  ____.

- Pontos fortes da metodologia:
  ____
  ____
  ____.

- Pontos fracos da metodologia:
  ____
  ____
  ____.

PARTE V – CONHECIMENTO CIENTÍFICO E DIDÁTICO-PEDAGÓGICO

19. Veloso (2012), na sua obra Simetrias e Transformações Geométricas, destaca as seguintes *Transformações Geométricas*: Translação, Rotação, Reflexão, Reflexão Deslizante, Dilação (ou Homotetia), Semelhança em Espiral (ou Dilação Rotativa), Alongamento e Inversão.
    19.1. Dos exemplos apontados, quais pertencem ao grupo das *Isometrias* no plano euclidiano?
    ____
    ____.

    19.2. Que propriedades têm em comum as Transformações Geométricas que referiu na pergunta anterior para que pertençam ao grupo das *Isometrias*?
    ____
    ____
    ____
    ____.

20. Todas as isometrias podem ser obtidas através da composição de, no máximo, ***n*** reflexões. Concorda com esta afirmação?
    ☐ Não. ☐ Sim, e esse número ***n*** é ______________.

21. Por que motivo, à semelhança do que acontece com a *reflexão deslizante*, a aplicação a uma dada figura de uma reflexão seguida de uma rotação não te também uma designação própria, por exemplo de *reflexão rotacional*?
    ____
    ____

22. Considere os casos a seguir apresentados, onde a figura 1 e a figura 2 **são congruentes**:

a)

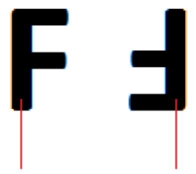


figura 1 figura 2

Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? ____________________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

b)

figura 1 figura 2

Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? _________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

c)

figura 1 figura 2

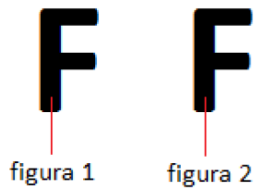
Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? _________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

d)



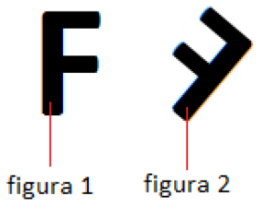
Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? __________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias de entre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

e)



Podemos afirmar que existe uma isometria que transforma a figura 1 na figura 2?

☐ Sim. Qual? __________________________.

☐ Sim, porém esta isometria é, na verdade, um produto (ou uma composição) de isometrias dentre as existentes, pois não existe uma isometria propriamente dita definida para este caso.

☐ Não. Existem casos em que, apesar de as figuras serem congruentes, não existe uma isometria capaz de transformar uma das figuras na outra.

23. Que relação há entre os conceitos de *Simetria* e de *Isometria*?
    ☐ Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças.
    ☐ Qualquer *Simetria* é uma *Isometria*.
    ☐ Qualquer *Isometria* é uma *Simetria*.
    ☐ Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra.
    ☐ Outra. Qual? ____.

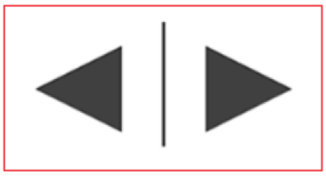
24. Para estudar, comparar e classificar as figuras características da arte decorativa, do ponto de vista geométrico, não devemos considerar a *natureza* dos elementos que se repetem, mas sim o modo como se processa essa "repetição", ou seja, a *estrutura* ou *organização*. Assim, se duas figuras têm a *mesma organização*, apesar de motivos artísticos distintos, estas devem ser classificadas como sedo "*do mesmo tipo*" (Veloso, 2012).
    24.1. Quantas rosáceas existem?____
    24.2. Quantos frisos existem?____
    24.3. Quantos padrões existem?____

25. No que concerne aos frisos, podemos afirmar que:
    25.1. se um friso tem simetria de *reflexão deslizante*, então, também tem simetria de *reflexão de eixo horizontal*? ☐ Sim ☐ Não
    25.2. E o recíproco, é verdadeiro? ☐ Sim ☐ Não

26. No desenvolvimento de uma aula sobre isometrias houve diversas generalizações produzidas e proferidas pelos alunos (situações hipotéticas). Todas estão conceitualmente **ERRADAS**. Analise-as e pronuncie-se sobre as mesmas.

26.1. Aluno: "*Professora, a reflexão é o mesmo que a rotação de meia-volta*". Para exemplificar o aluno exibiu a imagem da Figura 3:

Figura 3

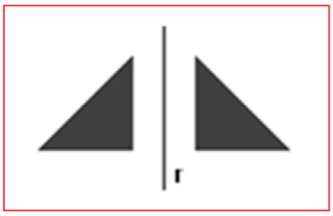


Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

____
____
____
____
____
____
____
____.

26.2. Aluna: "*Professora, observei que na Figura 4 estão dois triângulos congruentes e a reta r. Essa reta r é um eixo de simetria dos triângulos.*"

Figura 4



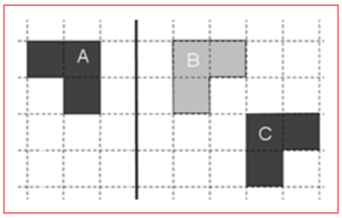
Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

____
____
____
____
____
____
____
____.

26.3. Aluno: “Professor, a figura C é uma reflexão deslizante da figura A, pois fiz uma reflexão da imagem A e depois deslizei a imagem obtida (B)” (Fig. 5).

Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

Figura 5



____

____

____

____

____

____

____

____.

26.4. Aluna: “Professor, a circunferência é uma rosácea especial por ter infinitos eixos de reflexão”.

Como procederia para que o aluno pudesse compreender o erro? Indique em detalhes as estratégias pedagógicas que utilizaria.

____

____

____

____

____

____

____.

Algumas observações que queira acrescentar:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

Apêndice 2

Matriz do Questionário *Online* (QO)

novaágora centro de formação de associação de escolas
Coimbra Sul | Condeixa-a-Nova | Lousã | Miranda do Corvo | Penela | Soure
GOVERNO DE PORTUGAL

MATRIZ DO QUESTIONÁRIO *ONLINE* (QO)

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO	QUESTÕES ORIENTADORAS	PERGUNTAS DE RECURSO E DE AFERIÇÃO
BLOCO 1 Legitimação da entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista	➢ Agradecer a disponibilidade ➢ Colocar o entrevistado na condição de colaborador ➢ Garantir confidencialidade dos dados ➢ Explicar o procedimento	
	Explicar a entrevista e seus objetivos	➢ Informar sobre o uso do gravador ➢ Explicitar o problema, o objetivo e os benefícios do estudo	
BLOCO 2 Visão geral	Perceber a visão do investigado sobre a utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais em favor do ensino de Simetrias	1. Qual a sua opinião sobre o ensino de Simetrias de forma abstrata, sem contextualização?	1.1. Os recursos utilizados na OF podem ser utilizados para ensinar outros conceitos de Matemática do 1º CEB? Qual(is)?
		2. A utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais pode tornar a aprendizagem de Simetrias mais acessível aos alunos?	2.1. Que relação há entre a utilização desta abordagem e a oportunidade, oferecida aos alunos, de percepção da relação com o mundo real?
BLOCO 3 Percepção de Aprendizagem dos investigados e competência docente desenvolvida na OF	Verificar a percepção de aprendizagem / competência docente do investigado em relação à OF e à implementação	3. Aprendeu algum conceito de Simetria que até o momento não tinha aprendido ou utilizava-o de forma incorreta? **NÃO** ↓ **SIM** →	3.1. Qual(is)? 3.2. Associa esta compreensão somente agora devido à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?
		4. Considera que os recursos artísticos, culturais e patrimoniais facilitam a melhor compreensão das Simetrias?	4.1. Poderia especificar ou aprofundar um pouco mais?
BLOCO 4 Implementação	Perceber a visão do investigado sobre o planeamento utilizado por ele	5. Como considera o planeamento utilizado nesta aula?	5.1. Este planeamento contemplou todos os conceitos de Simetria inerentes ao ano escolar? 5.2. Realizou todas as ações nele previstas?
	Comparar o planeamento utilizado nesta implementação com os utilizados, em implementações para os mesmos fins, anteriormente à OF	6. Como compara o planeamento utilizado para esta aula com os planeamentos utilizados anteriormente à OF para o ensino de Simetrias?	6.1. Utilizaria este planeamento novamente? 6.2. Faria alguma alteração no planeamento atual para reutilizá-lo futuramente? Que

			alterações?
	Perceber a visão do investigado sobre a implementação realizada por ele	7. De maneira geral, como você considera a aula realizada por você?	7.1. Poderia especificar ou aprofundar um pouco mais?
	Verificar a opinião do investigado sobre as atividades realizadas: potencialidades e limitações	8. Considera que as atividades utilizadas na aula foram atrativas para os alunos? 9. Considera que essas atividades foram adequadas aos objetivos planeados? 10. O que considera que possam ser as potencialidades das atividades utilizadas? 11. E o que considera que possam ser as limitações?	11.1. Substituiria alguma atividade? Qual(is)?
	Verificar as considerações do investigado sobre a percepção de aprendizagem dos alunos em relação à implementação.	12. Você considera que seus alunos tenham aprendido os conceitos abordados por você durante a aula? **NÃO** ↓ **SIM** →	12.1. Acha que esta aprendizagem dos alunos possa ter sido facilitada pela utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?
BLOCO 5 Nível de satisfação e atitudes positivas devido à abordagem	Verificar o nível de satisfação do investigado devido à participação na OF	13. Como considera seu nível de satisfação pela participação na OF?	13.1. Poderia especificar ou aprofundar um pouco mais?
	Verificar o nível de satisfação profissional do investigado em relação à implementação das atividades desenvolvidas na OF	14. Como considera seu nível de satisfação na utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de Simetrias?	14.1. Poderia especificar ou aprofundar um pouco mais?
	Verificar as considerações do investigado sobre a satisfação dos alunos e alunas em relação a implementação	15. Como considera a receptividade e percepção de aprendizagem dos seus alunos e alunas à abordagem utilizada na implementação?	15.1. Poderia especificar ou aprofundar um pouco mais?
BLOCO 6 Síntese e metareflexão sobre a particiação na investigação e agradecimentos e agradecimentos	Perceber o sentido que o investigado dá à própria participação ou colaboração na OF e implementação da proposta	16. O que considera sobre os objetivos desta investigação? 17. Como observa o contributo dado à mesma? 18. Conhece ou sugere outras vinculações entre os recursos utilizados e demais contextos de ensino de matemática?	19. Gostaria de acrescentar mais alguma coisa ao que foi dito?

Apêndice 3

Teste Discente (TD)

FPCEUC FACULDADE DE PSICOLOGIA E DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO UNIVERSIDADE DE COIMBRA	novaágora / GOVERNO DE PORTUGAL	**ATIVIDADES DE SIMETRIAS**
Nome:	**4º ano**	___ / ___ / 2017

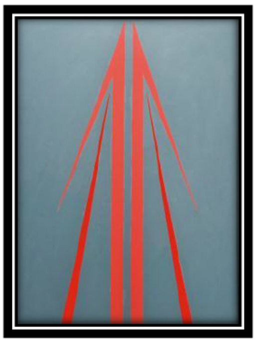
Olá estimados alunos e estimadas alunas.

As atividades a seguir apresentadas abordam os conceitos de **isometria** e **simetrias**. Pedimos que respondam com muita atenção às perguntas formuladas.

Muito obrigado!

1. No 4º ano, o professor/professora ensinou os conceitos de simetria utilizando recursos artísticos, culturais ou patrimoniais?
   ☐ Não.
   ☐ Sim. O que mais gostaste nessas atividades? ____
   ____.
   O que menos gostaste nessas atividades? ____
   ____.

2. Tens por costume reconhecer alguns conceitos de simetria no cotidiano?
   ☐ Não.
   ☐ Sim. Onde? ____.
   Que conceitos são esses? ____.



https://www.cml.pt/cml.nsf/artigos/15604D3579BCDF0380257987005F0524

3. A Geometria, por muitas vezes, está presente em obras de arte de diversos artistas em todas as partes do mundo. O quadro ao lado é do pintor e arquiteto português, **Fernando Lanhas**. Esta obra de mais de meio século foi vendida por 55 mil euros.

Observa com atenção a imagem ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

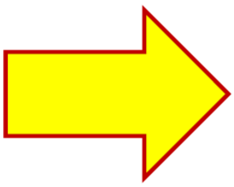
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.



4. Observa com atenção a figura ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

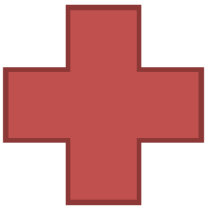
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.



5. Observa com atenção a figura ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

https://www.pinterest.pt/pin/562950022142344395/

6. Todas as manhãs, no sul da Índia, milhões de mulheres desenham Kolams no chão. Um **Kolam** é um desenho decorativo feito com pó de arroz pelos membros femininos de cada família à frente das suas casas. A habilidade para executar estas figuras é um sinal de graça, uma prova de habilidade, disciplina mental e capacidade de concentração.
Observe a imagem:

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

http://redeazulejo.fl.ul.pt/pesquisa-az/padrao_pesquisa.aspx?pagina=19

7. A **arte da azulejaria** criou raízes na Península Ibérica por influência dos árabes que, para as terras conquistadas, trouxeram mosaicos para ornamentar as paredes dos seus palácios.
Observa a imagem ao lado.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

https://www.infopedia.pt/$palacio-de-monserrate

8. É muito comum encontrarmos os conceitos de simetria nos castelos de todo o mundo. A imagem ao lado é uma das janela do **Palácio de Monserrate**, em Sintra, Portugal.
Observa bem a imagem.

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?

☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

9. Povoado desde tempos pré-históricos, **Conímbriga** foi ocupado pelas tropas romanas em meados do séc. II a. E. C. Hoje, é através das ruínas remanescentes que podemos perceber a beleza presente na ornamentação dos locais, repletos de um magnífico conjunto de mosaicos figurativos.
Observa o friso a seguir:

http://www.thefullwiki.org/Mosaic

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____
____
____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

10. Observa com atenção o friso a seguir:

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não
b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

11. A beleza artística da expressão cultural que emana das **calçadas portuguesas** é considerada uma arte pública e destaca a sensibilidade nacional e sua influência em outras partes do mundo. Esta herança histórica é um misto da cultura e tecnologia de construção dos romanos e dos árabes, que acabou por se impor em Portugal no século XIV durante o reinado de D. João II.
Observa os frisos a seguir, nas duas próximas questões:

http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____
____
____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

12. Observa o friso a seguir, presente em uma calçada de **Angra do Heroísmo**:

http://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos_horta_b3012cf9.pdf

a) Percebes alguma simetria nesta imagem?
☐ Sim ☐ Não

b) Se respondeste **SIM**, escreve **TODAS** as simetrias que percebeste.

____
____
____

Marca na imagem os elementos que representam as simetrias indicadas, ou seja, eixos, centro, direção ou outros.

Apêndice 4

Matriz da entrevista *focus* grupo FG1

centro de formação de associação de escolas

Coimbra Sul | Condeixa-a-Nova | Lousã | Miranda do Corvo | Penela | Soure

MATRIZ DA ENTREVISTA *FOCUS* GRUPO FG1

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO	QUESTÕES ORIENTADORAS	PERGUNTAS DE RECURSO E DE AFERIÇÃO
BLOCO 1 Legitimação da Entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista	✓ Agradecer a disponibilidade ✓ Colocar o entrevistado na condição de colaborador ✓ Garantir confidencialidade dos dados ✓ Explicar o procedimento	
	Explicar a entrevista e seus objetivos	✓ Informar sobre o uso do gravador ✓ Explicitar o problema, o objetivo e os benefícios do estudo	
BLOCO 2 Questões Introdutórias	Saber a visão do investigado sobre a importância da temática no ensino	1. De maneira geral, qual a sua atual opinião sobre a necessidade e a importância do ensino de Simetrias no 1º CEB?	1.1. Por quê?
	Saber a visão do investigado sobre a adequação da abordagem sugerida nos documentos oficiais e normativos e manuais escolares	2. Têm conhecimento das orientações curriculares presentes nos documentos oficiais e normativos para a abordagem das *Simetrias*? 3. Concorda com a maneira como esta abordagem é sugerida nesses documentos? E nos manuais escolares?	3.1. Considera esta abordagem deva ser seguida integralmente como indicado nos documentos oficiais e normativos e nos manuais escolares utilizados na escola? 3.2. Considera que deveria iniciar-se antes ou depois ou ser melhor distribuída ao longo do 1º CEB?
BLOCO 3 Questões Transitória	Conhecer a percepção dos investigados frente suas práticas e abordagens anteriores, bem como a satisfação alcançada	4. Sobre sua prática de ensino de *Simetrias*, você considera que a forma na qual procedeu até agora resultou como o esperado?	4.1. Ficou satisfeito(a) com a metodologia utilizada? 4.2. Que dificuldades enfrentou na implementação desta prática? 4.3. Que dificuldades considera que os alunos e alunas enfrentam nesta sua implementação?
BLOCO 4 Questões Chave	Saber a visão do investigado sobre a contextualização do ensino de simetrias	5. Nesta OF propomos o ensino contextualizado das *Simetrias* através de recursos artístico, culturais e patrimoniais, como é previsto nos documentos oficiais e normativos. Como veem esta metodologia?	5.1. Considera que esta metodologia é adequada/excessiva/abrangente? 5.2. Considera que, de fato, esta metodologia de ensino pode oferecer maiores oportunidades de aprendizagem aos alunos e alunas, como uma mais-valia à aprendizagem? Por quê?

			5.3. Além desta metodologia de ensino, que outra proposta você considera viável para a abordagem desta temática de modo que se obtenha um impacto relevante, alcançando melhorias à aprendizagem e minimizando as dificuldades dos alunos e alunas?
	Saber das expectativas dos investigados frente às etapas previstas e suas respectivas abordagens na OF	6. Sobre a proposta de valermos da colaboratividade em praticamente todas as etapas da OF, qual a sua opinião sobre esta prática?	6.1. Já participou de alguma proposta desta forma? 6.2. Quais são suas expectativas por estarem diante de uma proposta desta forma?
		7. Quais são suas expectativas neste momento, prestes a iniciar uma Oficina de Formação com todos os objetivos apresentados?	7.1. Alguma crítica ou sugestão para as etapas que estão previstas para a OF?
BLOCO 5 Síntese e meta-reflexão sobre a própria entrevista e agradecimentos	Captar o sentido que o investigado dá à própria situação da entrevista.	8. O que você pensa dos objetivos desta investigação? 9. Como você vê o contributo que pode dar à mesma?	9.1. Gostaria de acrescentar mais alguma coisa ao que foi dito?

Apêndice 5

Matriz da entrevista *focus* grupo FG2

novaágora centro de formação de associação de escolas
Coimbra Sul | Condeixa-a-Nova | Lousã | Miranda do Corvo | Penela | Soure
GOVERNO DE PORTUGAL

MATRIZ DA ENTREVISTA *FOCUS* GRUPO FG2

BLOCO	OBJETIVO DO BLOCO	QUESTÕES ORIENTADORAS	PERGUNTAS DE RECURSO E DE AFERIÇÃO
BLOCO 1 Legitimação da Entrevista	Criar um ambiente propício à entrevista	✓ Agradecer a disponibilidade ✓ Colocar o entrevistado na condição de colaborador ✓ Garantir confidencialidade dos dados ✓ Explicar o procedimento	
	Explicar a entrevista e seus objetivos	✓ Informar sobre o uso do gravador ✓ Explicitar o problema, o objetivo e os benefícios do estudo	
BLOCO 2 VIVÊNCIAS NA FORMAÇÃO	Saber a visão do investigado sobre seu envolvimento na recolha dos recursos	1. Como você vê o seu envolvimento na recolha dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?	1.1. Considera que percebeu a presença de *Simetrias* onde antes ainda não tinha percebido? Onde? 1.2. Que importância percebe nisso? 1.3. Considera que, através da metodologia de ensino proposta nesta OF, seus alunos possam observar diferentemente e de forma mais proveitosa o mundo que os rodeia?
	Saber a visão do investigado sobre seu envolvimento na criação das atividades	2. Como você vê o seu envolvimento na criação das atividades para comporem o "Banco de Atividades"?	2.1. Considera que aproveitou bem os recursos obtidos por você e os trazidos pelos colegas na OF? 2.2. Como considera isso?
	Saber a visão do investigado sobre a abordagem colaborativa na criação das atividades	3. Qual a sua opinião sobre a forma colaborativa com a qual temos vivenciado as etapas desta OF?	3.1. Consideram que esta é a forma mais adequada e que todos são beneficiados? 3.2. Esta forma correspondeu às suas expectativas iniciais?
BLOCO 3 CONHECIMENTO CIENTÍFICO	Saber a visão do investigado sobre a necessidade de abordagem dos conhecimentos científicos na OF	4. Como você considera a necessidade da discussão matemática dos conceitos de Simetrias realizada logo nas primeiras etapas da OF?	4.1. Você considerou-a proveitosa? Por quê? 4.2. Esclareceu alguma dúvida que tinha acerca de algum conceito? Qual(is)?
BLOCO 4 CONHECIMENTO PEDAGÓGICO	Saber a visão do investigado sobre a importância da temática no ensino	5. Estamos por volta da metade das vivências previstas para esta OF. Baseado com o que já foi vivenciado até o momento, qual a sua atual opinião sobre a necessidade e a	5.1. Por quê? 5.2. Ainda sobre a necessidade e a importância do ensino de *Simetrias* no 1º CEB, como você compara a sua opinião antes dessa OF com a sua opinião atual?

		importância do ensino de Simetrias no 1º CEB?	
	Saber das expectativas dos investigados frente à implementação das atividades elaboradas	6. Embora ainda faltem algumas etapas da OF até que estas atividades sejam implementada aos seus alunos e alunas, vocês já conseguem imaginar se a receptividade e envolvimento deles com estas atividades será positiva, despertando maiores interesses e participação ativa?	6.1. Considera que depois de serem apresentados aos conceitos de simetria através desta metodologia possam reconhecer melhor a utilização de matemática ao longo da história, dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais? 6.2. Que impactos relevantes você prevê à aprendizagem dos seus alunos?
BLOCO 5 QUESTÃO FINAL	Conclusão da entrevista	7. Gostaria de acrescentar mais alguma coisa ao que foi dito?	
BLOCO 6 PARTE EXTRA	Sobre a própria Oficina de Formação	8. Que pontos desta Formação que vocês consideram como positivos? 9. Gostaria de sugerir melhorias? 10. Qual foi a aprendizagem mais relevante pra vocês aqui durante a formação?	

Apêndice 6

Matriz conceitual: categorias, subcategorias e indicadores

CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS	INDICADORES
Conhecimento Científico Prévio (CoCiP)	Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos científicos	Formação inicial
		Manuais escolares
		Internet
		Ação de formação
	Reconhecimento de dificuldades	Desconhecimento e complexidade dos termos e conceitos
		Formação inicial incompleta e desatualizada
		Insegurança para lecionar, em relação aos conhecimentos científicos
	Nível prévio de conhecimento científico (Resultados das unidades de aferição de conhecimentos científicos)	Desconhece propriedades de isometria
		Reconhece isometria de translação
		Reconhece isometria de rotação
		Reconhece isometria de reflexão
		Desconhece isometria de reflexão deslizante
		Desconhece relação entre isometria e simetria
		Desconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras
Conhecimento Curricular Prévio (CoCuP)	Percepções das características dos documentos orientadores sobre a	Acompanhamento das mudanças ocorridas
		Propostas curriculares desajustadas ao nível de

	na abordagem das simetrias no 1º CEB nos últimos PMEB	escolaridade a que se destinam
		Metas Curriculares constituem um bom guião passo-a-passo para os professores
	Percepções sobre RACP e currículo	Conhecimento diminuto sobre os RACP sugeridos no currículo
		Reconhecimento das potencialidades do uso de RACP
	Reconhecimento de dificuldades	Dificuldade em acompanhar as sucessivas mudanças
		Necessidade de formação contínua
Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: ensino (CoDiPeP/e)	Formas e fontes de aquisição e atualização de conhecimentos didático-pedagógicos	Formação inicial
		Manuais escolares
		Internet
		Ação de formação
	Experiências docentes no ensino de simetrias	Experiência prévia em lecionar simetrias
		Abordagem preliminar de conceitos básicos nos anos iniciais de escolaridade
	Reconhecimento da importância no 1º CEB	
	Recursos utilizados no ensino de simetrias até ao momento	Predomínio do 4º ano de escolaridade
		RCAP numa abordagem diferente da OFD
		Materiais manipuláveis
		Receptividade discente diante à utilização de recursos
		Satisfação docente com as

		experiências realizadas
		Ausência de experiência com AGD
	RACP no ensino de simetrias	RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes no início da OFD
		RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes no início da OFD
		Reconhece o prejuízo do ensino sem RACP
		Afirmam a pouca utilização dos RACP
		Sugestões de utilização dos RACP
	Debilidades e Dificuldades	Insegurança em lecionar, em relação aos conhecimentos didático-pedagógicos
		Percepções de dificuldades discentes
		Necessidades de aquisição de conhecimentos didático-pedagógicos
	Conhecimento de estratégias didático-pedagógicas diante das conceitualizações discentes equivocadas	Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Q1)
		Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Q1)
		Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Q1)

		Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Q1)
	Percepções sobre colaboratividade	Carência de formações colaborativas
		Reconhecimento da importância da colaboratividade na formação
Conhecimento Didático-Pedagógico Prévio: planificações e recursos (CoDiPeP/p-r)	Embasamento (PA)	
	Objetivos gerais (PA)	Formulados de maneira explícita (PA)
		Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais (PA)
		Reconhecer propriedades geométricas e completar padrões
	Objetivos específicos (PA)	Identificação de simetrias e eixos de simetria (PA)
		Construção de frisos (PA)
	Conceitos (PA)	Reflexão (PA)
		Rotação (PA)
		Translação (PA)
		Reflexão deslizante (PA)
	Recursos utilizados e possibilidades	Recursos estáticos: espelho, mira, papéis, etc
		Recursos dinâmicos: dobragens, simulador, etc
		RACP já planificados
		RACP considerados viáveis
	Estratégias (PA)	Menção a simetrias em figuras geométricas diversas
		Menção direta a rosáceas, frisos e padrões
	Avaliação (PA)	Observação direta de

		atitudes discentes
		Observação de registros
Banco de Atividades (BA)	Preparação para a criação	Fonte de ideias para as primeiras versões das atividades
		Ligação a outras atividades em curso e disciplinas
	Exigências e dificuldades inerentes ao processo de criação	Envolve muita pesquisa
		Dificuldades com a edição e referenciação das imagens
	Potencialidades	Potencialidades para o ensino
		Potencialidades para a aprendizagem
	Satisfação docente com a criação	Devido à pesquisa e a diversidade de materiais encontrados
Planificações Personalizadas (PP)	Objetivos gerais (PP)	Formulados de maneira explícita (PP)
		Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria (PP)
		Incidindo na promoção do processo de ensino e aprendizagem do conceito de simetria utilizando a arte a tradição (PP)
	Objetivos específicos (PP)	Incide na identificação de simetrias e eixos de simetria (PP)
		Incide no desenvolvimento do espírito de observação e percepção de regularidades e articular saberes geométricos e artísticos (PP)
		Incide na livre expressão da criatividade (PP)

	Conceitos (PP)	Reflexão (PP)
		Rotação (PP)
		Translação (PP)
		Reflexão deslizante (PP)
	Recursos (PP)	Recursos materiais, em geral, e TICs (PP)
		RACP (PP)
	Estratégias (PP)	Observação / exploração de imagens, figuras, filme, vídeo (PP)
		Identificação e criação de simetrias e eixos (PP)
		Uso de mira, régua e dobragem para reconhecer simetrias de reflexão (PP)
	Avaliação (PP)	Observação direta de atitudes discentes (PP)
		Observação de registros (PP)
Implementações (Imp)	Expectativas dos docentes em relação à implementação das atividades	Expectativa de boa recetividade dos discentes
		Promover a curiosidade dos discentes
	Estratégias durante as implementações	Utilização de imagens variadas
		Utilização das características dos RACP para o ensino de conceitos de simetrias
		Utilização dos RACP para fazer relações com outras áreas
		Utilização das imagens para uma abordagem gradativa da complexidade dos conceitos
	Necessidades de	Diminuição da quantidade

	adequações durante as implementações	prevista de imagens
		Substituição do tipo de recurso visando uma adequação ao conceito científico
		Alteração da classificação do recurso em função de novas observações
	Percepção de melhorias	Satisfação docente nas implementações
		Promoção de um ensino rigoroso dos conceitos científicos
		Promoção de segurança na gestão da aula
		Reconhecimento das atividades como atrativas para os discentes
		Constatações docentes da boa receptividade discente
	Dificuldades	Fatores do contexto de sala de aula
		Uso inadequado de recursos
Satisfação e aprendizagem docente (SADoc)	Percepção da evolução na aprendizagem docente de conhecimentos científicos	Aquisição de conhecimento científico como principal aprendizagem da OFD
		Reconhecimento da aprendizagem docente de conhecimentos científicos, inclusive de conceitos específicos: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante
		Reconhecimento do uso inadequado de termos e conceitos antes da OFD
		Impacto positivo da aprendizagem de conhecimentos científicos na

		autoconfiança
	Evolução do nível do conhecimento científico (Comparação entre resultados do Q1 e do Q2)	Reconhece propriedades de isometrias (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece isometria de translação (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece isometria de rotação (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece isometria de reflexão (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece isometria de reflexão deslizante (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece relação entre isometria e simetria (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhece classificação e conjunto de simetrias de figuras (Comparativo Q1/Q2)
	Evolução do nível de conhecimento didático-pedagógicos diante das conceitualizações discentes	Diferenciação de reflexão e rotação de meia-volta, dado um caso particular onde estas são equivalentes (Comparativo Q1/Q2)
		Diferenciação de eixo de isometria e eixo de simetria (Comparativo Q1/Q2)
		Percepção de que, considerando uma translação e uma reflexão como etapas de uma reflexão deslizante, a direção da translação e o eixo de reflexão devem ser paralelos (Comparativo Q1/Q2)
		Reconhecimento de que uma circunferência não é uma rosácea (Comparativo Q1/Q2)

	O papel da OFD na aprendizagem docente	Satisfação docente com as características da OFD
		Satisfação com a experiência colaborativa
		Reconhece fragilidades nas lecionações antes da OFD
	O papel dos RACP na aprendizagem docente	RACP como facilitadores da aprendizagem docente
		Satisfação docente com o uso dos RACP
	Evolução do reconhecimento dos RACP no currículo	Contributo dos RACP para o desenvolvimento dos objetivos do currículo
		Convergência entre a utilização de RACP e os objetivos do currículo
	Melhorias alcançadas com as PP	Objetivos específicos (PP)
		Conceitos (PP)
		Recursos (PP)
		Estratégias (PP)
	Dificultador e aspectos a melhorar	Forma inadequada dos conceitos presentes nos manuais
		Adequações de pormenores, necessárias à reutilização das PP, em função do contexto
		Reutilizações futuras das PP
Satisfação e aprendizagem discente (SADis)	Percepções sobre a satisfação discente	Percepção, por parte do investigador, da satisfação discente
		Reconhecimento docente da satisfação discente
	Percepção sobre a aprendizagem discente	Percepção, por parte do investigador, de aprendizagem discente dos conhecimentos científicos de

		simetrias
		Reconhecimento docente de aprendizagem discente dos conhecimentos de simetrias
	Aprendizagem discente (Resultados dos Testes Discentes (TD)	Comparação entre os resultados do GA e do GC no Teste Discente (TD)
	O papel dos RACP na aprendizagem discente	RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações
		RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações

Apêndice 7

- **Desconhecimento e complexidade dos termos e conceitos**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	FG1	*"É… eu tenho um pouco de dificuldade"*
		"(…) eu acho um bocadinho complexas"
D3	FG1	*"eu própria tenho dificuldade em fazê-los (aos discentes) perceber que tipo de rotação é que é…"*
D4	FG1	*"(…) vi aqui [no questionário Q1] termos que eu própria não domino"*
D6	FG1	*"(…) até para nós ficam, assim, um bocado complicado as vezes, não é?"*
		"(…) os últimos [conceitos]… as últimas [simetrias] que apareceram [no Questionário Q1] estavam, assim, um bocadinho mais complexas"
		"A reflexão está acessível, mas… (…) as vezes complica"
D7	FG1	*"eu sinto… eu sinto dificuldade"*
	EI	*"(…) fazê-la (a simetria de reflexão deslizante) entender aos alunos era muito difícil para mim"*
D8	FG1	*"(…) e nós não temos essa facilidade"*
		"Também temos que empregar os termos científicos corretos, não é…"
D10	FG1	*"(…) porque nós temos dificuldades em os (conceitos de simetria) ensinar"*
		"(…) eu ainda não estou a ver assim que seja muito fácil pôr um menino que teve imensas dificuldades para a primeira letra a conseguir fazer uma rotação deslizante"
Todos	DC	*"As dúvidas eram evidenciadas por todos eles (…)"*[138]

[138] Percepção do investigador durante o 1º trabalho presencial da OFD, na presença de todos os docentes (Investigador/DC).

Apêndice 8

- **Formação inicial incompleta e desatualizada**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	FG1	*"(…) realmente na escola (própria formação) também não trabalhei. Não sinto que tenha assim trabalhado em mim"*
		"(…) eu sinto isso (aprendizagem de simetrias) como uma lacuna, como aluna, quando fui aluna do ensino até ao secundário e sei que foi uma falha na formação de professores"
D3	FG1	*"(…) a nossa formação não contemplou muitas das coisas (conteúdos/conceitos) que agora estamos a dar"*
	FG2	*"(…) muito de nós (…) somos da área de letras, e portanto a matemática nunca foi muito explorada"*
D6	FG2	*"(…) porque não houve atrás (tempo passado)… Não foi desenvolvido"*
D7	FG1	*"(…) a formação inicial não contemplou estes assuntos"*
D10	FG1	*"(…) não tivemos grandes conceitos de simetria básica e friso e etc… rosácea…"*
D2, D3, D4, D6, D8 e D9	FG2	*Manifestaram-se positivamente, em concordância*[139]

[139] Em relação aos seguintes comentários do investigador: "*Eu acho que na verdade, surgiram novas lacunas (dúvidas conceituais acerca das simetrias) que a gente não sabia que tinha dúvida naquilo (conceitos)*" (Investigador/FG2) e "*Então, as dúvidas (conceituais acerca das simetrias) que estão surgindo agora, antes [você] nem sabia que era dúvida porque nem sabia que existia*" (Investigador/FG2).

Apêndice 9

- **Abordagem preliminar de conceitos básicos nos anos iniciais de escolaridade**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D3	FG1	*"(…) coisas (conteúdos/conceitos) mais básicas"*
	FG2	*"Eu passava (lecionava) (…), e acho que falo um pouco por todos nós, (…) muito pela rama (de forma superficial, pouco aprofundada) do conceito das simetrias (…)"*
D4	FG1	*"Mas não também de forma exaustiva nem muito aprofundado, sobretudo nos termos"*
	QO	*"(…) o conceito de simetria era transmitido aos meus alunos de forma mais informal"*
D6	FG1	*"Mais simples…"*
D7	FG1	*"Logo no 1º ano nós começamos a trabalhar os frisos. Talvez não olhemos para o friso com uma simetria (…). Não os damos é nomes"*
D8	FG1	*"É verdade…"*[140]
D9	FG1	*"(…) não devo fazer de uma forma tão complicada, nessa faixa etária"*
		"(…) deve começar a abordar as simetria básicas (…) algumas já são demais"
		"(…) não assim em profundidade (…) não ir tanto ao pormenor"

[140] Em concordância com D9 (Investigador/FG1).

Apêndice 10

- **RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes no início da OFD**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D7	FG1	*“para eles (discentes) serem criativos”*
D9	FG1	*“com um património nosso, com riqueza realmente do nosso país (…) a partir daí nós podemos abordar as simetrias”*[141]
D10	FG1	*“é importante a gente começar a alertá-los”*
		“eu acho bastante interessante”
		“É o [ensino] que sai (extrapola) do manual”
		“Ele (o discente) vai apreciar num lado qualquer e começa a olhar e a ver que tá ali…
		“É bom eles começarem a perceber, a ver para além do óbvio”
Todos	FG1	“*Eu acho bem…”*[142]
Todos	DC	*“por muitas vezes os relatos pessoais revelavam a importância dada por eles à proposta a ser desenvolvida”*[143]

[141] Em resposta a questão “*(…) como é que você vê essa metodologia de abordar o ensino da simetria através (…) de recursos artísticos, patrimoniais e culturais?*” (Investigador/FG1), todos os docentes manifestam-se positivamente, em concordância.
[142] Em resposta a “*(…) como é que você vê essa metodologia de abordar o ensino da simetria através (…) de recursos artísticos, patrimoniais e culturais?*” (Investigador/FG1).
[143] Percepção do investigador durante o 1º trabalho presencial da OFD, na presença de todos os docentes (Investigador/DC).

Apêndice 11

- **Percepções de dificuldades discentes**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D3	FG1	*"há algumas que são tão complexas a nível de orientação espacial até…"*
		"pois não é só a idade que conta, não é… a maturidade conta"
	FG2	*"há um poder da abstração que eles (discentes) tem que ter"*
		"muitas crianças, neste momento, sofrem quase todas do mesmo mal, que é a falta de concentração"
D4	FG1	*"Algumas [simetrias] eu acho um bocadinho complexas até para estrutura mental da criança"*
D10	FG1	*"nós sabemos que eles têm dificuldades em dominar estes conceitos"*
		"a capacidade de abstração deles que não… [eles] não têm ainda"
		"(…) [seria] falta de capacidade de eles conseguirem dominar aqueles conceitos (de simetria)?"
		"alguns casos tem a ver com a dificuldade de interpretação"

Apêndice 12

- **Identificação de simetrias e eixos de simetria (PA)**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PA	*Identificar no plano eixos de simetria de figura*
		(…) identificar simetrias
D2	PA	*Identificar eixos de simetria em figuras no plano*
		Identificar simetrias em figuras diversas, nomeadamente, polígonos, frisos e outras figuras
		Traçar eixos de simetria
D4	PA	*Identificar nas figuras geométricas seus eixos de simetria*
		Descobrir diferentes tipos de simetria
		Descobrir a simetria de translação
		Descobrir a simetria de rotação
D6	PA	*Fazer transformações de figuras geométricas planas*
		Identificar simetrias
		Identificar eixos de simetria em figuras planas
		Identifica no plano figuras simétricas em relação a um eixo.
		Identificar e marcar eixos de simetria de reflexão em figuras no plano
D9	PA	*Identificar eixos de simetria em figuras planas*

Apêndice 13

- **Reflexão (PA); Rotação (PA); Translação (PA); Reflexão deslizante (PA)**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PA	*translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)*
D2	PA	*simetria de reflexão e de rotação*
D3	PA	*Simetria de reflexão*
D4	PA	*simetrias e rotações, translações e reflexões*
D6	PA	*simetrias (translação, reflexão, reflexão deslizante, rotação)*
D9	PA	*Eixos de simetria em figuras planas*

Apêndice 14

- **Recursos estáticos: espelho, mira, papéis, etc**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	PA	*Material de desenho (lápis, régua…)*
		Imagens em papel
		Espelhos
		miras
D3	PA	*imagens do manual*
		natureza
		papel
D4	PA	*papel vegetal*
D6	PA	*compasso*
		papel quadriculado
		papel vegetal
		mira
		espelhos
D9	PA	*Espelhos*
		Miras

Apêndice 15

○ **Menção a simetrias em figuras geométricas diversas**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PA	*Identificar simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)*
D2	PA	*Usando a régua, traçar eixos de simetria em polígonos regulares*
		Enumeração os eixos de simetria de cada polígono
		Identificação de simetrias de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação
D3	PA	*Identificação de simetrias na natureza*
		Marcar eixos de simetria nas imagens do manual
		Realizar a simetria com tintas e dobrar a folha ao meio
		Completar imagens de forma a obter figuras com simetria.
		Dobrar uma tira de papel várias vezes escolher um motivo, copiar e cortar o papel verificar as simetrias das figuras
D4	PA	*Jogo do espelho*[144]
		Descobrir diferentes tipos de simetria através da construção de "dobraduras" (simetria de reflexão- escrita dos nomes dos alunos na base de folhas dobradas de revistas; recorte dos mesmos; verificar as imagens obtidas/ nome espelhado).
		Descobrir a simetria de rotação – dobragem de um quadrado de papel ao meio (triângulo) e novamente ao meio (4 partes)
		Fazer recortes variados (obter bordados)
		Descobrir a simetria de translação - Distribuir folhas de revista e dobrar a folha várias vezes como se estivesse fazendo um leque largo; desenhar uma figura numa das faces. Recortar e desfazer o leque
		Experimentação de atividades no simulador de simetrias
		Completar figuras num plano de modo a que fiquem

[144] O docente D4 apresenta *Jogo do espelho* como uma de suas estratégias, porém não revela demais detalhes sobre o jogo.

		simétricas *com papel vegetal fazer rotações, translações e reflexões no quadrado*
D6	PA	*Traçar figuras simétricas em papel quadriculado*
		Traça os possíveis eixos de simetria de figuras
		Desenha no plano figuras simétricas relativas a um eixo vertical ou horizontal
		Reconhecimento e identificação no plano eixos de simetria de figuras.
		Identificação de simetrias de reflexão de eixo horizontal, simetrias de reflexão de eixo vertical, simetrias de rotação e simetrias de reflexão deslizante
		Utilização de dobragens para descobrir eixos de simetria em figuras geométricas
		Utilização de miras e espelhos para identificação de eixos de simetria e para construção de figuras simétricas
D9	PA	*Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, espelhos e miras, etc*

Apêndice 16

- **Menção direta a rosáceas, frisos e padrões**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PA	*Explorar frisos*
D2	PA	*Construir pavimentações com polígonos todos iguais*
D4	PA	*Construir frisos utilizando o papel vegetal (construção de uma figura e fazer a translação da mesma ao longo do friso)*
D6	PA	*Construção de padrões*
		Constrói rosáceas utilizando o compasso
		Construção de frisos identificando diferentes tipos de simetria
		Construção de frisos utilizando diferentes figuras como modelo

Apêndice 17

○ **Fonte de ideias para as primeiras versões das atividades**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	FG2	*"Eu pesquisei sobre tanto com os azulejos e a pavimentação"*
		"Eu preparei [os azulejos] para a reflexão e para a translação, e, a pavimentação [preparei] para a [reflexão] deslizante e para a rotação"
		"Eu acho que com os azulejos era mais fácil eles (discentes) aplicarem com a [reflexão] deslizante do que na pavimentação"
D3	FG2	*"vou utilizar os trabalhos que eu sei, que estão aqui feitos, muito interessantes…"*
		"Mas eu acho que vou avançar mais um bocadinho uma vez que posso utilizar outras coisas"
		"Tem coisas muito engraçadas (interessantes) a nível de frisos e de simetrias"
D4	FG2	*"Eu queria partir dum centro de interesse que… de algo em que já vos (aos discentes) disseste alguma coisa"*
		"Tem os azulejos dos interiores dos palácios, tem os tetos, tem as janelas, tem… tem imensas [possibilidades]…"

Apêndice 18

- **Dificuldades com a edição e referenciação das imagens**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	FG2	*“identificar (referenciação da página da web de onde a imagem foi utilizada) as pavimentações”*
D3	FG2	*“como é um tema muito artesanal e não com gráfico no sentido geométrico. Foi muito difícil para mim encontrar as simetrias”*
	QO	*“[dificuldade em] ter imagens com qualidade para os alunos identificarem, sem dificuldade, [o] tipo de simetria”*
	DC	*“Revela, então, que desistiu destes recursos [louças de Coimbra] e passou para as Mandalas”*
D4	FG2	*“ao ampliar a imagem para ir buscar algum elemento específico, desfigurava um bocadinho”*
	EI	*“são muito complexas (...). Não foi fácil ter aquela qualidade (...)”*[145]
		“dependendo do tema que nós abordamos a limitação é precisamente na aquisição das imagens”
D7	DC	*“revela sua dificuldade com alguns pormenores em algumas imagens utilizadas por ela”*[146]

[145] Em referência a algumas imagens utilizadas pelo próprio docente que estavam disponíveis durante a EI.
[146] Percepção do investigador durante o 7º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).

Apêndice 19

- **Potencialidades para o ensino**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Alertou-me para uma forma diferenciada de planificar as tarefas/ atividades ministradas sobre os conceitos de simetrias"*
		"Uma melhor exemplificação dos conceitos trabalhados"
D2	EI	*"acho que a partir daí possa-se fazer muitas coisas"*
	EI	*"enquanto que isso é muito mais amplo"*[147]
D3	FG2	*"E a diversidade dos trabalhos que vão ser apresentados, acho que é um complemento ao trabalho total (...). E, ao juntar tudo, acho que o produto só pode ser o melhor…"*
	QO	*"A abertura para o mundo artístico que cabe na disciplina de matemática e para o desenvolvimento de uma estética pessoal"*
D4	QO	*"aulas ficam mais atrativas e dinâmicas"*
	QO	*"mais criativa de abordar o assunto"*[148]
D6	QO	*"A parte prática, o uso dos materiais"*[149]
D9	DC	*"pode-se apresentar a matemática que há ao longo da história"*[150]

[147] Em detrimento, segundo o docente, à maneira como consta nos manuais escolares (Investigador/DC).
[148] Em resposta a "*Quais são as potencialidades destas atividades?*" (Investigador/QO).
[149] Em resposta a "*O que considera que possam ser as potencialidades das atividades utilizadas?*" (Investigador/QO).
[150] Comentado durante o 5º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).

Apêndice 20

- **Potencialidades para a aprendizagem**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	EI	*"abre-se ao mundo"*
	QO	*"Levar os alunos à aprendizagem de todos os conceitos de simetria"*[151]
D4	QO	*"levando os alunos a ter um maior interesse e motivação"*[151]
	FG2	*"E isso [proposta através das atividades elaboradas pelos próprios professores participantes da Oficina] desperta-lhes mais interesse, curiosidade…"*
	EI	*"mais motivadora para eles… (...) eles aprendem (...)"*[152]
D7	QO	*"A motivação para a matemática; a descoberta de regularidades; o desenvolvimento do espírito crítico; potencia a atenção/concentração"*[151]
	EI	*"motivar os alunos para aprendizagem, tornar os alunos observadores, mais observadores… alunos mais concentrados (...). E facilitar a aquisição de conceitos"*[153]
D9	QO	*"expandir horizontes" e aprender geometria de uma forma contextualizada e eficaz"*[151]

[151] Em resposta a "*O que considera que possam ser as potencialidades das atividades utilizadas?*" (Investigador/QO).
[152] Em resposta a "*Quais são as potencialidades destas atividades?*" (Investigador/EI).
[153] Em resposta a "*Quais foram as potencialidades destas atividades?*" (Investigador/EI).

Apêndice 21

- **Devido à pesquisa e diversidade de materiais encontrados**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	FG2	*“Eu gostei…”*
	QO	*“O meu grau de satisfação manifestou-se desde que comecei a fazer a pesquisa do material para a elaboração do PowerPoint e durante a preparação da aula”*
D3	FG2	*“Foi engraçado (interessnate) porque conheci um bocadinho mais do fundamento das mandálas”*
	DC	*“o aprofundamento ao tema a encantou”*[154]
D4	FG2	*“Eu própria fiquei deslumbrada com o que vi”*
		“eu achei interessante”
Todos	DC	*“A diversidade de recursos revelou o grande entusiasmo e envolvimento dos formandos na atividade”*[155]
D2, D3, D4, D6, D8 e D9	DC	*“Todos participaram ativamente, mostrando-se estarem bastante satisfeitos (...) com a recolha de motivos procedida para a confecção das atividades, com a criação do Banco de Atividades (...)”*[156]

[154] Revelação da própria docente durante o 7º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).
[155] Percepção do investigador durante o 3º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).
[156] Percepção do investigador durante o 5º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).

Apêndice 22

- **Observação/exploração de imagens, figuras, filme, vídeo**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PP	*Observação/exploração de imagens/ figuras variadas relacionadas com monumentos, azulejos, grades…*
		exploração pormenorizada de imagens
D2	PP	*Observação/exploração de um pequeno filme e imagens relacionadas com a manufatura de um azulejo*
		exploração pormenorizada de imagens
D3	PP	*Observação/exploração de imagens/figuras relacionadas com várias formas de arte (mandalas, ilustrações…)*
		Exploração de imagens
D4	PP	*Observação/exploração de um pequeno filme e imagens relacionadas com a arte / arquitetura, nomeadamente, palácios e mosaicos portugueses*
		exploração pormenorizada de imagens
D5	PP	*Observação/exploração de imagens de calçadas portuguesas*
		exploração pormenorizada de imagens
D6	PP	*Observação/exploração de imagens/figuras relacionadas com várias formas de arte (azulejos; imagens de monumentos…)*
		exploração pormenorizada de imagens
D7	PP	*Observa imagens em suporte papel e em PowerPoint*
D8	PP	*Observação/exploração de pequenos vídeos e imagens de Tecidos Kente do Quénia*
		exploração pormenorizada de imagens
D9	PP	*Observação/exploração de pequenos vídeos e imagens de Kolams de Tamil Nadu*
		Exploração pormenorizada de imagens

Apêndice 23

- **Identificação e criação de simetrias e eixos**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PP	*Criar simetrias*
D6	PP	*Criação de padrões*
		Construção de figuras com eixo de simetria
D7	PP	*Reflete sobre questões colocadas sobre as imagens*
		Inferir partindo da observação da imagem
		Traça os eixos de reflexão existentes na imagem
		Reconhece quando uma imagem possui simetria de reflexão

Apêndice 24

- **Uso de mira, régua e dobragem para reconhecer simetrias de reflexão**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D7	PP	*Utilizar a mira, verticalmente, como objeto que reflete metade da imagem, sobrepondo-a sobre a outra metade*
		Traçar, com a régua, uma linha reta sobre a posição em que a mira foi colocada
		Utiliza meios que comprovem a sua afirmação, como, por exemplo, a mira
		Reconhece quando uma imagem possui eixo de reflexão na diagonal, através da dobragem na diagonal de um quadrado e de um retângulo

Apêndice 25

- **Observação direta de atitudes discentes (PP)**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PP	*Participação nas atividades*
D2	PP	*Participação/interesse nas atividades iniciais*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula
D3	PP	*Participação nas atividades*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula
D4	PP	*Participação/interesse nas atividades iniciais*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula.
D5	PP	*Participação/interesse nas atividades iniciais*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula.
D6	PP	*Participação nas atividades*
		Empenho colocado na realização das tarefas
D7	PP	*Observação direta*
		Organização do trabalho
D8	PP	*Participação/interesse nas atividades iniciais*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula.
D9	PP	*Participação/interesse nas atividades iniciais*
		Participação no desenvolvimento do contexto geral da aula.

Apêndice 26

- **Observação de registros (PP)**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*
D2	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*
D4	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*
D5	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*
D6	PP	*Trabalho desenvolvido*
D7	PP	*Registos orais*
		Registos escritos
		Trabalho individual
		Apresentação do trabalho individual
D8	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*
D9	PP	*Realização e apresentação do trabalho final*

Apêndice 27

- **Satisfação docente nas implementações**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Foram enriquecedores e adequados"*[157]
D2	QO	*"Muito satisfeita"*[157]
	ODNP	*"Todo este início ocorre com bastante entusiasmo por parte da professora"*[158]
	EI	*"Sim… me senti (…) gostei muito"*[159]
D3	QO	*"Bastante satisfeita"*[157]
D4	QO	*"bastante bom"*[157]
	ODNP	*"A professora mostra-se satisfeita com a utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais"*
	EI	*"Sim, sim…(…) é mais motivador"*[160]
D5	QO	*"Muito bom"*[157]
D6	QO	*"Bastante bons porque além de motivadores permitiram-me uma maior variedade de recursos"*[157]
D7	QO	*"Excelente! Bastante elevada!"*[157]
	EI	*"É… excelente! O de melhor… de melhor que se pode imaginar"*[161]
D9	QO	*"Considero-me bastante satisfeita (…) Foi um trabalho profícuo"*[157]

[157] Em resposta a "*Como considera seu nível de satisfação na utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetrias?*" (Investigador/QO).
[158] Primeira aula de implementação (Investigador/ODNP).
[159] Em resposta a "*Você se considerou mais satisfeita por utilizar estes recursos, enquanto professor?*" (Investigador/EI).
[160] Em resposta a "*Você considerou-se mais satisfeita por utilizar recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetria?*" (Investigador/EI).
[161] Em resposta a "*O que achou da utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetria?*" (Investigador/EI).

Apêndice 28

- **Promoção de segurança na gestão da aula**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	QO	*"Considero-a suficiente para ensinar os conceitos de simetria exigidos pelo programa"*[162]
	EI	*"É… suficiente (…) foi bem sucedida…"*[163]
	ODNP	*"Todo este início ocorre com bastante entusiasmo por parte da professora, que reflete em curiosidade por parte dos alunos"*[164]
D3	QO	*"Considero que correu bem"*[162]
D4	QO	*"Penso que foi bastante positiva"*[162]
	ODNP	*"A dedicação da professora é notória"*[165]
	EI	*"Eu acho que foi bastante positiva"* [166]
	EI	*"houve muitos pormenores e uma abordagem diferente da minha parte em relação aos conteúdos que eu não tinha antes"*
		"ao fazermos a exploração no seio da turma, a ideia de um, mas um (inaudível) do outro enriquece muito a turma, e desperta"
D6	QO	*"Mais seguro e ciente daquilo que estava a transmitir aos alunos estar correto"*[162]
D7	ODNP	*"Os alunos não estão agitados como antes, mostrando-se mais curiosos e envolvidos com as atividades"*[167]
	EI	*"acho que as aulas ocorreram muito bem, que o conceito em si foi muito bem trabalhado"*[168]
D9	QO	*"fluiu com bastante naturalidade (…) houve bastante interesse e motivação por tudo o que estava a ser apresentado"*[162]

[162] Em resposta a "*De maneira geral, como você considera a aula realizada por você?*" (Investigador/QO).
[163] Em resposta a "*(…) como classifica a aula realizada?*" (Investigador/EI).
[164] Primeira aula de implementação (Investigador/ODNP).
[165] Avança-se com o slide sobre os Mosaicos Romanos de Conimbriga, Beja e outros (Investigador/ODNP).
[166] Em resposta a "*(…) como classifica essa aula de hoje?*" (Investigador/EI).
[167] Meado da primeira aula de implementação (Investigador/ODNP).
[168] Em resposta a "*(…) como classifica a aula realizada por você?*" (Investigador/EI).

Apêndice 29

- **Reconhecimento das atividades como atrativas para os discentes**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Sim, bastante"*[169]
D2	QO	*"Penso que sim"*[169]
D3	QO	*"Sim, uma vez que acharam os materiais diferentes"*[169]
D4	QO	*"Avaliando a reação e participação dos mesmos, poderei acrescentar que sim"*[169]
	EI	*"E dado coisas assim (as atividade que implementou antes da entrevista), de fato, mais elaboradas eu acho que lhes desperta muito para o ambiente, para tudo que vêem ao redor"*[170]
D5	QO	*"Sim, muito atrativas"*[169]
D6	QO	*"Sim"*[169]
D7	QO	*"Muito"*[169]
D9	QO	*"Sim, bastante"*[169]

[169] Em resposta a "*Considera que as atividades utilizadas na aula foram atrativas para os alunos?*" (Investigador/QO).
[170] Em resposta a "*O que achou da utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais para promover o ensino de simetria?*" (Investigador/EI).

Apêndice 30

- **Constatações docentes da boa receptividade discente**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Os alunos foram receptivos"*[171]
D2	QO	*"Muito boa"*[171]
	EI	*"Ficaram… eu acho que sim"*[172]
D3	QO	*"Os alunos mostraram-se motivados e interessados durante o desenvolvimento das tarefas"*
	QO	*"Reagiram muito bem"*[171]
D4	QO	*"Os alunos foram muito recetivos, interessados e participativos"*
	QO	*"Muito recetivos"*[171]
	EI	*"Aos conteúdos, portanto ao estudo destes conteúdos, sim…"*[171]
	ODNP	*"Os alunos manipulam muito bem os recursos e mostram-se muito interessados"*
D5	QO	*"Muito boa"*[171]
D6	QO	*"Os alunos mostraram-se motivados"*[171]
D7	QO	*"Excelente! (…) Os alunos/alunas estiveram bastante motivados, foram recetivos e bastante participativos*[171]
	EI	*"Sem dúvida"*[172]
	ODNP	*"Os alunos mostram-se bastante curiosos"*
D9	QO	*"Foram bastante recetivos. Adoraram as atividades"*[171]
	DC	*"(…) segundo D9, iniciadas as atividades, outros alunos começaram a se entusiasmar, de acordo com a revelação de outras imagens (…)"*[173]
		"(…) os alunos mostraram-se curiosos, o que associa ser pelo fato de utilizar figuras e descrições interessantes"[177]

[171] Em resposta a "*Como considera a receptividade (…) dos seus alunos e alunas à abordagem utilizada na implementação?*" (Investigador/QO).
[172] Em resposta a "*Considera que seus alunos ficaram mais receptivos e dispostos à aula devido a essa abordagem?*" (Investigador/EI).
[173] Percepção do investigador diante da alegação de D9 durante o 7º Trabalho Presencial da OFD (Investigador/DC).

Apêndice 31

- **Reconhecimento da aprendizagem docente de conhecimentos científicos, inclusive de conceitos específicos: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Sim"*[174]
		"simetria de reflexão deslizante"
D2	QO	*"Aprendi todos os conceitos corretamente"*[174]
		"aprendi noções que não dominava completamente"
		"Simetria de rotação e a simetria de reflexão deslizante"
	EI	*"aprendi muito"*[175]
	EI	*"corrigi o [conceito] da reflexão"*
D3	QO	*"Sim"*[174]
		"Fiquei mais esclarecida e tirei algumas dúvidas"
		"Simetria [de reflexão] deslizante"
D4	QO	*"sim, de certa forma"*[174]
		"aprendizagem de conceitos de forma mais estruturada"
	EI	*"Aprendi todos eles, eu acho…"*[175]
D5	QO	*"Sim"*[174]
		"Percebi melhor os conceitos"
		"Simetrias de translação e rotação"
D6	QO	*"Sim"*[174]
		"As dúvidas que tinha foram dissipadas"
		"simetria de reflexão deslizante"
D7	QO	*"Sim"*[174]

[174] Em resposta a "*Aprendeu algum conceito de simetria que até ao momento não tinha aprendido ou utilizava-o de forma incorreta?*" (Investigador/QO).
[175] Em resposta a "*(…)aprendeu algum conceito de simetria que até ao momento não tinha aprendido ou utilizava de forma incorreta?*" (Investigador/EI).

		"reflexão deslizante"
	EI	*"Foi clarificado… foi clarificado… (…) E fomos bem esclarecidos, isso sem dúvida"*[176]
		"Sobretudo a deslizante"
D9	QO	*"Fiquei mais esclarecida"*[174]
D2, D3, D4, D6, D8 e D9	DC	*"pareceu-nos haver uma evolução considerável na aquisição dos conceitos ao longo das sessões anteriores"*[177]

[176] Em resposta a "*E a diferenciação entre isometria e simetria?*" (Investigador/EI).
[177] Percepção do investigador durante o 5º trabalho presencial (Investigador/DC).

Apêndice 32

- **Impacto positivo da aprendizagem de conhecimentos científicos na autoconfiança**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D3	FG2	*"Eu não vou dar (lecionar) as simetrias com os olhos do ano passado"*
D4	FG2	*"eu tenho é, neste momento, mais ferramentas para desenvolver o conteúdo e para… de lhes (aos discentes) passar a informação"*
	QO	*"proporcionou-me um conjunto de ferramentas para abordagem dos conteúdos em questão"*
D6	QO	*"Penso ter sido bastante benéfico na minha autoconfiança relativamente às simetrias"*
		"deu-me segurança"
D9	FG2	*"é, para nós, uma questão de segurança [em lecionar os conceitos de simetria] não é (?)"*[178]
	QO	*"Sinto-me, mais segura e confiante no que às simetrias diz respeito"*
		"mais confiante para poder ensiná-los"
D2, D3, D4, D6, D8 e D9	DC	*"Todos mostraram-se bastante entusiasmados por estarem respondendo as questões com maior segurança e percepção de aprendizagem dos conceitos desta temática"*[179]

[178] Em resposta a "*E hoje se sentem mais seguros, então?*" (Investigador/FG2) e "*Teve um avanço não é?*" (Investigador/FG2), relativamente a aquisição de conhecimento científico durante a OFD. Todos manifestam-se afirmativamente após a colocação de D9

[179] Percepção do investigador durante o 5º trabalho presencial da OFD (Investigador/DC).

Apêndice 33

- **Satisfação docente com as características da OFD**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*“Muito boa”*[180]
D2	QO	*“Muito satisfeita”*[180]
D4	QO	*“bastante satisfeita”*[180]
D6	QO	*“Estive motivado”*
D7	QO	*“Excelente! Bastante elevada!”*[180]
	EI	*“É uma formação muito enriquecedora e muito prática, e muito útil (…) Não é uma formação só teórica. Teve a parte de teoria que nos fez… que nos mostrou que nós não éramos detentores do conhecimento, embaralhávamos os conceitos todos”*[181]
Todos	DC	*“Todos participaram ativamente, mostrando-se estarem bastante satisfeitos com a OFD”*[182]
		“Mostraram-se entusiasmado com a visita, a ocorrer na próxima sessão, ao Museu Monográfico de Conimbriga”[182]
	DC	*“Todos chegaram [no Museu Monográfico de Conimbriga] no horário previsto e mostravam-se empolgados”*[183]

[180] Em resposta a “*Como considera seu nível de satisfação pela participação na OF?*” (Investigador/QO).
[181] Em resposta a “*Você considerou-se mais satisfeita por utilizar os recursos artísticos, culturais e patrimoniais na promoção do ensino de simetrias?*” (Investigador/EI).
[182] Percepção do investigador durante o 5º trabalho presencial (Investigador/DC).
[183] Percepção do investigador durante o 6º trabalho presencial (Investigador/DC).

Apêndice 34

- **RACP como facilitadores da aprendizagem docente**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Sim"*[184]
D2	QO	*"Não"*[184]
	EI	*"Sim, claro que sim"*[185]
D3	QO	*"Sim"*[184]
D4	QO	*"constitui uma mais valia na minha prática pedagógica"*
	EI	*"Sim, sim… e da formação em si. Da formação e claro que implica a utilização dos recursos inseridos na formação, claro…"*[186]
	EI	*"Sim, sim… e da formação em si… Da formação e claro que implica a utilização dos recursos inseridos na formação, claro…"*
D5	QO	*"Sim"*[184]
D6	QO	*"Em parte, sim"*[184]
	QO	*"Desenvolvemos quer em nós quer nos alunos o espírito de observação e da percepção de regularidades"*
D7	QO	*"Sim"*[184]
	QO	*"É surpreendente as simetrias que encontramos ao nosso redor. Facilitou imenso a sua compreensão"*[187]
	EI	*"(…) sem dúvida foram uma mais-valia para a nossa facilitação de aquisição do conhecimento"*[188]
	DC	*"a partir de agora consegue perceber simetrias diversas no seu cotidiano, nomeadamente, no caminho à escola"*[189]
D8	DC	*"O docente disse que não percebia a presença destes*

[184] Em resposta a "*Associa esta compreensão somente agora devido à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?*" (Investigador/QO).
[185] Em resposta a "*(…) acha que também foi beneficiada por ter aprendido dessa forma também?*" (Investigador/EI).
[186] Em resposta a "*E associa essa compreensão, por sua parte, somente agora devido a utilização dos recursos?*" (Investigador/EI).
[187] Em resposta a "*Considera que os recursos artísticos, culturais e patrimoniais facilitam a melhor compreensão das simetrias?*" (Investigador/QO).
[188] Em resposta a "*Associa que a compreensão, somente agora, foi devido a utilização dos recursos?*" (Investigador/EI).
[189] Alegação de D7 durante o 7º trabalho presencial (Investigador/DC).

		conceitos no dia-a-dia e que agora os vê com facilidade"[190]
Todos	DC	*"Ainda na Casa dos Repuxos foi comentado diversas vezes pelos formandos que estavam percebendo os conceitos bem ali, diante dos seus olhos, o que não ocorreu nas visitas anteriores, por falta de conhecimento científico básico mesmo. Que agora podiam reparar detalhes matematicamente ricos, os quais antes não percebiam isso"*[191]
		"Foi muito interessante e esclarecedor. Detalhes que ainda não estavam claros pareciam ir esclarecendo-se em campo. A visita avançou pelas ruínas que também contêm mosaicos e novamente muitos detalhes foram sendo esclarecidos"[191]

[190] Ocorrência durante o 5º trabalho presencial (Investigador/DC).
[191] Ocorrência durante o 6º trabalho presencial, na visita ao Museu Monográfico de Conimbriga (Investigador/DC).

Apêndice 35

- **Melhorias alcançadas com as PP**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Foi mais enriquecedor, porque teve por base as estratégias indicadas nas sessões de formação / banco de atividades"*[192]
	QO	*"bastante explícito, com exemplos e materiais adequados ao nível etário"*[193]
D2	QO	*"muito mais completo"*[192]
	QO	*"necessário à aprendizagem dos diversos conceitos de simetria"*[193]
	EI	*"mais bem sucedidos (…) o sucesso foi notório"*[194]
D3	QO	*"Foi muito mais consciente do que pretendia explorar e com recursos diferentes dos que tinha utilizado até então"*[192]
	QO	*"uma forma objetiva e clara"*[193]
D4	QO	*"Mais completo, mais ousado e dinâmico"*[192]
	QO	*"os objetivos foram cumpridos"*
	QO	*"mais além, contemplando mais conceitos do que o previsto no currículo"*[195]
	QO	*"Eficaz"*[193]
	EI	*"acrescentei-lhe sempre coisas novas e tô sempre a procurar"*[196]
	EI	*"Foi… foi…"*[197]
	EI	*"lhes estamos a mostrar que, de fato, a matemática está em todo lado… todo lado e a nossa volta…"*

[192] Em resposta a "*Como compara o planeamento utilizado para esta aula com os planeamentos utilizados anteriormente à OF para o ensino de simetrias?*" (Investigador/QO).
[193] Em resposta a "*Como considera o planeamento utilizado nesta aula?*" (Investigador/QO).
[194] Em resposta a "*(…) você acha que o planejamento feito para essa aula, com os recursos utilizados foram mais adequados?*" (Investigador/EI).
[195] Em resposta a "*Este planeamento contemplou todos os comceitos de simetria inerentes ao ano escolar?*" (Investigador/QO).
[196] Em resposta a "*Como você considera o planejamento utilizado por você?*" (Investigador/EI).
[197] Em resposta a "*Em relação aos planejamentos já utilizados por você pro ensino de simetrias antes da Formação de Professores, você considera que o que foi utilizado nessa aula foi mais adequado?*" (Investigador/EI).

D5	QO	*“Muito bom”*[192]
	QO	*“Muito bom”*[193]
D6	QO	*“Mais consistente e mais ciente de que as coisas correriam como o planeado”*[192]
	QO	*“simples mas adaptado à realidade”*[193]
D7	QO	*“Fantástico”*[193]
	EI	*“foi muito interessante e considerei que foi bem conseguido (…) [o plano de aula] em si, estava bem definido”*[198]
D9	QO	*“recorri à utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais para lecionar este conteúdo, ao contrário de planeamentos anteriores”*[192]
	QO	*“bastante adequado e facilitador da aprendizagem”*[193]

[198] Em resposta a *“Como você considera o planeamento utilizado por você para essa aula?”* (Investigador/EI).

Apêndice 36

- **Adequações de pormenores, necessárias à reutilização das PP, em função do contexto**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Possivelmente com novos recursos artísticos culturais e patrimoniais"*[199]
D2	QO	*"poderei fazê-lo dependendo dos alunos que terei no futuro"*[199]
	QO	*"Apenas limitaria o número de figuras na atividade 1 do PowerPoint (Simetria de reflexão)"*[200]
D3	QO	*"Apenas adaptar ao ano de escolaridade a que se destina"*[199]
D4	QO	*"o público alvo poderá desencadear outras abordagens e novas estratégias"*[199]
	EI	*"Para os pequeninos [utilizaria] uma coisa (…) mais adaptada (…) com imagens não tão elaboradas"*
		"novas imagens mais concretas"
D6	QO	*"Utilizaria mais formas de arte"*
D7	QO	*"a ordem das imagens apresentadas na atividade de grades de Angra do Heroísmo"*[200]
		"reduziria o número de imagens"[200]
		"alterava a ordem de apresentação das imagens na atividade de Brasões de Família"[200]
	EI	*"Talvez pegasse um ou dois exemplos de cada para não ser tão longo"*[201]
		"a ordem com que apresentei"[201]
D9	QO	*"de ano para ano irei recorrer a fontes/recursos diferentes para que eles possam perceber que as simetrias estão por toda a parte e por todo o mundo"*
	QO	*"Há sempre pequenas alterações que podem ser feitas"*[199]

[199] Em resposta a "*Faria alguma alteração no planeamento atual para reutilizá-lo futuramente? Que alterações?*" (Investigador/QO).
[200] Em resposta a "*Substituiria alguma atividade? Qual(is)?*" (Investigador/QO).
[201] Em resposta a "*Faria alguma alteração [na PP]?*" (Investigador/EI).

Apêndice 37

- **Reutilizações futuras das PP**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Sim"*[202]
D2	QO	*"Utilizarei no futuro"*[203]
D3	QO	*"Claro que sempre que volte a lecionar este conteúdo recorrerei a esta base de planeamento"*[203]
D4	QO	*"claramente"*[203]
	EI	*"Ah, claro! Vou utilizar sobretudo com os terceiros e quartos anos (…) vou utilizar sem dúvida alguma…"*[204]
D5	QO	*"Sim"*[203]
D6	QO	*"Sim"*[203]
D7	QO	*"Claro que sim. E nos próximos anos letivos (3.º e 4.º anos) utilizarei a mesma metodologia"*[203]
D9	QO	*"Sim, claro"*[203]

[203] Em resposta a "*Utilizaria este planeamento novamente?*" (Investigador/QO).
[204] Em resposta a "*Utilizaria esse planeamento novamente?*" (Investigador/EI).

Apêndice 38

- **Percepção, por parte do investigador, de aprendizagem discente dos conhecimentos científicos de simetrias**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D2	ODNP	*“Um dos alunos, que utilizava a imagem de uma estrela estampada em mosaico numa calçada portuguesa, percebeu que o número de ‘pontas’ da estrela é o mesmo número de sobreposições que ocorre quando se gira a imagem copiada no papel vegetal”*
D4	ODNP	*“Outro aluno vê pormenores em um friso na mesma janela”*
D4	ODNP	*“Dois alunos de uma mesma dupla percebem que as duas esferas armilares, uma em cada extremo superior, invalidam a simetria de reflexão da imagem, como um todo[205]. Demais alunos parecem que também já tinham percebido isto, e ainda indicam que, as esferas armilares em si, configuram de uma translação”*
D4	ODNP	*“Outros alunos começam a ver o mesmo, indicando que, para além de simetrias de reflexão, também há simetria de rotação”*
D4	ODNP	*“No friso apresentado, os alunos reconhecem que há simetria de rotação, reflexão e reflexão deslizante”*
D4	ODNP	*“os alunos são levados a perceber que a reflexão deslizante é uma combinação de reflexão com translação”*
D7	ODNP	*“Um aluno percebe um pequeno friso na parte de cima do brasão que faz com que tal imagem, como um todo, não admita simetria de reflexão. Excelente percepção!”*
D7	ODNP	*“Por fim, percebem que, considerando o brasão por completo não há simetria de reflexão”*
D7	ODNP	*“Uma aluna percebe um pequeníssimo friso no segundo brasão da família Pereira que invalida a simetria de reflexão. Surpreendente!”*
D7	ODNP	*“A professora pergunta a um dos alunos qual a função do eixo de reflexão. O aluno responde, com pequenos erros conceituais, “(…) é que se não for igual não é um eixo de simetria. Apesar da resposta do aluno, ele parece ter compreendido”*
D7	ODNP	*“A aluna informa que vê um eixo de reflexão”*

[205] Os discentes acrescentam que as esferas armilares, em si, configuram de uma translação (Investigador/ODNP).

	“Outra imagem, dois eixos (vertical e horizontal) e todos percebem com extrema facilidade”
	“aos poucos vão percebendo que, de fato, apenas tem estes dois eixos, não admitindo eixos nas diagonais”
	“Tais imagens apresentam quatro eixos de simetria de reflexão, sendo dois destes em diagonais. Os alunos percebem com facilidade”

Apêndice 39

- **Reconhecimento docente de aprendizagem discente dos conhecimentos de simetrias**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"De uma maneira global, sim"*[207]
D2	QO	*"Sim, a maioria dos alunos aprendeu os conceitos abordados"*[207]
	EI	*"Aprenderam, sem dúvida"*[206]
D3	QO	*"Sim"*[207]
D4	QO	*"Penso que a maioria dos alunos fez uma aprendizagem efetiva"*[207]
	EI	*"Eu espero que sim. Eu acho que sim"*[208]
	EI	*"Sim, sim, sim… tudo que foge… tudo que é novo, que é novidade…"*[209]
	EI	*"Aprendem muito uns com os outros"*
D5	QO	*"Sim"*[207]
	QO	*"Os alunos perceberam os conceitos e aplicaram-nos"*[211]
D6	QO	*"A maioria deles sim"*[207]
	QO	*"dum modo geral, realizaram aprendizagem"*[210]
D7	QO	*"Completamente"*[207]
	QO	*"E o conceito foi claramente apreendido (…) Os alunos desceram ao pormenor na simetria de reflexão. Detectaram pormenores mínimos que, dentro da imagem, não possuíam simetria de reflexão"*[211]
	EI	*"Ah, sem dúvida… Eles quase que me dão a aula*

[206] Em resposta a "*Você considera que os alunos aprenderam melhor os conceitos?*" (Investigador/EI).
[207] Em resposta a "*Você considera que seus alunos tenham aprendido os conceitos abordados por você durante a aula?*" (Investigador/QO).
[208] Em resposta a "*Você considera que seus alunos tenham aprendido os conceitos abordados por você durante essa aula?*" (Investigador/EI).
[209] Em resposta a "*Você acha que mesmo que a utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais não seja através do computador, mas você acha que tem essa significância maior, possa causar um impacto maior na aprendizagem?*" (Investigador/EI).
[210] Em resposta a "*Como considera a receptividade e percepção de aprendizagem dos seus alunos e alunas à abordagem utilizada na implementação?*" (Investigador/QO).
[211] Em resposta a "*De maneira geral, como você considera a aula realizada por você?*" (Investigador/QO).

		(risos)”[208]
	EI	*“eles (os discentes) perceberam perfeitamente através da atividade”*
D9	QO	*“Sim”*[207]
	QO	*“Eles fizeram imensas perguntas sobre o país (Índia), sobre os Kolams, ou seja sobre a cultura/arte”*[211]

Apêndice 40

- **RACP como potenciadores de contextualização – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações**

Doc.	Instr.	Unidades de registro
D1	QO	*"Os recursos artísticos dão-nos (docentes e discentes) uma visão realista"*
		"aguçou a sua (dos discentes) curiosidade para a pesquisa do seu património cultural"
		"Foi mais enriquecedora para os alunos, pela panóplia de materiais/ recursos utilizados"
D2	QO	*"Tomar consciência que a matemática está em tudo o que nos rodeia"*
		"(…) apesar de se poderem utilizar outros recursos também válidos (Natureza, Ser Humano...)"[216]
	EI	*"começam a despertar para outros tipos de cultura e para outras culturas e para outras…"*
D4	FG2	*"Eu acho que sim…"*[212]
	EI	*"a arquitetura, é um elemento novo, é um elemento motivador"*
	QO	*"Os recursos artísticos representam um meio privilegiado para desenvolver com os alunos diferentes modos de expressão"*
		"a Arte proporciona o enriquecimento cultural do Homem, mobilizando a imaginação e a observação"
		"(…) possibilitamos aos educandos nova forma de compreender o Mundo, desenvolvendo o pensamento crítico e criativo, desenvolvendo a sensibilidade. (…)
		"podem funcionar como ponto de partida para estabelecer essa relação (geometria e outros domínios do saber)"
D6	FG2	*"[os RACP] fazem com que as pessoas olhem para arte com outros olhos"*
D7	QO	*"a matemática é baseada em padrões, no entanto, os padrões existem numa variedade de situações e realidades"*

[212] Em resposta a "*Considera que através da metodologia de ensino proposta nessa oficina (…) os seus alunos possam observar de forma diferente, de forma mais proveitosa o mundo que nos rodeia?*" (Investigador/FG2).

		"Uma relação enorme de descoberta (…) é surpreendente para o aluno"
D8	FG2	"*Quando [os discentes] saem com os pais, com a família… acabam por envolver a família [ao perceberem simetrias no cotidiano]*"
D9	FG2	*"vamos escorar (perceber a presença) quando vamos andar por aí pelo nosso Portugal ou por fora"*
		"coisas que antes nós não nos preocupávamos tanto ou não nos chamava tanta a atenção"
		"vemos as coisas com o olhar diferente, sobre outra perspectiva"
		"Eu acho que sim, claramente"[213]
		"Já sabem que também há algo em outros sítios (…) Em nível cultural não só, [mas também] em nível de arte…"
		"(…) eles (discentes) ficam com uma valorização completamente diferente de onde é que se pode encontrar [simetrias]…"
	QO	*"Muitos começam a tomar contacto com um mundo que pensavam não existir"*
		"Encontrando-se as simetrias em toda a parte, seja no corpo, na natureza, na arquitetura, arte, etc"
		"*Torna-os (discentes) mais próximos e familiarizados com a arte e com a cultura*"

[213] Em resposta a "*Considera que através da metodologia de ensino proposta nessa oficina (…) os seus alunos possam observar de forma diferente, de forma mais proveitosa o mundo que nos rodeia?*" (Investigador/FG2).

Apêndice 41

- **RACP como promotores de aprendizagem e competências discentes – considerações docentes em meados da OFD e após as implementações**

<table>
<tr><th>Doc.</th><th>Instr.</th><th>Unidades de registro</th></tr>
<tr><td rowspan="7">D1</td><td rowspan="7">QO</td><td>“Sim, bastante”[214]</td></tr>
<tr><td>“Sim”[215]</td></tr>
<tr><td>“Sim”[216]</td></tr>
<tr><td>“A utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais utilizados facilitou a explicação e exemplificação dos conceitos trabalhados com os alunos”</td></tr>
<tr><td>“Com os exemplos do património cultural utilizados e as estratégias de orientação para implementar os mesmos, os alunos atingiram mais facilmente a noção dos conceitos trabalhados”</td></tr>
<tr><td>“A concretização de alguns conceitos, in locus”</td></tr>
<tr><td>“Os recursos artísticos (…) ajudam-nos a fazer a ponte entre o conceito e a representação do mesmo”</td></tr>
<tr><td rowspan="6">D2</td><td rowspan="4">QO</td><td>“Sim, considero”[214]</td></tr>
<tr><td>“Sim”[215]</td></tr>
<tr><td>“Sim (…)”[216]</td></tr>
<tr><td>“Os recursos artísticos, culturais e patrimoniais são sinónimo de harmonia e beleza, daí motivar a aprendizagem das simetrias e consequentemente o gosto e interesse por aspetos ligados à arte”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EI</td><td>“eles aprendem muito mais facilmente”[217]</td></tr>
<tr><td>“Sim, sim, sim, sim…”[218]</td></tr>
</table>

[214] Em resposta a “*Acha que esta aprendizagem dos alunos possa ter sido facilitada pela utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais?*” (Investigador/QO).
[215] Em resposta a “*A utilização de recursos artísticos, culturais e patrimoniais pode tornar a aprendizagem de simetrias mais acessível aos alunos?*” (Investigador/QO).
[216] Em resposta a “*Considera que os recursos artísticos, culturais e patrimoniais facilitam a melhor compreensão das simetrias?*” (Investigador/QO).
[217] Em resposta a “*E o que você achou da utilização dos recursos artísticos, culturais e patrimoniais na promoção desse ensino de simetrias?*” (Investigador/EI).
[218] Em resposta a “*Então você considera que a utilização desses recursos torna o conceito mais acessível?*” (Investigador/EI).

		"Sim, foi, foi…"[219]
D3	FG2	*"creio, sinceramente, que vamos mostrar (ensinar) isso com outros olhos"*
	QO	*"Claro que sim"*[214]
		A relação do aluno com os recursos artísticos, culturais e patrimoniais são elementos que devem ser introduzidos desde cedo na educação das crianças"
		"(…) partindo de imagens mais ou menos conhecidas dos alunos e contextualizando essas mesmas imagens será mais motivador e a aprendizagem mais consistente e divertida"
		"Partindo do mundo real, o aluno realizará aprendizagens mais ricas e consistentes do mundo que o rodeia"
		"os alunos acabam por se envolver mais na atividade"
D4	FG2	*"Para além de eles (discentes) aprenderem um bocadinho mais de história e sobre Portugal. (…) verem que, de fato, existe um friso naquela parede, naquele teto, naquela janela…"*
	QO	*"Claramente"*[214]
		"Claramente que sim"[215]
		"Sim"[216]
		"o recurso à arte, em geral, pode assumir um papel importante (…) no desenvolvimento de capacidades nos alunos"
		"seguir orientações, ler mapas, visualizar objetos que são descritos apenas verbalmente... e o reconhecimento da simetria em figuras visa desenvolver esta faculdade (sentido espacial)"
		"A simetria é um conceito muito rico na área da matemática e da geometria, revelando-se uma mais-valia para ser trabalhada em sala de aula com os nossos alunos"
		"[o uso de RACP] constituirá um recurso importante para a abordagem"
		"pela sua originalidade, variedade e diferenciação, constituem um leque vasto de utilização nos vários contextos de ensino da matemática"

[219] Em resposta a "*Isso você considera que foi facilitado pela utilização dos recursos?*" (Investigador/EI).

		"proporciona aos alunos um espaço de invenção, autonomia, descoberta e o desenvolvimento da imaginação e criatividade"
		"permitindo-lhes estabelecer, muitas vezes, a relação dos elementos visuais desses recursos, bem como as técnicas usadas, com o contexto social, cultural e histórico dos próprios"
		Dar à geometria, e neste caso concreto à simetria, um sentido mais formal e mais lúdico pode despertar nos alunos maior interesse e gosto pela matemática e fazer com que a aprendizagem aconteça, de fato"
	EI	*"Sem dúvida!"*[220]
		"Sim, sim… Sim, sem dúvida"[221]
		"Sim, acho que não vão esquecer, não é…"[222]
		"(…) [os discentes] ficam mais espertos"
		"(…) eles (os discentes) despertam muito e aprendem muito com os pares"
D5	QO	*"Sim. Sem qualquer dúvida"*[214]
		"Sim"[215]
		"Sim"[216]
		"Conseguimos visualizar melhor com exemplos [de RACP]"
D6	FG2	*"aprendem (discentes) a olhar para as coisas com alguma motivação, não é (?), com algum objetivo, de descobrir alguma coisa…"*
	QO	*"Sim"*[214]
		"(…) despertar-lhe maior interesse"
		"O facto de poder contatar com arte e o belo motiva-os e, a motivação é essencial na aprendizagem"
		"[os discentes] Estiveram atentos e deram o seu melhor"
		"Desenvolvemos quer em nós quer nos alunos o espírito de observação e da percepção de regularidades"

[220] Em resposta a "*Mas acredita que essa aprendizagem pode ter sido facilitada pela utilização dos recursos?*" (Investigador/EI).
[221] Em resposta a "*Você acha que com essa utilização, desses recursos, a aprendizagem pode ser mais acessível aos alunos?*" (Investigador/EI).
[222] Em resposta a "*Considera que seus alunos ficaram mais receptivos e dispostos à aula devido essa abordagem?*" (Investigador/EI).

		“desperta mais o interesse”
D7	QO	*“Os alunos aderiram bem a estas atividades”*
		“Sem dúvida alguma”[214]
		“[os discentes] descobrem a matemática no meio envolvente e motivam-se para procurar mais. (…) Passam a descobrir simetrias em grande parte do ambiente envolvente”
		“Muito mais acessível. (…) O conceito torna-se facilmente apreendido e compreendido pelos alunos”
		“Facilitam imenso”
	EI	*“Só pode… só pode… (risos)”*[223]
		“para atingirmos os nossos conceitos, quer matemáticos quer de outra ordem, é… outra disciplina”
		“Porque eles vêem no concreto. Eles olham e vêem”
		“Muito engraçado é eles depois comentarem entre eles: Ó, ali tá uma simetria”. Nós vamos a qualquer lado (refere-se aos passeios de campo com os alunos) “Olha, aqui está uma simetria. Quando vêem uma imagem… desenhada no chão, eles perguntam se tem simetria”
D8	FG2	*“para além de aprenderem conteúdos matemáticos desperta o gosto pela arte”*
D9	QO	*“Sim”*[214]
		“Sim, absolutamente”[216]
		“faz todo o sentido que a aprendizagem deste conceito se faça a partir destes recursos”

[223] Em resposta a *“Acha que essa aprendizagem deles possa ter sido facilitada pela utilização dos recursos?”* (Investigador/EI).

Apêndice 42

Cronograma da investigação

		BIMESTRES																	
		2015/2016						2016/2017						2017/2018					
		SET OUT	NOV DEZ	JAN FEV	MAR ABR	MAI JUN	JUL AGO	SET OUT	NOV DEZ	JAN FEV	MAR ABR	MAI JUN	JUL AGO	SET OUT	NOV DEZ	JAN FEV	MAR ABR	MAI JUN	JUL AGO
ETAPAS	Seminários Obrigatórios																		
	Elaboração do Projeto																		
	Qualificação Doutoramento																		
	Intervenção (OFD)																		
	Mobilidades Erasmus+																		
	Produção de artigos																		
	Participação em eventos																		
	Defesa da Tese																		