

Bruna Rodrigues

Operadores aleatórios na modelação de processos autorregressivos de valores inteiros

Dissertação de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Estatística, Otimização e Matemática Financeira, orientada pelas Professoras Doutoras Maria da Graça Temido Mendes e Cristina Maria Tavares Martins e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Julho 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Operadores aleatórios na modelação de processos autorregressivos de valores inteiros

Bruna Rodrigues



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Julho 2017

Agradecimentos

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Maria da Graça Temido Mendes e Professora Doutora Cristina Maria Tavares Martins, agradeço a disponibilidade e o apoio fornecidos para a realização deste trabalho.

Ao Departamento de Matemática, agradeço as condições de trabalho.

Agradeço à minha família por todo o apoio ao longo dos anos. Sem eles não teria chegado até aqui.

Por último, agradeço aos meus amigos, colegas e a todos que me ajudaram de alguma forma.

Resumo

Muitos são os fenômenos e atividades que geram séries temporais de valores inteiros não negativos. A modelação apropriada das respectivas observações exclui os modelos clássicos, baseados em processos reais, como os modelos ARMA. Neste contexto existe já uma vasta classe de modelos de valores inteiros, entre os quais se encontram, por exemplo, os modelos INARMA, construídos a partir de operações aleatórias inteiras que substituem a multiplicação escalar usual.

No presente trabalho, são estudados três modelos desta classe, os modelos autorregressivos INAR(1), NGINAR(1) e DCINAR(1), os quais são funcionalmente idênticos embora construídos a partir de operadores aleatórios diferentes. Começa-se por estudar os operadores aleatórios subjacentes a estes três modelos, estabelecendo as propriedades necessárias aos resultados subsequentes.

Depois de estabelecida a estacionaridade dos processos e obtidos os primeiros momentos, caracteriza-se a relação entre as distribuições marginais do processo principal e do processo residual, considerando alguns casos particulares. No primeiro modelo, INAR(1), é considerado o caso em que o processo principal tem distribuição marginal de Poisson bem como o caso em que tal distribuição é geométrica. Nos outros dois modelos, NGINAR(1) e DCINAR(1), considera-se o caso em que a distribuição marginal do processo principal é geométrica.

Por último, considerando as distribuições marginais acima referidas para o processo principal, obtêm-se estimadores para os parâmetros dos modelos estudados e aplicam-se os resultados a uma série temporal observada.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Operadores Aleatórios	3
2.1 Função geradora de probabilidades	3
2.2 Operador Aleatório Binomial	4
2.3 Operador Aleatório Binomial Negativo	7
2.4 Operador Aleatório Binomial Generalizado	10
3 Modelos AR de valores inteiros	17
3.1 Cadeia de Markov Homogénea	17
3.2 Definição e Propriedades do Modelo INAR(1)	18
3.3 Definição e Propriedades do Modelo NGINAR(1)	25
3.4 Definição e Propriedades do Modelo DCINAR(1)	29
4 Estimação	35
4.1 INAR(1) de Poisson	35
4.1.1 Estimadores de Yule–Walker	35
4.1.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais	35
4.1.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança	36
4.2 INAR(1) Geométrico	37
4.2.1 Estimadores de Yule–Walker	37
4.2.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais	37
4.2.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança	37
4.3 NGINAR(1)	38
4.3.1 Estimadores de Yule–Walker	38
4.3.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais	38
4.3.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança	38
4.4 DCGINAR(1)	38
4.4.1 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais	38
4.4.2 Estimadores da Máxima Verosimilhança	39

4.5	Aplicação	40
	Bibliografia	43
	Anexo A Código em R	45

Lista de Figuras

4.1	Trajectoria amostral da série de dados relativos a ofensas sexuais	40
-----	--	----

Lista de Tabelas

4.1	Estimativas da máxima verosimilhança	41
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

Muitas das séries temporais são, pela sua natureza, constituídas por variáveis aleatórias (v.a.'s) inteiras não negativas. Este tipo de dados surge naturalmente associado a processos de contagem, os quais ocorrem em áreas tão vastas como Fiabilidade, Demografia, Sismologia, Hidrologia, Finanças e Desporto. Para este tipo de observações, é de todo o interesse o estudo de métodos de modelação e análise adequados ao caso discreto.

Nas últimas décadas tem-se registado um enorme interesse por séries temporais de v.a.'s inteiras e existe já um leque muito alargado de resultados no que respeita à modelação e à previsão dos fenómenos em apreciação.

De entre as várias classes deste tipo de modelos de contagem que se podem encontrar na literatura, destaca-se uma classe gerada a partir de operadores aleatórios aplicáveis a inteiros, denominados usualmente por operadores *thinning*. Com efeito, o primeiro passo para alicerçar estes modelos consistiu em encontrar uma operação que pudesse substituir a operação multiplicação de um número real por uma v.a. real, por uma outra operação entre um escalar real e uma v.a. inteira não negativa, cujo resultado ainda fosse um número inteiro não negativo. Em geral, esta operação, por agora denotada por \otimes , associa a um escalar e a uma v.a. inteira não negativa a soma de v.a.'s identicamente distribuídas (i.d.) que podem ser ou não independentes. Concretamente,

$$(\alpha, X) \longrightarrow \alpha \otimes X = \sum_{i=1}^X Y_i(\alpha),$$

onde $\{Y_i(\alpha)\}$ é um sucessão de v.a.'s i.d., com distribuição dependente de α , e independente de X . Com esta operação foi possível construir modelos análogos aos modelos autorregressivos de média móvel, usualmente designados modelos ARMA, bem como a algumas das suas generalizações.

Neste trabalho são estudados os modelos autorregressivos de inteiros INAR(1), NGINAR(1) (*New Geometric INAR(1)*) e DCINAR(1) (*Dependent Counting INAR(1)*) que foram introduzidos na literatura, respetivamente, por Al-Osh e Alzaid (1987)[1], Ristić, Bakouch e Nastić (2009)[2], Ristić, Nastić e Ilić (2013)[3]. Os processos subjacentes a estes modelos são definidos por

$$X_n = \alpha \otimes X_{n-1} + \varepsilon_n.$$

No primeiro modelo, o símbolo \otimes representa o operador aleatório binomial que corresponde ao caso em que a sucessão $\{Y_i(\alpha)\}$ tem margens independentes com lei de Bernoulli, no segundo modelo \otimes representa o operador aleatório binomial negativo, caso em que $\{Y_i(\alpha)\}$ tem margens independentes com lei geométrica, e no terceiro modelo o operador em causa é designado por operador binomial generalizado e corresponde à situação em que as margens da sucessão $\{Y_i(\alpha)\}$ seguem uma lei de Bernoulli e têm uma determinada estrutura de dependência. Em todos os casos, $\{\varepsilon_n\}$, o processo residual, é constituído por v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Os operadores acima referidos são definidos no Capítulo 2, sendo ainda estudadas as suas propriedades, muitas das quais são demonstradas com recurso à função geradora de probabilidades de uma v.a. discreta. Verifica-se que o operador aleatório binomial é um caso particular do operador aleatório binomial generalizado, apresentando-se algumas relações entre estes dois operadores.

No Capítulo 3 são apresentados os modelos anteriormente mencionados e estudadas as suas propriedades de estacionaridade forte e fraca. São ainda caracterizadas as distribuições marginais do processo $\{\varepsilon_n\}$, considerando que o processo $\{X_n\}$ tem distribuição marginal geométrica ou de Poisson no caso INAR(1) e geométrica nos outros dois casos.

A estimação dos parâmetros dos modelos estudados é abordada no Capítulo 4, considerando para o processo $\{X_n\}$ as distribuições marginais atrás referidas. Apresentam-se os estimadores de Yule-Walker no caso dos modelos INAR(1) e NGINAR(1) e, para todos os modelos são obtidos explicitamente os estimadores dos mínimos quadrados condicionais. Também para todos os modelos é definida a função de log-verosimilhança que, através da utilização de software adequado, permite obter as estimativas da máxima verosimilhança para os parâmetros de tais modelos. Por fim, os resultados obtidos são aplicados a uma série temporal observada.

A figura da capa foi adaptada a partir de “ <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/originals/3f/64/95/3f6495b3ba6be43f1fcb5a4aba3e831a.jpg> ”.

Capítulo 2

Operadores Aleatórios

Neste capítulo são introduzidos os operadores aleatórios considerados neste trabalho e são estudadas as suas propriedades fundamentais. A Secção 2.1 é dedicada à função geradora de probabilidades de uma v.a., uma vez que muitas daquelas propriedades são demonstradas com recurso a esta função.

2.1 Função geradora de probabilidades

Nesta secção, define-se a função geradora de probabilidades de uma variável aleatória e apresentam-se alguns casos particulares, que serão úteis neste trabalho.

Definição 2.1. Seja X uma variável aleatória real (v.a.r.). A **função geradora de probabilidades** de X é dada por $\psi_X(s) = E(s^X)$, para os valores reais s tais que esta esperança matemática existe.

A função geradora de probabilidades de uma v.a. discreta X , de suporte S_X , é definida por

$$\psi_X(s) = E(s^X) = \sum_{k \in S_X}^{+\infty} P(X = k)s^k.$$

Esta função caracteriza a lei de probabilidade de X , uma vez que duas v.a.'s têm a mesma distribuição se e só se as suas funções geradoras de probabilidades são coincidentes. Além disso, para v.a.'s inteiras

não negativas, tem-se $P(X = k) = \frac{\psi_X^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in S_X$.

Dada a sua definição, a função geradora de probabilidades é muito útil para determinar as leis de probabilidade de somas de v.a.'s inteiras independentes.

Exemplo 1. Uma v.a.r. X segue uma lei de Bernoulli de parâmetro p (escreve-se $X \sim \mathcal{B}(p)$), com $p \in]0, 1[$, se X é discreta de suporte $\{0, 1\}$ com $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$. Assim, a função geradora de probabilidades da variável X é dada por

$$\psi_X(s) = sp + 1 - p. \tag{2.1}$$

Exemplo 2. Uma v.a.r. X segue uma lei geométrica de parâmetro p (escreve-se $X \sim \mathcal{G}(p)$), com $p \in]0, 1[$, se X é discreta de suporte \mathbb{N}_0 com $P(X = k) = p^k(1 - p)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Então, a função geradora

de probabilidades de uma v.a.r. geométrica de parâmetro $p \in]0, 1[$ é dada por

$$\psi_X(s) = \frac{1-p}{1-sp}. \quad (2.2)$$

Exemplo 3. Uma v.a.r. X segue uma lei binomial de parâmetros n e p (escreve-se $X \sim \mathcal{B}(n, p)$), com $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$, se X é discreta de suporte $\{0, 1, \dots, n\}$ com $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Então, a função geradora de probabilidades de uma v.a.r. binomial de parâmetros n , $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$ é dada por

$$\psi_X(s) = (1 - p(1-s))^n. \quad (2.3)$$

2.2 Operador Aleatório Binomial

Nesta secção introduz-se um operador aleatório definido a partir de uma sucessão de contagem formada por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei de Bernoulli e apresentam-se algumas das suas propriedades.

Definição 2.2. Dada uma v.a.r. discreta X , de suporte \mathbb{N}_0 , e um número real α , $\alpha \in [0, 1]$, o **operador aleatório binomial** é definido por

$$\alpha \circ X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X Y_i, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

onde $\{Y_i\} := \{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de v.a.r. i.i.d. com a lei de Bernoulli de parâmetro α e independentes de X .

A sucessão $\{Y_i\}$ é designada sucessão de contagem do operador aleatório. Assume-se em todos os resultados que $\{Y_i\}$ é independente de todas as variáveis envolvidas.

Note-se que, nos casos $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, $\mathcal{B}(0)$ e $\mathcal{B}(1)$ representam leis degeneradas em $\{0\}$ e $\{1\}$ respetivamente.

Ao longo deste trabalho, nas propriedades envolvendo a função ψ_X , assume-se que o seu argumento pertence ao correspondente intervalo de convergência.

Proposição 2.3. Seja X uma v.a.r. discreta de suporte \mathbb{N}_0 e α um número real, $\alpha \in [0, 1]$. Tem-se

1. $\psi_{\alpha \circ X}(s) = \psi_X(1 - \alpha + \alpha s)$;
2. $0 \circ X = 0$, q.c.;
3. $1 \circ X = X$, q.c.;
4. $\alpha \circ (\beta \circ X) \stackrel{d}{=} (\alpha\beta) \circ X$.

Demonstração. 1. Por definição de função geradora de probabilidades, tendo em conta que a sucessão de contagem $\{Y_i\}$ é constituída por v.a.'s i.i.d. com a lei $\mathcal{B}(\alpha)$, sendo também

independente de X , tem-se

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha \circ X}(s) &= E\left(E\left(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_X} \mid X\right)\right) = E\left(E\left(s^{Y_1+Y_2+\dots+Y_X}\right)\right) \\ &= E\left(E\left(s^{Y_1}\right) E\left(s^{Y_2}\right) \dots E\left(s^{Y_X}\right)\right) = E\left(\left(E\left(s^{Y_1}\right)\right)^X\right) \\ &= E\left((s\alpha + 1 - \alpha)^X\right) = \psi_X(s\alpha + 1 - \alpha).\end{aligned}$$

2. Pretende-se mostrar que $P(0 \circ X = 0) = 1$. Com efeito, sendo $\{Y_i\}$ i.i.d. com a lei $\mathcal{B}(0)$, obtém-se

$$\begin{aligned}P(0 \circ X = 0) &= P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = 0\right) = P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = 0, \bigcup_{x \in \mathbb{N}_0} \{X = x\}\right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = 0 \mid X = x\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^x Y_i = 0\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P(Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_x = 0) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} \left(\prod_{i=1}^x P(Y_i = 0)\right) P(X = x) = \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P(X = x) = 1\end{aligned}$$

uma vez que Y_1, \dots, Y_x são independentes e $P(Y_i = 0) = 1$, para $i \geq 1$. Fica demonstrada a propriedade.

3. De forma análoga à prova anterior, tem-se

$$\begin{aligned}P(1 \circ X = X) &= P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = X\right) = P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = X, X \in \mathbb{N}_0\right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = X \mid X = x\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^x Y_i = x\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{N}_0} P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_x = 1) P(X = x) = 1\end{aligned}$$

porque Y_1, \dots, Y_x são independentes e $P(Y_i = 1) = 1$, para $i \geq 1$.

4. Pela propriedade 1, vem

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha \circ (\beta \circ X)}(s) &= \psi_{\beta \circ X}(1 - \alpha + \alpha s) = \psi_X(\beta(1 - \alpha + \alpha s) + 1 - \beta) \\ &= \psi_X(\alpha\beta s - \alpha\beta + 1) = \psi_{(\alpha\beta) \circ X}(s).\end{aligned}$$

□

Proposição 2.4. Se X e Y são v.a.r. discretas de suporte \mathbb{N}_0 , independentes, e tais que as séries de contagem em $\circ X$ e $\circ Y$ são independentes, então

$$\alpha \circ (X + Y) \stackrel{d}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Y. \quad (2.4)$$

Demonstração. Uma vez que X e Y são v.a.r. independentes e as v.a.r. das sucessões de contagem associadas a $\alpha \circ X$ e a $\alpha \circ Y$ são independentes também $\alpha \circ X$ e $\alpha \circ Y$ são independentes, donde

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha \circ (X+Y)}(s) &= \Psi_{X+Y}(1 - \alpha + \alpha s) \\ &= \Psi_X(1 - \alpha + \alpha s) \Psi_Y(1 - \alpha + \alpha s) \\ &= \Psi_{\alpha \circ X}(s) \Psi_{\alpha \circ Y}(s) \\ &= \Psi_{(\alpha \circ X) + (\alpha \circ Y)}(s). \end{aligned}$$

□

Note-se que esta propriedade é facilmente generalizável a $\sum_{i=1}^n X_i$, sendo X_1, \dots, X_n v.a.r. independentes e tais que as sucessões de contagem associadas a $\circ X_1, \dots, \circ X_n$ são independentes.

Proposição 2.5. Seja X uma v.a.r. discreta de suporte \mathbb{N}_0 e α um número real, $\alpha \in [0, 1]$. Então, desde que os momentos envolvidos existam, tem-se

1. $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$;
2. $E((\alpha \circ X)^2) = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)E(X)$;
3. $V(\alpha \circ X) = \alpha^2 V(X) + \alpha(1 - \alpha)E(X)$.

Demonstração. 1. Uma vez que $\{Y_i\}$ é uma sucessão com margens i.i.d. com a lei $\mathcal{B}(\alpha)$ e independentes de X , tem-se

$$\begin{aligned} E(\alpha \circ X) &= E\left(\sum_{i=1}^X Y_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^X Y_i \mid X\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^X E(Y_i \mid X)\right] \\ &= E(XE(Y_1)) = E(\alpha X) = \alpha E(X). \end{aligned}$$

2. Uma vez que $\{Y_i\}$ é uma sucessão com margens i.i.d. com a lei $\mathcal{B}(\alpha)$ e independentes de X , obtém-se

$$\begin{aligned} E[(\alpha \circ X)^2] &= E\left[E((\alpha \circ X)^2 \mid X)\right] = E\left[V(\alpha \circ X \mid X) + (E(\alpha \circ X \mid X))^2\right] \\ &= E\left(\alpha(1 - \alpha)X + (\alpha X)^2\right) = \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2 E(X^2). \end{aligned}$$

3. Para provar esta propriedade basta invocar a fórmula de Koenig, usando as duas alíneas anteriores. De facto,

$$\begin{aligned} V(\alpha \circ X) &= E((\alpha \circ X)^2) - E^2(\alpha \circ X) = \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2E(X^2) - \alpha^2E^2(X) \\ &= \alpha(1 - \alpha)E(X) + \alpha^2V(X). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.6. Sejam X_1, \dots, X_r v.a.'s inteiras não negativas e $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, r$. Seja $\{Y_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ a sucessão de contagem associada a $\alpha_i \circ X_i$, $i = 1, \dots, r$. Se $\{Y_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ são mutuamente independentes e independentes de todas as v.a.'s X_i , $i = 1, \dots, r$, então

$$E\left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i \circ X_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right), \quad r \geq 1,$$

caso $E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right)$ exista.

Demonstração. Como $\{Y_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ são mutuamente independentes e independentes de todas as v.a.'s X_i , $i = 1, \dots, r$, tem-se

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i \circ X_i)\right) &= E\left[E\left(\prod_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{X_i} Y_j^{(i)}\right) \mid (X_1, \dots, X_r)\right)\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^{X_i} E\left(Y_j^{(i)} \mid (X_1, \dots, X_r)\right)\right] = E\left(\prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^{X_i} \alpha_i\right) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^r X_i \alpha_i\right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right) \end{aligned}$$

pela linearidade da esperança. □

Note-se que, desta proposição, resulta, com $r = 1$, $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$.

2.3 Operador Aleatório Binomial Negativo

Nesta secção define-se um operador aleatório a partir de uma sucessão de contagem constituída por variáveis aleatórias i.i.d. com uma lei geométrica e são apresentadas algumas das suas propriedades.

Definição 2.7. Dada uma v.a.r. discreta X de suporte \mathbb{N}_0 e um número real α , $\alpha \in [0, 1]$, o **operador aleatório binomial negativo** é definido por

$$\alpha * X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X W_i, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

onde $\{W_i\} := \{W_i, i \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de v.a.r. i.i.d. com a lei $\mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$ e independentes de X .

Em todos os resultados assume-se que a sucessão de contagem $\{W_i\}$ é independente de todas as variáveis envolvidas.

Proposição 2.8. Se existirem todos os momentos envolvidos, o operador aleatório binomial negativo tem as seguintes propriedades:

1. $\Psi_{\alpha * X}(s) = \Psi_X\left(\frac{1}{\alpha+1-s\alpha}\right)$;
2. $0 * X = 0$, q.c.;
3. $E\left((\alpha * X)^2\right) = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1+\alpha)E(X)$;
4. $V(\alpha * X) = \alpha^2 V(X) + \alpha(1+\alpha)E(X)$;
5. $E(Z(\alpha * X)) = \alpha E(ZX)$;
6. $E\left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i * X_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right)$, $r \geq 1$, se as sucessões de contagem $\{W_j^i\}_{j \geq 1}$, $i = 1, \dots, r$, são mutuamente independentes.

Demonstração. 1. Uma vez que $\{W_i\}$ é uma sucessão de v.a.r. i.i.d. com a lei $\mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ e independentes de X , decorre, de modo análogo à demonstração da propriedade 1 da Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha * X}(s) &= E(s^{\alpha * X}) = E[E(s^{\alpha * X} | X)] = E\left[E\left(s^{\sum_{i=1}^X W_i} | X\right)\right] \\ &= E\left[(E(s^{W_1}))^X\right] = \Psi_X\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right). \end{aligned}$$

2. Note-se que $\mathcal{G}(0)$ corresponde a uma lei degenerada em $\{0\}$. Assim, a demonstração deste resultado é análoga à da propriedade 2 da Proposição 2.3.

3. Como as margens de $\{W_i\}$ são i.i.d. com a lei $\mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, tem-se $E(W_i) = \alpha$ e $V(W_i) = \alpha(1+\alpha)$. Por analogia com a prova da propriedade 2 da Proposição 2.5, obtém-se

$$\begin{aligned} E\left[(\alpha * X)^2\right] &= E\left[E\left((\alpha * X)^2 | X\right)\right] \\ &= E\left[V(\alpha * X | X) + (E(\alpha * X | X))^2\right] \\ &= E\left(\alpha(1+\alpha)X + (\alpha X)^2\right) \\ &= \alpha(1+\alpha)E(X) + \alpha^2 E(X^2). \end{aligned}$$

4. Pela fórmula de Koenig e usando as propriedades anteriores obtém-se

$$\begin{aligned} V(\alpha * X) &= E((\alpha * X)^2) - E^2(\alpha * X) = \alpha(1+\alpha)E(X) + \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 E^2(X) \\ &= \alpha(1+\alpha)E(X) + \alpha^2 V(X). \end{aligned}$$

5. Tem-se

$$E(Z(\alpha * X)) = E(E(Z(\alpha * X) | (Z, X))) = E(E(\alpha ZX | (Z, X))) = E(\alpha ZX).$$

6. Procede-se de forma análoga à demonstração da Proposição 2.6. \square

Apesar de ser válida a igualdade $0 * X = 0$, a propriedade $1 \circ X = X$, *q.c.*, não tem homólogo no caso do operador binomial negativo. Na proposição seguinte caracteriza-se a distribuição da variável $1 * X$, no caso particular em que X segue a lei $\mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Proposição 2.9. Sejam X e Y v.a.'s independentes tal que X segue a lei $\mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ e Y segue a lei $\mathcal{G}\left(\frac{1+\mu}{2+\mu}\right)$. Então

$$1 * X \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{c.p. } \frac{1}{1+\mu} \\ X & \text{c.p. } \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2} \\ X + Y & \text{c.p. } \frac{\mu}{(1+\mu)^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

Demonstração. Com efeito, atendendo a que as margens da série $\{W_i\}$ são i.i.d. com a lei $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{1*X}(s) &= E\left(s^{\sum_{i=1}^X W_i}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(s^{\sum_{i=1}^k W_i}\right) P(X = k) \\ &= P(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(s^{\sum_{i=1}^k W_i}\right) P(X = k) \\ &= \frac{1}{1+\mu} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2-s}\right)^k \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k \frac{1}{1+\mu} \\ &= \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\frac{1}{2-s} \frac{\mu}{1+\mu}}{1 - \frac{\mu}{(2-s)(1+\mu)}} \\ &= \frac{1}{1+\mu} + \frac{\mu}{(1+\mu)^2} \frac{1}{1+\mu - \mu s} \left(\frac{(1+\mu)^2 - (1+\mu)\mu s}{2+\mu - (1+\mu)s}\right) \\ &= \frac{1}{1+\mu} + \frac{\mu}{(1+\mu)^2} \frac{1}{1+\mu - \mu s} \left(\mu + \frac{1}{2+\mu - (1+\mu)s}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\psi_Y(s) = \frac{1}{2+\mu - (1+\mu)s},$$

obtém-se

$$\psi_{1*X}(s) = \frac{1}{1+\mu} + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2} \psi_X(s) + \frac{\mu}{(1+\mu)^2} \psi_X(s) \psi_Y(s),$$

como se pretendia. \square

2.4 Operador Aleatório Binomial Generalizado

Nesta secção apresenta-se um operador aleatório definido a partir de uma sucessão de contagem formada por variáveis aleatórias identicamente distribuídas com uma lei de Bernoulli, mas dependentes.

Definição 2.10. Dada uma v.a.r. discreta X , de suporte \mathbb{N}_0 , e números reais α, θ , com $\alpha, \theta \in [0, 1]$, o **operador aleatório binomial generalizado** é definido por

$$\alpha \circ_{\theta} X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X U_i, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

sendo $\{U_i\} := \{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ uma sucessão de v.a.r. da forma

$$U_i = (1 - V_i)W_i + V_iZ,$$

onde

- $\{W_i\} := \{W_i, i \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de v.a.r. i.i.d. com a lei de Bernoulli de parâmetro α , $\alpha \in [0, 1]$;
- $\{V_i\} := \{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de v.a.r. i.i.d. com a lei de Bernoulli de parâmetro θ , $\theta \in [0, 1]$;
- Z é uma v.a.r. com distribuição de Bernoulli de parâmetro α ;
- as v.a.r. Z, W_i, V_j são independentes para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$ e X é independente da sucessão de contagem $\{U_i\}$.

Note-se que, se $\theta = 0$, então $V_i = 0$, *q.c.*, pelo que $U_i \stackrel{d}{=} W_i$, $i \in \mathbb{N}$. Neste caso, o operador aleatório binomial generalizado coincide com o operador aleatório binomial apresentado na Secção 2.2.

Como foi referido anteriormente, as variáveis U_i , $i \in \mathbb{N}$, da sucessão de contagem são i.d. com a lei de Bernoulli de parâmetro α . De facto, verifica-se facilmente que o seu suporte é $\{0, 1\}$, tendo-se

$$\begin{aligned} P(U_i = 1) &= P((1 - V_i)W_i + V_iZ = 1) \\ &= P(\{(1 - V_i)W_i = 0, V_iZ = 1\} \cup \{(1 - V_i)W_i = 1, V_iZ = 0\}) \\ &= P((1 - V_i)W_i = 0, V_iZ = 1) + P((1 - V_i)W_i = 1, V_iZ = 0) \\ &= P(\{V_i = 1, Z = 1\} \cup \{W_i = 0, V_i = 1, Z = 1\}) + \\ &\quad + P(\{V_i = 0, W_i = 1\} \cup \{V_i = 0, W_i = 1, Z = 0\}) \\ &= P(V_i = 1, Z = 1) + P(V_i = 0, W_i = 1) \\ &= P(V_i = 1)P(Z = 1) + P(V_i = 0)P(W_i = 1) = \alpha\theta + (1 - \theta)\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Tem-se ainda que, para $\theta \neq 0, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, as variáveis U_i , $i \in \mathbb{N}$, não são independentes, bastando para tal verificar que a covariância entre quaisquer duas dessas variáveis aleatórias não é

nula. De facto, para $i \neq j$, tem-se

$$\begin{aligned}
\text{cov}(U_i, U_j) &= \text{cov}((1 - V_i)W_i + V_iZ, (1 - V_j)W_j + V_jZ) \\
&= \text{cov}((1 - V_i)W_i, (1 - V_j)W_j) + \text{cov}((1 - V_i)W_i, V_jZ) + \\
&\quad + \text{cov}(V_iZ, (1 - V_j)W_j) + \text{cov}(V_iZ, V_jZ) \\
&= \text{cov}(V_iZ, V_jZ) \\
&= E(V_iZV_jZ) - E(V_iZ)E(V_jZ) \\
&= E(V_i)E(V_j)E(Z^2) - E(V_i)E(V_j)(E(Z))^2 \\
&= \theta^2V(Z) = \theta^2\alpha(1 - \alpha) \neq 0.
\end{aligned}$$

Proposição 2.11. A lei da v.a.r. $\alpha \circ_\theta X$ condicionada por X , $P_{\alpha \circ_\theta X|X}$, é caracterizada pela seguinte mistura

$$P_{\alpha \circ_\theta X|X} = (1 - \alpha)\mathcal{B}(X, \alpha(1 - \theta)) + \alpha\mathcal{B}(X, \alpha + \theta(1 - \alpha)).$$

Demonstração. Sejam $n \in S_X$ e $k \in S_{\alpha \circ_\theta X}$, onde S_X e $S_{\alpha \circ_\theta X}$ representam, respetivamente, os suportes das v.a.r.'s X e $\alpha \circ_\theta X$. Então, como X e $\{U_i\}$ são independentes,

$$P(\alpha \circ_\theta X = k | X = n) = P\left(\sum_{i=1}^X U_i = k | X = n\right) = P\left(\sum_{i=1}^n U_i = k\right).$$

Basta então verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a lei da v.a.r. $T_n = \sum_{i=1}^n U_i$ é uma mistura de leis binomiais dada por $(1 - \alpha)\mathcal{B}(n, \alpha(1 - \theta)) + \alpha\mathcal{B}(n, \alpha + \theta(1 - \alpha))$. Recorre-se à função geradora de probabilidades para fazer esta verificação. Note-se que o suporte da v.a.r. T_n é $\{0, 1, \dots, n\}$ e que $T_n = \sum_{i=1}^n (1 - U_i)W_i + ZS_n$, com $S_n = \sum_{i=1}^n V_i$. Então

$$\begin{aligned}
E(s^{T_n}) &= \sum_{k=0}^n s^k P(T_n = k) = \sum_{k=0}^n s^k P\left(\sum_{i=1}^n (1 - V_i)W_i + ZS_n = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^n s^k P\left(\sum_{i=1}^n (1 - V_i)W_i + ZS_n = k, \bigcup_{j=0}^n \{S_n = j\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n s^k P\left(\sum_{i=1}^n (1 - V_i)W_i + ZS_n = k, S_n = j\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n s^k P\left(\sum_{i=1}^n (1 - V_i)W_i + ZS_n = k | S_n = j\right) P(S_n = j) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n s^k P\left(\sum_{i:V_i=0}^n W_i + ZS_n = k | S_n = j\right) P(S_n = j).
\end{aligned}$$

Observe-se que $S_n = j$ se e só se existem $i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $V_i = 1, i \in \{i_1, \dots, i_j\}$ e $V_i = 0, i \notin \{i_1, \dots, i_j\}$. Então, tendo ainda em conta que a sucessão $\{V_i\}$ é independente de Z e de

$\{W_i\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
E(s^{T_n}) &= \sum_{j=0}^n P(S_n = j) \sum_{k=0}^n s^k P\left(\sum_{i=1}^{n-j} W_i + jZ = k\right) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j} E(s^{W_1 + \dots + W_{n-j} + jZ}) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j} E(s^{W_1}) \dots E(s^{W_{n-j}}) E((s^j)^Z) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j} (1-\alpha + \alpha s)^{n-j} (1-\alpha + \alpha s^j) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j ((1-\theta)(1-\alpha + \alpha s))^{n-j} (1-\alpha) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j ((1-\theta)(1-\alpha + \alpha s))^{n-j} \alpha s^j \\
&= (1-\alpha)(1-\alpha(1-\theta)(1-s))^n + \alpha(1-(\alpha + \theta - \alpha\theta)(1-s))^n.
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que

$$U_1 + \dots + U_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} T_{1,n}, & \text{c.p. } 1-\alpha \\ T_{2,n}, & \text{c.p. } \alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

com $T_{1,n} \sim \mathcal{B}(n, \alpha(1-\theta))$ e $T_{2,n} \sim \mathcal{B}(n, \alpha + \theta - \alpha\theta)$. □

A partir deste resultado deduzem-se os casos particulares apresentados na proposição seguinte.

Proposição 2.12. Seja X uma v.a.r. discreta de suporte \mathbb{N}_0 , e sejam α, θ números reais, $\alpha, \theta \in [0, 1]$. Então

1. $0 \circ_{\theta} X = 0, q.c.$;
2. $1 \circ_{\theta} X \stackrel{d}{=} X$;
3. $\alpha \circ_1 X \stackrel{d}{=} ZX$, onde Z segue a lei de Bernoulli de parâmetro α , $\alpha \in [0, 1]$, e é independente de X .

Demonstração. 1. Se $\alpha = 0$, de (2.6) obtém-se $\sum_{i=1}^n U_i \sim \mathcal{B}(n, 0)$, que é uma lei degenerada em $\{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
P(0 \circ_{\theta} X = 0) &= P\left(\sum_{i=1}^X U_i = 0\right) = P\left(\sum_{i=1}^X U_i = 0, \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X = n\}\right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^X U_i = 0 \mid X = n\right) P(X = n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^n U_i = 0\right) P(X = n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P(X = n) = 1.
\end{aligned}$$

2. Se $\alpha = 1$, por (2.6), tem-se $T_n = \sum_{i=1}^n U_i \sim \mathcal{B}(n, 1)$, ou seja $T_n = n$, *q.c.*, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}\psi_{1 \circ_{\theta} X}(s) &= E\left(s^{\sum_{i=1}^X U_i}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left(s^{\sum_{i=1}^n U_i}\right) P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(s^n) P(X = n) \\ &= E(s^X) = \psi_X(s).\end{aligned}$$

3. Se $\theta = 1$, então, de (2.6), tem-se que $T_n = \sum_{i=1}^n U_i$ é uma v.a.r discreta de suporte $\{0, n\}$ tal que $P(T_n = 0) = 1 - \alpha$ e $P(T_n = n) = \alpha$. Obtém-se assim

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha \circ_1 X}(s) &= E\left(s^{\sum_{i=1}^X U_i}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left(s^{\sum_{i=1}^n U_i}\right) P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(1 - \alpha)s^0 + \alpha s^n] P(X = n) \\ &= (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X = n) \\ &= (1 - \alpha) + \alpha \psi_X(s),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\alpha \circ_1 X &\stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{c.p. } 1 - \alpha \\ X, & \text{c.p. } \alpha \end{cases} \\ &\stackrel{d}{=} ZX,\end{aligned}$$

onde Z é uma v.a.r. independente de X tal que $Z \sim \mathcal{B}(\alpha)$.

□

Na proposição que se apresenta a seguir são estabelecidas algumas relações entre o operador aleatório binomial generalizado e o operador aleatório binomial.

Proposição 2.13. Seja X uma v.a.r. discreta de suporte \mathbb{N}_0 e sejam $\alpha, \theta, \beta, \delta$ números reais, $\alpha, \theta, \beta, \delta \in [0, 1]$. Considere-se que as sucessões de contagem associadas a $\alpha \circ_{\theta}$ e a $\beta \circ_{\delta}$ são independentes. Tem-se

$$1. \alpha \circ_{\theta} X \stackrel{d}{=} \begin{cases} (\alpha(1 - \theta)) \circ X, & \text{c.p. } 1 - \alpha \\ (\theta + \alpha(1 - \theta)) \circ X, & \text{c.p. } \alpha \end{cases}$$

$$2. \alpha \circ_{\theta} (\beta \circ_{\delta} X) \stackrel{d}{=} \begin{cases} (\alpha\beta(1-\theta)(1-\delta)) \circ X, & \text{c.p. } (1-\alpha)(1-\beta) \\ ((\theta + \alpha(1-\theta))\beta(1-\delta)) \circ X, & \text{c.p. } \alpha(1-\beta) \\ (\alpha(1-\theta)(\delta + \beta(1-\delta))) \circ X, & \text{c.p. } (1-\alpha)\beta \\ ((\theta + \alpha(1-\theta))(\delta + \beta(1-\delta))) \circ X, & \text{c.p. } \alpha\beta \end{cases}$$

Demonstração. 1. Uma vez que as variáveis da sucessão $\{U_i\}$ são independentes da v.a.r. X e atendendo à Proposição 2.11, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \circ_{\theta} X}(s) &= E[E(s^{\sum_{i=1}^X U_i} | X)] \\ &= E[(1-\alpha)(1-\alpha(1-\theta)(1-s))^X] + E[\alpha(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))^X] \\ &= (1-\alpha)\psi_X(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\psi_X(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s)) \\ &= (1-\alpha)\psi_{\alpha(1-\theta) \circ X}(s) + \alpha\psi_{(\alpha+\theta-\alpha\theta) \circ X}(s), \end{aligned}$$

o que representa o pretendido.

2. Pela propriedade anterior e pela propriedade 1 da Proposição 2.3, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \circ_{\theta} (\beta \circ_{\delta} X)}(s) &= (1-\alpha)\psi_{(\alpha(1-\theta)) \circ (\beta \circ_{\delta} X)}(s) + \alpha\psi_{(\alpha+\theta-\alpha\theta) \circ (\beta \circ_{\delta} X)}(s) \\ &= (1-\alpha)\psi_{\beta \circ_{\delta} X}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\psi_{\beta \circ_{\delta} X}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s)). \end{aligned}$$

Aplicando novamente as propriedades referidas atrás, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \circ_{\theta} (\beta \circ_{\delta} X)}(s) &= (1-\alpha)(1-\beta)\psi_{(\beta(1-\delta)) \circ X}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \\ &+ (1-\alpha)\beta\psi_{(\beta+\delta-\beta\delta) \circ X}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \\ &+ \alpha(1-\beta)\psi_{(\beta(1-\delta)) \circ X}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s)) + \\ &+ \alpha\beta\psi_{(\beta+\delta-\beta\delta) \circ X}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s)) \\ &= (1-\alpha)(1-\beta)\psi_{(\alpha(1-\theta)) \circ (\beta(1-\delta) \circ X)}(s) + (1-\alpha)\beta\psi_{(\alpha(1-\theta)) \circ ((\beta+\delta-\beta\delta) \circ X)}(s) + \\ &+ \alpha(1-\beta)\psi_{(\alpha+\theta-\alpha\theta) \circ (\beta(1-\delta) \circ X)}(s) + \alpha\beta\psi_{(\alpha+\theta-\alpha\theta) \circ ((\beta+\delta-\beta\delta) \circ X)}(s). \end{aligned}$$

Por fim, usando a propriedade 4 da Proposição 2.3, resulta

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \circ_{\theta} (\beta \circ_{\delta} X)}(s) &= (1-\alpha)(1-\beta)\psi_{(\alpha(1-\theta)\beta(1-\delta)) \circ X}(s) + (1-\alpha)\beta\psi_{(\alpha(1-\theta)(\beta+\delta-\beta\delta)) \circ X}(s) + \\ &+ \alpha(1-\beta)\psi_{((\alpha+\theta-\alpha\theta)\beta(1-\delta)) \circ X}(s) + \alpha\beta\psi_{((\alpha+\theta-\alpha\theta)(\beta+\delta-\beta\delta)) \circ X}(s). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.14. Sejam X e Y duas v.a.r. independentes, tais que as sucessões de contagem associadas a $\circ X$ e a $\circ Y$ são independentes e seja Z uma v.a.r. independente de X e Y , tal que $Z \sim \mathcal{B}(\alpha)$. Então

$$\alpha \circ_{\theta} (X + Y) \stackrel{d}{=} (Z\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X + (Z\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ Y.$$

Demonstração. Pela propriedade 1 da Proposição 2.13 e pela Proposição 2.4

$$\begin{aligned} \alpha \circ_{\theta} (X + Y) &\stackrel{d}{=} \begin{cases} (\alpha - \alpha\theta) \circ (X + Y), & \text{c.p. } 1 - \alpha \\ (\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ (X + Y), & \text{c.p. } \alpha \end{cases} \\ &\stackrel{d}{=} \begin{cases} (\alpha - \alpha\theta) \circ X + (\alpha - \alpha\theta) \circ Y, & \text{c.p. } 1 - \alpha \\ (\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X + (\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ Y, & \text{c.p. } \alpha \end{cases} \\ &\stackrel{d}{=} (Z\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X + (Z\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ Y. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.15. Sejam X_1, \dots, X_r v.a.'s inteiras não negativas, $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, r$, e $\theta \in [0, 1]$. Seja $\{U_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ a sucessão de contagem associada a $\alpha_i \circ_{\theta} X_i$, $i = 1, \dots, r$. Se $\{U_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ são mutuamente independentes e independentes de todas as v.a.'s X_i , $i = 1, \dots, r$, então

$$E \left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i \circ_{\theta} X_i) \right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i \right) E \left(\prod_{i=1}^r X_i \right), \quad r \geq 1,$$

desde que $E \left(\prod_{i=1}^r X_i \right)$ exista.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.6. □

Observe-se que, com $r = 1$, obtém-se a propriedade

$$E(\alpha \circ_{\theta} X) = \alpha E(X). \quad (2.7)$$

Por outro lado, como $1 \circ_{\theta} X \stackrel{d}{=} X$ resulta da proposição a propriedade

$$E(X(\alpha \circ_{\theta} Y)) = \alpha E(XY). \quad (2.8)$$

Proposição 2.16. Sejam X, Y v.a.r. discretas de suporte \mathbb{N}_0 e α, θ números reais, $\alpha, \theta \in [0, 1]$. Então, desde que os momentos envolvidos existam, tem-se

1. $E((\alpha \circ_{\theta} X)^2) = \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X)$;
2. $V(\alpha \circ_{\theta} X) = \alpha^2 V(X) + \alpha(1 - \alpha)\theta^2 E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X)$;
3. $cov(X, \alpha \circ_{\theta} Y) = \alpha cov(X, Y)$, desde que as v.a.r. da sucessão de contagem sejam independentes de X .

Demonstração. 1. Dado que as v.a.r. $\{U_i\}$ são identicamente distribuídas com a lei $\mathcal{B}(\alpha)$ e independentes de X , por (2.6) obtém-se

$$\begin{aligned}
E((\alpha \circ_{\theta} X)^2) &= E[E((\alpha \circ_{\theta} X)^2 | X)] = E[E((U_1 + \dots + U_X)^2)] \\
&= E[(1 - \alpha)(X(X-1)\alpha^2(1 - \theta^2) + X\alpha(1 - \theta)) + \\
&\quad + \alpha(X(X-1)(\alpha + \theta - \alpha\theta)^2 + X(\alpha + \theta - \alpha\theta))] \\
&= E[X^2(\alpha^2 + \theta^2\alpha^2 + \theta^2\alpha - 2\alpha^2\theta^2) + X(-\alpha + \alpha^2\theta^2 + \alpha - \alpha\theta^2)] \\
&= E[\alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)X^2 + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)X] \\
&= \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X).
\end{aligned}$$

2. Pela fórmula de Koenig e usando as propriedades anteriores, obtém-se

$$\begin{aligned}
V(\alpha \circ_{\theta} X) &= E[(\alpha \circ_{\theta} X)^2] - (E(\alpha \circ_{\theta} X))^2 \\
&= \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X) - \alpha^2(E(X))^2 \\
&= \alpha^2V(X) + \alpha(1 - \alpha)\theta^2E(X^2) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X).
\end{aligned}$$

3. Com as mesmas condições da alínea anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}
cov(X, \alpha \circ_{\theta} Y) &= E(X(\alpha \circ_{\theta} Y)) - E(X)E(\alpha \circ_{\theta} Y) \\
&= \alpha E(XY) - \alpha E(X)E(Y) = \alpha cov(X, Y),
\end{aligned}$$

por (2.7) e (2.8).

□

Capítulo 3

Modelos AR de valores inteiros

Os modelos autorregressivos (AR) clássicos não são adequados para modelar séries temporais de valores inteiros, uma vez que, geralmente, a multiplicação de um escalar real por um inteiro não é um número inteiro. Assim, com o propósito de obter uma modelação eficaz, surgiram várias classes de modelos que têm por base operadores aleatórios.

Neste capítulo, são apresentados três modelos autorregressivos de valores inteiros, de ordem 1, gerados a partir dos operadores aleatórios estudados no Capítulo 2.

3.1 Cadeia de Markov Homogénea

Com o objetivo de estudar algumas propriedades dos modelos a ser considerados, nomeadamente a sua estacionaridade forte, é apresentada esta secção introdutória sobre cadeias de Markov.

Definição 3.1. Um processo $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$, com espaço dos estados E finito ou infinito numerável é uma **cadeia de Markov** se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ tais que $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) > 0$, se tem

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Uma cadeia de Markov diz-se **homogénea** se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x, y \in E$ tais que $P(X_n = x) > 0$, se tem $P(X_{n+1} = y | X_n = x) = p_{xy}$, onde p_{xy} é uma função que só depende de x e de y (não depende de n).

Proposição 3.2. Uma cadeia de Markov, X , homogénea com margens i.d. é fortemente estacionária, i.e, X é tal que $P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$, para todo n em \mathbb{N} e para todo o h em \mathbb{Z} .

Demonstração. Usando a hipótese de o processo ser uma cadeia de Markov, tem-se

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) P(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento e tendo em conta a homogeneidade da cadeia vem

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) &= \\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \cdots P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) P(X_1 = x_1) \quad (3.1) \\ &= P(X_{n+1+h} = x_{n+1} | X_{n+h} = x_n) \cdots P(X_{2+h} = x_2 | X_{1+h} = x_1) P(X_{1+h} = x_1), \end{aligned}$$

atendendo a que as margens são i.d.. Mais, tratando-se de uma cadeia de Markov, esta última expressão é igual a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1+h} = x_{n+1} | X_{n+h} = x_n) \cdots P(X_{3+h} = x_3 | X_{2+h} = x_2) P(X_{2+h} = x_2, X_{1+h} = x_1) \\ &= P(X_{n+1+h} = x_{n+1} | X_{n+h} = x_n) \cdots P(X_{3+h} = x_3 | X_{2+h} = x_2, X_{1+h} = x_1) P(X_{2+h} = x_2, X_{1+h} = x_1) \\ &= P(X_{n+1+h} = x_{n+1} | X_{n+h} = x_n) \cdots P(X_{3+h} = x_3, X_{2+h} = x_2, X_{1+h} = x_1). \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento, obtém-se

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) \\ &= P(X_{n+1+h} = x_{n+1} | X_{1+h} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_n) P(X_{n+h} = x_n, \dots, X_{1+h} = x_1) \\ &= P(X_{1+h} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_n, X_{n+1+h} = x_{n+1}). \end{aligned}$$

□

3.2 Definição e Propriedades do Modelo INAR(1)

Nesta secção define-se um modelo de contagem construído a partir do operador binomial apresentado na Secção 2.2 e apresenta-se algumas das suas propriedades. Trata-se do modelo autorregressivo de valores inteiros de ordem 1, denotado por INAR(1).

Definição 3.3. O processo $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1) se admite a representação

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n \quad (3.2)$$

onde $\alpha \in]0, 1[$ e $\{\varepsilon_n\} := \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma sucessão de v.a.'s de valores inteiros não negativos i.i.d., de quadrado integrável, e independentes de X_{n-k} para $k \geq 1$.

Na proposição seguinte é estabelecida uma representação de $\{X_n\}$, em L^2 , envolvendo apenas o processo $\{\varepsilon_n\}$.

Proposição 3.4. Seja $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ um processo seguindo um modelo INAR(1), limitado em L^2 . Então

$$X_n = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}, \text{ em } L^2.$$

Demonstração. Seja $X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n$. Desenvolvendo esta representação, tem-se

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha \circ (\alpha \circ X_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n \\ &= \alpha \circ (\alpha \circ (\alpha \circ X_{n-3} + \varepsilon_{n-2}) + \alpha \circ \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n) \\ &= \alpha^k \circ X_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

repetindo o procedimento anterior. Por outro lado, para $k < \ell$, tem-se

$$\left\| \sum_{j=0}^k \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} - \sum_{j=0}^{\ell} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} \right\| = \left\| \sum_{j=k+1}^{\ell} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} \right\| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} \|\alpha^j \circ \varepsilon_{n-j}\|.$$

Por outro lado,

$$\|\alpha^j \circ \varepsilon_{n-j}\|^2 = E \left[(\alpha^j \circ \varepsilon_{n-j})^2 \right] = \alpha^{2j} E(\varepsilon_{n-j}^2) + \alpha^j (1 - \alpha^j) E(\varepsilon_{n-j}) \leq C \alpha^j,$$

onde C é uma constante positiva pois $E(\varepsilon_n^2)$ e $E(\varepsilon_n)$ existem e não dependem de n . Então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^k \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} - \sum_{j=0}^{\ell} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} \right\| &\leq C \sum_{j=k+1}^{\ell} \alpha^{j/2} = C (\sqrt{\alpha})^{k+1} \frac{1 - (\sqrt{\alpha})^{\ell-k}}{1 - \sqrt{\alpha}} \\ &= C \frac{\sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \left((\sqrt{\alpha})^k - (\sqrt{\alpha})^{\ell} \right) \rightarrow 0, \quad k, \ell \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Provou-se assim que, em L^2 , $\sum_{j=0}^k \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j}$ é uma sucessão de Cauchy, pelo que é convergente para

$\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j}$, uma vez que L^2 é um espaço completo.

Mais,

$$\|\alpha^k \circ X_{n-k}\|^2 = \alpha^{2k} E(X_{n-k}^2) + \alpha^k (1 - \alpha^k) E(X_{n-k}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty,$$

pois $E(X_{n-k}) \leq E(X_{n-k}^2) < C_1$, onde C_1 é uma constante.

Atendendo a que, em L^2 , $\alpha^k \circ X_{n-k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ e

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j} \rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j \circ \varepsilon_{n-j}, \quad k \rightarrow +\infty,$$

de (3.3) resulta o pretendido. □

De seguida, pretende-se mostrar que o processo definido por (3.2) é fortemente estacionário. Para tal, comece-se por provar que o processo INAR(1) é uma cadeia de Markov homogénea.

Proposição 3.5. O processo $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ definido por (3.2) é uma cadeia de Markov homogénea.

Demonstração. Comece-se por provar que o processo X é uma cadeia de Markov.

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\
&= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\sum_{i=1}^{x_n} Y_i + \varepsilon_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i) P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \\
&= P\left(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i\right),
\end{aligned}$$

pois ε_{n+1} é independente de X_0, \dots, X_n . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) &= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\sum_{i=1}^{x_n} Y_i + \varepsilon_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\
&= \frac{P(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i) P(X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\
&= P\left(\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{x_n} Y_i\right).
\end{aligned}$$

Logo, o processo é uma cadeia de Markov.

Como verificado acima, tem-se

$$P(X_{n+1} = x | X_n = y) = P\left(\varepsilon_{n+1} = x - \sum_{i=1}^y Y_i\right). \quad (3.4)$$

Porém $\{\varepsilon_n\}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d., pelo que esta última probabilidade depende apenas dos estados x e de y do processo. Assim, a cadeia de Markov é homogénea. \square

Proposição 3.6. O processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ seguindo um modelo INAR(1) é um processo fortemente estacionário.

Demonstração. Pela Proposição 3.4, as margens do processo são identicamente distribuídas. Sabe-se ainda que o processo é uma cadeia de Markov homogênea. Assim, o processo é fortemente estacionário. \square

Proposição 3.7. Sejam μ_ε e σ_ε , respetivamente, o valor médio e o desvio padrão da distribuição comum das variáveis da sucessão $\{\varepsilon_n\}$. Então as funções média e variância do processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ são definidas por

1. $E(X_n) = \frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}, n \in \mathbb{Z};$
2. $V(X_n) = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}, n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. 1. Como $X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n$, aplicando a esperança, obtém-se

$$E(X_n) = E(\alpha \circ X_{n-1}) + E(\varepsilon_n) = \alpha E(X_{n-1}) + \mu_\varepsilon.$$

Como $\alpha \in]0, 1[$, esta equação às diferenças converge para uma solução quando n tende para $+\infty$, obtendo-se de imediato $E(X_n) = \frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}$, uma vez que o processo é fortemente estacionário.

2. Pelo dito anteriormente consegue-se calcular o momento de segunda ordem do processo usando a seguinte equação de recorrência

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E[(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n)^2] = E[(\alpha \circ X_{n-1})^2] + 2E[(\alpha \circ X_{n-1})\varepsilon_n] + E(\varepsilon_n^2) \\ &= \alpha^2 E(X_{n-1}^2) + \alpha(1-\alpha)E(X_{n-1}) + 2E(\alpha \circ X_{n-1})E(\varepsilon_n) + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \\ &= \alpha^2 E(X_{n-1}^2) + \alpha\mu_\varepsilon + 2\alpha \frac{\mu_\varepsilon^2}{1-\alpha} + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Logo, vem

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \frac{\alpha\mu_\varepsilon}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha\mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha)\mu_\varepsilon + 2\alpha\mu_\varepsilon^2 + (1-\alpha)\sigma_\varepsilon^2 + (1-\alpha)\mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \\ &= \frac{(1-\alpha)(\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2)}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \frac{\mu_\varepsilon^2(1+\alpha)}{(1-\alpha^2)(1-\alpha)} \\ &= \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} + \frac{\mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Calcule-se agora a variância do processo.

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2} + \frac{\mu_\varepsilon^2}{(1 - \alpha)^2} - \left(\frac{\mu_\varepsilon}{1 - \alpha}\right)^2 = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2}.$$

□

Proposição 3.8. O processo definido por (3.2) é fracamente estacionário sendo a sua função de autocovariância dada por

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_0, X_h) = \alpha^{|h|}V(X_0), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Como o processo é fortemente estacionário e admite momento de segunda ordem, então é fracamente estacionário. Usando a igualdade (3.3), a função de autocovariância, para $h > 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_0, X_h) &= \text{Cov}\left(X_0, \alpha^h \circ X_0 + \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \circ \varepsilon_{h-i}\right) \\ &= \text{Cov}\left(X_0, \alpha^h \circ X_0\right) + \text{Cov}\left(X_0, \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \circ \varepsilon_{h-i}\right) \\ &= \alpha^h V(X_0) + \sum_{i=0}^{h-1} \text{Cov}(X_0, \alpha^i \circ \varepsilon_{h-i}) = \alpha^h V(X_0), \end{aligned}$$

uma vez que ε_{h-i} , $i = 0, \dots, h-1$, é independente de X_0 . Como a função de autocovariância é par, obtém-se o pretendido. □

Assim, a **função de autocorrelação** ρ do processo é dada por

$$\rho(h) = \alpha^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

tendo em conta que esta função é par.

Com o objetivo de caracterizar as distribuições marginais do processo INAR(1) em função da distribuição marginal de $\{\varepsilon_n\}$ apresenta-se o seguinte resultado.

Proposição 3.9. Se $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ segue um modelo INAR(1), então

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n}(1 - \alpha + \alpha s)\psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Demonstração. Como $X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n$, a função geradora de probabilidades é dada por

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n}(s) = \psi_{\alpha \circ X_{n-1}}(s)\psi_{\varepsilon_n}(s) = \psi_{X_{n-1}}(1 - \alpha + \alpha s)\psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Porém, como as margens do processo são identicamente distribuídas, $\psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n}(1 - \alpha + \alpha s)\psi_{\varepsilon_n}(s)$, ficando provado o pretendido. □

Na proposição seguinte são caracterizadas as probabilidades de transição de $\{X_n\}$.

Proposição 3.10. Considere-se um processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ a seguir um modelo INAR(1). A distribuição de X_n condicionada por X_{n-1} é dada por

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} P(\varepsilon_n = j-k), \quad i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Demonstração. Tem-se, de (3.4),

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= P\left(\varepsilon_n = j - \sum_{l=1}^i Y_l\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\sum_{l=1}^i Y_l = k, \varepsilon_n = j-k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\varepsilon_n = j-k \mid \sum_{l=1}^i Y_l = k\right) P\left(\sum_{l=1}^i Y_l = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P(\varepsilon_n = j-k) P\left(\sum_{l=1}^i Y_l = k\right). \end{aligned}$$

Como $\sum_{l=1}^i Y_l$ segue a lei $\mathcal{B}(i, \alpha)$, tem-se

$$P\left(\sum_{l=1}^i Y_l = k\right) = \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k}.$$

Então,

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} P(\varepsilon_n = j-k).$$

□

Proposição 3.11. Dado um modelo INAR(1), as margens seguem uma lei de Poisson de parâmetro β se e só se as margens de $\{\varepsilon_n\}$ seguem uma lei de Poisson de parâmetro $\beta(1-\alpha)$.

Demonstração. Considere-se $X_n \sim \mathcal{P}(\beta)$, caso em que $\psi_{X_n}(s) = e^{\beta(1-s)}$. Tem-se, pela Proposição 3.9, que

$$\begin{aligned} \psi_{X_n}(s) &= \psi_{X_n}(1-\alpha + \alpha s) \psi_{\varepsilon_n}(s) \Leftrightarrow e^{\beta(1-s)} = e^{\beta(1-1+\alpha s)} \psi_{\varepsilon_n}(s) \\ &\Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) = \frac{e^{\beta(1-s)}}{e^{\beta(\alpha(1-s))}} \Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) = e^{\beta(1-s)(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, considere-se $\varepsilon_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tendo em conta a Proposição 3.4, uma vez que a convergência em L^2 implica a convergência em distribuição, tem-se

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \circ \varepsilon_{n-i},$$

donde

$$\psi_{X_n}(s) = \prod_{i=0}^{+\infty} \psi_{\alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}}(s),$$

atendendo à independência entre as sucessões de contagem e as restantes variáveis. Então

$$\begin{aligned} \psi_{X_n}(s) &= \prod_{i=0}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(1 - \alpha^i + \alpha^i s) = \prod_{i=0}^{+\infty} \exp(\lambda(\alpha^i - \alpha^i s)) \\ &= \exp\left(\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (\alpha^i - \alpha^i s)\right) = \exp\left(\lambda(1-s) \frac{1}{1-\alpha}\right), \end{aligned}$$

já que $0 < \alpha < 1$. Consequentemente, $X_n \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$. \square

Proposição 3.12. Dado um modelo INAR(1), as margens de $\{X_n\}$ seguem uma lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$, se e só se as margens de $\{\varepsilon_n\}$ verificam

$$\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{c.p. } \alpha \\ Z & \text{c.p. } 1 - \alpha \end{cases} \quad (3.6)$$

onde Z segue uma lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$.

Demonstração. Considere-se que $X_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$. Então

$$\begin{aligned} \psi_{X_n}(s) &= \psi_{X_n}(1 - \alpha + \alpha s) \psi_{\varepsilon_n}(s) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \mu - \mu s} &= \frac{1}{1 + \mu - \mu(1 - \alpha + \alpha s)} \psi_{\varepsilon_n}(s) \\ \Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \frac{1 + \mu - \mu(1 - \alpha + \alpha s)}{1 + \mu - \mu s} \\ \Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \frac{1 + \mu\alpha - \mu\alpha s + \alpha - \alpha}{1 + \mu - \mu s} \\ \Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \frac{\alpha + \mu\alpha - \mu\alpha s}{1 + \mu - \mu s} + \frac{1 - \alpha}{1 + \mu - \mu s} \\ \Leftrightarrow \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{1 + \mu - \mu s}. \end{aligned}$$

Então, a distribuição de ε_n é uma mistura caracterizada por (3.6) com $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Reciprocamente, tem-se

$$\psi_{\alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}}(s) = \psi_{\varepsilon_{n-i}}(1 - \alpha^i + \alpha^i s) = \frac{1 + \alpha\mu - \mu\alpha(1 - \alpha^i + \alpha^i s)}{1 + \mu - \mu(1 - \alpha^i + \alpha^i s)}.$$

Logo, como $X_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}$,

$$\begin{aligned} \psi_{X_n}(s) &= \prod_{i=0}^{+\infty} \psi_{\alpha^i \circ \varepsilon_{n-i}}(s) = \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1 + \mu \alpha^{i+1} - \mu \alpha^{i+1} s}{1 + \mu \alpha^i - \mu \alpha^i s} = \frac{\prod_{i=0}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^{i+1} - \mu \alpha^{i+1} s)}{\prod_{i=0}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^i - \mu \alpha^i s)} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^{i+1} - \mu \alpha^{i+1} s)}{(1 + \mu - \mu s) \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^i - \mu \alpha^i s)} = \frac{1}{1 + \mu - \mu s} \end{aligned}$$

uma vez que $\prod_{i=0}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^{i+1} - \mu \alpha^{i+1} s)$ é convergente. Com efeito, como

$$1 + \mu \alpha^{i+1} - \mu \alpha^{i+1} s = 1 + \mu \alpha^{i+1} (1 - s) > 0, \forall i \geq 0,$$

tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \prod_{i=0}^{+\infty} (1 + \mu \alpha^{i+1} (1 - s)) = \exp \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \ln(1 + \mu \alpha^{i+1} (1 - s)) \right) \\ &\leq \exp \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \mu \alpha^{i+1} (1 - s) \right) \\ &= \exp \left(\mu (1 - s) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right). \end{aligned}$$

Fica concluída a demonstração. □

3.3 Definição e Propriedades do Modelo NGINAR(1)

Nesta secção, apresenta-se um modelo de contagem definido a partir do operador binomial negativo apresentado na Secção 2.3, denotado por NGINAR(1) (New Geometric INAR(1)).

Definição 3.13. O processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ segue um modelo NGINAR(1) se admite a representação

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad (3.7)$$

onde $\alpha \in]0, 1[$ e $\{\varepsilon_n\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias de inteiros não negativos i.i.d. de quadrado integrável e independentes de X_{n-k} , $k \geq 1$.

Seguindo [2], assume-se que $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ tem margens identicamente distribuídas.

Proposição 3.14. O processo NGINAR(1) é uma cadeia de Markov homogénea.

Demonstração. Esta prova é análoga à demonstração do resultado correspondente em relação ao modelo INAR(1). \square

Da propriedade anterior e assumidas as margens i.d., conclui-se que o processo é fortemente estacionário.

Proposição 3.15. Suponha-se que a distribuição comum das variáveis da sucessão $\{\varepsilon_n\}$ admite esperança matemática μ_ε e desvio padrão σ_ε . As funções média, variância e autocovariância do processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ são definidas por

1. $E(X_n) = \frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}, n \in \mathbb{Z};$
2. $V(X_n) = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}, n \in \mathbb{Z};$
3. $\gamma(h) = \alpha^{|h|}V(X_0), h \in \mathbb{Z}.$

Demonstração.

1. De modo análogo ao cálculo da esperança de um processo INAR(1), obtém-se o pretendido.
2. Pelo dito anteriormente consegue-se calcular o momento de segunda ordem do processo usando a seguinte equação de recorrência

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E[(\alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n)^2] = E[(\alpha * X_{n-1})^2] + 2E[(\alpha * X_{n-1})\varepsilon_n] + E(\varepsilon_n^2) \\ &= \alpha^2 E(X_{n-1})^2 + \alpha(\alpha+1)E(X_{n-1}) + 2\alpha E(X_{n-1})E(\varepsilon_n) + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \\ &= \alpha^2 E(X_{n-1}^2) + \alpha(\alpha+1)\frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha} + 2\alpha\frac{\mu_\varepsilon^2}{1-\alpha} + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

da qual resulta

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \alpha(\alpha+1)\frac{\mu_\varepsilon}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + 2\alpha\frac{\mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha\mu_\varepsilon}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha\mu_\varepsilon^2 + (1-\alpha)\mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

Então, a variância do processo é dada por

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} - \left(\frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha\mu_\varepsilon}{(1-\alpha)^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}.$$

3. Como o processo é de segunda ordem e fortemente estacionário, então é fracamente estacionário. Para $h > 0$, a sua função de autocovariância é dada por

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_0, X_h) &= \text{Cov}(X_0, \alpha * X_{h-1} + \varepsilon_h) \\
 &= \text{Cov}(X_0, \alpha * X_{h-1}) + \text{Cov}(X_0, \varepsilon_h) \\
 &= E(X_0(\alpha * X_{h-1})) - E(X_0)E(\alpha * X_{h-1}) \\
 &= \alpha E(X_0 X_{h-1}) - \alpha E(X_0)E(X_{h-1}) \\
 &= \alpha \text{Cov}(X_0, X_{h-1})
 \end{aligned}$$

pela propriedade 5 da Proposição 2.8. Repetindo o procedimento, tem-se então o pretendido. \square

Assim, a **função de autocorrelação** ρ do processo é dada por $\rho(h) = \alpha^{|h|}$, $h \in \mathbb{Z}$, uma vez que se trata de uma função par.

Proposição 3.16. Seja $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ um processo que segue um modelo NGINAR(1), então

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n} \left(\frac{1}{\alpha + 1 - s\alpha} \right) \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Demonstração. Como $X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n$, a função geradora de probabilidades do processo é dada por

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{\alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n}(s) = \psi_{\alpha * X_{n-1}}(s) \psi_{\varepsilon_n}(s) = \psi_{X_{n-1}} \left(\frac{1}{\alpha + 1 - s\alpha} \right) \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Como as margens do processo são identicamente distribuídas, então

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n} \left(\frac{1}{\alpha + 1 - s\alpha} \right) \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

\square

A proposição que se apresenta de seguida caracteriza as probabilidades de transição do processo $\{X_n\}$.

Proposição 3.17. Considere-se um processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ a seguir um modelo NGINAR(1). A distribuição de X_n condicionada por X_{n-1} é dada por

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = 0) = P(\varepsilon_n = j), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

e, para $i \geq 1$ e $j \in \mathbb{N}_0$,

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{i-1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^k \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^i P(\varepsilon_n = j-k).$$

Demonstração. De facto,

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = 0) &= P(\alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n = j | X_{n-1} = 0) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^0 W_i + \varepsilon_n = j\right) = P(\varepsilon_n = j). \end{aligned}$$

De modo análogo, para $i \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= P\left(\varepsilon_n = j - \sum_{l=1}^i W_l\right) \\ &= \sum_{k=0}^j P\left(\varepsilon_n = j - k, \sum_{l=1}^i W_l = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^j P\left(\varepsilon_n = j - k \mid \sum_{l=1}^i W_l = k\right) P\left(\sum_{l=1}^i W_l = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^j P(\varepsilon_n = j - k) P\left(\sum_{l=1}^i W_l = k\right). \end{aligned}$$

Assim, como $\sum_{l=1}^i W_l$ segue uma lei binomial negativa, concretamente $\mathcal{BN}\left(i, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$, vem

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{k} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^k \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^i P(\varepsilon_n = j - k) \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{i-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^k \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^i P(\varepsilon_n = j - k). \end{aligned}$$

□

A proposição seguinte caracteriza a distribuição marginal de $\{\varepsilon_n\}$ no caso particular em que X_n segue a lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$.

Proposição 3.18. Sob as hipóteses consideradas para o modelo NGINAR(1), com $X_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ e $\alpha \in]0, \frac{\mu}{1+\mu}]$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a distribuição da v.a.r. ε_n é uma mistura das distribuições de X_n e de W , variável usada na série de contagem, isto é,

$$\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} X_n & \text{c.p. } 1 - \frac{\alpha\mu}{\mu - \alpha} \\ W & \text{c.p. } \frac{\alpha\mu}{\mu - \alpha} \end{cases}$$

Demonstração. Na Proposição 3.16 obteve-se

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n} \left(\frac{1}{1 + \alpha - \alpha s} \right) \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Uma vez que $X_n \sim \mathcal{G} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)$, então

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \frac{\psi_{X_n}(s)}{\psi_{X_n} \left(\frac{1}{1 + \alpha - \alpha s} \right)} = \frac{\frac{1}{1 + \mu - \mu s}}{\frac{1}{1 + \mu - \mu \frac{1}{1 + \alpha - \alpha s}}} = \frac{\frac{1}{1 + \mu - \mu s}}{\frac{1 + \alpha - \alpha s}{(1 + \mu)(1 + \alpha - \alpha s) - \mu}} \\ &= \frac{(1 + \mu)(1 + \alpha - \alpha s) - \mu}{(1 + \mu - \mu s)(1 + \alpha - \alpha s)} = \frac{1 + \alpha - \alpha s + \mu + \alpha \mu - \alpha \mu s - \mu}{(1 + \mu - \mu s)(1 + \alpha - \alpha s)} \\ &= \frac{1 + \alpha(1 + \mu) - \alpha(1 + \mu)s}{(1 + \mu - \mu s)(1 + \alpha - \alpha s)}. \end{aligned}$$

Se se escrever

$$\psi_{\varepsilon_n}(s) = \frac{1 + \alpha(1 + \mu) - \alpha(1 + \mu)s}{(1 + \mu - \mu s)(1 + \alpha - \alpha s)} = \frac{A}{1 + \mu - \mu s} + \frac{B}{1 + \alpha - \alpha s}$$

obtém-se, pelo método dos coeficientes indeterminados, $A = 1 - \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha}$ e $B = \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha}$. Ora, a hipótese, $0 < \alpha < \frac{\mu}{1 + \mu}$ implica $A, B \in]0, 1[$. Assim conclui-se que

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \left(1 - \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha} \right) \frac{1}{1 + \mu - \mu s} + \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha} \frac{1}{1 + \alpha - \alpha s} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha} \right) \psi_X(s) + \frac{\alpha \mu}{\mu - \alpha} \psi_W(s) \end{aligned}$$

como se pretendia. □

3.4 Definição e Propriedades do Modelo DCINAR(1)

Nesta secção, é apresentado um modelo de contagem definido a partir do operador binomial generalizado apresentado na Secção 2.4. Este modelo é denotado por DCINAR(1) (dependent counting INAR(1)).

Definição 3.19. O processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ segue um modelo DCINAR(1) se admite a representação

$$X_n = \alpha \circ_{\theta} X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad (3.8)$$

onde $\alpha, \theta \in]0, 1[$ e $\{\varepsilon_n\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias de inteiros não negativos i.i.d. de quadrado integrável e independentes de X_{n-k} , $k \geq 1$, assumindo-se ainda que as sucessões de contagem

são independentes de X_j e de ε_k , para quaisquer j, k , e as sucessões de contagem usadas para gerar X_t e X_s são mutuamente independentes para $t \neq s$.

Observe-se que, tendo em conta as condições da definição, as v.a.'s ε_t e $\alpha \circ_\theta X_s$ são independentes para $s < t$.

Correspondendo à hipótese da construção feita em [3], assume-se daqui em diante que o processo DCINAR(1) tem margens identicamente distribuídas.

Proposição 3.20. O processo DCINAR(1) é uma cadeia de Markov homogénea.

Demonstração. Esta prova é análoga à demonstração do resultado correspondente em relação ao modelo INAR(1). \square

Desta proposição resulta de modo imediato a seguinte.

Proposição 3.21. O processo DCINAR(1) é fortemente estacionário.

Proposição 3.22. Suponha-se que a distribuição comum das variáveis da sucessão $\{\varepsilon_n\}$ admite esperança matemática μ_ε e desvio padrão σ_ε . As funções média e variância do processo DCINAR(1) são definidas por

1. $E(X_n) = \frac{\mu_\varepsilon}{1 - \alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$;
2. $V(X_n) = \frac{\alpha(1 - \theta^2)\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)} + \frac{(\alpha(1 - \alpha)\theta^2)\mu_\varepsilon^2}{[1 - \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)](1 - \alpha)^2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

1. Calcula-se de modo análogo à esperança de um processo INAR(1).
2. De acordo com a Proposição 2.16 e tendo em conta que ε_n e $\alpha \circ_\theta X_{n-1}$ são independentes, tem-se

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E[(\alpha \circ_\theta X_{n-1} + \varepsilon_n)^2] = E[(\alpha \circ_\theta X_{n-1})^2] + 2E[(\alpha \circ_\theta X_{n-1})\varepsilon_n] + E(\varepsilon_n^2) \\ &= \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)E(X_{n-1}) + \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X_{n-1}^2) + 2\alpha E(X_{n-1})E(\varepsilon_n) + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \\ &= \alpha(1 - \theta^2)\mu_\varepsilon + \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X_{n-1}^2) + 2\alpha \frac{\mu_\varepsilon^2}{1 - \alpha} + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \\ &= \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)E(X_{n-1}^2) + \alpha(1 - \theta^2)\mu_\varepsilon + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Obteve-se assim uma equação às diferenças cuja solução é

$$E(X_n^2) = \frac{\alpha(1 - \theta^2)\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)} + \frac{(1 + \alpha)\mu_\varepsilon^2}{[1 - \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2)](1 - \alpha)},$$

uma vez que $\alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2) \in]0, 1[$. De facto,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha + (1 - \alpha)\theta^2) < 1 &\Leftrightarrow (1 - \alpha)\theta^2 < \frac{1}{\alpha} - \alpha \\ &\Leftrightarrow \theta^2 < \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1 + \alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

que é uma proposição verdadeira para quaisquer $\alpha, \theta \in]0, 1[$.

Então, usando a fórmula de Koenig, a variância do processo é dada por

$$V(X_n) = \frac{\alpha(1-\theta^2)\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha(\alpha+(1-\alpha)\theta^2)} + \frac{(\alpha(1-\alpha)\theta^2)\mu_\varepsilon^2}{[1-\alpha(\alpha+(1-\alpha)\theta^2)](1-\alpha)^2}.$$

□

Proposição 3.23. Suponha-se que a distribuição comum das variáveis da sucessão $\{\varepsilon_n\}$ admite esperança matemática μ_ε e desvio padrão σ_ε . A função de autocorrelação do processo DCINAR(1) é definida por

$$\rho(h) = \alpha^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Como o processo é de segunda ordem e fortemente estacionário, então é fracamente estacionário. Assim, para $h > 0$, a função de autocovariância é dada por

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_0, X_h) = Cov(X_0, \alpha \circ_\theta X_{h-1} + \varepsilon_h) \\ &= Cov(X_0, \alpha \circ_\theta X_{h-1}) + Cov(X_0, \varepsilon_h) \\ &= \alpha Cov(X_0, X_{h-1}), \end{aligned}$$

uma vez que ε_h e X_0 são independentes e atendendo à propriedade 3 da Proposição 2.16.

Repetindo o procedimento mais $h - 1$ vezes, obtém-se

$$cov(X_0, X_h) = \alpha^h V(X_0),$$

pelo que $\rho(h) = \alpha^h$, $h > 0$. Como a função de autocorrelação é par, obtém-se o pretendido. □

Na proposição seguinte relacionam-se as distribuições de X_n e ε_n .

Proposição 3.24. Seja $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ um processo que segue um modelo DCINAR(1). Então

$$\psi_{X_n}(s) = [(1-\alpha)\psi_{X_n}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\psi_{X_n}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))] \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Demonstração. Como ε_n é independente de $\alpha \circ_\theta X_{n-1}$, a função geradora de probabilidades de X_n é dada por

$$\psi_{X_n}(s) = \psi_{\alpha \circ_\theta X_{n-1} + \varepsilon_n}(s) = \psi_{\alpha \circ_\theta X_{n-1}}(s) \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

Usando a propriedade 1 da Proposição 2.13 e a propriedade 1 da Proposição 2.3, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \circ_\theta X_{n-1}}(s) &= (1-\alpha)\psi_{(\alpha(1-\theta)) \circ X_{n-1}}(s) + \alpha\psi_{(\theta+\alpha(1-\theta)) \circ X_{n-1}}(s) \\ &= (1-\alpha)\psi_{X_{n-1}}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\psi_{X_{n-1}}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s)). \end{aligned}$$

Como as margens do processo são identicamente distribuídas, tem-se então

$$\psi_{X_n}(s) = [(1 - \alpha)\psi_{X_n}(1 - \alpha(1 - \theta)(1 - s)) + \alpha\psi_{X_n}(1 - (\alpha + \theta - \alpha\theta)(1 - s))] \psi_{\varepsilon_n}(s).$$

□

À semelhança do que foi apresentado no caso dos Modelos INAR(1) e NGINAR(1), apresenta-se de seguida uma proposição que caracteriza as probabilidades de transição do processo $\{X_n\}$.

Proposição 3.25. Considere-se um processo $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ a seguir um modelo DCINAR(1). A distribuição de X_n condicionada por X_{n-1} é dada por

$$P(X_n = j | X_{n-1} = 0) = P(\varepsilon_n = j), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

e, para $i \geq 1$ e $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} (1 - \alpha) \binom{i}{k} \left((\alpha(1 - \theta))^k (1 - \alpha(1 - \theta))^{i-k} \right) P(\varepsilon_n = j - k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \alpha \binom{i}{k} \left((\alpha + \theta - \alpha\theta)^k (1 - (\alpha + \theta - \alpha\theta))^{i-k} \right) P(\varepsilon_n = j - k). \end{aligned}$$

Demonstração. Tem-se,

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = 0) &= P(\alpha \circ_{\theta} X_{n-1} + \varepsilon_n = j | X_{n-1} = 0) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^0 U_i + \varepsilon_n = j\right) = P(\varepsilon_n = j). \end{aligned}$$

Analogamente, para $i \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= P\left(\varepsilon_n = j - \sum_{\ell=1}^i U_{\ell}\right) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\sum_{\ell=1}^i U_{\ell} = k, \varepsilon_n = j - k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P\left(\varepsilon_n = j - k \mid \sum_{\ell=1}^i U_{\ell} = k\right) P\left(\sum_{\ell=1}^i U_{\ell} = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P(\varepsilon_n = j - k) P\left(\sum_{\ell=1}^i U_{\ell} = k\right). \end{aligned}$$

Assim, de (2.6), resulta

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} (1 - \alpha) \binom{i}{k} \left((\alpha(1 - \theta))^k (1 - \alpha(1 - \theta))^{i-k} \right) P(\varepsilon_n = j - k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \alpha \binom{i}{k} \left((\alpha + \theta - \alpha\theta)^k (1 - (\alpha + \theta - \alpha\theta))^{i-k} \right) P(\varepsilon_n = j - k). \end{aligned}$$

□

Na proposição seguinte é caracterizada a distribuição marginal de $\{\varepsilon_n\}$ no caso em que X_n segue a lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, designado em [3] como DCGINAR(1).

Proposição 3.26. Dado um modelo DCINAR(1), se as margens do processo X_n seguirem a lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$, a distribuição da v.a.r. ε_n é uma mistura caracterizada por

$$\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{c.p. } \frac{\alpha(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta} \\ X, & \text{c.p. } \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta} \\ Y, & \text{c.p. } \frac{\alpha(1-\alpha)\theta^2}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)} \end{cases}, \quad (3.9)$$

com $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ e $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}\right)$.

Demonstração. Da Proposição 3.24, resulta

$$\psi_{\varepsilon_n}(s) = \frac{\psi_{X_n}(s)}{(1-\alpha)\psi_{X_n}(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\psi_{X_n}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))}.$$

Como $X_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_n}(s) &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{(1-\alpha)\frac{1}{1+\mu-\mu(1-\alpha(1-\theta)(1-s))} + \alpha\frac{1}{1+\mu-\mu(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))}} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{1-\alpha}{1+\mu\alpha(1-\theta)-\mu\alpha(1-\theta)s} + \frac{\alpha}{1+\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)-\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)s}} \\ &= \frac{(1+\mu\alpha(1-\theta)-\mu\alpha(1-\theta)s)(1+\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)-\mu(\alpha+\theta-\alpha)s)}{(1+\mu-\mu s)((1-\alpha)(1+\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)-\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)s) + \alpha(1+\mu\alpha(1-\theta)-\mu\alpha(1-\theta)s))} \\ &= \frac{(1+\mu\alpha(1-\theta)-\mu\alpha(1-\theta)s)(1+\mu(\alpha+\theta-\alpha\theta)-\mu(\alpha+\theta-\alpha)s)}{(1+\mu-\mu s)(1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)-\mu(\alpha+\theta-2\alpha\theta)s)}. \end{aligned}$$

Aplicando o algoritmo da divisão de polinómios e o método dos coeficientes indeterminados, obtém-se

$$\psi_{\varepsilon_n}(s) = A + \frac{B}{1+\mu-\mu s} + \frac{C}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu - (\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu s},$$

onde

$$A = \frac{(1-\theta)\alpha(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta},$$

$$B = \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta}$$

e

$$C = \frac{\alpha(1-\alpha)\theta^2}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)}.$$

Como $\alpha + \theta - 2\alpha\theta \in]0, 1[$, conclui-se que também $A, B, C \in]0, 1[$ e então ε_n é a v.a.r. caracterizada por (3.9). □

Capítulo 4

Estimação

Este capítulo é dedicado à estimação dos parâmetros envolvidos nos modelos estudados, finalizando com uma aplicação. Cumprindo o que foi estudado, considera-se o caso em que X_n segue uma lei de Poisson bem como o caso em que X_n segue uma lei geométrica, no modelo INAR(1) e apenas a lei geométrica nos modelos NGINAR(1) e DCINAR(1).

Em cada caso, admite-se que se têm N observações, x_1, x_2, \dots, x_N , das v.a.'s X_1, X_2, \dots, X_N do processo ($X_n, n \in \mathbb{Z}$).

4.1 INAR(1) de Poisson

Seja ($X_n, n \in \mathbb{Z}$) um processo modelado por um modelo INAR(1) cujas margens seguem a lei de Poisson de parâmetro β , $\beta > 0$.

4.1.1 Estimadores de Yule–Walker

Nas condições referidas atrás, tem-se $E(X_n) = \beta$, pelo que um estimador para β é a média empírica,

$$\hat{\beta} = \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

Por outro lado, como $\alpha = \rho(1)$, um estimador para α é a autocorrelação empírica de ordem 1,

$$\hat{\alpha} = \hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{i=2}^N (X_i - \bar{X}_N)(X_{i-1} - \bar{X}_N)}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2}.$$

4.1.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais

Os estimadores dos mínimos quadrados condicionais para os parâmetros α e β são obtidos ao minimizar a soma dos quadrados das diferenças $X_i - E(X_i | X_{i-1})$, $i = 2, \dots, N$. Concretamente, a função a minimizar é

$$Q_N(\alpha, \beta) = \sum_{i=2}^N (X_i - E(X_i | X_{i-1}))^2.$$

Para o modelo em estudo, tem-se

$$E(X_t | X_{t-1}) = E(\alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t | X_{t-1}) = \alpha E(X_{t-2}) + \mu_\varepsilon = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)\beta, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

pelo que

$$Q_N(\alpha, \beta) = \sum_{i=2}^N (X_i - \alpha X_{i-1} - (1 - \alpha)\beta)^2. \quad (4.2)$$

Deste modo, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_N}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 0 \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - \alpha) \sum_{i=2}^N (X_i - \alpha X_{i-1} - (1 - \alpha)\beta) = 0 \\ 2 \sum_{i=2}^N (-X_i X_{i-1} + \alpha X_{i-1}^2 + (1 - 2\alpha)\beta X_{i-1} + \beta X_i - (1 - \alpha)\beta) = 0 \end{cases},$$

de onde se obtém os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ dados pelas expressões

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=2}^N X_i X_{i-1} - \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N X_i \sum_{i=2}^N X_{i-1}}{\sum_{i=2}^N X_{i-1}^2 - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=2}^N X_{i-1} \right)^2}$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=2}^N X_i - \hat{\alpha} \sum_{i=2}^N X_{i-1}}{(N-1)(1 - \hat{\alpha})}.$$

4.1.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança

Os estimadores da máxima verosimilhança para os parâmetros do modelo, α e β , são obtidos através da maximização da função de verosimilhança, $L(\alpha, \beta)$.

A função de verosimilhança deste processo é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) \\ &= P(X_1 = x_1) \prod_{i=2}^N P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

atendendo a (3.1).

Assim, como $P(X_1 = x_1) = \frac{e^{-\beta} \beta^{x_1}}{x_1!}$, tem-se

$$L(\alpha, \beta) = \frac{e^{-\beta} \beta^{x_1}}{x_1!} \prod_{i=2}^N P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}).$$

Logaritmizando, vem

$$\ell(\alpha, \beta) = \ln L(\alpha, \beta) = -\beta + x_1 \ln \beta - \sum_{n=1}^{x_1} \ln n + \sum_{i=2}^N \ln P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}),$$

obtendo-se os estimadores para α e β através da maximização desta função.

Para obter as estimativas de α e β , pode-se usar, por exemplo, os procedimentos de maximização não linear incorporados no software R. Para cada i , os valores de $P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1})$ são calculados usando as Proposições 3.10 e 3.11.

4.2 INAR(1) Geométrico

4.2.1 Estimadores de Yule–Walker

Suponha-se agora que as margens do processo INAR(1) seguem a lei geométrica de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$. Então $E(X_n) = \mu$ e $\rho(1) = \alpha$, pelo que os estimadores para μ e α são $\hat{\mu} = \bar{X}_N$ e $\hat{\alpha} = \hat{\rho}(1)$, respetivamente.

4.2.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais

De modo análogo ao caso anterior, tem-se $E(X_i | X_{i-1}) = \alpha X_{i-1} + (1 - \alpha)\mu$, $i \in \mathbb{Z}$. Assim, a função $Q_N(\alpha, \mu)$ é dada por (4.2). Então, os estimadores para α e μ são dados respetivamente por

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=2}^N X_i X_{i-1} - \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N X_i \sum_{i=2}^N X_{i-1}}{\sum_{i=2}^N X_{i-1}^2 - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=2}^N X_{i-1} \right)^2} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=2}^N X_i - \hat{\alpha} \sum_{i=2}^N X_{i-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha})}. \quad (4.4)$$

4.2.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança

Os estimadores de α e μ são obtidos através da maximização da função log-verosimilhança dada, neste caso, por

$$\ell(\alpha, \mu) = x_1 \ln \mu - \ln(1 + \mu)(1 + x_1) + \sum_{i=2}^N \ln P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}),$$

uma vez que $P(X_1 = x_1) = \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right)^{x_1} \left(\frac{1}{1+\mu} \right)$. Usando as Proposições 3.10 e 3.12, a expressão da função ℓ fica completamente especificada, permitindo obter as estimativas de α e μ através de um software adequado.

4.3 NGINAR(1)

Seja $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ um processo modelado por um modelo NGINAR(1) com margens de lei $\mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$.

4.3.1 Estimadores de Yule–Walker

Tal como no caso anterior, tem-se $E(X_n) = \mu$ e $\alpha = \rho(1)$, pelo que os estimadores para α e μ são, respetivamente, $\hat{\alpha} = \hat{\rho}(1)$ e $\hat{\mu} = \bar{X}_N$.

4.3.2 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais

De modo análogo aos modelos INAR(1) considerados, os estimadores de α e μ , obtêm-se minimizando a função $Q_N(\alpha, \mu)$ dada por (4.2) pois, mais uma vez, $E(X_i | X_{i-1}) = \alpha X_{i-1} + (1 - \alpha)\mu$. Assim os estimadores dos mínimos quadrados condicionais para α e μ são dados pelas expressões já apresentadas em (4.4).

4.3.3 Estimadores da Máxima Verosimilhança

Para obter os estimadores para α e μ maximiza-se a função verosimilhança, $L(\alpha, \mu)$, que mais uma vez é da forma apresentada em (4.3).

Como neste modelo consideram-se margens geométricas de parâmetro $\frac{\mu}{1+\mu}$, a função log-verosimilhança é da forma

$$\ell(\alpha, \mu) = x_1 \ln \mu - (1 + x_1) \ln(1 + \mu) + \sum_{i=2}^N \ln P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}),$$

sendo a expressão de $P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1})$ dada na Proposição 3.17.

4.4 DCGINAR(1)

Seja $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ um processo modelado por um modelo DCINAR(1) com margens de lei $\mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$, designado por DCGINAR(1).

4.4.1 Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais

Neste modelo, os estimadores dos mínimos quadrados condicionais para α e μ são obtidos de modo semelhante aos modelos anteriores uma vez que a função $Q_N(\alpha, \mu)$ tem a mesma expressão.

Por outro lado, para obter o estimador de θ , usa-se o método apresentado em [4] que consiste em minimizar a função

$$S_N(\theta^2) = \sum_{i=2}^N (V_i - E(V_i | X_{i-1}))^2 \quad (4.5)$$

onde $V_i = (X_i - E(X_i | X_{i-1}))^2$.

Ora,

$$\begin{aligned} E(V_i | X_{i-1}) &= E((X_i - E(X_i | X_{i-1}))^2 | X_{i-1}) \\ &= V(X_i | X_{i-1}) = E(X_i^2 | X_{i-1}) - (E(X_i | X_{i-1}))^2 \\ &= \alpha(1 - \alpha)\theta^2 X_{i-1}^2 + \alpha(1 - \alpha)(1 - \theta^2)X_{i-1} + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pela propriedade 2 da Proposição 3.22, obtém-se σ_ε^2 . De facto, do caso particular de $X_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{1 + \mu}\right)$, resulta

$$\sigma_\varepsilon^2 = \mu(1 - \alpha) + \mu^2(1 - \alpha)((1 + \alpha) - 2\alpha\theta^2).$$

Posto isto, tem-se a expressão que se segue para a função $S_N(\theta^2)$, ou seja

$$S_N(\theta^2) = \sum_{i=2}^N (V_i - \alpha(1 - \alpha)\theta^2(X_{i-1}^2 - X_{i-1} - 2\mu^2 - (1 - \alpha)(\alpha X_{i-1} + \mu + (1 + \alpha)\mu^2)))^2. \quad (4.6)$$

Sendo assim, fixando α e μ , deriva-se $S_N(\theta^2)$ em ordem a θ^2 , obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_N}{\partial \theta^2}(\theta^2) &= -2\alpha(1 - \alpha) \sum_{i=2}^N (V_i - \alpha(1 - \alpha)\theta^2(X_{i-1}^2 - X_{i-1} - 2\mu^2) - \\ &\quad - (1 - \alpha)(\alpha X_{i-1} + \mu + (1 + \alpha)\mu^2)) \times (X_{i-1}^2 - X_{i-1} - 2\mu^2). \end{aligned}$$

Assim, o estimador para θ é dado por

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^N (\hat{V}_i - (1 - \hat{\alpha})(\hat{\alpha}X_{i-1} + \hat{\mu} + (1 + \hat{\alpha})\hat{\mu}^2))(X_{i-1}^2 - X_{i-1} - 2\hat{\mu}^2)}{\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha}) \sum_{i=2}^N (X_{i-1}^2 - X_{i-1} - 2\hat{\mu}^2)^2}} \quad (4.7)$$

onde

$$\hat{V}_i = (X_i - \hat{\alpha}X_{i-1} - (1 - \hat{\alpha})\hat{\mu})^2$$

e $\hat{\alpha}$ e $\hat{\mu}$ são os estimadores dos parâmetros α e μ , respetivamente, obtidos através do método dos mínimos quadrados condicionais.

4.4.2 Estimadores da Máxima Verossimilhança

Os estimadores para α , μ e θ são obtidos através da maximização da função de verossimilhança, dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta, \mu) &= P(X_1 = x_1) \prod_{i=2}^N P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}) \\ &= \left(\frac{\mu}{1 + \mu}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{1 + \mu}\right) \prod_{i=2}^N P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}). \end{aligned}$$

Desta forma, a função log-verosimilhança é da forma

$$\ell(\alpha, \theta, \mu) = x_1 \ln \mu - (1 + x_1) \ln(1 + \mu) + \sum_{i=2}^N \ln P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}),$$

sendo o valor de $P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1})$ apresentado na Proposição 3.25.

4.5 Aplicação

Nesta secção, será apresentada a estimação dos modelos apresentados acima relativamente a um conjunto de dados reais. Os dados que serão usados referem-se a registos de crimes e foram retirados do site “<http://www.forecastingprinciples.com>” na secção de “Crime data”. Para este trabalho, escolheram-se para análise os dados correspondentes ao número de ofensas sexuais registadas por mês pelo 21º carro patrulha da polícia de Pittsburgh entre 1990 e 2001. Esta série de dados consiste assim em 144 observações, que apresentam média 0.5903 a variância 1.0268. Na Figura 4.1, está representada a trajetória amostral correspondente.

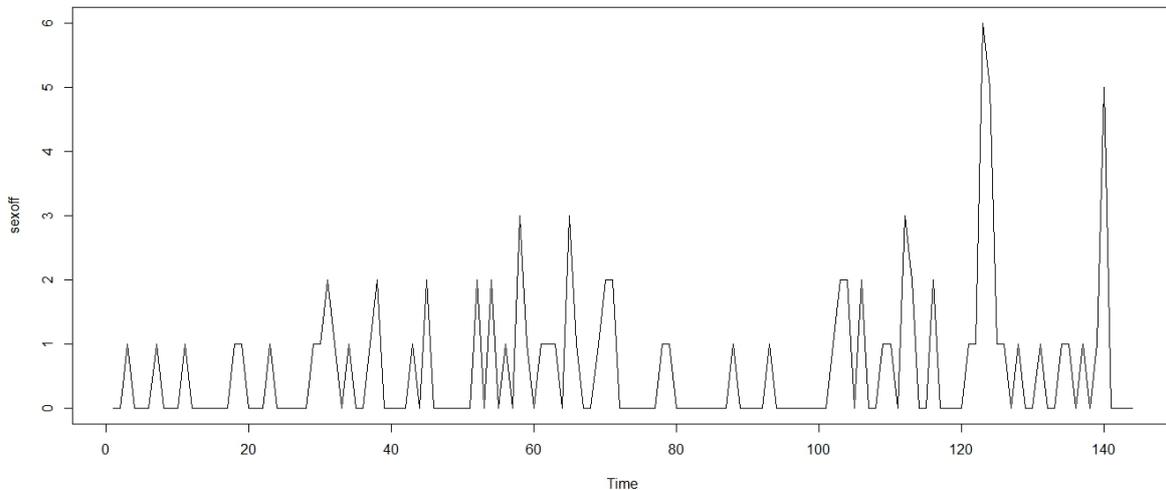


Fig. 4.1 Trajetória amostral da série de dados relativos a ofensas sexuais

Na Tabela 4.1 são apresentadas as estimativas obtidas pelo método da máxima verosimilhança para os parâmetros dos quatro modelos considerados neste capítulo. Complementando essa informação, são também apresentados os valores do AIC (Akaike Information Criterion) para cada um dos casos. Esse valor é dado por

$$AIC = 2k - 2\ln\hat{L}$$

onde k é o número de parâmetros estimados no modelo correspondente e \hat{L} é o valor máximo da função de verosimilhança.

O Critério AIC é usado para avaliar a qualidade do modelo ajustado, sendo que se prefere o modelo em que este valor é menor.

Embora o modelo INAR(1) de Poisson não se afigure muito apropriado para modelar a série em causa (devido ao facto da variância das observações ser muito superior à média), é também considerado nesta análise.

Os valores apresentados foram obtidos pelo software R através do código incluído em anexo. Observa-se que nos procedimentos aí utilizados, usaram-se como valores iniciais as estimativas obtidas pelo método dos mínimos quadrados condicionais.

Modelo	Estimativas	AIC
INAR(1) de Poisson	$\hat{\alpha} = 0.1404$ $\hat{\beta} = 0.5889$	316.8900
INAR(1) Geométrico	$\hat{\alpha} = 0.1055$ $\hat{\mu} = 0.5863$	303.7394
NGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.1650$ $\hat{\mu} = 0.5872$	302.6734
DCGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.1356$ $\hat{\theta} = 0.7188$ $\hat{\mu} = 0.5746$	303.0530

Tabela 4.1 Estimativas da máxima verosimilhança

Analisando a tabela, através da informação dada pelo AIC, escolhe-se como preferível a modelação destes dados através do modelo NGINAR(1), ao qual corresponde o menor valor do AIC. Note-se que o maior valor do AIC corresponde ao modelo INAR(1) de Poisson. Em contrapartida, os valores mais baixos estão associados aos modelos definidos a partir dos operadores $*$ e \circ_{θ} .

De referir ainda que, em [3], é apresentada uma série de dados reais para a qual o modelo DCGINAR(1) é o mais adequado entre os analisados pelos autores.

Bibliografia

- [1] Al-Osh, M. and Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, 8:261–275.
- [2] Ristić, M. M., Bakouch, H. S., and Nastić, A. S. (2009). A new geometric first-order integer-valued autoregressive NGINAR(1) process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139:2218–2226.
- [3] Ristić, M. M., Nastić, A. S., and Miletić Ilić, A. V. (2013). A geometric time series model with dependent bernoulli counting series. *Journal of Time Series Analysis*, 34(4):466–476.
- [4] Tjøstheim, D., Karlsen, H., and Tjøstheim, D. (1988). Consistent estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) time series models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological*, 50:313–320.

Anexo A

Código em R

Estimadores dos Mínimos Quadrados Condicionais

Definição do vetor da série observada

```
sexoff<-c(Sexualoffense[, "SEXOFF"])
```

Função para estimar α e μ através do método dos mínimos quadrados condicionais dado um conjunto de dados série

```
alphamu<-function(serie){  
  a=0;  
  b=0;  
  c=0;  
  d=0;  
  e=0;  
  for (i in 2:length(serie)) {  
    a=a+serie[i];  
    b=b+serie[i-1];  
    c=c+serie[i]*serie[i-1];  
    d=d+serie[i-1]^2;  
    e=e+serie[i]^2 }  
  alpha=(c-(1/(length(serie)-1))*a*b)/(d-(1/(length(serie)-1))*b^2);  
  mu=(a-alpha*b)/((length(serie)-1)*(1-alpha));  
  v<-c(alpha, mu);  
  return(v)}
```

Função para o estimar o θ do modelo DCGINAR(1) através do método dos mínimos quadrados condicionais dado um conjunto de dados série

```
theta<-function(serie){  
  theta1=0;  
  theta2=0;  
  alpha<-alphamu(serie)[1];
```

```

mu<-alphamu(serie)[2];
for (i in 2:length(serie)){
theta1=theta1+((serie[i]-alpha*serie[i-1]+
-(1-alpha)*mu)^2-(1-alpha)*(alpha*serie[i-1]+
mu+(1+alpha)*mu^2))*(serie[i-1]^2-serie[i-1]-2*mu);
theta2=theta2+alpha*(1-alpha)*((serie[i-1]^2-serie[i-1]-2*mu^2)^2);}
theta=(theta1/theta2)^(1/2);
return(theta)}

```

Estimação para o Modelo INAR(1) de Poisson

Função dos ε no modelo INAR(1) de Poisson

```

p_inar_poisson_epsilon<-function(alpha, beta, l){
valor=(exp(-beta*(1-alpha))*((beta*(1-alpha))^l))/(factorial(l))
return(valor)}

```

Função de probabilidade condicional no modelo INAR(1) de Poisson

```

p_inar_poisson_condicional<-function(alpha, beta, i, j){
aux=min(i, j)
valor=0
for(k in 0:aux)
valor<-valor+choose(i, k)*(alpha^k)*((1-alpha)^(i-k))*
+p_inar_poisson_epsilon(alpha, beta, j-k)
return(valor)}

```

Função logverossimilhança negativa para minimizar

```

ll_inar_poisson<-function(alpha, beta){
aux=0
if(sexoff[1]>0){
for(n in 1:sexoff[1]) aux=aux+log(n)}
ll_inar_poisson=0
for(i in 2:length(sexoff))
ll_inar_poisson=ll_inar_poisson+
+log(p_inar_poisson_condicional(alpha, beta, sexoff[i-1], sexoff[i]))
ll_inar_poisson=beta-sexoff[1]*log(beta)+aux-ll_inar_poisson}

```

Minimização

```

guess_inar_poisson = list(alpha=alphamu(sexoff)[1], beta=alphamu(sexoff)[2])
fit_inar_poisson = mle2(ll_inar_poisson, start=guess_inar_poisson)
summary(fit_inar_poisson)

```

Obtenção Do AIC

```

AIC(fit_inar_poisson)

```

Estimação para o Modelo INAR(1) Geométrico

Função dos ε no modelo INAR(1) Geométrico

```
p_inar_geometrico_epsilon<-function(alpha , mu, l){
  if(l==0) valor=alpha+(1-alpha)*(1/(1+mu))
  else valor=(1-alpha)*((mu^l)/((1+mu)^(l+1)))
  return(valor)}
```

Função de probabilidade condicional no modelo INAR(1) Geométrico

```
p_inar_geometrico_condicional<-function(alpha , mu, i , j){
  aux=min(i , j)
  valor=0
  for(k in 0:aux)
  valor<-valor+choose(i , k)*(alpha^k)*((1-alpha)^(i-k))*
+ p_inar_geometrico_epsilon(alpha , mu, j-k)
  return(valor)
}
```

Função logverossimilhança negativa para minimizar

```
ll_inar_geometrico<-function(alpha , mu){
  ll_inar_geometrico=0
  for(i in 2:length(sexoff))
  ll_inar_geometrico=ll_inar_geometrico+
+ log(p_inar_geometrico_condicional(alpha , mu, sexoff[i-1],sexoff[i]))
  ll_inar_geometrico=-sexoff[1]*log(mu)+(sexoff[1]+1)*
+ log(1+mu)-ll_inar_geometrico}
```

Minimização

```
guess_inar_geometrico = list(alpha=alphamu(sexoff)[1], mu=alphamu(sexoff)[2])
fit_inar_geometrico = mle2(ll_inar_geometrico , start=guess_inar_geometrico)
summary(fit_inar_geometrico)
```

Obtenção Do AIC

```
AIC(fit_inar_geometrico)
```

Estimação para o Modelo NGINAR(1)

Função dos ε no modelo NGINAR(1)

```
p_nginar_epsilon<-function(alpha , mu, l){
  valor=((mu^l)/((1+mu)^(l+1)))*(1-(alpha*mu/(mu-alpha)))+
+((alpha^l)/(((1+alpha)^(l+1))))*((alpha*mu)/(mu-alpha))
  return(valor)}
```

Função de probabilidade condicional no modelo NGINAR(1)

```
p_nginar_condicional<-function(alpha , mu, i , j){
  aux=j
  valor=0
  if (i!=0)
  {
    for(k in 0:aux)
    valor<-valor+choose(i+k-1,i-1)*((alpha/(1+alpha))^k)*
    + ((1/(alpha+1))^i)*p_nginar_epsilon(alpha , mu, j-k)
  }
  else valor<-p_nginar_epsilon(alpha , mu, j)
  return(valor)
}
```

Função logverossimilhança negativa para minimizar

```
ll_nginar<-function(alpha ,mu){
  ll_nginar=0
  for(i in 2:length(sexoff))
  ll_nginar=ll_nginar+log(p_nginar_condicional(alpha ,mu, sexoff[i-1],sexoff[i]))
  ll_nginar=-sexoff[1]*log(mu)+(sexoff[1]+1)*log(1+mu)-ll_nginar}

```

Minimização

```
guess_nginar = list(alpha=alphamu(sexoff)[1], mu=alphamu(sexoff)[2])
fit_nginar = mle2(ll_nginar , start=guess_nginar)
summary(fit_nginar)
```

Obtenção Do AIC

```
AIC(fit_nginar)
```

Estimação para o Modelo DCGINAR(1)**Função dos ε no modelo DCGINAR(1)**

```
p_dcginar_epsilon<-function(alpha ,theta , mu, l){
  if (l==0)
  valor=(alpha*(1-theta)*(alpha+theta-alpha*theta))/(alpha+theta-2*alpha*theta)+
  +(1/(1+mu))*(((1-alpha*(1-theta))*(1-alpha)*(1-theta))/
  + (1-alpha-theta+2*alpha*theta))+(1/(1+(alpha+theta-2*alpha*theta)*mu))*
  + ((alpha*(1-alpha)*theta^2)/((alpha+theta-2*alpha*theta)*
  + (1-alpha-theta+2*alpha*theta)))
  else
  valor=((mu^l)/((1+mu)^(l+1)))*(((1-alpha*(1-theta))*
  + (1-alpha)*(1-theta))/(1-alpha-theta+2*alpha*theta))+
```

```

+(((( alpha+theta -2*alpha*theta ) *mu)^1) /
+ (((1+( alpha+theta -2*alpha*theta ) *mu)^(1+1)))) *
+(( alpha*(1-alpha)*theta ^2) / (( alpha+theta -2*alpha*theta ) *
+ (1-alpha-theta+2*alpha*theta )))
return ( valor )}

```

Função de probabilidade condicional no modelo DCGINAR(1)

```

p_dcginar_condicional<-function (alpha , theta , mu, i , j){
aux=min(i , j)
valor=0
if (i !=0)
{
for (k in 0:aux)
valor<-valor+(1-alpha)*choose (i , k)*(( alpha*(1-theta ))^k)*
+ ((1-alpha*(1-theta ))^(i-k))*p_dcginar_epsilon (alpha , theta , mu, j-k)+
+ alpha*choose (i , k)*(( theta+alpha*(1-theta ))^k)*
+ ((1-theta-alpha*(1-theta ))^(i-k))*p_dcginar_epsilon (alpha , theta , mu, j-k)
}
else valor<-p_dcginar_epsilon (alpha , theta , mu, j)
return ( valor )
}

```

Função logverossimilhança negativa para minimizar

```

ll_dcginar<-function (alpha , theta , mu){
ll_dcginar=0
for (i in 2:length (sexoff))
ll_dcginar=ll_dcginar+
+ log (p_dcginar_condicional (alpha , theta , mu, sexoff [i-1], sexoff [i]))
ll_dcginar=-sexoff [1]*log (mu)+( sexoff [1]+1)*log (1+mu)-ll_dcginar }

```

Minimização

```

guess_dcginar=list (alpha=alphamu (sexoff) [1] , theta=theta (sexoff) ,
+ mu=alphamu (sexoff) [2])
fit_dcginar = mle2 (ll_dcginar , start=guess_dcginar)
summary ( fit_dcginar )

```

Obtenção Do AIC

```

AIC ( fit_dcginar )

```