



Catarina Guerreiro Coelho

Modelo Robusto de Gestão de Balanço para Bancos

Dissertação de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Estatística, Otimização e Matemática Financeira, coorientada pelo Professor Doutor José Luis Esteves dos Santos e pelo Doutor Pedro Maria Côrte-Real Alarcão Júdice* (Caixa Económica Montepio Geral e ISCTE), e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

*Este relatório é independente da atividade na Caixa Económica Montepio Geral, tendo por base dados públicos americanos, e não reflete as visões desta instituição.

Julho 2018



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelo Robusto de Gestão de Balanço para Bancos

Catarina Guerreiro Coelho



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Julho 2018

Agradecimentos

Esta dissertação encerra uma etapa marcante e especial da minha vida. Por isso, gostaria de agradecer a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a sua realização.

Aos meus orientadores, Professor José Luis Esteves dos Santos e Doutor Pedro Maria Côrte-Real Alarcão Júdice, o meu sincero agradecimento por toda a colaboração, disponibilidade, ajuda, dedicação e pelos conhecimentos transmitidos e contribuições valiosas para a realização desta dissertação.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, pelas condições de trabalho e oportunidades que me foram proporcionadas.

Um especial agradecimento à minha família, em particular aos meus Pais e Avós, por acreditarem sempre nas minhas capacidades, pela proteção, paciência e valores que sempre me transmitiram. Obrigada, do fundo do coração, por apoiarem incondicionalmente as minhas decisões. À minha Irmã, por me considerar um exemplo a seguir, pela amizade, paciência e incentivo ao longo deste percurso. Sem dúvida que o grande pilar da minha vida e "A minha riqueza são vocês".

Ao Paulo, por todo o companheirismo, carinho, paciência e motivação permanente. Esta etapa da minha vida não tinha tido, garantidamente, o mesmo encanto sem ti. Um enorme "Muito Obrigada" por tudo, mesmo reconhecendo que não existem palavras suficientes para agradecer tamanha dedicação.

Aos colegas de curso, por todos os bons momentos partilhados ao longo destes cinco anos.

Aos restantes amigos, pela amizade, incentivo e apoio.

Resumo

Este trabalho aborda a análise da otimização de um balanço com aplicação no contexto bancário. A otimização de balanço de bancos é distinta da otimização de portfólios, uma vez que para a primeira é necessário incluir restrições ditadas pelos rácios regulamentares de Basileia III e controlar os riscos da atividade bancária, nomeadamente o risco de liquidez. Desde os anos 80 até à atualidade, a literatura de otimização de balanço de bancos tem conhecido avanços significativos. Os modelos existentes, no entanto, são muito sensíveis aos dados de entrada, gerando alocações que obtêm variações pouco realistas de ano para ano, impossibilitando a sua utilização num contexto prático e industrial. Por outro lado, não existe na literatura uma metodologia de testes históricos que comprovem o desempenho superior das técnicas de otimização face a regras heurísticas. Neste sentido, esta investigação traz contribuições valiosas para a literatura, as quais devem ser realçadas. Em primeiro lugar, neste trabalho desenvolve-se uma metodologia de otimização que garante a robustez das alocações face aos parâmetros, com base em restrições de turnovers locais e global, que demonstrar-se-á posteriormente que conferem variações realistas nos agregados. Em segundo, é criada uma metodologia, até à data inexistente, de testes de desempenho utilizando dados históricos, com base em dados históricos públicos americanos, que para cada estratégia permite aferir a estabilidade das alocações e o desempenho na rendibilidade. Além disso, comprova-se, através destes testes, que as metodologias de otimização sem restrições de turnover atingem variações na ordem de 40%, não sendo realistas e impossibilitando a sua utilização num contexto prático. A par disto, demonstra-se que as metodologias de otimização com restrições de turnover, desenvolvidas neste trabalho, obtêm variações que são realistas, possibilitando a sua implementação em ambiente industrial. Finalmente, a metodologia de testes de desempenho utilizando dados históricos comprova que as estratégias de otimização obtêm um desempenho superior às regras heurísticas em 0.94% ao ano face ao ativo e 9.4% ao ano face aos capitais próprios, em média. Além do mais, através dos resultados, constata-se que a metodologia de otimização de balanço com restrições de turnover é a mais adequada para ser utilizada na prática, dado que combina a rendibilidade superior apresentada pelos modelos de otimização com alocações que podem ser implementadas nos processos de gestão dos bancos.

Abstract

This work covers the analysis of the optimization of a balance sheet in the banking context. The optimization of a bank's balance sheet differs from the optimization of a portfolio because the first requires restrictions given by Basel III regulatory ratios and controls on banking risks, namely liquidity risk. Since the 1980's, there have been significant advancements in the literature on the optimization of banks' balance sheets. However, the current models are very sensitive to inputs, generating allocations with unrealistic yearly variations. This feature makes them impossible to use in a practical and industrial context. On the other hand, there is no literature with historical tests that proves the superior performance of optimization techniques compared to heuristic rules. In this sense, this investigation brings valuable contributions to the literature on bank balance sheet management, which should be highlighted. Firstly, this work develops a method of optimization that guarantees the robustness of allocations against the parameters, based on local and global turnover restrictions, which we will later show that grants realistic variations to allocations. Secondly, we created a backtesting methodology (that does not exist to date), using American historical data, that will allow to gauge the stability of the allocations and the profitability performance. Through these tests we demonstrate that optimization methods without turnover restrictions hit variations of about 40%, which makes them unrealistic and impossible to use in a practical context. Contrary to this, optimization methods with turnover restrictions obtain realistic variations, making their implementation in the industrial environment possible. Finally, using our data and liability structure, the method using historical data indicates that optimization strategies have a superior performance when compared with heuristic rules, achieving an average outperformance of return on assets of 0.94% and an outperformance of return on equity of 9.4%. Consequently, the balance sheet optimization method with turnover restrictions is the most suitable to be used in practice, since it combines the superior profitability presented by the optimization models with allocations that can be implemented by bank management.

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Revisão de Literatura	1
2 Introdução	3
2.1 Estrutura do Ativo	3
2.2 Estrutura do Passivo	4
2.3 Objetivo	5
3 Modelo	7
3.1 Modelo \mathcal{M}	8
3.1.1 Restrições de Liquidez	8
3.1.2 Restrição de Solvabilidade	10
3.2 Modelo $\mathcal{M}1$	11
3.2.1 Restrições de Turnover	12
3.3 Análise do Modelo	12
4 Dados do Modelo	13
4.1 Rendibilidades dos Ativos	13
4.1.1 Obrigações AFS	15
4.2 Risco dos Ativos	16
4.2.1 VaR de Crédito	17
4.2.2 VaR de Mercado	20
4.3 Valores de α_i	21
4.4 Rendibilidade da Carteira	21
4.4.1 Rendibilidade Prospetiva	22
4.4.2 Rendibilidade Efetiva	23
5 Resultados Computacionais	25
5.1 Resultados Históricos	25
5.2 Estratégias em Confronto	25
5.2.1 Estratégias Otimizadas	26

5.2.2	Estratégias Heurísticas	26
5.3	Comparação das Estratégias	28
6	Conclusão	43
	Referências	45

Lista de Figuras

5.1	Rendibilidade efetiva acumulada de 1995 a 2016.	30
5.2	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção A).	31
5.3	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção B).	32
5.4	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção C).	33
5.5	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção D).	34
5.6	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção E).	35
5.7	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção F).	36
5.8	Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção G).	37
5.9	Rendibilidades prospectiva e efetiva de 1995 a 2016 (Estratégia $\mathcal{M}2$).	40

Lista de Tabelas

3.1	Índices dos agregados do ativo.	7
3.2	Índices dos agregados do passivo e respectivas alocações.	7
4.1	Dados do modelo.	13
4.2	Valor do parâmetro de risco no ano t	17
4.3	Valor do parâmetro de correlação no ano t	20
4.4	Valor do parâmetro LGD para cada ativo.	20
4.5	Valor do parâmetro α para cada ativo.	21
5.1	Valores médios da rentabilidade e do risco de cada ativo dos anos em estudo.	25
5.2	Opção e respetiva carteira inicial.	28

Capítulo 1

Revisão de Literatura

A otimização de um balanço bancário é um processo complexo, uma vez que a modelação do problema de determinação de estruturas de ativo e passivo de um banco apresenta vários desafios associados à sua complexidade técnica. Apesar de ser possível encontrar semelhanças entre este problema e a otimização de portfólios de investimento clássico, existem diferenças importantes entre ambos os problemas. A otimização de carteiras bancárias inclui restrições de liquidez e solvabilidade impostas por entidades regulamentares que procuram garantir a sustentabilidade de um banco. Para além destas, inclui ainda restrições que procuram responder às necessidades inerentes aos procedimentos habituais de um banco face às condições de mercado, tais como as restrições de riscos de crédito, de taxas de juro e de liquidez. Por sua vez, nenhuma destas restrições está presente num problema clássico de otimização de portfólios. Uma outra diferença relevante é que na otimização de portfólios é possível aplicar todo o investimento num só agregado ou substituir completamente uma carteira inicialmente indicada, situações que não são possíveis de ocorrer no contexto bancário. Deste modo, a abordagem clássica proposta por Markowitz (1952) [26] não é a mais indicada para a resolução do problema proposto.

A abordagem de otimização de um balanço bancário assenta na formulação de um modelo bancário que maximize o retorno do capital ajustado ao risco sujeito a restrições de liquidez e solvabilidade. O modelo bancário pode ser de período múltiplo (Hałaj, 2015) [21] ou de período único (Hałaj, 2013) [22]. No modelo de período múltiplo, a alocação de ativos dinâmicos permite, em teoria, abordar melhor o desenvolvimento do risco financeiro e capturar alguns efeitos intertemporais das estratégias de investimento. Contudo, este pode ser dispendioso em termos de tempo computacional e apresenta uma configuração menos flexível comparativamente ao modelo de período único. Além disso, a necessidade de estimar um maior número de dados origina maior incerteza no modelo. Nesta perspetiva, o quadro proposto na investigação apresenta uma abordagem baseada no artigo de Hałaj (2013) [22], envolvendo um modelo de período único. No entanto, outros procedimentos podem ser considerados, como por exemplo, as técnicas de programação linear estocástica aplicada à gestão de ativos e passivos (ALM - Asset and Liability Management) (Kosmidou e Zopounidis (2008) [24]; Kusy e Ziemba (1986) [25]). Outra temática associada a estes problemas é a estimação de factores de risco na gestão de um balanço bancário a longo prazo (Birge e Júdice (2013) [16]).

Um dos objetivos da investigação é comparar a otimização do modelo bancário proposto com a otimização de outras abordagens conhecidas na literatura, tais como a paridade de risco e a igual ponderação (Chaves *et al.* (2011) [17]). Para que tal seja possível, é necessário desenvolver metodologias heurísticas sobre estas abordagens que garantam ainda o cumprimento das restrições bancárias, sendo esta uma das contribuições deste trabalho. Além disso, a inclusão de restrições de turnovers locais e global para a robustez das alocações na otimização do modelo bancário proposto é um aspeto original do trabalho aqui apresentado. Finalmente, a apresentação dos primeiros testes associados a estas estratégias utilizando dados históricos constitui outro fator de diferenciação relativamente à literatura atual. O objetivo destes testes é aferir o desempenho e a estabilidade das alocações em situações mais realistas. A partir destes testes históricos demonstrar-se-á que a metodologia proposta nesta investigação com restrições de turnover produz alocações mais estáveis e mais verosímeis, em comparação com as metodologias atuais de otimização de balanço, as quais produzem alocações com variações pouco plausíveis de ano para ano. Adicionalmente, demonstrar-se-á que uma metodologia de otimização de balanço produz desempenhos superiores às regras heurísticas. Portanto, é de realçar a forte contribuição dos resultados dos testes históricos, e suas conclusões, para esta investigação.

Capítulo 2

Introdução

Os bancos são instituições financeiras que, para além de outros serviços, permitem a circulação do dinheiro recebendo depósitos e concedendo empréstimos aos seus clientes através da prestação de juros. É essencialmente esta intermediação financeira que possibilita a captação de fundos por parte dos bancos, para posterior aplicação. Neste tipo de intermediação, tem-se três diferentes intervenientes: credores, acionistas e devedores. Os credores são entidades que emprestam dinheiro ao banco recebendo em troca os ditos juros. A título de exemplo, considere-se os depósitos de retalho que representam o dinheiro depositado num banco em nome de alguém. Os acionistas, por sua vez, investem o seu capital e recebem dividendos conforme os resultados do banco. Podem ser particulares ou investidores institucionais e de empresas que possuem parte do capital social de um banco. Este capital é representado pelas ações que detêm. Por fim, os devedores são as entidades que pedem empréstimos ao banco, fazendo com que o banco aplique os seus fundos.

No balanço financeiro de um banco identificam-se 3 rúbricas: estrutura do ativo, estrutura do passivo e capital. O ativo corresponde ao montante total aplicado nos devedores, enquanto que o passivo corresponde ao montante total captado nos credores. Por outro lado, o capital corresponde ao financiamento dado pelos acionistas, ou seja, à situação líquida do banco. Este é obtido pela diferença entre o valor do ativo e o valor do passivo. Além disso, para que um banco se encontre numa situação financeira sustentável, o seu balanço financeiro tem de satisfazer os requisitos de rentabilidade, liquidez e solvabilidade.

2.1 Estrutura do Ativo

Neste trabalho considera-se que a estrutura do ativo é composta pelos seguintes agregados:

- *Liquidez*: representa os ativos que podem ser rapidamente comprados ou vendidos no mercado sem afetar os seus preços. Os depósitos no Banco Central são exemplos de ativos líquidos;
- *Crédito à habitação*: crédito concedido em geral pelas instituições financeiras com o propósito de construção ou de aquisição de habitação. Por exemplo, um empréstimo no valor de 150 mil euros a 30 anos, indexado a uma taxa de juro de 3%;

- *Crédito ao consumo*: crédito pessoal disponibilizado pelas instituições financeiras a um particular, assegurando os montantes necessários para a aquisição de bens de consumo e de serviços pessoais. Ainda que estes créditos sejam de maturidade variável, neste trabalho considerou-se apenas uma maturidade de 2 anos. São exemplos destes os empréstimos obtidos para a aquisição de férias, móveis, equipamentos informáticos, eletrodomésticos, cartões de crédito ou até mesmo o crédito automóvel;
- *Obrigações de tesouro*: obrigações emitidas pelo Estado para satisfazer as suas necessidades de financiamento. Estas obrigações ajudam o Estado a financiar investimentos da Administração Pública. Apesar destas poderem ser emitidas com maturidades entre 1 e 50 anos, optou-se por fixar para estas obrigações uma maturidade de 10 anos;
- *Obrigações corporativas*: títulos de dívidas emitidos por empresas privadas (por exemplo, Sonae, Portugal Telecom, etc) e vendidos a investidores como forma de financiamento. Ainda que existam várias maturidades para este tipo de obrigações, para o trabalho considerou-se que estas têm uma maturidade de 20 anos.

As *obrigações (de tesouro e corporativas)* dividem-se ainda em dois tipos distintos: AFS ou HTM. AFS é a sigla para "Available For Sale" e diz respeito a obrigações que podem ser vendidas a qualquer momento antes de atingirem a maturidade. Deste modo, grandes oscilações no mercado impactam o valor contabilístico e o capital próprio da instituição, afetando desta maneira o património do banco. Por outro lado, HTM corresponde a "Held to Maturity" e diferencia-se da anterior pelo facto de estas obrigações serem detidas até à maturidade. Desta maneira, as oscilações de mercado não originam repercussões no valor contabilístico nem no capital próprio da instituição.

Para a estrutura do ativo poderiam ter sido considerados outros agregados, como é o caso, por exemplo, do crédito a pequenas e médias empresas. Porém, na pesquisa realizada, não foram encontrados dados públicos disponíveis, inviabilizando assim a sua utilização. Ainda assim, os agregados considerados cobrem a maior parte da estrutura do ativo do banco, o que permite obter uma simulação num contexto real.

2.2 Estrutura do Passivo

Relativamente à estrutura do passivo considera-se os seguintes agregados:

- *Depósitos*: pequenos depósitos efetuados por particulares, o que tipicamente se chama depósitos de retalho. Estes representam o dinheiro que os clientes de um banco depositam e possuem nas suas contas;
- *Mercado monetário*: depósitos a curto prazo formalizados por grandes empresas, tratando-se de grandes investimentos. É um mercado especificamente para a negociação de instrumentos financeiros com alta liquidez de curto prazo, onde participam exclusivamente instituições financeiras;

- *Obrigações emitidas*: crédito titulado de médio/longo prazo concedido por investidores ao banco.

Os *depósitos* são considerados estáveis porque a quantidade de depósitos assegurados é alta. O mesmo não ocorre no *mercado monetário* e nas *obrigações emitidas*, dado que estes estão concentrados num reduzido número de grandes investidores, pelo que são considerados passivos instáveis.

Note-se que as alocações consideradas para os diferentes agregados da estrutura do passivo serão fixas, uma vez que considerar vários investimentos para os diferentes agregados do passivo exigia a modelização de distribuição de dividendos em caso de lucros, aumentos de capital em caso de perdas significativas, custos nos passivos e modelação dos fluxos dos depósitos. Apesar desta vertente poder ser explorada futuramente, não faz parte dos objetivos deste trabalho.

Além disso, a utilização de agregados fixos na estrutura do passivo e capital permite melhor comparabilidade das estratégias historicamente, dado que ao se testar apenas as alocações da estrutura do ativo, caso se testem duas ou mais estratégias distintas, constar-se-á que as diferenças nos desempenhos históricos decorrem somente das variações no ativo e não de variações no passivo. Mais, é possível assumir-se desta forma que há refinanciamento da estrutura do passivo e que o capital se mantém constante. Tal acontece se porventura se assumir que o banco aumenta capital quando tem resultados negativos e que distribui dividendos quando tem resultados positivos.

2.3 Objetivo

A literatura de otimização de um balanço tem conhecido avanços significativos, como sejam as seguintes referências [21–23]. Neste trabalho, pretende-se otimizar um balanço de um banco, analisando os agregados do ativo onde deve ser feito o investimento por forma a maximizar o seu retorno ajustado ao risco. Porém, tais investimentos estão sujeitos não só a regulamentos assentes nos conceitos de sustentabilidade de um banco, bem como a regras regulamentares impostas pelo Banco Central. Esta necessidade é facilmente compreendida através do seguinte exemplo: suponha que um banco investe todo o ativo em crédito à habitação e que posteriormente, por alguma razão, todos os clientes que fizeram depósitos a prazo no banco pretendem levantar o seu investimento (mesmo cientes da perda total do juro). Nestas condições, o banco não consegue satisfazer o pedido dos clientes e entra em estado de insolvência por falta de meios líquidos para satisfazer as saídas de depósitos. Portanto, para evitar estas situações, pretende-se formular um modelo que otimize o retorno sujeito a restrições que tem como base rácios regulamentares que atestam o correto funcionamento de um banco.

Para que as soluções obtidas com o modelo possam ser aplicadas em situações reais, estas precisam de apresentar alguma estabilidade ao longo dos anos. Esta estabilidade é atingida através de uma restrição de turnover global, e também de restrições de turnovers locais em alguns dos agregados. A restrição de turnover local para alguns agregados do crédito advém do facto de os bancos poderem apenas reinvestir, em grande medida, o montante que advém de pré-pagamentos. Embora o tema de reinvestimentos limitados pelos pré-pagamentos tenha sido também abordado em [22], os contributos desta investigação no modelo são:

- introdução de restrições de turnovers locais para limitar superiormente a realocação em alguns dos agregados;
- introdução de restrição de turnover global para restringir a velocidade de reafetação aos diferentes agregados, para maior preservação da robustez das alocações.

Outro contributo significativo desta investigação prende-se com o facto de realizar os primeiros testes de desempenho utilizando dados históricos de uma metodologia de otimização de balanço, através do cálculo da rendibilidade efetiva, ou seja, da rendibilidade obtida por um banco em cada ano caso se sigam as alocações obtidas com a metodologia de otimização. Além deste contributo, importa também realçar o desenvolvimento de uma metodologia de testes de desempenho usando dados históricos, com base num histórico alargado de anos, a partir da rendibilidade efetiva acumulada. Esta metodologia permite aferir a estabilidade das alocações. De facto, com base nos testes históricos demonstrar-se-á que os modelos de otimização produzem desempenhos superiores na ordem dos 0.94% ao ano face ao ativo e 9.4% ao ano face aos capitais próprios, em média, relativamente a regras heurísticas. Também se verificará que a estabilidade das alocações dos modelos de otimização sem restrições de turnover não é realista, na medida em que, em alguns dos testes, uma metodologia sem restrições de turnover atinge variações nas alocações em cerca de 40% do ativo, o que não acontece na prática. Em oposição, o modelo de otimização com restrições de turnover atinge alocações mais realistas. Deste modo, os resultados provenientes dos testes históricos, e respetivas conclusões, acrescentam valor a esta investigação.

Capítulo 3

Modelo

Na formulação do modelo, os índices i referentes aos agregados do ativo devem ser considerados de acordo com a Tabela 3.1. Além disso, a Tabela 3.2 indica os índices j e as respectivas alocações dos agregados da estrutura do passivo. Por uma questão de simplificação de fórmulas, denota-se o capital como o último passivo.

Agregados do ativo	Índice i
Liquidez	1
Crédito à habitação	2
Crédito ao consumo	3
Obrigações de tesouro AFS	4
Obrigações de tesouro HTM	5
Obrigações corporativas AFS	6
Obrigações corporativas HTM	7

Tabela 3.1 Índices dos agregados do ativo.

Agregados do passivo	Índice j	Alocações
Depósitos	1	50%
Mercado monetário	2	20%
Obrigações emitidas	3	20%
Capital ^a	4	10%

^aApesar do capital não ser um agregado do passivo, é incluído como tal nesta tabela para simplificação da notação.

Tabela 3.2 Índices dos agregados do passivo e respectivas alocações.

Assume-se ainda que o capital e os agregados do passivo são fornecidos à partida como dados de entrada para o modelo. Por consequência, os cálculos que deles advêm são considerados constantes.

3.1 Modelo \mathcal{M}

Neste trabalho, a solução da carteira bancária pode ser obtida através do seguinte modelo \mathcal{M} , o qual é baseado no modelo proposto inicialmente por [23]. Assim sendo, o modelo \mathcal{M} consiste em:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^7}{\text{maximizar}} && \sum_{i=1}^7 r_i x_i \\ & \text{sujeito a} && \sum_{i=1}^7 x_i = 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^7 \lambda_i x_i}{\Lambda} \geq K_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{N}{\sum_{i=1}^7 v_i x_i} \geq K_2, \quad (3.3)$$

$$\frac{C - \sqrt{V(x_1, \dots, x_7)} - |RTJ(x_1, \dots, x_7)|}{\sum_{i=1}^7 RW_i x_i} \geq K_3, \quad (3.4)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^7 S_i x_i}{M} \geq K_4, \quad (3.5)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (3.6)$$

Neste problema pretende-se maximizar o retorno, onde a função objetivo é definida através da rentabilidade r_i da classe de ativo i e da proporção de montante investido x_i na rubrica do ativo i . A restrição (3.1) indica que todo o ativo será investido e a restrição (3.6) garante que nenhuma proporção de montante investido será negativa.

Tal como mencionado no capítulo anterior, existe uma situação financeira sustentável quando são satisfeitos os requisitos de rentabilidade, liquidez e solvabilidade. Neste contexto, as restrições (3.2), (3.3) e (3.5) são designadas por *restrições de liquidez* e a restrição (3.4) denominada de *restrição de solvabilidade*, já que são estas as restrições que garantem o cumprimento dos requisitos necessários relativos à liquidez e solvabilidade, respetivamente. É de salientar que tanto os rácios regulamentares assentes nestas restrições como os seus limites inferiores estão estabelecidos em [12, 31].

3.1.1 Restrições de Liquidez

Rácio Regulamentar LCR

Relativamente à restrição (3.2), o membro esquerdo diz respeito ao rácio regulamentar LCR (Liquidity Coverage Ratio) que compara os ativos líquidos com as saídas de liquidez a 30 dias, ou seja,

a curto prazo. O parâmetro λ_i é uma percentagem que varia no intervalo $[0, 100\%]$ e corresponde ao ponderador que traduz a percepção do regulador face à liquidez desse ativo i . Deste modo, quanto mais próximo estiver de 100%, maior é a liquidez, significando que pode ser vendido sem complicações mesmo em circunstâncias adversas. O denominador deste rácio é $\Lambda = \sum_{j=1}^4 \Lambda_j p_j$, com Λ_j o valor do ponderador j e p_j a proporção de montante investido na rubrica do passivo j . Atendendo a que os agregados do passivo e capital são fornecidos, Λ será um valor constante. O membro direito desta restrição é K_1 que representa o limite inferior para o rácio regulamentar LCR.

A título de exemplo, considere-se a seguinte carteira bancária, onde apenas é investido em liquidez (40%) e em crédito ao consumo (60%). Como esta carteira somente investe em 2 dos 7 agregados da estrutura do ativo considerada, apenas serão apresentados os parâmetros que nela tenham influência. Aliás, esta consideração deve ser feita para todos os exemplos apresentados ao longo deste capítulo. No exemplo que se segue, considere-se ainda $\lambda_1 = 100\%$, $\lambda_3 = 0\%$, $\Lambda = 25\%$ e $K_1 = 110\%$. Assim sendo,

$$\frac{\sum_{i=1}^7 \lambda_i x_i}{\Lambda} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3}{\Lambda} = \frac{1 \times 0.4 + 0 \times 0.6}{0.25} = 1.6 \geq 1.1.$$

Logo, o rácio LCR encontra-se confortavelmente acima do limite exigido. Isto revela que o banco dispõe dos ativos líquidos necessários para enfrentar ruturas de liquidez de curto prazo.

Rácio Regulamentar NSFR

No membro esquerdo da restrição (3.3) tem-se o rácio regulamentar NSFR (Net Stable Funding Ratio) que compara a dificuldade de vender ativos com a estabilidade de financiamento a médio prazo, isto é, predominantemente a um ano. Isto significa que quando o financiamento for estável, o banco pode suportar maiores investimentos em agregados menos líquidos. O numerador deste rácio é $N = \sum_{j=1}^4 N_j p_j$, onde N_j é o valor do ponderador j e p_j a proporção de montante investido na rubrica do passivo j . Analogamente ao rácio anterior, trata-se de um valor constante pelo facto de se considerar que os agregados do passivo e capital são facultados. No denominador, o v_i representa o valor do ponderador i para o ativo i e espelha a percepção do regulador face à necessidade de financiamento estável para cobrir o ativo i . Desta forma, quanto mais próximo estiver de 100%, maior é a necessidade de financiamento estável. Por outro lado, o membro direito desta restrição K_2 designa o limite inferior para o rácio regulamentar NSFR.

Exemplificando, considere-se $v_1 = 0\%$, $v_3 = 85\%$, $N = 80\%$ e $K_2 = 110\%$. Então,

$$\frac{N}{\sum_{i=1}^7 v_i x_i} = \frac{N}{v_1 x_1 + v_3 x_3} = \frac{0.8}{0 \times 0.4 + 0.85 \times 0.6} = \frac{0.8}{0.51} \approx 1.57 \geq 1.1.$$

Assim, constata-se que o rácio NSFR ultrapassa o limite pretendido. Portanto, supera-se o montante de financiamento estável exigido.

Rácio de Cobertura de Stress de Liquidez

Por outro lado, a restrição (3.5) tem no membro esquerdo o rácio de cobertura de stress de liquidez. Este determina a existência (ou não) de secagem nos mercados, ou seja, se o mercado monetário e o mercado de obrigações permitem (ou não) o refinanciamento dos agregados correspondentes do passivo. Como tal, considere-se S_i o valor do ponderador i em relação ao stress de liquidez para o ativo i e M o valor constante que diz respeito à soma da proporção de montante investido no mercado monetário com o investido nas obrigações emitidas, isto é, $M = p_2 + p_3$. No membro direito encontra-se K_4 que representa o limite inferior da cobertura de stress de liquidez.

Para exemplificar este rácio, considere-se os seguintes valores $S_1 = 100\%$, $S_3 = 0\%$, $M = 30\%$ e $K_4 = 100\%$. Assim,

$$\frac{\sum_{i=1}^7 S_i x_i}{M} = \frac{S_1 x_1 + S_3 x_3}{M} = \frac{1 \times 0.4 + 0 \times 0.6}{0.3} = \frac{4}{3} \geq 1.$$

Como se pode verificar a restrição (3.5) é satisfeita no exemplo apresentado, indicando que os ativos líquidos cobrem o montante investido em mercado monetário e obrigações emitidas.

3.1.2 Restrição de Solvabilidade

Rácio de Capital CET1 após Conjuntura Adversa

Em relação à restrição (3.4), o membro esquerdo trata-se do rácio de capital CET1 (Common Equity Tier 1) após conjuntura adversa. Este é uma medida de capital social do banco, em comparação com o total de ativos ponderados pelo risco que exprimem os riscos de degradação do capital próprio. Além do mais, este rácio expressa a capacidade de um banco poder suportar o stress financeiro e permanecer solvente. Nesta restrição, C representa o capital e é um valor constante, dado que o montante referente ao capital próprio é dado. Admitindo que existe independência no retorno dos vários ativos, a *Variância* é dada por $V(x_1, \dots, x_7) = \sum_{i=1}^7 (\sigma_i x_i)^2$ com σ_i o risco individual associado ao ativo i . Quanto maior for σ_i , maior é a variabilidade dos retornos associados ao ativo i . O termo $RTJ(x_1, \dots, x_7) = \sum_{i=1}^7 \Delta_i x_i + \sum_{j=1}^4 \delta_j p_j$ é o *Risco de Taxa de Juro* com Δ_i a sensibilidade do ativo i à taxa de juro e $\sum_{j=1}^4 \delta_j p_j$ o valor constante do risco 300 p.b. (isto é, 3%) margem associado à estrutura do passivo e capital. Por outras palavras, $\sum_{j=1}^4 \delta_j p_j$ representa o impacto que um movimento de 3% de subida ou descida nas taxas de juro tem na estrutura do passivo e capital. Em relação ao parâmetro Δ_i , quanto maior este for, maior é a sensibilidade da margem financeira do banco a variações nas taxas de juro. No numerador deste rácio tem-se o RW_i que é o ponderador de risco pré-determinado pelos

reguladores em função da percepção do risco do ativo i . Como membro direito desta restrição está K_3 que corresponde ao limite inferior do rácio CET1 após o stress.

A título de exemplo, apresenta-se o cálculo deste último rácio considerando $C = 10\%$, $\sigma_1 = 0\%$, $\sigma_3 = 5\%$, $\Delta_1 = \Delta_3 = 0\%$, $\sum_{j=1}^4 \delta_j p_j = 1\%$, $RW_1 = 0\%$, $RW_3 = 100\%$ e $K_3 = 10\%$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
& \frac{C - \sqrt{V(x_1, \dots, x_7)} - |RTJ(x_1, \dots, x_7)|}{\sum_{i=1}^7 RW_i x_i} \\
&= \frac{C - \sqrt{\sum_{i=1}^7 (\sigma_i x_i)^2} - \left| \sum_{i=1}^7 \Delta_i x_i + \sum_{j=1}^4 \delta_j p_j \right|}{\sum_{i=1}^7 RW_i x_i} \\
&= \frac{0.1 - \sqrt{(\sigma_1 x_1)^2 + (\sigma_3 x_3)^2} - |\Delta_1 x_1 + \Delta_3 x_3 + 0.01|}{RW_1 x_1 + RW_3 x_3} \\
&= \frac{0.1 - \sqrt{(0 \times 0.4)^2 + (0.05 \times 0.6)^2} - |0 \times 0.4 + 0 \times 0.6 + 0.01|}{0 \times 0.4 + 1 \times 0.6} = 0.1 \geq 0.1.
\end{aligned}$$

Assim sendo, este rácio atinge o limite desejável imposto. Logo, com o investimento proposto é possível resistir ao stress financeiro e não entrar num estado de incumprimento do limite do rácio de capital.

Nesta perspetiva, observando os resultados dos rácios, conclui-se que estes permitem indiciar sustentabilidade do balanço.

3.2 Modelo $\mathcal{M}1$

O modelo \mathcal{M} proposto garante a sustentabilidade de um banco através das restrições que contempla. Todavia, pretende-se ainda que o modelo dê resposta aos procedimentos habituais de um banco na otimização de carteiras bancárias. Neste sentido, o modelo já proposto apresenta falhas na estabilidade da carteira, uma vez que num contexto real bancário existe a preocupação de restringir a volatilidade da solução da carteira de um ano para o outro. O modelo de Hałaj [22] introduz restrições aos reinvestimentos de agregados mais rígidos, impondo um limite inferior na variação dos agregados de balanço mais rígidos.

Neste trabalho, o modelo $\mathcal{M}1$ impõe limites superiores para as novas alocações, em acréscimo aos limites inferiores anteriormente referidos, através da introdução de restrições de turnovers locais em alguns ativos. Além disso, para manter a estabilidade da solução, é adicionada uma restrição de turnover global envolvendo todos os ativos.

Nestas condições, a solução da carteira bancária pode ser obtida através do seguinte modelo $\mathcal{M}1$:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^7}{\text{maximizar}} && \sum_{i=1}^7 r_i x_i \\ & \text{sujeito a} && (3.1) - (3.6), \\ & && x_i - x_i^0 \leq y_i, \quad i = 1, \dots, 7, && (3.7) \\ & && x_i^0 - x_i \leq z_i, \quad i = 1, \dots, 7, && (3.8) \\ & && y_i \leq \alpha_i x_i^0, \quad i = 2, 3, 5, 7, && (3.9) \\ & && z_i \leq \alpha_i x_i^0, \quad i = 2, 3, 5, 7, && (3.10) \\ & && \sum_{i=1}^7 [y_i + z_i] \leq h, && (3.11) \\ & && y_i, z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7. && (3.12) \end{aligned}$$

A restrição (3.12) é uma restrição de não-negatividade.

3.2.1 Restrições de Turnover

As restrições (3.7) – (3.10) são chamadas de *restrições de turnovers locais* e permitem limitar a variação da proporção de montante investido, com base numa carteira de referência x^0 . Estas restrições são aplicadas sobretudo a ativos que não podem ser liquidados a qualquer instante. Por este motivo, as restrições (3.9) e (3.10) apresentam somente os índices 2, 3, 5 e 7. Nestas restrições, o parâmetro α_i indica uma proporção do investimento associado ao ativo i no ano anterior que pode ser reinvestida. Essa proporção é escolhida de forma distinta para os ativos considerados baseada em pressupostas maturidades destes. Além do mais, como carteira de referência x^0 considera-se a proporção de montante investido no ano anterior.

Paralelamente às restrições de turnovers locais, existe uma outra restrição que também contribui no sentido de dar maior estabilidade à solução ótima. Essa restrição é denominada de *restrição de turnover global* e corresponde à restrição (3.11). Esta complementa as restrições anteriores, na medida em que, mesmo os ativos que não estavam restritos anteriormente estão agora condicionados por uma variação máxima total. Deste modo, o parâmetro h representa o valor máximo de variação da proporção de montante investido permitida para todos os ativos.

3.3 Análise do Modelo

O modelo $\mathcal{M}1$ representa um problema não linear, uma vez que as restrições (3.3) e (3.4) são não lineares. Apesar de a restrição (3.3) poder ser transformada numa restrição linear equivalente, tal não acontece com a restrição (3.4). No entanto, todas as restrições são convexas, pelo que a região admissível é convexa. Deste modo, complementando o facto da função objetivo ser uma função linear (e portanto côncava) e o conjunto das restrições ser compacto, é possível garantir que todo o maximizante local é global. Este é um resultado interessante, na medida em que, fornece a garantia que a solução do problema não estabilizará em torno de um ótimo local não global.

Capítulo 4

Dados do Modelo

Para que o estudo se possa realizar é preciso recolher previamente dados que permitem depois fazer uma análise histórica da rendibilidade a partir do modelo já formulado. Deste modo, estabeleceu-se a utilização de dados públicos anuais americanos para taxas de juro e incumprimentos respeitantes à estrutura do ativo. Por outro lado, a grande parte dos parâmetros do modelo resultaram de ponderadores fixados pelas entidades regulamentares ou decorreram da estrutura do passivo indicada na Tabela 3.2. Assim, os valores considerados para estes parâmetros podem ser consultados na Tabela 4.1. Desta maneira, falta somente estimar a rendibilidade esperada e o risco de cada ativo.

$\Lambda = 21.5\%$	$\lambda = [100\% \ 0\% \ 0\% \ 100\% \ 100\% \ 50\% \ 50\%]$
$N = 78\%$	$\nu = [0\% \ 65\% \ 85\% \ 5\% \ 5\% \ 5\% \ 5\%]$
$C = 10\%$	$\sum_{j=1}^4 \delta_j p_j = 1.1\%$
$M = 40\%$	$\Delta = [0\% \ 0\% \ 0\% \ 0\% \ 0\% \ 0\% \ 0\%]$
$h = 15\%$	$RW = [0\% \ 35\% \ 100\% \ 0\% \ 0\% \ 100\% \ 100\%]$
$K_1 = K_2 = 110\%$	$S = [100\% \ 0\% \ 0\% \ 100\% \ 100\% \ 100\% \ 100\%]$
$K_3 = 10\%$	$K_4 = 100\%$

Tabela 4.1 Dados do modelo.¹

4.1 Rendibilidades dos Ativos

Para estimar as rendibilidades de cada ativo, foi necessário retirar séries históricas de taxas de juro. Em relação à liquidez considerou-se as taxas de juro de fundos federais dos Estados Unidos da América, retiradas de [7], que fornecem a percentagem de juro recebida após uma aplicação no Banco Central. No crédito à habitação recolheu-se as taxas hipotecárias de [6], que são taxas de juro de crédito a 30 anos. Quanto ao crédito ao consumo, utilizou-se taxas financeiras sobre empréstimos

¹ Δ representa a sensibilidade da margem financeira do banco a variações nas taxas de juro. Por sua vez, os ativos de taxa fixa têm sensibilidade zero. Logo, Δ é nulo porque os agregados do ativo, por serem relativos a dados americanos, têm taxas fixas. Além disso, λ , ν e RW são ponderadores prescritos pelas entidades regulamentares [13, 15, 30].

peçoais nos bancos comerciais a 2 anos, as quais foram retiradas através de [5]. Para as obrigações de tesouro (AFS e HTM) extraiu-se de [9] as taxas de rendimento a 10 anos, as quais são taxas implícitas nas obrigações que se encontram no mercado. Relativamente às obrigações corporativas (AFS e HTM) recorreu-se às taxas de rendimento de obrigações corporativas, com maturidade superior ou igual a 20 anos, extraídas a partir de [8].

Ainda assim, a estimação das rendibilidades na maior parte dos ativos não depende apenas das taxas de juro. Além das taxas de juro é preciso ainda ter em conta a possível existência de incumprimentos e perdas associadas. Por exemplo, no crédito ao consumo existe a possibilidade de ser estabelecido um contrato e esse não ser cumprido pelo devedor. Por esta razão, os bancos estabelecem consoante o ativo diferentes estimativas para a probabilidade de eventuais incumprimentos ocorrerem.

Desta maneira, seguidamente recolheram-se dados referentes a séries históricas de incumprimentos. Por um lado, tem-se a *probabilidade de incumprimento (PD - Probability of Default)* que é o risco de o mutuário² não conseguir pagar a sua dívida na totalidade no período de tempo previsto. Por consequência, quanto maior for a estimativa de um credor³ face à probabilidade de incumprimento de um mutuário, maior será a taxa de juro que o credor cobrará ao mutuário. Esta taxa reflete a compensação pelo risco de incumprimento. Por outro lado, tem-se a *perda de incumprimento (LGD - Loss Given Default)*, que é a proporção de dinheiro que um banco perde quando num empréstimo não são cumpridas as responsabilidades financeiras ou as obrigações legais dentro do prazo estabelecido previamente. Por exemplo, se o devedor incumprir com uma dívida pendente de 200 mil euros e o banco conseguir vender a garantia dada por esse devedor (considere-se um imóvel) por um preço líquido de 140 mil euros, então a LGD é de 30%, isto é, $\frac{60\,000}{200\,000}$. Esta perda é o complementar da taxa de recuperação. A Tabela 4.4 indica o valor de LGD para cada um dos ativos, o qual está fixo pelas entidades regulamentares.

Considere-se Γ a perda por unidade de investimento. Então,

$$\Gamma = LGD \times X,$$

onde X segue uma lei de Bernoulli de parâmetro PD.

Por consequência, a *Perda Esperada (PE)* é dada pelo valor médio da perda por unidade de investimento, ou seja,

$$PE = E(\Gamma) = E(LGD \times X) = LGD \times E(X) = LGD \times PD.$$

Desta forma, a rendibilidade de cada ativo r_i será dada por

$$r_i = j_i - PE_i,$$

²O mutuário é a entidade responsável pelo pagamento do empréstimo ao banco.

³O credor é a entidade a quem se deve dinheiro e que tem o poder para exigir o pagamento ou cumprimento de uma obrigação contratual entre as duas partes.

onde j_i é a taxa de juro do ativo i e PE_i a perda esperada desse mesmo ativo.

Tanto a PD como a LGD são partes fundamentais do modelo de risco estabelecido em Basileia II [1, 29], visto que são utilizadas no cálculo das perdas esperadas. No entanto, existem casos em que não estão disponíveis valores de PD e/ou LGD. Nesses casos, utilizam-se os Charge-Offs que refletem a percentagem de créditos que todos os anos os bancos atestam como incobráveis. Apesar de não serem o mesmo que os incumprimentos, são uma boa aproximação para o valor das perdas esperadas.

Assim sendo, no que diz respeito aos incumprimentos considerou-se para a liquidez a PD e LGD nulas, pois assume-se que o Banco Central está isento de perdas esperadas. Para as obrigações de tesouro (AFS e HTM) considerou-se a PD nula, isto porque este tipo de obrigações têm muito pouco risco associado, na medida em que, em caso de incumprimento o governo consegue cumprir a sua obrigação emitindo mais dinheiro. Além do mais, as obrigações de tesouro americanas têm normalmente rating AAA. Por este motivo, não é necessário especificar o valor de LGD para obrigações de tesouro, uma vez que, para efeitos de cálculos de perdas esperadas, o valor será sempre zero para qualquer que seja o valor de LGD. Nas obrigações corporativas (AFS e HTM) as PD's foram extraídas de [28] (ver Anexo 23) e a $LGD = 62.8\%$ de [28] (ver Anexo 7) através do cálculo resultante da taxa de recuperação. Para o crédito à habitação e o crédito ao consumo não foi possível encontrar os valores de PD, comprometendo deste modo o cálculo das perdas esperadas. Deste modo, para estes agregados foi necessário recorrer aos Charge-Offs, os quais foram retirados de [3] e de [2], respetivamente.

4.1.1 Obrigações AFS

Para as obrigações AFS (de tesouro e corporativas), a rendibilidade não é dada pela expressão apresentada anteriormente. Como estes ativos podem ser liquidados a qualquer altura, a sua rendibilidade deve ser determinada pela taxa de juro e pelas variações de mercado.

Seja $P(j)$ o preço de uma obrigação com cupão⁴ c , com taxa de juro j e de maturidade T . Assim, $P(j)$ pode ser determinado do seguinte modo:

$$P(j) = \frac{1}{(1+j)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{c}{(1+j)^t}.$$

O primeiro termo do membro direito desta expressão diz respeito ao valor atual do valor nominal a ser pago à data de maturidade T , enquanto que o segundo membro corresponde à anuidade associada ao pagamento de cupões.

Em seguida, desenvolvendo a expressão anterior vem

⁴Taxa de juro pré fixada paga periodicamente pelo emitente de uma obrigação durante a vida útil de um empréstimo obrigacionista. Esta taxa é uma percentagem sobre o valor nominal de uma obrigação.

$$\begin{aligned}
P(j) &= \frac{1}{(1+j)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{c}{(1+j)^t} = \frac{1}{(1+j)^T} + \frac{c}{(1+j)} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{(1+j)^t} \\
&= \frac{1}{(1+j)^T} + \frac{c}{(1+j)} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)} \\
&= \frac{1}{(1+j)^T} + \frac{c}{j} \left[1 - \left(\frac{1}{1+j}\right)^T \right] \\
&= \frac{c}{j} + \frac{1}{(1+j)^T} \left[1 - \frac{c}{j} \right].
\end{aligned}$$

A duração de uma obrigação, $Dur(j)$, é uma medida de risco de taxas de juro. Através da duração é possível estimar o aumento ou diminuição do preço de uma obrigação face à mudança das taxas de juro. Além disso, obrigações com durações mais elevadas têm mais riscos e maior volatilidade associada ao preço do que obrigações com durações mais baixas. Esta pode ser calculada diferenciando $P(j)$ em ordem a j , ou seja,

$$Dur(j) = \frac{dP(j)}{dj} = -\frac{c}{j^2} - \frac{T}{(1+j)^{T+1}} + \frac{c}{j^2} \frac{1}{(1+j)^T} + \frac{c}{j} \frac{T}{(1+j)^{T+1}}.$$

Dado que neste trabalho se considera obrigações ao par (isto é, a taxa é igual ao cupão) com maturidade de 10 anos, então

$$Dur(j) = \frac{1}{j(j+1)^{10}} - \frac{1}{j}.$$

Portanto, dada uma série histórica de taxas de juro de obrigações a 10 anos, a rendibilidade das obrigações do ativo i no ano $t+1$ pode ser aproximada por

$$r_{i,t+1} = j_{i,t} + Dur(j_{i,t})(j_{i,t+1} - j_{i,t}).$$

4.2 Risco dos Ativos

Nesta secção, explicar-se-á a estimação do risco de cada ativo. O tipo de ativo condiciona a forma de avaliação do risco. Desta forma, nalguns ativos o risco será nulo, uma vez que se considera que estes ativos estão isentos de risco. Nos ativos com risco, este será obtido pelo *VaR de Crédito (CV - Credit VaR)* ou pelo *VaR de Mercado (MV - Market VaR)*, dependendo do ativo em questão. Logo, para o ano t , o parâmetro de risco obtém-se conforme indicado na Tabela 4.2.

Parâmetro de Risco	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
Valor	0	$CV_{2,t}$	$CV_{3,t}$	$MV_{4,t}$	0	$MV_{6,t}$	$CV_{7,t}$

Tabela 4.2 Valor do parâmetro de risco no ano t .

4.2.1 VaR de Crédito

O Acordo de Basileia II [1] estipula as exigências de capital que, na metodologia interna baseada em ratings (IRB - Internal Ratings-Based), permitem determinar eventuais perdas de crédito em função das PD e LGD. É neste contexto que surge a noção de *VaR de Crédito* (CV - *Credit VaR*), cujo cálculo é dado pela diferença entre a *Perda Inesperada* (PI) e a *Perda Esperada* (PE). Este será aplicado aos ativos de índices 2, 3 e 7.

A perda inesperada, ao contrário da perda esperada, reflete o que pode acontecer num cenário adverso. Recorde-se que a expressão para a perda esperada já foi apresentada na secção 4.1. Resta agora apresentar a expressão da perda inesperada.

Para a expressão da perda inesperada, considere-se A_n o valor do n -ésimo empréstimo de um tipo de ativo do devedor, μ_n a taxa de retorno esperada associada a este empréstimo e σ_n a volatilidade inerente a este empréstimo. Note-se que μ_n e σ_n são valores constantes. Então, assume-se que A_n é definido pela equação estocástica do Movimento Geométrico Browniano [19]

$$dA_n(t) = \mu_n A_n(t) dt + \sigma_n A_n(t) dW_n(t), \quad t \in [0, T],$$

onde $W_n(t)$ é um processo de Wiener, ou seja, $W_n(t) \sim N(0, \sqrt{t})$.

Através do Lema de Itô, o valor do n -ésimo empréstimo na maturidade T pode ser obtido por

$$\log(A_n(T)) = \log(A_n(0)) + \mu_n T - \frac{1}{2} \sigma_n^2 T + \sigma_n W_n(T).$$

Como $W_n(T) \sim N(0, \sqrt{T})$, então $W_n(T) = \sqrt{T} U_n$ onde U_n segue uma lei normal standard. Assim tem-se

$$\log(A_n(T)) = \log(A_n(0)) + \mu_n T - \frac{1}{2} \sigma_n^2 T + \sigma_n \sqrt{T} U_n.$$

Em seguida, seja B_n o valor contratual das obrigações a pagar. Assim sendo, a probabilidade de incumprimento do n -ésimo empréstimo é dada por

$$PD_n = P(A_n(T) < B_n) = P(\log(A_n(T)) < \log(B_n)) = P(U_n < \xi_n) = N(\xi_n),$$

onde $N(\cdot)$ é a função de repartição da distribuição normal standard e

$$\xi_n = \frac{\log(B_n) - \log(A_n(0)) - \mu_n T + \frac{1}{2} \sigma_n^2 T}{\sigma_n \sqrt{T}}.$$

Deste modo,

$$PD_n = N(\xi_n) \implies \xi_n = N^{-1}(PD_n).$$

No entanto, interessa distinguir o risco sistemático associado a todo o mercado do risco individual de cada ativo. Desta maneira, considere-se agora que a variável aleatória U_n pode ser escrita da seguinte forma [19]

$$U_n = \sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_n,$$

onde Y, Z_1, Z_2, \dots são variáveis aleatórias mutuamente independentes que seguem uma distribuição normal standard. Deste modo, a variável aleatória Y está associada ao risco sistemático de todo o mercado, enquanto que as variáveis aleatórias Z_n correspondem ao risco idiossincrático de cada empréstimo. Por sua vez, o $R \in]0, 1[$ é o parâmetro de correlação entre U_n e U_m , para qualquer $n \neq m$.

Esta decomposição da variável aleatória U_n preserva a condição de $U_n \sim N(0, 1)$. De facto,

$$E(U_n) = E(\sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_n) = \sqrt{R}E(Y) + \sqrt{1-R}E(Z_n) = 0,$$

e através da independência entre Y e Z_n ,

$$\text{Var}(U_n) = \text{Var}(\sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_n) = R\text{Var}(Y) + (1-R)\text{Var}(Z_n) = R + (1-R) = 1.$$

Além disto, sabendo que, $E(Z_n Z_m) = 0$ para qualquer $n \neq m$ e $E(Y Z_n) = 0$ vem que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_n, U_m) &= E\left(\left[\sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_n\right] \left[\sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_m\right]\right) \\ &= RE(Y^2) + 2\sqrt{R}\sqrt{1-R}E(YZ_n) + (1-R)E(Z_n Z_m) = RE(Y^2) = R, \end{aligned}$$

o que demonstra efetivamente que R é o parâmetro de correlação.

Assim, pretende-se determinar para o n -ésimo empréstimo a probabilidade de incumprimento condicionada por uma realização $y \in \mathbb{R}$ do risco sistemático Y de todo o mercado, isto é,

$$\begin{aligned} p_n(y) &= P(A_n(T) < B_n | Y = y) = P(U_n < \xi_n | Y = y) \\ &= P(\sqrt{R}Y + \sqrt{1-R}Z_n < \xi_n | Y = y) \\ &= P(\sqrt{R}y + \sqrt{1-R}Z_n < \xi_n) \\ &= P\left(Z_n < \frac{\xi_n - \sqrt{R}y}{\sqrt{1-R}}\right) \\ &= N\left(\frac{\xi_n - \sqrt{R}y}{\sqrt{1-R}}\right). \end{aligned}$$

Como $\xi_n = N^{-1}(PD_n)$, então

$$p_n(y) = N\left(\frac{N^{-1}(PD_n) - \sqrt{R}y}{\sqrt{1-R}}\right).$$

De acordo com o Comit  de Basileia [18], a realiza o considerada   $y = N^{-1}(0.001)$, o que pode ser escrito de forma equivalente por $y = -N^{-1}(0.999)$. Portanto,

$$\begin{aligned} p_n(-N^{-1}(0.999)) &= N\left(\frac{N^{-1}(PD_n) + \sqrt{R}N^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-R}}\right) \\ &= N\left(\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times N^{-1}(PD_n) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times N^{-1}(0.999)\right). \end{aligned}$$

Em [27], provou-se que o valor de perda condicional de um tipo de ativo tende quase certamente para a média do valor de perda condicional de um empréstimo associado a esse tipo de ativo. Portanto, para um determinado tipo de ativo, a probabilidade de incumprimento condicionada pela realiza o $y = -N^{-1}(0.999)$   dada por

$$p(-N^{-1}(0.999)) = N\left(\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times N^{-1}(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times N^{-1}(0.999)\right).$$

Logo, para cada ativo, a *Perda Inesperada (PI)*   calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} PI &= p(-N^{-1}(0.999)) \times LGD \\ &= N\left(\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times N^{-1}(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times N^{-1}(0.999)\right) \times LGD. \end{aligned}$$

Por conseguinte, o *VaR de Crédito* do ativo i no ano t   estimado por

$$CV_{i,t} = PI_{i,t} - PE_{i,t}, \quad i = 2, 3, 7,$$

onde

- $PI_{i,t} = N\left(\sqrt{\frac{1}{1-R_{i,t}}} \times N^{-1}\left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{i,k}\right) + \sqrt{\frac{R_{i,t}}{1-R_{i,t}}} \times N^{-1}(0.999)\right) \times LGD_i;$
- $PE_{i,t} = \frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{i,k} \times LGD_i.$

O parâmetro de correla o R apresenta-se de forma heterog nea entre os diferentes ativos em causa. Logo, através de [4, 11, 20, 29], consideraram-se os valores expostos na Tabela 4.3.

Parâmetro	Valor
$R_{2,t}$	0.15
$R_{3,t}$	$0.03 \times \frac{1 - e^{-35 \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{3,k} \right)}}{1 - e^{-35}} + 0.16 \times \left(\frac{1 - e^{-35 \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{3,k} \right)}}{1 - e^{-35}} \right)$
$R_{7,t}$	$0.12 \times \frac{1 - e^{-50 \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{7,k} \right)}}{1 - e^{-50}} + 0.24 \times \left(\frac{1 - e^{-50 \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{7,k} \right)}}{1 - e^{-50}} \right)$

Tabela 4.3 Valor do parâmetro de correlação no ano t .

Note-se que para o cálculo da perda esperada, da perda inesperada e do parâmetro de correlação R é utilizada a média histórica dos últimos 10 anos das PD's, ao invés da PD apenas do ano em questão. Desta maneira, suaviza-se o impacto das possíveis oscilações anuais, o que permite obter uma melhor estimativa para a PD desse ano. Este procedimento está de acordo com as referências [14, 30] onde é recomendada a utilização de um período de observação histórica de pelo menos 5 anos.

Tal como já tinha sido referido no início da secção 4.2, para o crédito à habitação bem como para o crédito ao consumo não se encontrou dados disponíveis para as PD's. Deste modo, por forma a ser possível calcular o VaR de Crédito para estes dois ativos no ano t , estimou-se as PD's através de

$$\text{Charge-Off}_{i,t} = PD_{i,t} \times LGD_i \Leftrightarrow PD_{i,t} = \frac{\text{Charge-Off}_{i,t}}{LGD_i}, \quad i = 2, 3,$$

com $LGD_2 = 47.1\%$ e $LGD_3 = 64\%$ retirados de [32] e [10], respetivamente.

A Tabela 4.4 apresenta um quadro resumo do valor de LGD para os diferentes ativos.

Parâmetro	LGD_1	LGD_2	LGD_3	LGD_4	LGD_5	LGD_6	LGD_7
Valor	0%	47.1%	64%	$-b$	$-b$	62.8%	62.8%

^b Não foi considerado valor de LGD , visto que o valor de perdas esperadas é zero.

Tabela 4.4 Valor do parâmetro LGD para cada ativo.

4.2.2 VaR de Mercado

Nesta secção, pretende-se estimar o risco das obrigações de índices 4 e 6. O retorno destas obrigações, apresentado na secção 4.1.1, é parte fundamental do cálculo do *VaR de Mercado* (MV -

Market VaR).

O VaR de Mercado é dado a partir do Risco de Mercado (*MR - Market Risk*) do ativo i no ano t , que por sua vez é estimado pelo desvio-padrão corrigido dos retornos dos últimos 10 anos. Deste modo,

$$MV_{i,t} = N^{-1}(0.95) \times MR_{i,t}, \quad i = 4, 6,$$

onde

$$MR_{i,t} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{k=t-9}^t (r_{i,k} - \bar{r}_i)^2}, \quad \text{com} \quad \bar{r}_i = \frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t r_{i,k}.$$

4.3 Valores de α_i

Por fim, falta especificar quais os valores considerados para as restrições de turnovers locais, as quais são fixadas pelo banco e dependentes da maturidade do ativo. Recorde-se que α_i foi definido na secção 3.2.1 como uma dada proporção do montante investido associado ao ativo i no ano anterior, de acordo com a maturidade assumida para cada ativo i , $i \in \{2, 3, 5, 7\}$. Portanto, para $i \in \{1, 4, 6\}$ assumiu-se $\alpha_i = 1$, transmitindo a ideia de que nestes ativos não se aplicam as restrições de turnovers locais⁵. Para os restantes ativos, considerou-se $\alpha_i = \frac{1}{M_i}$, onde M_i é a maturidade do ativo i . Por exemplo, para o crédito à habitação exigiu-se que a variação de proporção de investimento em certo ano fosse em módulo menor ou igual que $\frac{1}{30}$ da proporção de investimento feita no ano anterior, uma vez que, em geral, estes créditos têm uma maturidade de 30 anos. Deste modo, admite-se que apenas $\frac{1}{30}$ do valor investido neste crédito pode ser reinvestido de um ano para o outro. A Tabela 4.5 apresenta os valores de α_i para as restrições de turnovers locais.

Parâmetro	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
Valor	100%	$\frac{10}{3}\%$	50%	100%	10%	100%	5%

O valor 100% representa a ausência de restrição de rigidez nesse ativo.

Tabela 4.5 Valor do parâmetro α para cada ativo.

4.4 Rendibilidade da Carteira

O modelo $\mathcal{M}1$ precisa de ser melhorado para se enquadrar às situações reais do banco. Por exemplo, para o crédito à habitação é necessário diferenciar a taxa dos novos créditos contratados no ano t da taxa dos contratos antigos (isto é, taxa dos créditos que foram contratados antes do ano t e

⁵Note-se que $\alpha_i = 1$, $i \in \{1, 4, 6\}$ permite vender tudo o que estava investido, mas na verdade limita as novas compras. Por forma a ultrapassar essa situação, o valor $\alpha_i = 1$, $i \in \{1, 4, 6\}$ indicará que a restrição não é considerada.

que ainda não atingiram a sua maturidade até esse ano), porque os contratos antigos ficam em balanço com taxas diferentes das taxas das novas operações. Por este motivo, é preciso definir a proporção de montante investido dos diferentes ativos no ano t correspondente aos antigos e novos contratos.

Seja $\hat{x}_{i,t}$ a alocação dos contratos antigos e $\tilde{x}_{i,t}$ a alocação dos contratos novos no ano t para o ativo i . Então,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i,t} &= (1 - \alpha_i)x_{i,t-1}, \\ \tilde{x}_{i,t} &= x_{i,t} - (1 - \alpha_i)x_{i,t-1}.\end{aligned}$$

Portanto, pelas igualdades anteriores conclui-se que

$$x_{i,t} = \hat{x}_{i,t} + \tilde{x}_{i,t}.$$

Desta forma, a variável a otimizar no modelo $\mathcal{M}1$ será $\tilde{x}_{i,t}$, visto que $\hat{x}_{i,t}$ será um valor constante.

Para além de ser preciso definir a alocação correspondente aos antigos e novos contratos, é ainda necessário criar uma variável que armazene a cada momento a taxa de juro dos contratos antigos para cada agregado. Note-se que a taxa de juro definida na secção 4.1 apenas corresponde à taxa de juro dos novos contratos.

Seja $\hat{j}_{i,t}$ a taxa de juro correspondente aos contratos antigos no ano t para o ativo i . Assim,

$$\hat{j}_{i,t} = (1 - \alpha_i)\hat{j}_{i,t-1} + \alpha_i j_{i,t-1}, \quad \text{com} \quad \hat{j}_{i,0} = \frac{1}{10} \sum_{k=-9}^0 j_{i,k}.$$

Atendendo às considerações feitas relativamente à diferenciação entre antigos e novos contratos, apresentar-se-á a expressão do cálculo para as diferentes rendibilidades da carteira (secções 4.4.1 e 4.4.2).

4.4.1 Rendibilidade Prospetiva

O propósito do banco é definir como deve ser feito o investimento no final do ano t , para que este possa ser aplicado durante todo o ano $t + 1$. Porém, na altura do investimento, o banco não sabe quais as rendibilidades que irá obter no ano $t + 1$. Deste modo, o banco utiliza dados até ao final do ano t para estimar a rendibilidade que prevê obter durante o ano $t + 1$. Por sua vez, no cálculo das rendibilidades do ano t é utilizada a média histórica dos últimos 10 anos das perdas esperadas, com o objetivo de suavizar o valor das perdas associadas a cada ativo. Esta estimativa da rendibilidade no ano seguinte, calculada no final do ano t e utilizando dados até ao final do ano t , é designada de *Rendibilidade Prospetiva (RP)*.

Assim, a *Rendibilidade Prospetiva (RP)* para o ano $t + 1$, estimada no ano t , é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 RP_{t+1} &= \sum_{i \in \{1,2,3,5,7\}} \left[\hat{x}_{i,t} \times \hat{j}_{i,t} + \tilde{x}_{i,t} \times j_{i,t} - x_{i,t} \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{i,k} \times LGD_i \right) \right] + \sum_{i \in \{4,6\}} x_{i,t} \times j_{i,t} \\
 &= \sum_{i \in \{1,2,3,5,7\}} \left[\hat{x}_{i,t} \times \left(\hat{j}_{i,t} - \frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{i,k} \times LGD_i \right) + \tilde{x}_{i,t} \times \left(j_{i,t} - \frac{1}{10} \sum_{k=t-9}^t PD_{i,k} \times LGD_i \right) \right] \\
 &\quad + \sum_{i \in \{4,6\}} \tilde{x}_{i,t} \times j_{i,t},
 \end{aligned}$$

onde $\tilde{x}_{i,t}$ é a solução otimizada indicando a proporção de montante investido no ativo i no ano t .

Recorde-se que existem agregados para os quais não foi possível retirar dados públicos sobre as *PD's*. Para esses ativos, as perdas esperadas serão aproximadas pelos Charge-Offs.

É de notar que para as obrigações AFS apenas se utiliza a taxa de juro ao invés da rendibilidade definida na secção 4.1.1, visto que as variações no preço de mercado presentes no cálculo dessa rendibilidade é uma parcela difícil de prever. Desta maneira, a melhor estimativa de rendibilidade para estas obrigações provém da taxa de juro.

De acordo com a sua implementação, esta rendibilidade está a ser estimada, no final do ano t , com base nos valores da rendibilidade prevista, no final do ano t , para o ano seguinte de cada ativo e na melhor solução x para investir no final desse mesmo ano. Desta maneira, estima-se no final desse ano t qual o melhor retorno que é esperado no próximo ano. Contudo, as evoluções das rendibilidades do ano seguinte podem ser (e em geral são) diferentes das rendibilidades previstas e utilizadas na solução otimizada. Deste modo, ponderando as necessidades e interesses de um banco, pretende-se observar outro tipo de rendibilidade: a rendibilidade efetiva.

4.4.2 Rendibilidade Efetiva

A *Rendibilidade Efetiva (RE)* corresponde à rendibilidade realmente observada no fim do ano $t + 1$ para o investimento feito no final do ano t . Portanto, visto que se pretende saber o que realmente aconteceu, as rendibilidades são calculadas somente a partir das taxas de juro e perdas esperadas do ano $t + 1$. Desta maneira, no fim do ano $t + 1$ é possível verificar se a previsão feita para esse ano (através da rendibilidade prospetiva) foi uma boa estimativa.

Assim sendo, a *Rendibilidade Efetiva (RE)*, num certo ano $t + 1$, é dada por

$$\begin{aligned}
RE_{t+1} &= \sum_{i \in \{1,2,3,5,7\}} \left[\hat{x}_{i,t} \times \hat{j}_{i,t} + \tilde{x}_{i,t} \times j_{i,t} - x_{i,t} \times (PD_{i,t+1} \times LGD_i) \right] + \sum_{i \in \{4,6\}} x_{i,t} \times r_{i,t+1} \\
&= \sum_{i \in \{1,2,3,5,7\}} \left[\hat{x}_{i,t} \times \left(\hat{j}_{i,t} - PD_{i,t+1} \times LGD_i \right) + \tilde{x}_{i,t} \times \left(j_{i,t} - PD_{i,t+1} \times LGD_i \right) \right] \\
&\quad + \sum_{i \in \{4,6\}} \tilde{x}_{i,t} \times r_{i,t+1},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{x}_{i,t}$ é a solução otimizada indicando a proporção de montante investido no ativo i no ano t .

Por palavras, aplica-se aos valores da rendibilidade de cada ativo do ano em questão a melhor solução x obtida com os dados do ano anterior, considerando apenas as perdas desse ano.

Como se pode constatar, no cálculo desta rendibilidade para o ano $t + 1$ é utilizada a taxa de juro do ano t ao invés da taxa de juro do ano $t + 1$, visto que, quando um banco celebra um contrato a uma determinada taxa com um cliente, o cliente começa a pagar no ano seguinte a taxa que foi contratada no início.

Rendibilidade Efetiva Acumulada

Com o objetivo de analisar a evolução da carteira ao longo dos anos, surge a *Rendibilidade Efetiva Acumulada (REA)*, a qual é fundamentada na fórmula antecedente do cálculo da rendibilidade efetiva.

Deste modo, a *Rendibilidade Efetiva Acumulada (REA)* no instante $t + 1$ é dada pela seguinte expressão:

$$REA_{t+1} = REA_t \left[1 + RE_{t+1} \right],$$

com $REA_0 = 1$.

Capítulo 5

Resultados Computacionais

5.1 Resultados Históricos

Recorde-se que, com o intuito de analisar historicamente a rendibilidade, foram recolhidos dados públicos americanos. No Capítulo 4 encontram-se especificados quais foram os dados utilizados com a referência aos respetivos locais de extração.

As séries históricas de dados extraídas permitem obter dados anuais desde o ano 1985 até ao ano 2016. No entanto, só é possível iniciar a análise histórica de cada rendibilidade a partir do ano 1995, uma vez que para efeito de cálculos se utiliza a média histórica dos últimos 10 anos das séries mencionadas. Assim, neste trabalho será efetuado o estudo da evolução de cada rendibilidade num período de 22 anos, isto é, de 1995 a 2016. A Tabela 5.1 apresenta para cada ativo os valores médios da rendibilidade e do risco referentes ao estudo em questão.

Agregados do ativo	r_i (%)	σ_i (%)
Liquidez	2.7917	0
Crédito à habitação	5.6116	4.2690
Crédito ao consumo	9.5912	7.3581
Obrigações de tesouro AFS	5.8829	8.6807
Obrigações de tesouro HTM	4.4000	0
Obrigações corporativas AFS	7.8829	7.3946
Obrigações corporativas HTM	6.8010	1.3915

Tabela 5.1 Valores médios da rendibilidade e do risco de cada ativo dos anos em estudo.

5.2 Estratégias em Confronto

Nesta secção, apresentam-se detalhadamente as diferentes estratégias em confronto. Estas estratégias podem ser agrupadas em dois tipos distintos: estratégias otimizadas e estratégias heurísticas.

5.2.1 Estratégias Otimizadas

Para além de se considerar a estratégia otimizada segundo o modelo $\mathcal{M}1$, foram ainda consideradas mais duas estratégias otimizadas. O propósito destas duas últimas estratégias é averiguar o impacto das restrições de turnover (secção 3.2.1) na solução da carteira otimizada, bem como na rentabilidade.

Assim sendo, as três estratégias analisadas são:

- Estratégia $\mathcal{M}1$: tal como o nome indica, refere-se à solução otimizada através do modelo $\mathcal{M}1$;
- Estratégia $\mathcal{M}2$: solução otimizada a partir do modelo $\mathcal{M}1$ sem a restrição que limita superiormente os reinvestimentos nos ativos que não podem ser liquidados a qualquer momento, isto é, sem a restrição (3.9);
- Estratégia $\mathcal{M}3$: solução otimizada com base no modelo $\mathcal{M}1$ sem os limites superiores para os reinvestimentos nos ativos que não podem ser liquidados a qualquer altura e sem a restrição de turnover global, ou seja, com base no seguinte modelo:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^7}{\text{maximizar}} && \sum_{i=1}^7 r_i x_i \\ & \text{sujeito a} && (3.1) - (3.6), \\ & && (3.8), \\ & && (3.10), \\ & && z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Esta estratégia apresenta uma abordagem similar à proposta por Hałaj em [22], relativamente às restrições de turnover.

5.2.2 Estratégias Heurísticas

Para comparar a eficiência das estratégias otimizadas foram consideradas as seguintes estratégias heurísticas clássicas:

- Estratégia de igual ponderação: estratégia simples que atribui a todos os ativos a mesma ponderação;
- Estratégia 60/40: conhecida na literatura como a tradicional alocação 60/40 de ações e títulos. De um modo geral, esta estratégia considera uma carteira composta por 60% de ações e 40% de títulos, tendo em conta os perfis de risco das classes de ativos;
- Estratégia de paridade de risco: estratégia de investimentos que atribui a todas as classes de ativos o mesmo nível de risco, isto é, atribui a cada ativo uma ponderação que permite uniformizar a contribuição de risco para a carteira.

Em [17] é feita a comparação entre estas e outras estratégias heurísticas clássicas, dando destaque à estratégia de paridade de risco.

No entanto, não é possível comparar diretamente as estratégias otimizadas com estas estratégias heurísticas clássicas, uma vez que as soluções obtidas por estas estratégias heurísticas clássicas em geral não satisfazem as restrições bancárias, ou seja, as restrições (3.2) – (3.5). Portanto, é preciso encontrar soluções que satisfaçam tais restrições e que estejam, ao mesmo tempo, o mais próximo possível das soluções referentes às estratégias heurísticas clássicas. Essas soluções podem ser obtidas resolvendo o seguinte modelo \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^7}{\text{minimizar}} && \sum_{i=1}^7 |x_i - x_i^{Ref}| \\ & \text{sujeito a} && (3.1) - (3.12), \end{aligned}$$

onde x^{Ref} é a solução de referência associada a uma estratégia heurística clássica.

Assim, desenvolveram-se estratégias heurísticas baseadas nas estratégias heurísticas clássicas apresentadas anteriormente. Essas estratégias heurísticas são:

- Estratégia $\mathcal{H}1$: solução otimizada com base na estratégia de igual ponderação, isto é, considerando como solução de referência

$$x^{Ref} = \left[\frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \quad \frac{100}{7}\% \right].$$

- Estratégia $\mathcal{H}2$: solução otimizada segundo a estratégia 60/40.

Para este trabalho, a composição da carteira 60/40 foi estabelecida de acordo com o risco médio de cada agregado do ativo para os anos em estudo (ver Tabela 5.1). Assim, considerou-se uma carteira 60/40, assumindo que 60% do investimento está associado a uma classe de ativos com risco médio superior ou igual a 2 e que os restantes 40% englobam a classe de ativos com risco médio inferior a 2. Além disso, dentro de cada classe de ativos utilizou-se igual ponderação. Logo, a solução de referência desta estratégia é

$$x^{Ref} = \left[\frac{40}{3}\% \quad \frac{60}{4}\% \quad \frac{60}{4}\% \quad \frac{60}{4}\% \quad \frac{40}{3}\% \quad \frac{60}{4}\% \quad \frac{40}{3}\% \right].$$

- Estratégia $\mathcal{H}3$: solução otimizada a partir da estratégia de paridade de risco.

Note-se que a estratégia de paridade de risco apenas pode ser aplicada a carteiras em que os ativos não tenham risco nulo. Caso contrário, a solução desta estratégia seria não alocar investimento aos ativos com risco. Porém, a estrutura do ativo deste trabalho contém agregados com risco nulo, tais como a liquidez e as obrigações de tesouro HTM (ver Tabela 4.2).

Desta maneira, optou-se por considerar uma abordagem heurística semelhante à estratégia 60/40, mas aplicando a estratégia de paridade de risco na classe de ativos com maior risco.

Além disso, considera-se a divisão dos ativos em classes de forma dinâmica, isto é, em cada ano os ativos são reavaliados para se saber a que classe pertencem.

Seja I_t o conjunto dos ativos com risco superior ou igual a 2 no ano t . Para esses ativos, a alocação da solução de referência do ano t é dada por

$$x_{i,t}^{Ref} = 0.6 \times \frac{\frac{1}{\sigma_i}}{\sum_{j \in I_t} \frac{1}{\sigma_j}}, \quad i \in I_t.$$

Na classe de ativos de baixo risco mantém-se a estratégia de igual ponderação, isto é, a alocação da solução de referência do ano t é dada por

$$x_{i,t}^{Ref} = \frac{0.4}{7 - \#I_t}, \quad i \notin I_t.$$

Como se pode constatar esta é uma estratégia heurística dinâmica, uma vez que a solução de referência se altera de ano para ano. Esta alteração deve-se ao facto de se considerar o risco do ano em questão, ao invés do risco médio do estudo como na estratégia anterior, o que faz com que a afetação dos ativos na solução de referência tenha de ser necessariamente alterada conforme o ano.

5.3 Comparação das Estratégias

Para testar o comportamento das alocações e da rentabilidade nas diferentes estratégias em confronto, foram realizados testes com sete alocações iniciais distintas, as quais verificam as restrições que garantem a sustentabilidade do balanço. A Tabela 5.2 apresenta para cada opção a respetiva carteira inicial escolhida.

Agregados do ativo	Opção e respetiva carteira inicial (x_{1994}^*)						
	A	B	C	D	E	F	G
Liquidez	50%	10%	$\frac{100}{7}\%$	5%	20%	25%	10%
Crédito à habitação	10%	20%	$\frac{100}{7}\%$	40%	0%	0%	60%
Crédito ao consumo	10%	30%	$\frac{100}{7}\%$	20%	0%	50%	0%
Obrigações de tesouro AFS	7.5%	15%	$\frac{100}{7}\%$	25%	40%	0%	10%
Obrigações de tesouro HTM	7.5%	10%	$\frac{100}{7}\%$	5%	20%	25%	10%
Obrigações corporativas AFS	7.5%	10%	$\frac{100}{7}\%$	2.5%	20%	0%	5%
Obrigações corporativas HTM	7.5%	5%	$\frac{100}{7}\%$	2.5%	0%	0%	5%

Tabela 5.2 Opção e respetiva carteira inicial.

Importa ainda esclarecer a motivação da escolha destas sete carteiras iniciais distintas. Portanto, cada opção foi escolhida de acordo com a seguinte justificação:

Opção A	Atribuir metade da alocação total da carteira apenas em liquidez e distribuir a outra metade pelos restantes ativos.
Opção B	Atribuir metade da alocação total da carteira nos créditos (crédito à habitação e crédito ao consumo) e distribuir a outra metade pelos restantes ativos.
Opção C	Definir a alocação da carteira com base na estratégia de igual ponderação.
Opção D	Considerar a estrutura de ativo típica de um banco de retalho diversificado.
Opção E	Considerar a estrutura de ativo típica de um banco de investimento.
Opção F	Considerar a estrutura de ativo típica de um banco de crédito ao consumo.
Opção G	Considerar a estrutura de ativo típica de um banco de crédito à habitação.

De seguida, apresentam-se os gráficos da rendibilidade efetiva acumulada (Figura 5.1) e das proporções de investimento obtidas em cada ativo (Figuras 5.2 - 5.8) nas diferentes opções, para o período em estudo. Estes gráficos surgem na sequência da implementação das estratégias apresentadas na secção 5.2 em MATLAB, a partir dos dados mencionados e explicados no capítulo anterior.

Na realidade, os gráficos das alocações (Figuras 5.2 - 5.8) apresentam a respetiva solução inicial do ano 1994, a qual não faz parte do estudo. O objetivo é constatar as alterações das alocações do primeiro ano em estudo face ao ponto de partida.

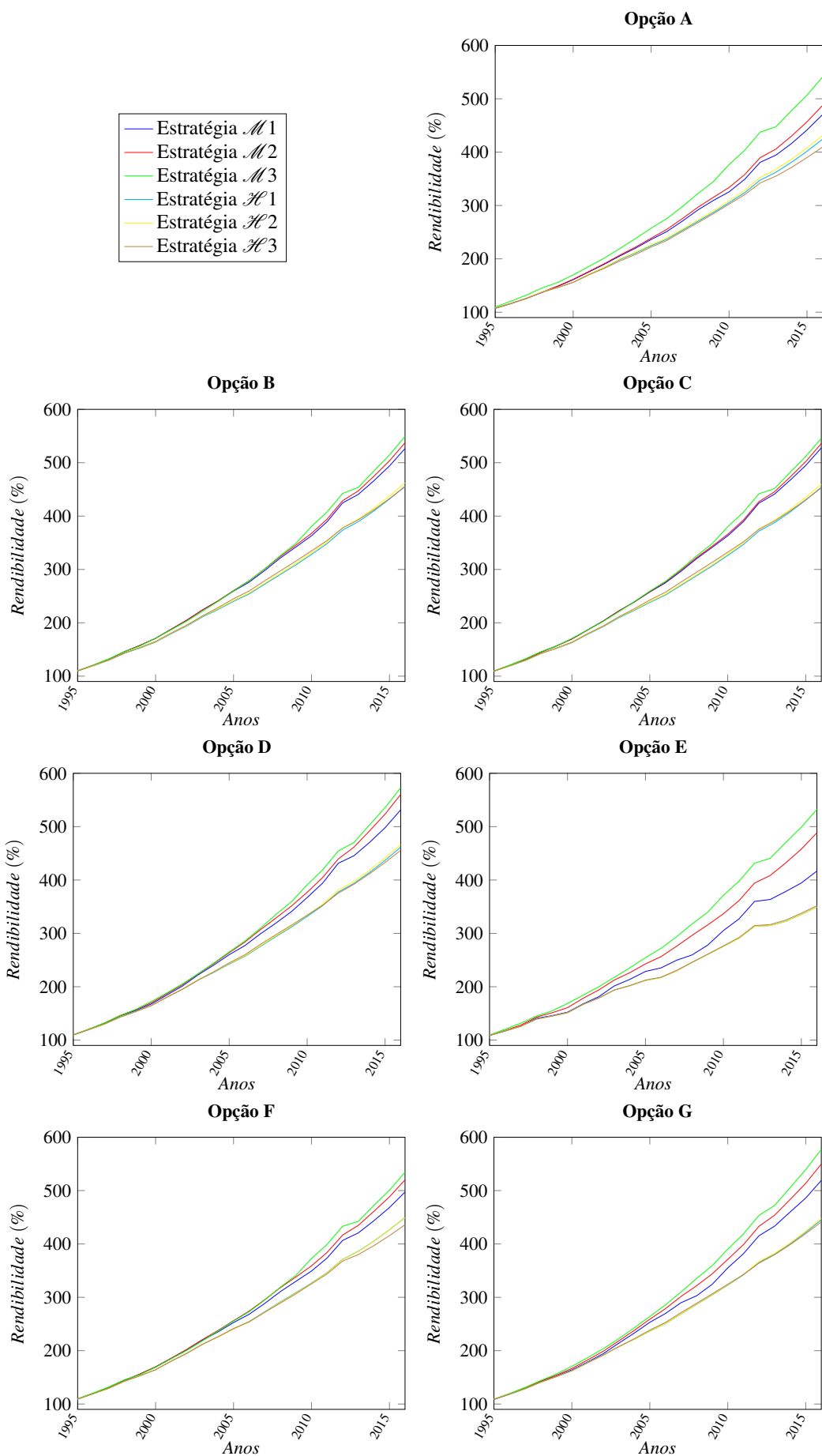


Fig. 5.1 Rendibilidade efetiva acumulada de 1995 a 2016.

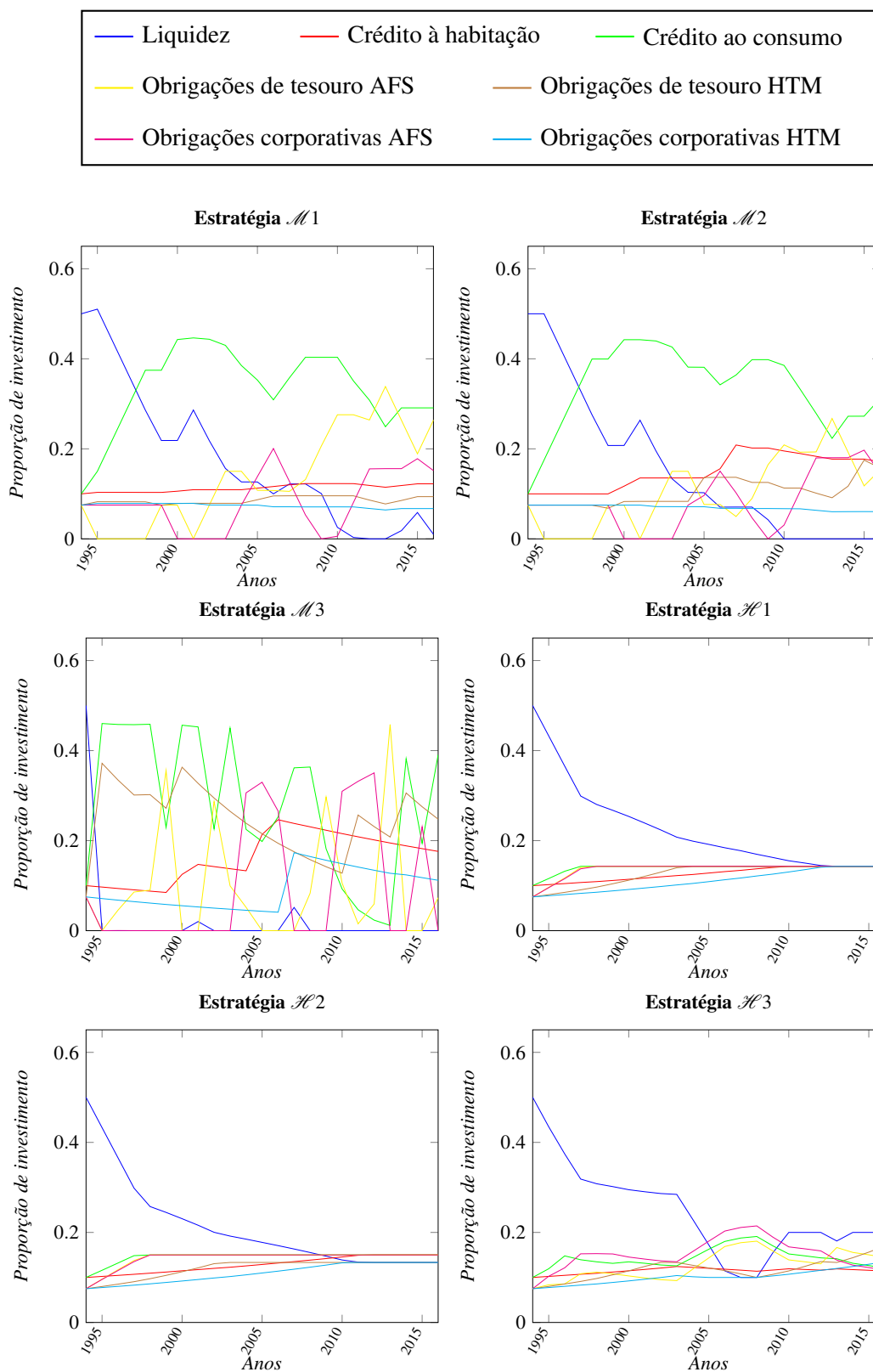


Fig. 5.2 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção A).

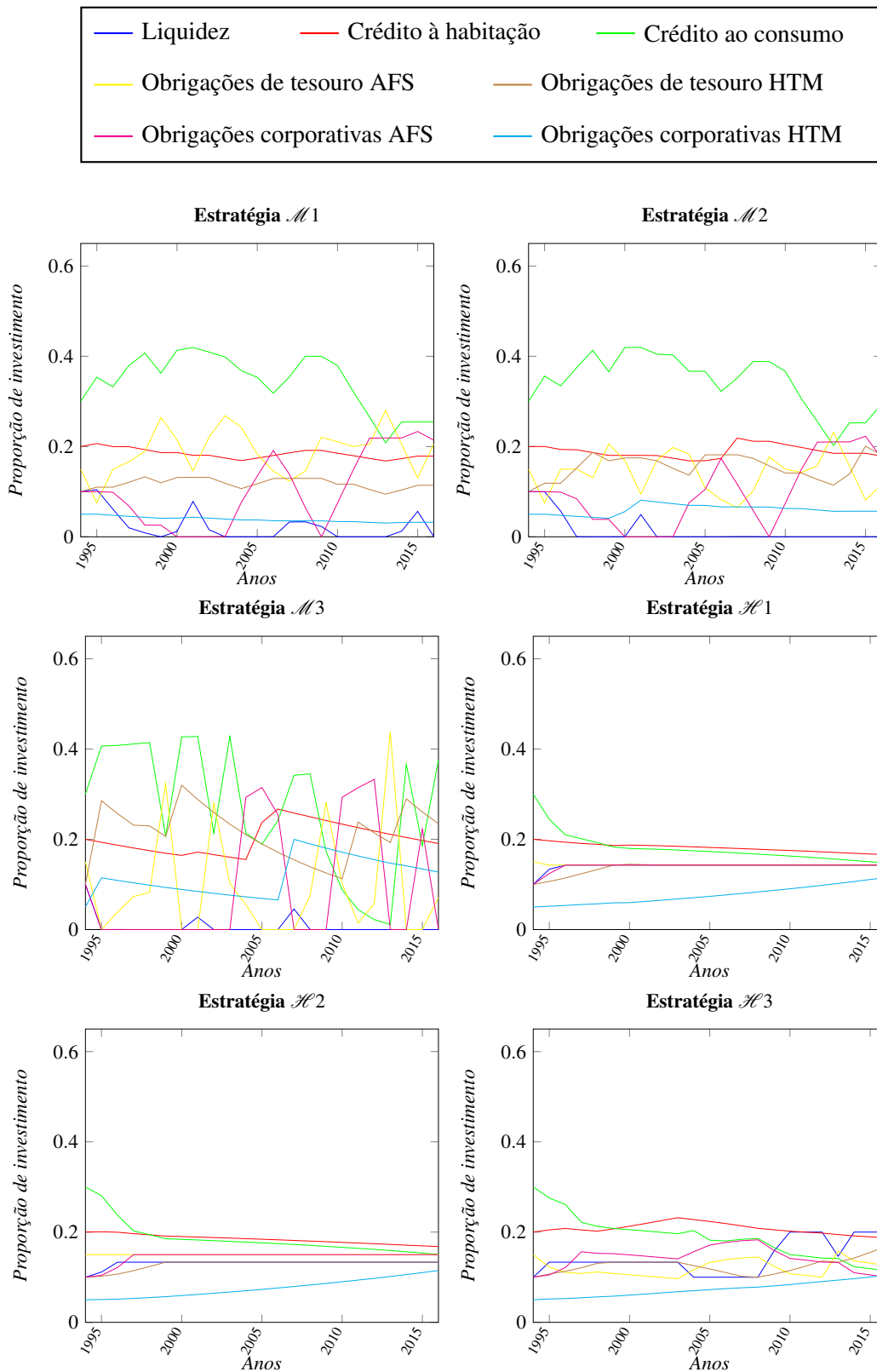


Fig. 5.3 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção B).

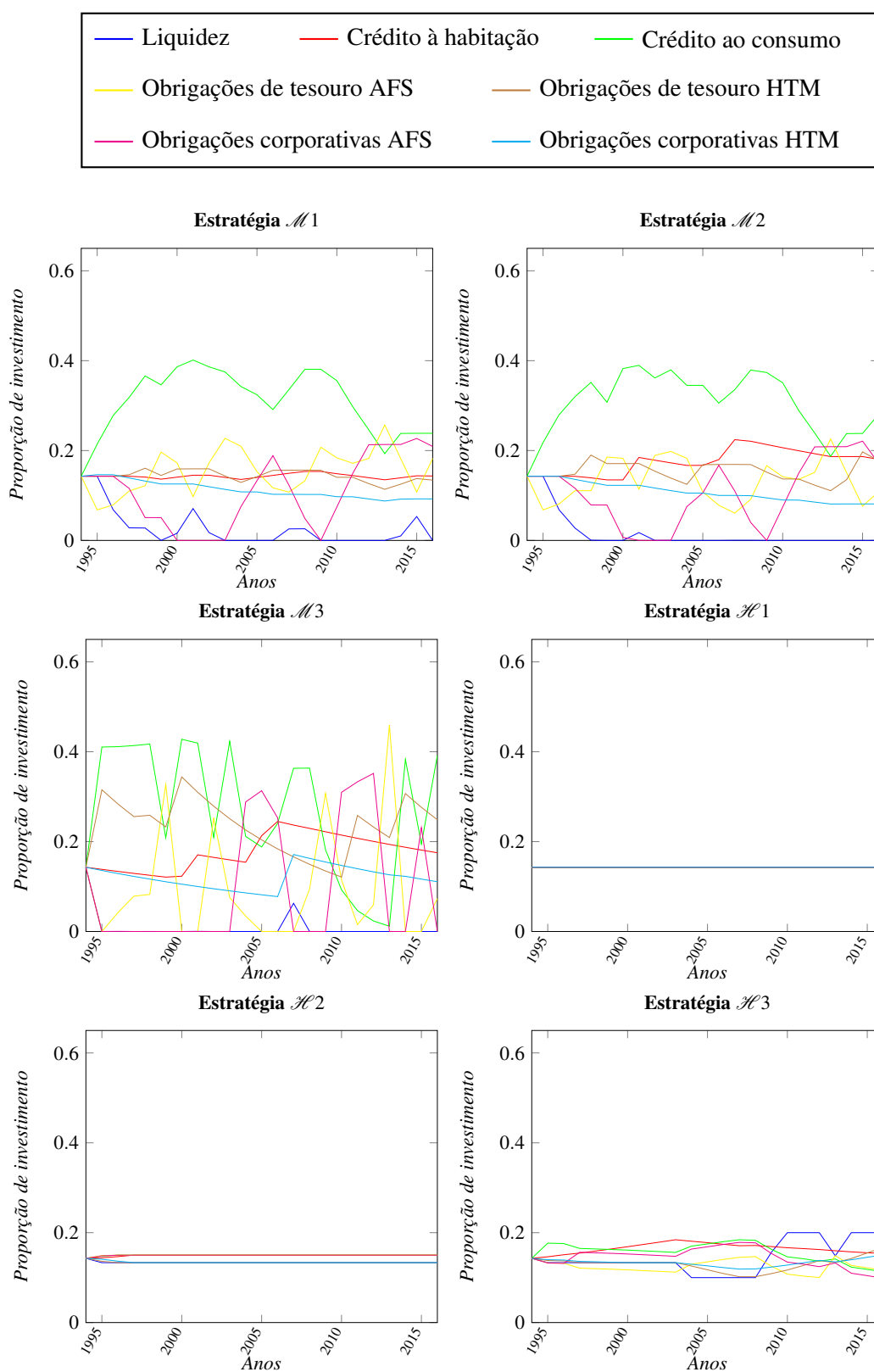


Fig. 5.4 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção C).

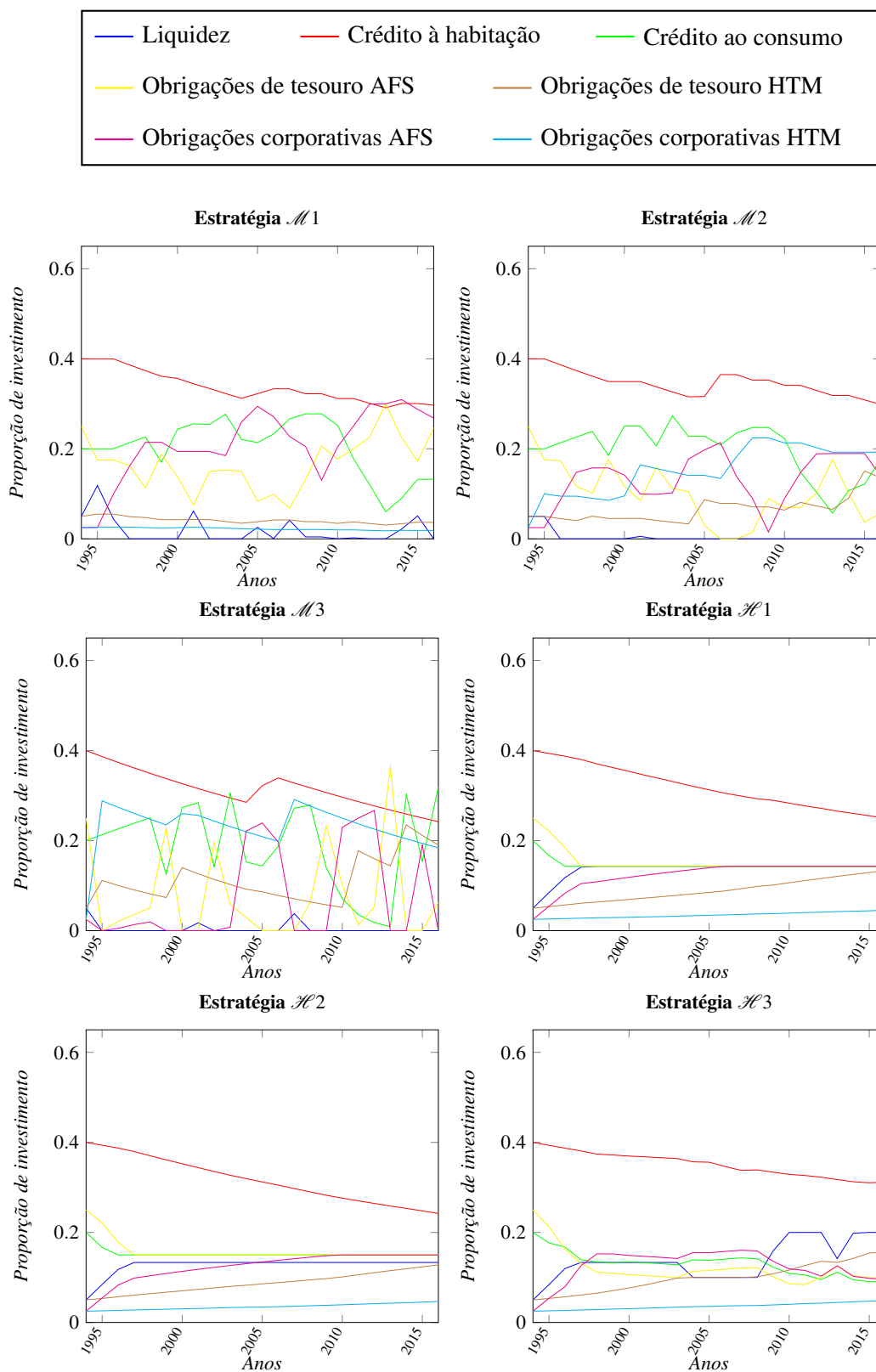


Fig. 5.5 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção D).

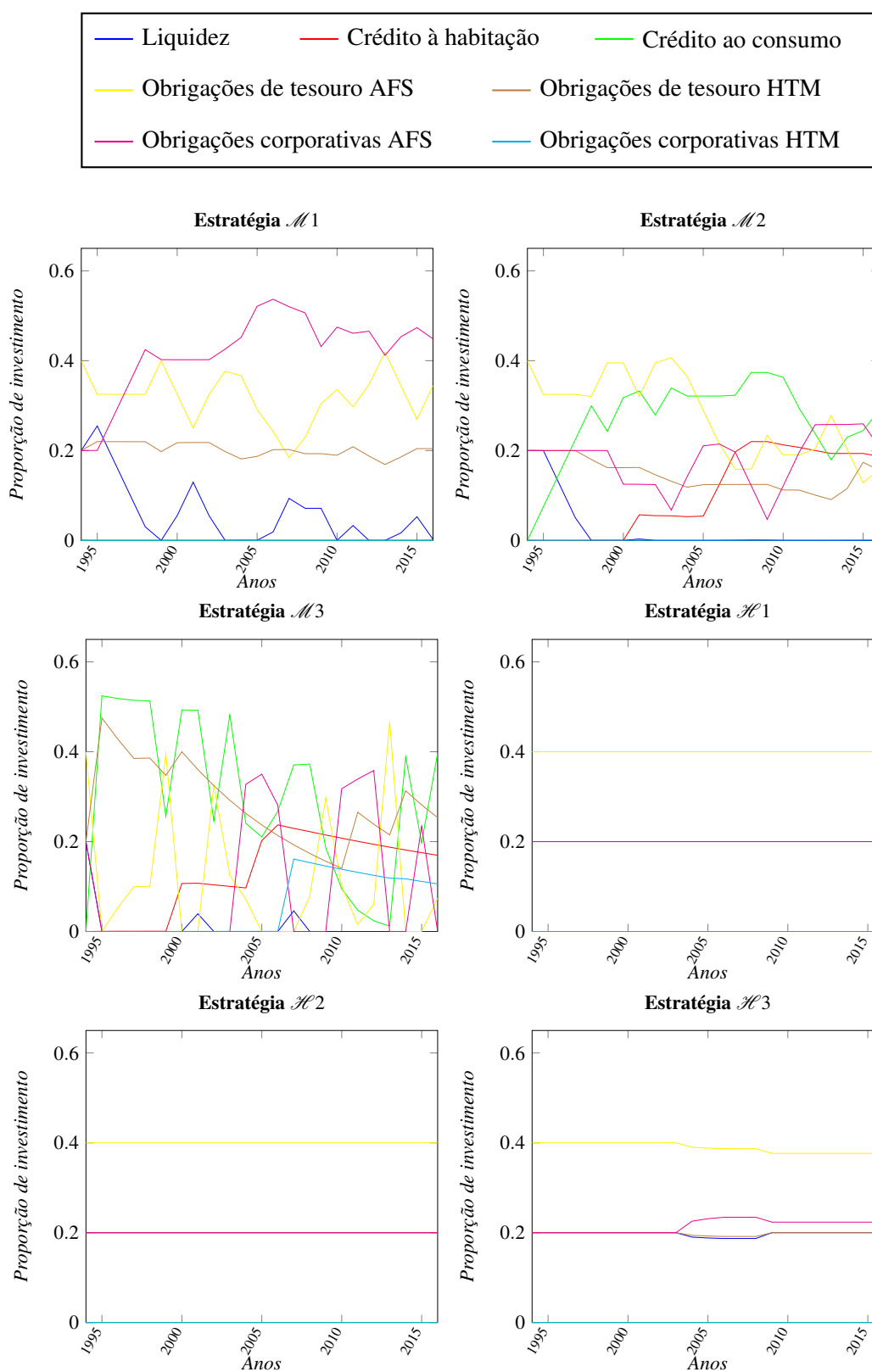


Fig. 5.6 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção E).

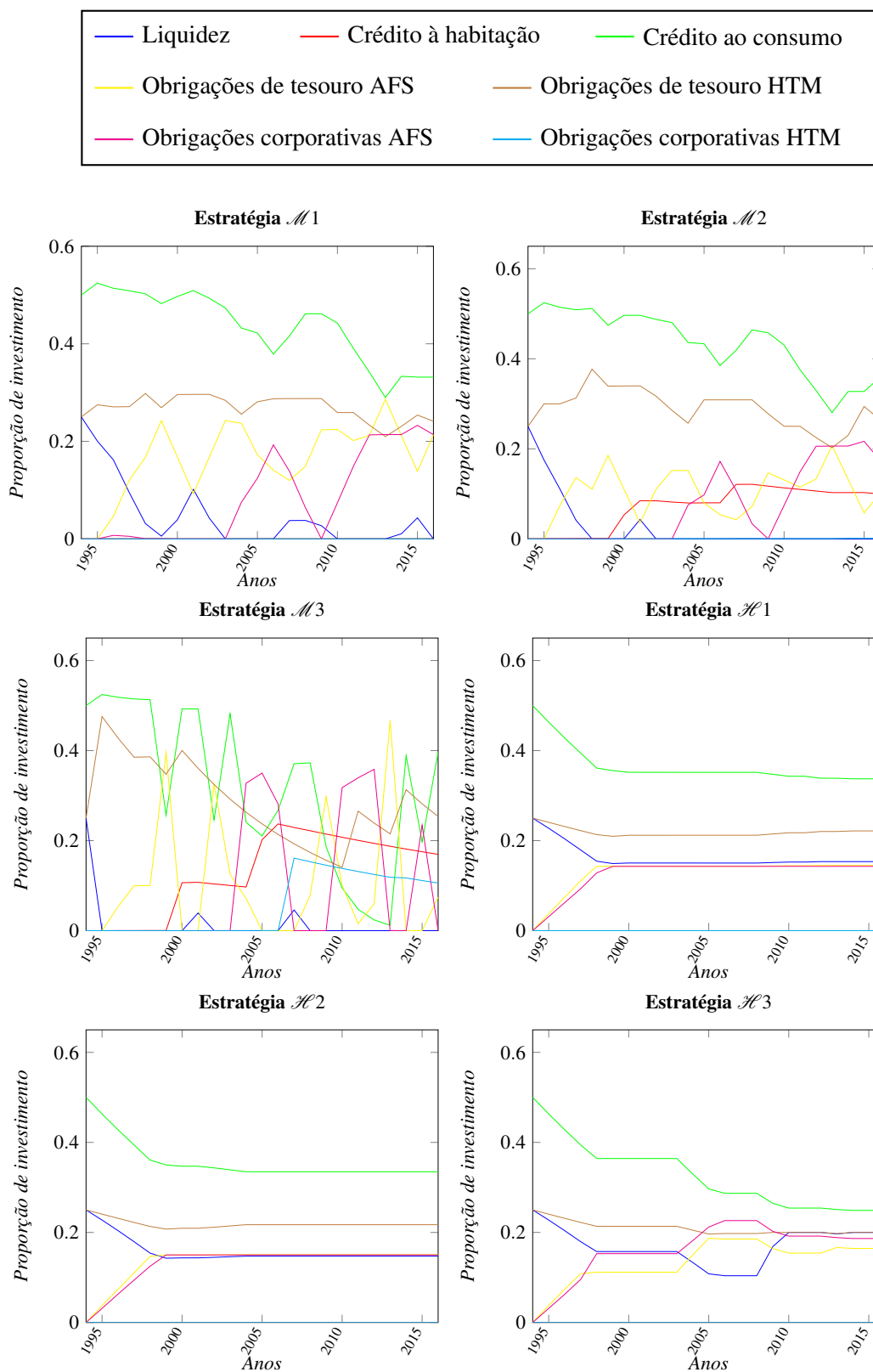


Fig. 5.7 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção F).

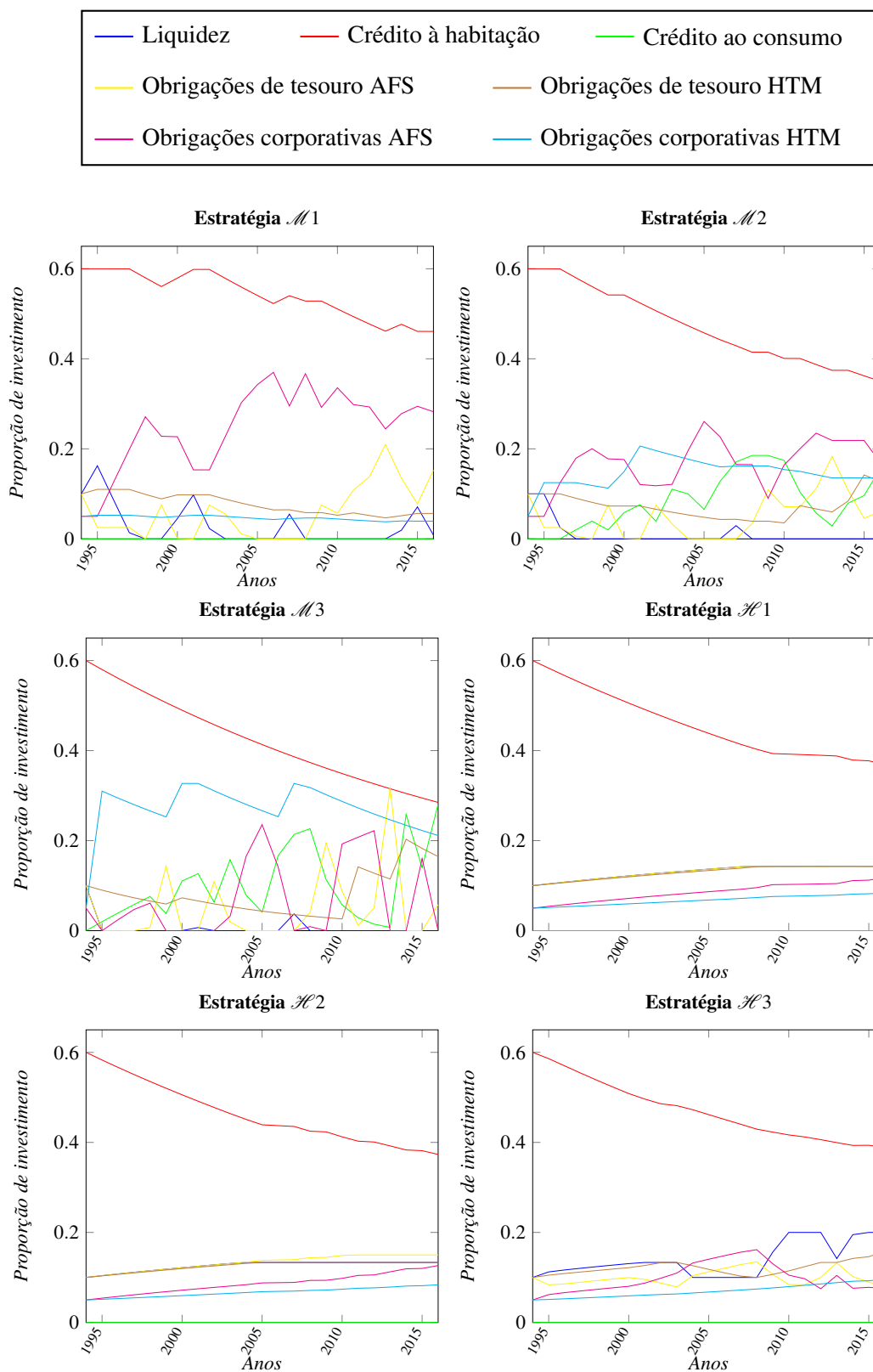


Fig. 5.8 Proporções de investimento de cada ativo de 1994 a 2016 (Opção G).

Na Figura 5.1, verifica-se que o comportamento da rendibilidade efetiva acumulada nas várias estratégias em confronto é idêntico em todas as opções. Para todas elas, constata-se que as estratégias otimizadas apresentam melhores resultados que as estratégias heurísticas, ao longo do período em estudo. Relativamente às estratégias heurísticas, estas revelam sempre resultados bastantes semelhantes entre si. Já nas estratégias otimizadas, os resultados exibem alguma variabilidade dependendo da opção em questão. Por exemplo, a opção E apresenta uma diferenciação maior do comportamento das três estratégias otimizadas, comparativamente com a opção B. Esta situação é motivada pela solução inicial escolhida associada a cada opção. Contudo, independentemente da maior ou menor diferenciação de comportamento entre si, observa-se que para todas as opções a estratégia $\mathcal{M}3$ permite alcançar melhores resultados que a estratégia $\mathcal{M}2$. Por sua vez, esta estratégia permite alcançar melhores resultados comparativamente com os resultados alcançados pela estratégia $\mathcal{M}1$. Na verdade, esta é uma situação esperada, na medida em que, quanto mais restrições tiver o modelo, mais restrito é o conjunto de soluções admissíveis.

Seguidamente, pretende-se analisar o desempenho das alocações ao longo do estudo para as diferentes estratégias em confronto. Como para as sete opções consideradas (Figuras 5.2 - 5.8) as conclusões a serem retiradas são semelhantes, daqui em diante as observações incidir-se-ão sobre os gráficos das proporções de investimento dos ativos referentes à opção A (Figura 5.2).

Assim, na Figura 5.2, verifica-se que as estratégias heurísticas possuem maior estabilidade nas alocações em comparação com as estratégias otimizadas, o que já seria uma situação esperada. No entanto, a forte estabilidade das estratégias heurísticas, a qual se deve ao facto destas estratégias tentarem manter as soluções próximas das soluções de referência, não permite que este tipo de estratégias obtenha melhores desempenhos a nível de rendibilidade. Por consequência, estas estratégias apresentam desempenhos inferiores face às estratégias otimizadas, tal como se constatou na Figura 5.1.

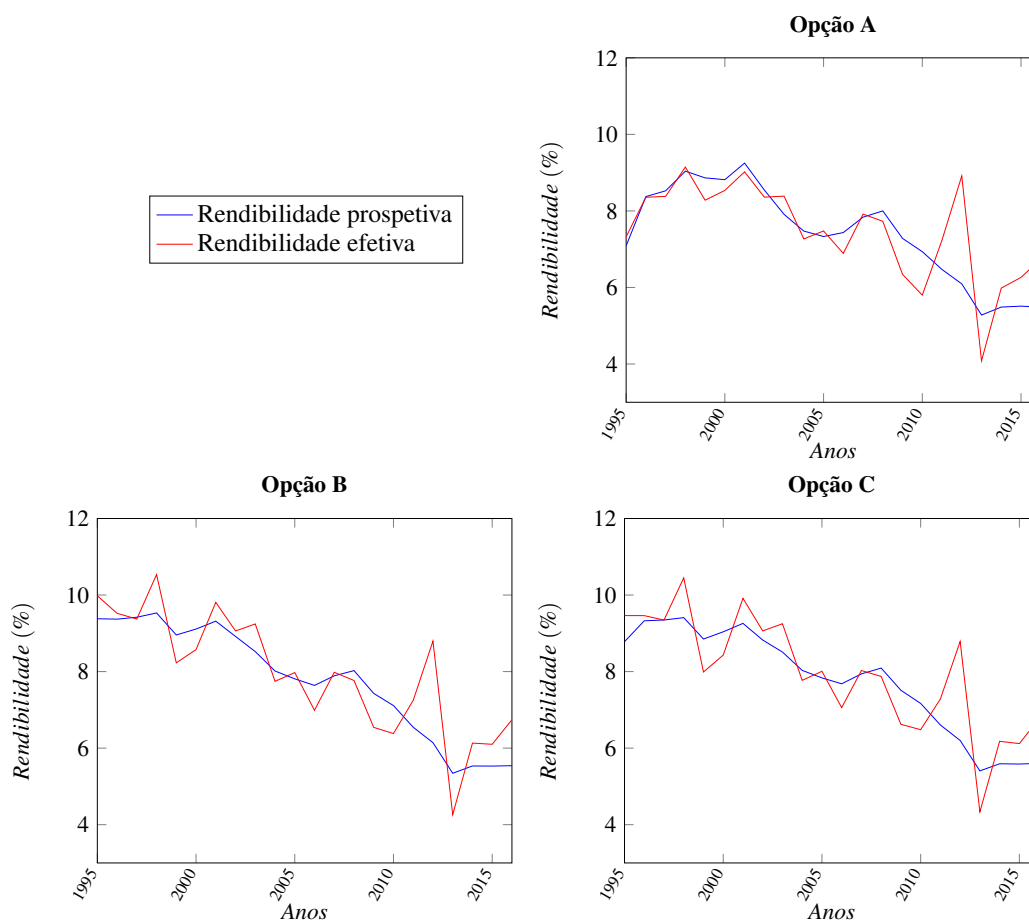
Considerando somente as estratégias otimizadas, verifica-se que a estratégia $\mathcal{M}1$ é a estratégia que obtém maior estabilidade nas alocações ao longo dos anos em estudo. A diferença de estabilidade nas alocações da estratégia $\mathcal{M}1$ para a estratégia $\mathcal{M}2$ não é muito significativa, apesar de existir. O mesmo não se aplica para a diferença de estabilidade nas alocações entre a estratégia $\mathcal{M}1$ e a $\mathcal{M}3$, a qual é consideravelmente notória. Por este motivo, é possível concluir que a restrição de turnover global tem um grande impacto na estabilidade das alocações.

Como já foi mencionado anteriormente, de entre todas as estratégias em confronto e para qualquer opção considerada, a estratégia $\mathcal{M}3$ é a que atinge maior rendibilidade. Contudo, a estabilidade das alocações desta estratégia não é realista no contexto bancário. Por exemplo, em mais de metade dos anos em estudo, esta estratégia atinge variações globais das alocações que ultrapassam os 40% do ativo, o que não acontece na prática. Além disso, considerando as variações do ano 2013 para o ano 2014, averigua-se que o crédito ao consumo atinge uma variação superior a 35% do ativo. Esta situação não é de todo realista, uma vez que, conforme os relatórios e contas da generalidade dos bancos, as alocações nos agregados do crédito não demonstram variabilidades desta ordem de

grandeza.

Depois da estratégia $\mathcal{M}3$, a estratégia $\mathcal{M}2$ é a que atinge maior rendibilidade. Para além do mais, a diferença na estabilidade das alocações entre esta estratégia e a estratégia $\mathcal{M}1$ é mínima. Portanto, visto que a estabilidade das alocações em ambas as estratégias $\mathcal{M}1$ e $\mathcal{M}2$ é realista no contexto bancário, destaca-se a estratégia $\mathcal{M}2$ como uma das situações com mais interesse para o banco.

Assim sendo, para a estratégia $\mathcal{M}2$ serão ainda apresentadas as evoluções das rendibilidades prospectiva e efetiva ao longo do período em estudo para as várias opções.



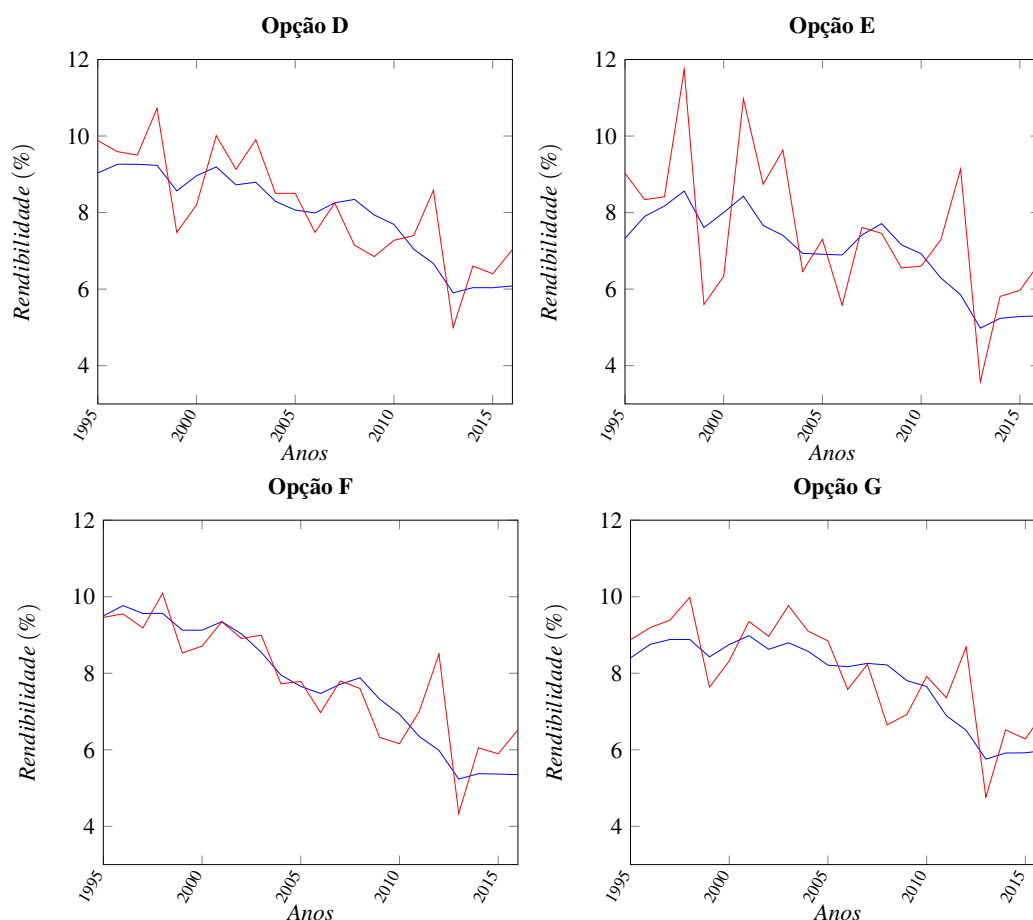


Fig. 5.9 Rendibilidades prospectiva e efetiva de 1995 a 2016 (Estratégia $\mathcal{M}2$).

Na Figura 5.9, para todas as opções, a rendibilidade prospectiva apresenta uma evolução maioritariamente decrescente excluindo breves períodos. Por sua vez, a rendibilidade efetiva tem uma evolução consideravelmente oscilatória, sendo que a intensidade de oscilações está dependente da opção considerada. Por exemplo, na opção E a rendibilidade efetiva apresenta maiores oscilações comparativamente com a opção G. Na verdade, seria de esperar que a rendibilidade prospectiva apresentasse uma evolução com menos variabilidade face à rendibilidade efetiva, uma vez que para o cálculo da rendibilidade prospectiva é suavizado o valor das perdas ao se considerar a média dos últimos 10 anos de perdas.

Por outro lado, existem opções que apresentam nos primeiros anos melhores estimações da rendibilidade comparativamente a outras opções, o que terá sido influenciado pela solução inicial utilizada no ano 1994. A título de exemplo, observe-se os valores estimados de rendibilidade da opção A em comparação com os da opção B. Ainda assim, constata-se que as evoluções de rendibilidade prospectiva são similares de 2007 em diante, o que pode indiciar alguma independência das alocações estimadas a longo prazo face às alocações iniciais. Através da rendibilidade efetiva também é possível concluir este facto, observando apenas os últimos três ou quatro anos em estudo.

Constata-se ainda que existem opções que permitem obter melhores estimativas dos valores de rendibilidade efetiva. Por exemplo, na opção F obtém-se melhores estimativas de rendibilidade que na opção E, visto que na opção F o valor de rendibilidade efetiva para um determinado ano está mais próximo do valor de rendibilidade prospectiva obtido nesse mesmo ano. Além disso, o facto da carteira inicial da opção E não ter investimento algum nos créditos e alocar grande parte do investimento em obrigações AFS, as quais apresentam bastante volatilidade, permite tornar mais instável a evolução da rendibilidade efetiva nesta opção. A par disto, quando em determinado ano a rendibilidade prospectiva apresenta melhores resultados do que a efetiva significa que a estimativa da rendibilidade foi excessiva em relação à carteira de investimentos desse ano. Caso contrário, diz-se que a estimativa da rendibilidade ficou aquém dos valores efetivos.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho pretendeu-se analisar a otimização de um balanço com aplicação no contexto bancário, acautelando a robustez das alocações face aos dados de entrada do problema, por forma a poder conferir utilidade ao modelo no contexto real. Numa primeira instância, introduziram-se noções de contexto bancário e explicitaram-se os agregados que constituem este balanço. Através da otimização tencionou-se averiguar os agregados da estrutura do ativo onde deve ser feito o investimento, de modo a maximizar o retorno previsto ajustado ao risco. Para o efeito, foi necessário formular um modelo que respondesse às necessidades de um banco e implementá-lo em MATLAB. Assim sendo, este modelo é mais do que um problema de portfólios, visto que foi preciso introduzir restrições que satisfizessem a otimização de carteiras bancárias. Além do mais, foram ainda incluídas restrições de turnovers locais e global para garantir maior estabilidade das alocações. Estas restrições fazem parte do leque de contribuições desta investigação. Posteriormente, procedeu-se à recolha e tratamento dos dados para serem utilizados no programa desenvolvido. Parte dos dados que foram utilizados são fixos por entidades regulamentares ou pela estrutura do passivo bancário. A outra parte são dados públicos americanos. Em seguida, foram explicitadas as fórmulas referentes às rendibilidades prospetiva e efetiva com separação entre créditos novos e créditos antigos. Esta medida visa tornar o modelo ainda mais realista para os interesses e necessidades de um banco. Por fim, introduzindo também esta nova medida no modelo, foi efetuada uma análise da rendibilidade efetiva acumulada apresentando resultados práticos relativamente às alocações e respetiva rendibilidade.

Para o estudo da rendibilidade efetiva acumulada foram consideradas seis estratégias em confronto, das quais três estratégias heurísticas e três estratégias otimizadas. Deste modo, foi possível comparar o desempenho das alocações previstas pelo modelo de otimização em relação a regras heurísticas e validar as soluções otimizadas. Além disto, consideraram-se sete carteiras iniciais distintas por forma a averiguar o comportamento das alocações, e conseqüentemente dos valores de rendibilidade, sobre diferentes cenários. Assim, utilizando testes históricos baseados num período de 22 anos, comprovou-se que uma metodologia de otimização de balanço produz resultados superiores às regras heurísticas, independentemente da carteira inicial em causa. De um modo geral, o desempenho adicional dos modelos de otimização é na ordem dos 0.94% ao ano face ao ativo e 9.4% ao ano face aos capitais próprios, em média, em relação às heurísticas.

Tal como acima mencionado, uma contribuição desta investigação é o desenvolvimento, para a otimização do modelo bancário proposto, de uma metodologia com restrições de turnovers locais e global para a robustez das alocações. Esta contribuição teve um forte impacto nos resultados, uma vez que permitiu controlar a estabilidade das soluções, situação essa que não se verificava no modelo contendo apenas limites inferiores (como se sucede no modelo de Hałaj (2013) [22]). Na verdade, através dos testes históricos, constatou-se que esta metodologia atual de otimização de balanço produz alocações que tem variações pouco verosímeis de ano para ano. Por exemplo, em alguns dos testes, atinge variações nas alocações em cerca de 40% do ativo, o que não acontece na prática. Já o modelo de otimização com restrições de turnover produz alocações mais suaves e mais realistas. Assim, conclui-se que os resultados obtidos pelos testes históricos constituem outro fator de diferenciação em relação à literatura atual.

Em suma, as estratégias de alocação para bancos podem ser de dois tipos: regras heurísticas ou modelos de otimização. Os primeiros asseguram a estabilidade das alocações, com prejuízo de não otimizarem a rendibilidade; os segundos otimizam a rendibilidade, mas não garantem a estabilidade das alocações, impedindo a sua utilização num contexto prático. Conforme se comprovou através dos testes históricos, a estratégia inovadora aqui desenvolvida, com restrições de turnover global, permite não só tirar partido da rendibilidade superior verificada nos modelos de otimização, mas também assegurar a estabilidade das alocações, permitindo por isso a sua utilização em ambiente industrial.

Referências

- [1] International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. Disponível em <https://www.bis.org/publ/bcbs128.pdf>. Acedido a 26-11-2017.
- [2] Charge-Off Rate on Consumer Loans, All Commercial Banks. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/CORCACBS>. Acedido a 18-10-2017.
- [3] Charge-Off Rate on Loans Secured by Real Estate, All Commercial Banks. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/CORSREACBS>. Acedido a 18-10-2017.
- [4] Advanced IRB. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Advanced_IRB#Qualifying_revolving_retail_exposure_.28credit_card_product.29. Acedido a 10-11-2017.
- [5] Finance Rate on Personal Loans at Commercial Banks, 24 Month Loan. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/TERMCBPER24NS>. Acedido a 15-10-2017.
- [6] 30-Year Fixed Rate Mortgage Average in the United States. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/MORTGAGE30US>. Acedido a 20-09-2017.
- [7] Effective Federal Funds Rate. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/FEDFUNDS>. Acedido a 20-09-2017.
- [8] Moody's Seasoned Baa Corporate Bond Yield. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/BAA>. Acedido a 28-11-2017.
- [9] 10-Year Treasury Constant Maturity Rate. Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/series/WGS10YR>. Acedido a 20-09-2017.
- [10] Bandyopadhyay, Arindam and Singh, Pratima. Estimating Recovery Rates on Bank's Historical Loan Loss Data. Disponível em https://mpr.ub.uni-muenchen.de/9525/1/MPRA/_paper/_9525.pdf. Acedido a 25-11-2017.
- [11] Basel Committee on Banking Supervision. An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, July 2015. Disponível em <https://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.pdf>, . Acedido a 29-03-2018.
- [12] Basel Committee on Banking Supervision. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. Disponível em <https://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>, . Acedido a 28-12-2017.
- [13] Basel Committee on Banking Supervision. Basel III: The Liquidity Coverage Ratio and liquidity risk monitoring tools. Disponível em <https://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>, . Acedido a 21-06-2018.
- [14] Basel Committee on Banking Supervision. The Internal Ratings-Based Approach. Disponível em <https://www.bis.org/publ/bcbsca05.pdf>, . Acedido a 22-03-2018.
- [15] Basel Committee on Banking Supervision. Basel III: the net stable funding ratio. Disponível em <https://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>, . Acedido a 21-06-2018.

- [16] J. R. Birge and P. Júdice. Long-term bank balance sheet management: Estimation and simulation of risk-factors. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 37(No. 12.), 2013.
- [17] Denis B. Chaves, Jason C. Hsu, Feifei Li, and Omid Shakernia. Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. *Journal of Investing*, Vol. 20(No. 1.):pp.108–118, Spring 2011.
- [18] Cramer, Remo. Conference of finance mathematics, Krakow AGH An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, April 16, 2016. Disponível em <https://www.docdroid.net/B4SRXn7/basel-rwa-formula-final-agh-final.pdf>. Acedido a 18-11-2017.
- [19] Department of Applied Mathematics and Statistics. Chapter 5 Credit Risk. Disponível em <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/Chapter5.pdf>. Acedido a 10-01-2018.
- [20] European Banking Authority. Risk-weighted exposure amounts for retail exposures (Article 154). Disponível em <https://www.eba.europa.eu/regulation-and-policy/single-rulebook/interactive-single-rulebook/-/interactive-single-rulebook/article-id/5006>. Acedido a 29-03-2018.
- [21] Hałaj, Grzegorz. Dynamic balance sheet model with liquidity risk. Disponível em https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2625983, . Acedido a 17-09-2017.
- [22] Hałaj, Grzegorz. Optimal Asset Structure of a Bank. Disponível em <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp1533.pdf>, . Acedido a 20-09-2017.
- [23] Júdice, Pedro M. and Neves, João C. Otimização de um balanço de um banco. Documento interno do Montepio (apresentação no ENEMATH 2017), 2017.
- [24] K. Kosmidou and C. Zopounidis. *Asset liability management techniques*. In ed. Zopounidis C., editor. Handbook of financial engineering, Springer, 2008.
- [25] M. I. Kusy and W. T. Ziemba. A bank asset and liability management model. *Oper. Res.*, Vol. 34 (No. 3.), June 1986.
- [26] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7(No. 1.):pp. 77–91, March 1952.
- [27] Michael B. Gordy. A Risk-Factor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules. Disponível em <https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2002/200255/200255pap.pdf>. Acedido a 14-06-2018.
- [28] Moody's Investors Service. Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2016. Disponível em <https://www.moodys.com/>. Acedido a 15-11-2017.
- [29] Norwegian Computing Center. The Basel II IRB approach for credit portfolios: A survey. Disponível em <https://www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA3305.pdf>. Acedido a 26-11-2017.
- [30] Official Journal of the European Union. Corrigendum to Regulation (EU) No 575/2013 of the European Parliament and of the Council of 26 June 2013 on prudential requirements for credit institutions and investment firms and amending Regulation (EU) No 648/2012. Disponível em <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2013:321:0006:0342:EN:PDF>. Acedido a 22-03-2018.
- [31] Rabobank. Basel III: Building blocks of new regulation. Disponível em <http://feweb.uvt.nl/pdf/brounen/literatuurtip3.pdf>. Acedido a 28-12-2017.
- [32] Tung, Julia. Measuring Loss-Given-Default for Structured Finance Securities: An Update. Disponível em <https://www.moodys.com/sites/products/DefaultResearch/2006200000430444.pdf>. Acedido a 16-11-2017.