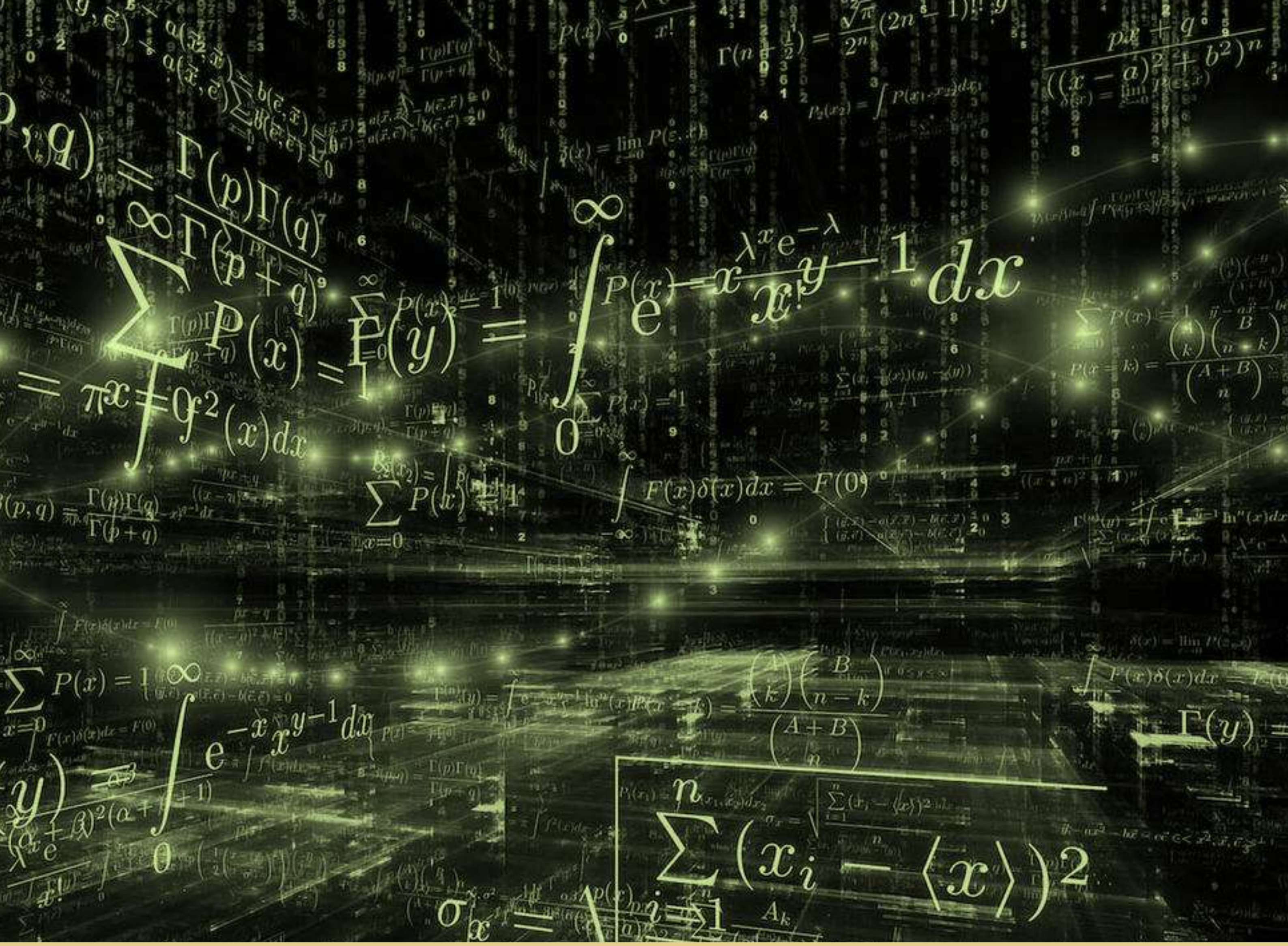


Lídia Maria do Espírito Santo

ESTUDO DE FUNÇÕES E DERIVADAS

Relatório de Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, orientado pela Professora Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque, apresentado ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Julho de 2018

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Estudo de Funções e Derivadas

Relatório para a obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3.◦ ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora Cientifica - Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque

Júri

Presidente: Joana Margarida Mavigné de Andrade Alves de Sousa Nunes da Costa

Orientadora: Helena Maria Mamede Albuquerque

Vogal: Gonçalo Gutierres da Conceição

Data: Julho de 2018

RESUMO

O presente relatório realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário tem como principal objetivo o estudo de conteúdos abordados no ensino secundário, nomeadamente funções e derivadas.

As funções são um dos temas de maior destaque na disciplina de matemática e estão bem presentes em diversas situações do dia-a-dia. Em termos de ensino as funções começam a ser abordadas com mais pormenor no 3.º ciclo complementando-se em cada um dos anos seguintes. As derivadas surgem no ensino secundário como estudo da variação das funções.

As funções e as derivadas serão mais facilmente entendidas se forem associadas a situações concretas da realidade, assim como relacionadas com diferentes áreas. Assim, é importante nas aulas de matemática, sempre que possível, o recurso a atividades de investigação, a softwares informáticos e materiais manipuláveis que relacionem a matemática com outras disciplinas, para que os estudantes assimilem com maior facilidade as definições, propriedades e aplicações. No caso das derivadas para se perceber a interpretação geométrica deve recorrer-se a aspetos explicados por leis físicas, já que a matemática e a física são ciências que se encontram relacionadas, e que necessitam uma da outra para serem compreendidas.

Este trabalho começará por apresentar conceitos teóricos inerentes ao estudo de funções e suas derivadas e em seguida serão descritas as atividades práticas realizadas numa escola de aplicação deste tema.

Palavras-chave: Matemática, Funções, Derivadas, Física

ABSTRACT

This report, carried out within the framework of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic Education and Secondary Education, has as its main objective the study of contents covered in secondary education, namely functions and derivatives.

The functions are one of the most outstanding topics in the mathematics discipline and are well present in various situations of the day to day. In terms of teaching the functions begin to be addressed in more detail in the 3rd cycle complementing each other in the following years. Derivatives arise in secondary education as a study of the variation of functions.

Functions and derivatives will be more easily understood if they are associated with concrete situations in reality, as well as related to different areas. Thus, it is important in mathematics classes, whenever possible, to use research activities, computer software and manipulative materials that relate mathematics to other disciplines, so that students can more easily assimilate definitions, properties and applications. In the case of derivatives to understand geometric interpretation, one should resort to aspects explained by physical laws, since mathematics and physics are related sciences, and which need each other to be understood.

This work will initially present theoretical concepts inherent to the study of functions and derivatives and then will describe the practical activities related to the theme of functions and derivatives that were applied in a school.

Keywords: Mathematics, Functions, Derivatives, Physics

AGRADECIMENTOS

A realização deste relatório marca o término de uma etapa importante no meu currículo académico, nomeadamente a conclusão do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Para além de uma realização académica é também a concretização de um objetivo pessoal, que não teria sido possível sem o contributo de várias pessoas. Assim, agradeço a todos aqueles que me ajudaram ao longo deste meu trajeto, em especial:

- à minha orientadora Professora Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque por toda a disponibilidade, incentivo, ajuda e apoio que me foi transmitindo ao longo da realização deste relatório;

- à minha família pelo apoio incondicional em todas as circunstancias, pelo amor e em particular por todo o apoio e motivação, que me deram no decorrer da elaboração deste trabalho;

- ao diretor, a todos os professores do Centro de Estudos de Fátima, e em particular, aos professores de Matemática, ao professor de Físico-Química, Luís André e à professora de Biologia Telma Freitas, por todo o auxílio, ânimo e ajuda que me prestaram ao longo deste ano letivo.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Quadros

CAPITULO 1

Introdução

O conceito de função é um dos mais importantes em matemática desde sempre, pois está presente em muitos aspetos do nosso dia-a-dia. As funções ajudam a perceber não só a realidade como também outras áreas científicas mais aplicadas, tais como a física, a química, a biologia, a medicina e a economia.

Tanto o conceito de função como o conceito de derivada para serem bem entendidos devem relacionar aspetos gráficos com aspetos numéricos, através de resolução de problemas, da modelação e de aplicações da matemática. (Teixeira P, *et al.*, 1997).

É desta forma fundamental que as funções e suas derivadas façam parte do programa de Matemática atualmente em vigor. Apenas desta forma é que os estudantes tomam consciência desde cedo de todos os conceitos inerentes a estas noções, bem como da sua aplicabilidade em contexto real.

O estudo de funções inicia-se com mais pormenor no 3.º ciclo, nomeadamente no 7º ano, e prolonga-se até ao ensino secundário. É desde o ensino básico que os vários conceitos de matemática, devem ser estudados através da manipulação algébrica incluindo atividades de investigação, para que os estudantes assimilem com mais facilidade definições, propriedades e aplicações. Por outro lado, o conceito de derivabilidade apenas é lecionado nos 11.º e 12.º anos de escolaridade.

No que diz respeito ao ensino básico pode e deve sempre recorrer-se a tecnologias, nomeadamente a softwares informáticos ou utilizar materiais manipuláveis para complementar o que vai sendo abordado nas aulas.

No caso do ensino secundário, dever-se-á proceder a uma compreensão abstracta dos conceitos teóricos, podendo para tal facultar aos alunos o recurso a alguns softwares informáticos e mesmo à calculadora gráfica.

O presente relatório encontra dividido em quatro capítulos. Este primeiro capítulo diz respeito à introdução do relatório. No segundo capítulo far-se-á uma abordagem teórica de alguns conceitos lecionados na disciplina de matemática A nos 11.º e 12.º anos. Assim apresentar-se-ão algumas definições necessárias para se compreender os conceitos apresentados de seguida, nomeadamente, limites, continuidade e derivabilidade. No terceiro capítulo serão apresentadas e descritas as atividades práticas das funções e das derivadas que foram realizadas em contexto escolar a alunos do 3.º ciclo e do ensino secundário. Ainda no terceiro capítulo far-se-á o enquadramento das respetivas atividades assim como se referirá a importância de atividades práticas em sala de aula.

No último capítulo deste trabalho serão apresentadas, como forma de conclusão, as considerações finais.

CAPÍTULO 2

Abordagem Teórica

2.1. Definições

Definição 1 – Vizinhança

Seja $a \in \mathbb{R}$. Chama-se vizinhança de centro em a e raio ε, designada por $V_\varepsilon(a)$, ao intervalo $]a-\varepsilon\,, a+\varepsilon[$.

Definição 2 – Ponto de Acumulação

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um número real.
a diz-se um ponto de acumulação de X se em qualquer vizinhança de a existir pelo menos um elemento de X que seja diferente de a.

Nota 1

Neste trabalho designaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Exemplo 1

Considere-se a função f representada graficamente na figura 1.
Através da análise do gráfico da função f e considerando a definição de ponto de acumulação, pode afirmar-se que – 4 e 3 são pontos de acumulação do domínio de f.
De facto, para cada um desses pontos, se for considerada uma vizinhança de raio tão pequeno quanto se queira, esta conterá sempre pontos do domínio da função para além do 3 e do –4. Já relativamente ao 4, podemos dizer que não é um ponto de acumulação do domínio de f apesar de ser um ponto do domínio.

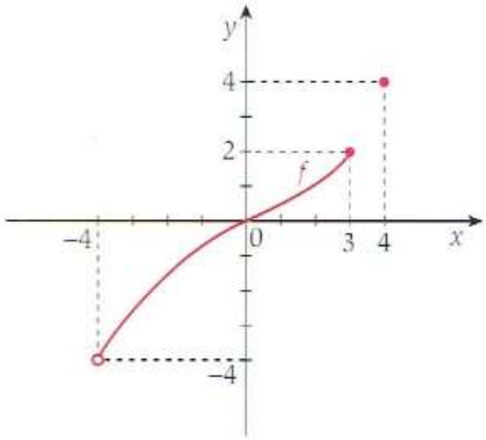


Figura 1 – Ponto de Acumulação

Fonte: Andrade *et al.*(2016)

2.2. Limites

Consideremos uma função $f: X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X. Na análise de funções pode ter interesse o estudo do comportamento de uma função quando os valores de X se aproximam de a.

Definição 3 – Definição de limite segundo Cauchy

Seja f uma função de domínio X e a um ponto de acumulação de X.

Dizemos que o limite de f é $b \in \mathbb{R}$ quando x tende para a se para todo o número real $\delta > 0$ existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in (X \backslash \{a\} \cap V_\varepsilon(a))$ então $f(x) \in V_\delta(b)$. Simbolicamente tem-se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ se } \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \ : \ x \in (X \backslash \{a\} \cap V_\varepsilon(a)) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b).$$

Definição 4 – Definição de limite segundo Heine

Seja f uma função de domínio X e a um ponto de acumulação de X.

Dizemos que o limite de uma função f quando x tende para a é b se para qualquer sucessão (u_n) de elementos de X diferentes de a, a sucessão $f(u_n)$ tende para b. Simbolicamente tem-se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ se } \forall (u_n) \in X \backslash \{a\}, (u_n) \longrightarrow a \Longrightarrow f(u_n) \longrightarrow b.$$

Observação 1

Prova-se que as duas definições anteriores são equivalentes usando-se a segunda por questões pedagógicas nos programas atuais do ensino secundário.

Teorema 1 – Teorema da Unicidade do Limite

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demostração 1

Sabendo que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ temos,

$\forall \delta > 0 \,, \exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ tais que $\forall x \in X$,

$0 < |x - a| < \varepsilon_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\delta}{2}$ e $0 < |x - a| < \varepsilon_2 \implies |f(x) - L_2| < \frac{\delta}{2}$.

Considere-se $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então para $\bar{x} \in X$ com,

$0 < |\bar{x} - a| < \varepsilon$, temos $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - L_2| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$ pelo que

$|L_1 - L_2| < \delta$, para todo o δ considerado. Logo $L_1 = L_2$.

Teorema 2

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ em que L < M então existe $\exists \varepsilon > 0$ tal que para

$x \in X$, $0 < |x - a| < \varepsilon \implies f(x) < g(x)$.

Demostração 2

Seja $\delta = \frac{M-L}{2} > 0$.

Então $L + \delta = \frac{L+M}{2} = M - \delta$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in X$, com

$0 < |x - a| < \varepsilon$ temos $f(x) \in \,]L - \delta \,, L + \delta[$ e $g(x) \in \,]M - \delta \,, M + \delta[$. Assim se conclui que $f(x) < \frac{L+M}{2} < g(x)$.

Teorema 3 – Operações com limites finitos

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então têm-se as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = L \times M$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e existe uma constante K tal que $|g(x)| \leq K$ para qualquer $x \in X \backslash \{a\}$ então $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = 0$ mesmo que $\lim_{x \to a} g(x)$ não exista.

No estudo do comportamento de uma função pode ser exigido que os valores do domínio da função se aproximem de $a \in X$ por valores inferiores e assim surge a noção de limite lateral à esquerda.

Definição 5 – Ponto de acumulação à esquerda

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e a um número real.

Dizemos que a é um ponto de acumulação à esquerda de X $(a \in X'_{-})$ se para todo o número real $\delta > 0$ se tem $X \cap]a - \delta, a[$ é não vazio.

Definição 6 – Limite de uma função à esquerda do ponto a

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'_{-}$.

Dizemos que o limite à esquerda de f é $b \in \mathbb{R}$ quando x tende para a se para todo o número real $\delta > 0$ existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in X \cap]a - \varepsilon,\ a[$ então $f(x) \in V_{\delta}(b)$. Simbolicamente tem-se,

$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ se $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : x \in X \cap]a - \varepsilon, a[\ \Rightarrow f(x) \in V_{\delta}(b)$.

De modo análogo, pode definir-se o limite lateral à direita de uma função quando x tende para a, se forem apenas considerados os valores do domínio da função para valores superiores a a.

Definição 7 – Ponto de acumulação à direita

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_{+}$.

Dizemos que a é um ponto de acumulação à direita de X $(a \in X'_{+})$ se para todo o número real $\delta > 0$ se tem $X \cap]a, a + \delta[$ é não vazio.

Definição 8 – Limite de uma função à direita do ponto a

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'_{+}$.

Dizemos que o limite à direita de f é $b \in \mathbb{R}$ quando x tende para a se para todo o número real $\delta > 0$ existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in X \cap]a,\ a + \varepsilon[$ então $f(x) \in V_{\delta}(b)$. Simbolicamente tem-se,

$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ se $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : x \in X \cap]a,\ a + \varepsilon[\ \Rightarrow f(x) \in V_{\delta}(b)$.

Teorema 4

Seja $X \subset \mathbb{R}$, e $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'_{+} \cap X'_{-}$.

Tem-se que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe se e só se os limites laterais existem e são iguais, isto é, neste caso podemos escrever,

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$$

Demonstração 3

Se existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então é porque os limites laterais existem e são iguais atendendo a que estes limites não são mais do que os limites da restrição da função inicial a subconjuntos do seu domínio, isto é, $\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$.

Reciprocamente, se os limites laterais existem e são iguais ($\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$), para $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $x \in X \cap]a, a + \delta_1[$ e para $x \in X \cap]a - \delta_2, a[$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Assim, se $x \in X \setminus \{a\} \cap]a - \delta, a + \delta[$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$, concluindo-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemplo 2

Considere-se a função f de domínio $\mathbb{R}$ que é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & se\ x < 2 \\ 0 & se\ x = 2 \\ -x + 1 & se\ x > 2 \end{cases}$$

Como a função é definida por duas expressões diferentes quando a variável toma valores menores ou maiores do que 2, para efetuar o estudo do limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2, devem-se determinar os limites laterais, isto é, deve estudar-se o comportamento da função quando x se aproxima de 2, por valores à esquerda e á direita de 2.

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} (x^2 - 5) = -1 \qquad \lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} (-x + 1) = -1$$

Como $\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} f(x)$ então pode dizer-se que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 existe e é igual a -1.

Também é possível o cálculo de limites laterais usando a convergência de sucessões, analogamente ao que foi enunciado anteriormente para limites de funções. O exemplo seguinte mostra uma aplicação desta segunda definição.

Exemplo 3

Considere-se agora a função g de domínio $\mathbb{R}$ que é definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & se\ x < -1 \\ x^2 & se\ x \geq -1 \end{cases}$$

Seja (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de pontos que é convergente para -1 com $u_n < -1$. Assim tem-se que,

$g(u_n) = u_n + 3$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = -1 + 3 = 2$

Considere-se agora (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de pontos que é convergente para -1 com $u_n > -1$. Assim tem-se que,

$g(u_n) = u_n^2$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = (-1)^2 = 1$

Como os limites laterais são diferentes então conclui-se que não existe limite de $g(x)$ quando se x se aproxima de -1.

Definição 9 – Limites no infinito

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, um conjunto ilimitado superiormente e $f: X \to \mathbb{R}$.

Se existe um número L que satisfaz a condição:

$\forall\delta > 0\,, \exists A > 0\,, x \in X\ e\ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$ então dizemos que o limite de f é L quando x tende para $+\infty$. Escrevemos, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

De modo equivalente,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ quando para uma função f cujo domínio não é majorado temos que, para toda a sucessão (u_n) de elementos do domínio com $u_n \to +\infty$ se tem,

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$, em que L é um número real .

De modo semelhante se $X \subset \mathbb{R}$ for um conjunto ilimitado inferiormente e existir um número L que satisfaz a condição:

$\forall\delta > 0\,, \exists A > 0\,, x \in X\ e\ x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$ dizemos que o limite de f é L quando x tende para $-\infty$. Escrevemos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Isto é,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ quando para uma função f cujo domínio não é minorado se para toda a sucessão (u_n) de elementos do domínio com $(u_n \to -\infty)$ se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$, em que L é um número real.

Definição 10 – Limites infinitos

Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'$.

Dizemos que o limite de f é $+\infty$, quando x tende para a se para todo o número real $\delta > 0$ existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \varepsilon$ então $f(x) > \delta$.

Simbolicamente tem-se,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se $\forall \delta > 0\,, \exists \varepsilon > 0 : 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > \delta$.

Definição 11 – Limites infinitos usando sucessões

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'$.

Se toda a sucessão (u_n) de elementos do domínio converge para a e a sucessão $f(u_n)$ tende para $+\infty$ diz-se que $+\infty$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a. Simbolicamente tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ é equivalente a afirmarmos que $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = +\infty$

Mais uma vez podemos chamar a atenção para a equivalência das duas definições anteriores.

Exemplo 4

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Considere-se uma sucessão (u_n) de elementos diferentes de 0 tais que $(u_n) \to 0$.

Logo $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \frac{1}{(u_n)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Pelo que se conclui que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

As noções de limites infinitos no infinito podem ser igualmente estudadas com rigor. Não o faremos neste trabalho devido à limitação de páginas exigida.

2.3. Continuidade

No estudo de funções interessa muitas vezes comparar o comportamento da função quando x se aproxima de a com o valor que a função toma no ponto a.

Definição 12 – Função Contínua

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, e $a \in X \cap X'$.

Uma função f diz-se contínua no ponto a se,

$\forall \delta > 0\,, \exists \varepsilon > 0\,, \forall\, x \in X \;\; |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$.

Resumindo para uma função ser contínua em a tem que existir $\lim_{x \to a} f(x)$ e este tem que ser igual a $f(a)$, isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definição 13 – Função contínua num subconjunto de $\mathbb{R}$

Uma função diz-se contínua num subconjunto de $\mathbb{R}$ se for contínua em todos os pontos desse subconjunto.

Proposição 1

Como consequência imediata da definição 12 e do resultado do teorema 4, a função f será contínua num ponto do seu domínio se os limites laterais existirem e forem iguais à imagem desse ponto. Simbolicamente tem-se,

f é contínua em $a \in X'_+ \cap X'_-$ se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Definição 14 – Condição de Heine para a continuidade

Consideremos um subconjunto X contido em $\mathbb{R}$ e uma função $f: X \to \mathbb{R}$.

Diz-se que uma função f é contínua num ponto a com $a \in X \cap X'$, se para qualquer sucessão de pontos x_n pertencentes a X, convergente para a, $f(x_n)$ é convergente para $f(a)$.

Nota 2

As definições 12 e 14 são equivalentes, usando-se no ensino secundário a segunda definição por questões pedagógicas.

Exemplo 5

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x \leq 2 \\ -x+1 & se\ \ x > 2 \end{cases}$$

Seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ tal que (x_n) converge para 2, e todos os seus termos são superiores a 2.

Tem-se que,

$f(x_n) = -\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1 = -\frac{1}{n} - 1$ e que $f(x_n)$ converge para -1, Por outro lado tem-se $f(2) = 2 + 1 = 3$.

Donde se conclui que, x_n converge para 2, mas no entanto, $f(x_n)$ não converge para $f(2)$ mas para -1. Logo podemos concluir que a função não é contínua para $x = 2$.

Teorema 5

Sejam f e g funções contínuas num ponto a, com $a \in X \cap X'$, e seja c uma constante. Então as seguintes funções também são contínuas em a:

(i) $f+g$

(ii) $f-g$

(iii) cf

(iv) fg

(v) $\frac{f}{g}$ se , $g(a) \neq 0$

Demonstração 4

Apresentar-se-á a demonstração do ponto (i).

Sejam f e g funções contínuas num ponto a do seu domínio com $a \in X'$, então tem-se,

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

Assim o limite da soma da função f com a função g é dado por:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$$

O que mostra que $f+g$ é uma função contínua no ponto a.

De modo análogo se provam (ii), (iii), (iv) e (v), considerando-se as correspondentes operações na álgebra dos limites.

Teorema 6

(i) Todas as funções polinomiais são contínuas em todos os pontos do seu domínio ($\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer função racional é contínua no seu domínio, uma vez que é o quociente de funções polinomiais contínuas.

Exemplo 6

Considere-se a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+1} & se\ x \neq 0 \\ -1 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Para estudar a continuidade da função f tem que primeiro averiguar-se se existe

$\lim_{x\to 0} f(x)$.

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+1} = -1$$

Tem-se ainda que,

$f(0)=\dfrac{0-1}{0^2+1}=-1$.

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, conclui-se que a função f é contínua no ponto 0. Como nos outros restantes pontos do domínio da função f, esta é definida como quociente de duas funções continuas, nunca se anulando o denominador, podemos concluir que f é continua em $\mathbb{R}$.

Exemplo 7

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ \ x = 0 \end{cases}$$

Para estudar a continuidade da função g averigúe-se a existência de limite da função em $x = 0$ uma vez que nos restantes pontos do domínio esta função é continua.
Tem-se então que, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ e que $g(0)=1$.
Como $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$, conclui-se que a função g não é contínua no ponto $x = 0$.

Uma propriedade importante no estudo de funções contínuas está traduzida no teorema seguinte.

Teorema 7 – Teorema de Bolzano-Cauchy (ou Teorema do Valor Intermédio)
Considere-se que f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Se L é um ponto do intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$ então existe pelo menos um ponto c pertencente ao intervalo $]a, b[$, tal que $f(c) = L$.

O Teorema de Bolzano-Cauchy ou o Teorema do Valor Intermédio evidencia que uma função contínua num intervalo não passa de um valor para outro sem que passe primeiro por todos os seus valores intermédios.
Os exemplos 8 e 9 mostram como pode ser aplicado o teorema de Bolzano graficamente e analiticamente.

Exemplo 8

(i) Sabendo que f é uma função continua, se no gráfico f da figura 2 for traçada qualquer reta horizontal que intersete o eixo das ordenadas entre $f(a)$ e $f(b)$, essa reta vai intersetar o gráfico da função f. Assim pelo teorema de Bolzano para um valor L compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um c pertencente ao intervalo $]a, b[$, tal que $f(c) = L$.

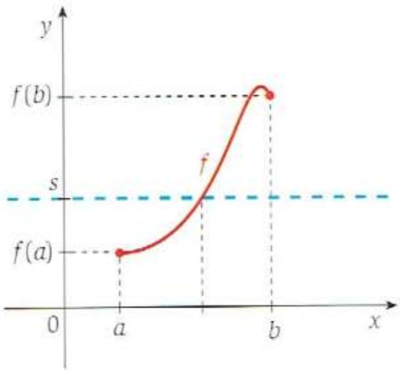


Figura 2 – Função f é contínua

Fonte: Neves. M.A *et al.*(2012)

No gráfico g da figura 3 pode existir uma reta horizontal entre $g(a)$ e $g(b)$, que não intersete o gráfico da função g. Portanto a função não é contínua nesse intervalo.

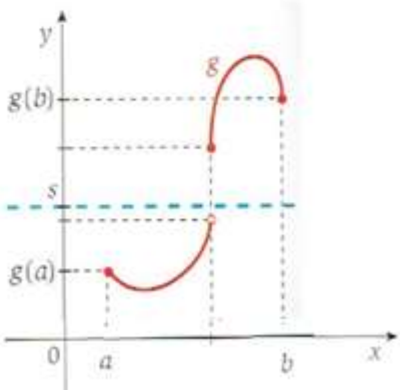


Figura 3 - Função g não é contínua

Fonte: Neves. M.A *et al.*(2012)

Exemplo 9

Seja a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por, $f(x) = 1 - 2x^3 + x^5$. Suponha-se que se pretende averiguar se a equação $f(x) = \frac{1}{2}$ tem solução no intervalo $[-1, 1]$.

A função f sendo uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$, logo também é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Como $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$ e $0 < \frac{1}{2} < 2$ então pelo teorema de Bolzano-Cauchy pode garantir-se que existe pelo menos um c pertencente ao intervalo $]-1, 1[$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Assim se conclui que a equação $f(x) = \frac{1}{2}$ tem solução no intervalo $]-1, 1[$.

Uma das aplicações do Teorema de Bolzano-Cauchy é a localização de zeros de funções como evidencia o seguinte corolário.

Corolário 1 – Corolário do Teorema de Bolzano- Cauchy

Considere-se que $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$.

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$ (ou seja $f(a)$ e $f(b)$ são valores com sinais contrários), então pode concluir-se que a função f tem um zero no intervalo aberto $]a, b[$.

Exemplo 10

Considere-se a função real de variável real f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por,

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

Usando o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy pretende mostrar-se que a função f tem um zero no intervalo $]1,2[$, isto é que existe um número c compreendido entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Assim, determine-se o valor de $f(1)$ e $f(2)$.

$f(1) = 4 \times 1^3 - 6 \times 1^2 + 3 \times 1 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 3 \times 2 - 2 = 12 > 0$

Como f é uma função contínua (função polinomial) e como $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy pode dizer-se que existe pelo menos um c pertencente ao intervalo $]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, pode concluir-se que a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$.

2.4. Derivadas de funções reais de variável real

2.4.1. Interpretação Geométrica da taxa de variação de uma função

Quando se pretende estudar o comportamento de uma função para valores muito próximos de um ponto a é muitas vezes preferível substituir a função f por outra função g, cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a.

Definição 15 – Taxa Média de Variação

Considere-se a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a e b pontos do seu domínio.

A taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ é dada por

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consideremos uma função f e os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$ pertencentes à função f de tal forma que $b \neq a$.

A inclinação da reta secante PQ é dada por,

$$m_{PQ} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se Q se aproximar de P ao longo do gráfico da função então a abcissa dos pontos que iremos obtendo aproxima-se de a. Se o declive da reta PQ se aproximar de um número m, significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto P tem inclinação m.

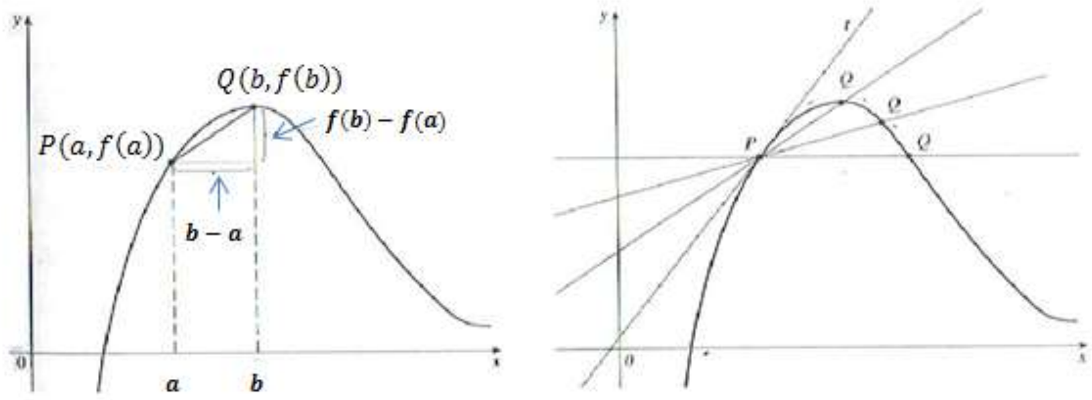


Figura 4 – Declive da reta tangente

Fonte: Stewart, J (2001)

Definição 16 – Declive da Reta tangente

Consideremos uma função f e um ponto $P(a, f(a))$ do seu gráfico.

A reta tangente de uma função num ponto P é a reta que passa por P e tem inclinação igual a, $m = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ desde que este limite exista.

Exemplo 11

Definindo $f(x) = x^2$ de domínio $\mathbb{R}$ e aplicando a definição 15 pode determinar-se o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.

$m = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} x + 1 = 2$

Uma expressão para a reta tangente, sendo conhecido um dos seus pontos $P(1,1)$ e o declive $(m = 2)$ será,

$$y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Logo a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,1) é $y = 2x - 1$.

Seja $h = x - a$ ou seja $x = a + h$.

Assim a razão incremental para o cálculo do declive é dada por:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Tendo em conta que quando x se aproxima de a , h tenderá para 0, uma vez que $h = x - a$, podemos escrever,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definição 17 – Derivada de uma função num ponto

Consideremos um subconjunto X contido em $\mathbb{R}$, tal que, $f: X \to \mathbb{R}$. Seja a um ponto de acumulação de X que pertence a X.

A função f diz-se derivável em a se existir o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Neste caso, a derivada de f no ponto a representa-se por $f'(a)$ e é dada por,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definição 18 – Derivadas Laterais

Consideremos um subconjunto X pertencente a $\mathbb{R}$, tal que, $f: X \to \mathbb{R}$. Seja a um ponto de acumulação à direita de X. Tem-se que se $a \in X \cap X'_+$ pode definir-se a derivada à direita da função f no ponto a da seguinte forma,

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Considere-se agora que a é um ponto de acumulação à esquerda de X. Tem-se que se $a \in X \cap X'_-$ pode definir-se a derivada à esquerda da função f no ponto a da seguinte forma,

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemplo 12

(i) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante tal que $f(x) = c$, para $c, x \in \mathbb{R}$. Tem-se que $f'(a) = 0$, com $a \in \mathbb{R}$. Por outras palavras a derivada de uma função constante é zero.

(ii) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx + d$. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se que o quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$, pelo que se pode concluir que a derivada da função f no ponto a é constante e representa-se da seguinte forma,
$f'(a) = c$.

Teorema 8

Seja $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $a \in X \cap X'$.

Se existe e é finita a derivada da função no ponto a, então a função é contínua nesse ponto.

Demonstração 5

Pretende-se provar que se f é derivável no ponto $x = a$ então $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é igual a $f(a)$.

Admita-se que existe derivada num ponto a, isto é, que existe o seguinte limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e é finito.

Assim,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} . (x-a)\right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} . \lim_{x \to a} (x-a) = 0$$

Logo f é contínua no ponto a.

Os teoremas que se apresentam de seguida apresentam regras elementares de derivação.

Teorema 9 – Derivada da soma e do produto

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e as funções f e g, deriváveis num ponto a, tais que $f, g: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Tem-se que as funções $f \pm g$ e $f.g$ são deriváveis num ponto a. sendo,

(i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

(ii) $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$

Demonstração 6

Considere-se as funções f e g deriváveis no ponto a. Então tem-se que:

(i) $$(f+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(x)}{h} + \frac{g(a+h)-g(x)}{h}\right) = f'(a) + g'(a)$$

A demonstração para a função $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ é idêntica a esta.

(ii) Se f e g são deriváveis então tem-se que:

$$(f.g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a).g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

Nota 3

A regra de derivação do produto é válida para vários factores tais que:

$$(f_1 f_2 \ldots\ldots f_n)' = {f_1}' f_2 \ldots\ldots f_n + f_1 {f_2}' \ldots\ldots f_n + f_1 f_2 \ldots\ldots {f_n}'.$$

Prova-se ainda que,

Teorema 10 – Derivada do quociente

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e as funções f e g , deriváveis num ponto a, tais que $f, g: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Tem-se que a função $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$, numa vizinhança do ponto a) é derivável num ponto a e,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a)g'(a).}{g(a)^2}$$

Teorema 11 – Derivada da Função inversa

Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ e a função $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ invertível com $g = f^{-1}: Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se a função f é derivável num ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se e apenas se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Demonstração 7

Sabemos à partida que g é contínua no ponto b, isto é $\lim_{y \to b} g(y) = g(b) = a$. Seja ainda $y \in Y \backslash \{b\} \Longrightarrow g(y) \neq a$. Então tem-se,

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \lim_{y \to b} \frac{g(y)-a}{f(g(y))-f(a)} = \lim_{y \to b} \left[\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}$$

Assim se conclui que $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, desde que $f'(a) \neq 0$.

Exemplo 13

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Temos que $Cd_f = \mathbb{R}$ e $f'(x) = 2$.

Determine-se a função inversa da função f.

$y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$

Logo a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é definida por $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, pelo que

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}$.

2.4.2. Monotonia e Extremos de uma função

Para estudar a monotonia (crescimento ou decrescimento de uma função) na vizinhança de um ponto pode recorrer-se ao estudo da derivada.
Assim é importante antes de relacionar estes conceitos definir monotonia, máximos e mínimos.

Definição 19 – Máximos e Mínimos

Para definir máximos e mínimos absolutos e relativos considere-se um subconjunto X de $\mathbb{R}$ tal que $f: X \to \mathbb{R}$. Seja $a \in X$.

(i) A função f tem um máximo absoluto no ponto a se $f(a) \geq f(x)$, para todo o $x \in X$. O valor de $f(a)$ designa-se por máximo absoluto da função f e o valor de a chama-se maximizante.

(ii) A função f tem um mínimo absoluto no ponto a se $f(a) \leq f(x)$, para todo o $x \in X$. O valor de $f(a)$ designa-se por mínimo absoluto da função f e o valor de a chama-se minimizante.

(iii) A função f tem um máximo relativo no ponto a quando existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X \cap]a - \delta, a + \delta[$ então $f(a) \geq f(x)$. Diz-se que f tem um máximo relativo em sentido estrito no ponto a se $x \in X \setminus \{a\} \cap]a - \delta, a + \delta[$ então $f(a) > f(x)$.

(iv) A função f tem um mínimo relativo no ponto a quando existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X \cap]a - \delta, a + \delta[$ então $f(a) \leq f(x)$. Diz-se que f tem um mínimo relativo em sentido estrito no ponto a se $x \in X \setminus \{a\} \cap]a - \delta, a + \delta[$ então $f(a) < f(x)$.

Definição 20 – Função crescente e Função decrescente

Sejam um subconjunto X de $\mathbb{R}$ e $f: X \to \mathbb{R}$.

Dizemos que uma função f

- crescente em X se para $a < b$ $(a, b \in X)$ se tem $f(a) \leq f(b)$;
- é decrescente em X se para $a < b$ $(a, b \in X)$ se tem $f(a) \geq f(b)$;
- é estritamente crescente em X se para $a < b$ $(a, b \in X)$ se tem $f(a) < f(b)$;
- é estritamente decrescente em X se para $a < b$ $(a, b \in X)$ se tem $f(a) > f(b)$.

Nota 4

Dizemos que uma função é monótona num subconjunto se é crescente ou decrescente nesse subconjunto.

Teorema 12

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e f uma função tal que $f: X \to \mathbb{R}$. Se f é derivável num conjunto X e é crescente (ou decrescente) em X então para qualquer x pertencente ao conjunto X tem-se $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).

Demonstração 8

Seja a função f uma função crescente em X e seja $a \in X$.

Considere-se o caso em que $x > a$.

Como f é uma função crescente no conjunto X , se $x > a$ então $f(x) \geq f(a)$. Ou seja se

$x - a > 0$ então $f(x) - f(a) \geq 0$ isto é $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

Para o caso em que $x < a$, dado que f é uma função crescente no conjunto X , se $x < a$ então $f(x) \leq f(a)$. Ou seja se,

$x - a < 0$ então $f(x) - f(a) \leq 0$ isto é $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

Como f é uma função derivável no ponto a tem-se que $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pelo que, $f'(a) \geq 0$.

Como o ponto a é arbitrário em X então pode concluir-se que para todo o $x \in X$ se tem $f'(x) \geq 0$.

De modo análogo se prova que se f for uma função decrescente em X tem-se, $f'(x) \leq 0$.

Teorema 13

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_{+}$.

Tem-se que se $f'_{+}(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para $x \in X$, $a < x < a + \delta$ se tem $f(a) < f(x)$.

Demonstração 8

Consideremos que f é derivável à direita num ponto a e que,

$$\lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_{+}(a) > 0$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in X$, $a < x < a + \delta$ temos $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Conclui-se que $f(x) - f(a) > 0$.

Observação 3

De modo análogo podem obter-se mais três teoremas semelhantes que provam que:

- Se $f'_{-}(a) > 0$ então $f(a) > f(x)$ para $x < a$ mas muito próximo de a.
- Se $f'_{+}(a) < 0$ então $f(a) > f(x)$ para $x > a$ mas muito próximo de a.
- Se $f'_{-}(a) < 0$ então $f(a) < f(x)$ para . $x < a$ mas muito próximo de a.

Corolário 2

Seja $a \in X \cap X'_{+} \cap X'_{-}$.

Se $f: X \to \mathbb{R}$ tiver no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ então tem-se que $f(x) < f(a) < f(y)$ ($f(x) > f(a) > f(y)$).

Corolário 3

Sejam $a \in X \cap X'_{+} \cap X'_{-}$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto a.

Se f tiver um máximo ou um mínimo relativo no ponto a então $f'(a) = 0$.

Definição 21 - Ponto Crítico

Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in X$ e f uma função tal que $f: X \to \mathbb{R}$.

a é um ponto crítico de f se f não admite derivada nesse ponto ou sendo derivável nesse ponto ela é nula.

Exemplo 14

Considere-se a função quadrática $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ cujo gráfico a seguir se apresenta.

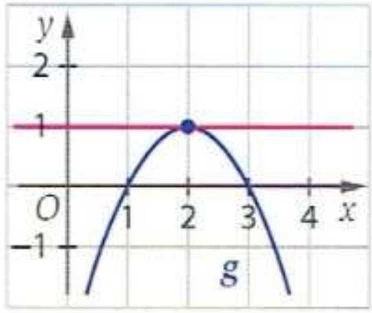


Figura 5 – Ponto Crítico

Fonte: Andrade *et al.(2016)*

A função tem um máximo absoluto (e também relativo) em $x = 2$, como ilustra a figura.5. O ponto $x = 2$ é diferenciável. Verifique-se que $g'(2) = 0$.

Graficamente também se poderia concluir que a derivada no ponto 2 é zero uma vez que a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(2,1)$ tem declive zero.

Teorema 14 - Teorema do Valor Médio de Lagrange

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em I e $a, b, c \in I$.

Se f é derivável em I então existe um valor $c \in I$ tal que,

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou ainda que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Corolário 4

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I.

Para todo o $x \in I$, tem-se que $f'(x) \geq 0$ se e só se f for não decrescente em I.

Para todo o $x \in I$, tem-se ainda que se $f'(x) \geq 0$ então f é crescente em I.

Demonstração 9

Sejam $a, b, x \in I$.

Se $a < b$, e $f'(x) \geq 0$ então,

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ com $a < c < b$.

E portanto $f(b) - f(a) \geq 0$ pelo que f é não decrescente.

Por outro lado se f é não decrescente então para todo o $x \in I$ e todo o $h \neq 0$ tal que $x + h \in I$ tem-se que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ e portanto $f'(x) > 0$.

Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$ então $a < b$ em I implica que,

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ com $a < c < b$, logo $(b) - f(a) \geq 0$, isto é f é crescente.

Nota 4

O corolário anterior admite uma formulação análoga se f for não crescente provando-se que se $f' < 0$ para todo o x pertencente a um intervalo I então f é decrescente em I.

Teorema 15

Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo X. e a um ponto crítico de f em X .

Tem-se que:

(i) Se no ponto a o sinal de f' mudar de positivo para negativo então a função f tem um máximo relativo nesse ponto. O quadro seguinte ilustra esta situação.

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$ (Máximo)	$\searrow$

Quadro 1 – Máximo relativo

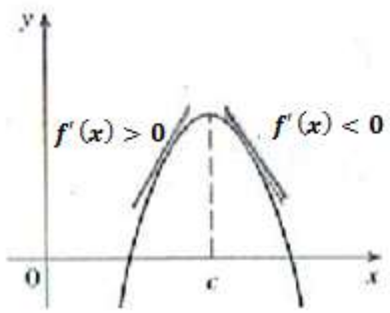
(ii) Se no ponto a o sinal de f' mudar de negativo para positivo então a função f tem um mínimo relativo nesse ponto.

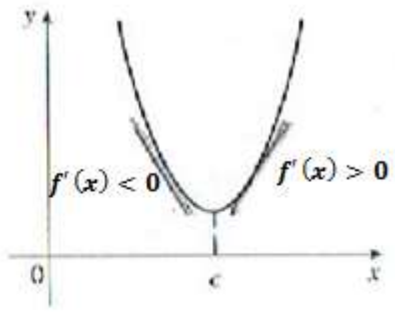
x		a	
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$ (Mínimo)	$\nearrow$

Quadro 2 – Mínimo relativo

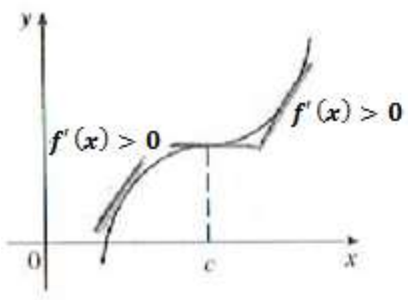
(iii) Se f' não alterar o sinal no ponto a então não existe máximo nem mínimo nesse ponto.

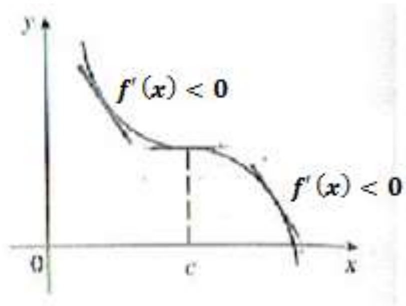
A Figura 6 ilustra as condições deste teorema.





(I) Máximo Relativo (II) Mínimo Relativo





(III) Não se verifica nenhum máximo nem mínimo em ambos os gráficos

Figura 6 - Relação entre o sinal da derivada e a existência de extremos

Fonte: Stewart, J (2001)

CAPITULO 3

Abordagem Prática

Neste terceiro capítulo descreve-se as atividades práticas que foram realizadas. Assim começa-se por se fazer um breve enquadramento onde será caracterizada a escola e os alunos em questão. Foram realizadas atividades em duas turmas, uma do ensino básico e outra turma do ensino secundário.

Considerando que uma das atividades realizadas relaciona a matemática com a física apresenta-se ainda neste capitulo a relação entre estas duas disciplinas. Por fim mostra-se a avaliação que os alunos fizeram a cada uma das atividades evidenciando os pontos que os alunos acharam positivos e negativos.

3.1. Enquadramento

3.1.1. Caracterização da escola

O “ Centro de Estudos de Fátima, abreviadamente designado CEF, é uma associação de institutos religiosos, constituída por tempo indeterminado, sem fins lucrativos e com a sua sede em Fátima.”
O Centro de Estudos de Fátima tem alunos do ensino básico (2.º e 3.º ciclos), do secundário e do ensino profissional. No ensino secundário oferece as seguintes áreas Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas, Línguas e Humanidades e Artes. No que diz respeito ao ensino profissional oferece os seguintes cursos Técnico de

Comércio, Técnico de Multimédia, Técnico de Instalações Eletricas, Técnico de Logística e Técnico de Eletrónica e Automação de Computadores.

3.1.2. Caracterização da Turma de 9.º ano

A turma do 9.º C é constituída por 28 alunos, sendo 16 raparigas e 12 rapazes. O aproveitamento da turma é considerado bom e o comportamento global.

Na disciplina de matemática 9 alunos apresentam negativa. Estes discentes manifestam algumas dificuldades na disciplina nomeadamente na interpretação dos enunciados, no cálculo e no raciocínio lógico-dedutivo. Por outro lado também revelam ausência de um estudo regular e dificuldades de concentração.

É de salientar que existem 3 alunos com Necessidades Educativas Especiais que usufruem de um Programa Educativo Individual. Um destes alunos apresenta perturbação de hiperatividade, défice de atenção e os outros dois alunos apresentam disortografia e dislexia. A todos estes alunos são implementadas as medidas educativas previstas no artigo 16º do decreto-lei n.º3/2008: apoio pedagógico personalizado e adequações no processo de avaliação.

Os alunos gostam de estar nesta escola e têm consciência da importância que os estudos têm na sua vida futura. Assim, revelam interesse de prosseguir estudos para o ensino secundário, na mesma escola. Os alunos que apresentam maior número de negativas preferem ingressar nos cursos profissionais que a escola oferece e os restantes alunos pretendem o ensino secundário regular para posteriormente seguir os seus estudos no ensino superior.

3.1.3. Caracterização da Turma de 11.º ano

A turma do 11.º C é constituída por 25 alunos, sendo 9 raparigas e 16 rapazes.

Os pontos fortes dos alunos da turma são a assiduidade e pontualidade, curiosidade científica e espírito crítico face à realidade circundante; simpatia e bom relacionamento interpessoal, capacidade de cooperação e capacidade de relacionação de conteúdos de diferentes áreas do saber ou lecionados em anos anteriores.

No que diz respeito às aprendizagens verifica-se falta de hábitos de trabalho que se evidencia na não realização dos trabalhos de casa e dificuldades ao nível das competências da interpretação de textos e da utilização do vocabulário.
É de salientar que estes alunos se encontram num Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias tendo maiores capacidades para áreas como a matemática, físico-química e geometria descritiva. O objetivo destes alunos é prosseguir estudos para o ensino superior para cursos de engenharia.

3.2. A importância de atividades de investigação em sala de aula

A ciência e a tecnologia revolucionaram o mundo em várias áreas da sociedade, em particular na educação. De facto esta evolução que vai acontecendo afeta a escola, o currículo, as práticas pedagógicas e os processos formativos da docência (Corradini, S. & Mizukami,M.;2013). Para poder acompanhar os avanços da tecnologia os professores na escola devem reformular as estratégias de ensino proporcionando aos alunos aulas mais práticas e com um maior recurso a tecnologias, por forma a motivar os alunos para que atinjam as competências específicas da disciplina e compreendam os conteúdos.
Segundo Moreira, D. e Botas, (2013) uma forma de motivar os alunos para a disciplina de matemática é proporcionar-lhes experiencias diferentes e diversificadas através do uso de materiais didácticos ou mesmo da tecnologia. O facto de os alunos poderem realizar atividades experimentais ou utilizarem a tecnologia, permite que estes se incentivem mais e que consigam aprender de uma forma mais lúdica sem ser apenas pelo método tradicional papel e lápis com o professor apenas a expor os conteúdos.
No que diz respeito às funções o recurso ao computador, às potencialidades da calculadora gráfica e a atividades práticas com materiais manipuláveis ajuda muito na compreensão dos conceitos e na perceção gráfica dos conceitos.

3.3. A Relação da Matemática com a Física

A matemática e a física são ciências que estão muito associadas, uma vez que muitos conceitos físicos estudados pressupõem o conhecimento de conceitos matemáticos.

A física é a ciência que estuda o mundo material segundo as leis que são descritas com propriedades e conceitos matemáticos. Veja-se o caso do matemático Newton que se interessou pela área da física e passou a ser também um investigador desta área. Outros matemáticos desenvolveram interesse da física como Euler, Lagrange, Fourier entre outros (Ponte, J.; 1990).

Segundo, David Hilbert, citado por Fiolhais (2002) "a Física é demasiado difícil para ser deixada apenas aos físicos..."

Apesar de estarem relacionadas a física e a matemática usam metodologias diferentes. A física utiliza mais a intuição e a matemática foca-se mais na dedução. Na física o mundo processa-se por adivinhação baseada no conhecimento anterior, mas na matemática é necessário provar-se para garantir a veracidade dos conceitos (Fiolhais, C.; 2000).

O facto da física e da matemática estarem tão relacionadas pode ser o motivo para se afirmar que só se pode perceber Física se primeiro se entender os conceitos matemáticos. (Pietrocola, M.; 2002). Desta forma pode dizer-se que o idioma da física é o idioma da matemática, uma vez que para se exprimirem conceitos físicos devem usar-se conceitos matemáticos (Fiolhais, C.; 2000). Muitos dos elementos da matemática como funções equações, gráficos, vetores, inequações, entre outros são aplicados para explicar fenómenos físicos (Pietrocola, M.; 2002).

3.4. Atividade Prática

As atividades práticas realizadas no 9.º ano e no 11.º ano foram realizadas em aulas da disciplina de matemática sendo os alunos acompanhados pelos respetivos professores de matemática e, no caso da atividade realizada no 11.º ano, os alunos foram ainda acompanhados pelo professor de física.

Para cada uma das atividades foi elaborada uma ficha de trabalho para orientar os alunos na sua resolução e um questionário para cada uma das atividades. As fichas de trabalho de orientação das atividades encontram-se em anexo (Apêndice A e Apêndice B) assim como os respetivos questionários (Apêndice C e Apêndice D).

Depois de realizadas as atividades foram escritas duas noticias para o jornal da escola (InforCEF) com o intuito de informar a comunidade educativa da realização das mesmas. A publicação dessas notícias encontra-se em anexo também (Apêndice E).

3.4.1. Descrição da Atividade Prática do 9.º ano

A atividade de investigação aplicada foi realizada numa aula de 90 minutos, numa turma do 9.º ano e consistiu na construção de caixas a partir de folhas de cartolinas de medidas fixas (50 cm de comprimento e 32,5 cm de largura).

O principal objetivo da atividade era o de os alunos investigarem quais as medidas (comprimento, largura e altura), que a caixa deveria ter para que o seu volume fosse máximo.

Como forma de orientar os alunos na realização deste exercício prático foi elaborada uma ficha de trabalho que lhes foi distribuída.

Inicialmente a atividade, foi descrita e explicada aos alunos assim como foram referidos os objetivos da mesma. Como forma de agilizar os procedimentos foram realizados grupos constituídos por 3 alunos para que em grupo pudessem discutir e testar quais as medidas que a caixa poderia para que o volume fosse máximo.

Aos alunos foi informado que se pretendia construir uma caixa, partindo de uma cartolina retângular, deve começar-se por recortar quadrados nos seus cantos.

Como forma de responder á primeira questão da tarefa e para perceberem com que medida iriam recortar os quadrados, para que se obtivesse o volume máximo da caixa, foi-lhes dado um exemplo de se retirar um quadrado com 5 cm de lado em cada canto da cartolina e posteriormente calcular-se o respetivo volume.

No quadro foi apresentado o esboço da cartolina, o desenho do 4 quadrados situados nos cantos da mesma e a forma como os alunos deveriam de seguida proceder para a construção da caixa.

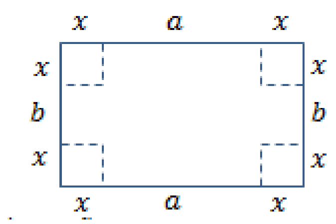


Figura 7 – Esboço da Planificação da Cartolina

Posteriormente, os alunos tiveram durante algum tempo para investigar com outras dimensões qual o volume da caixa que iriam obter.

Houve um grupo que por tentativas rapidamente chegou ao valor das medidas das dimensões da caixa. Este grupo concluiu que para o volume ser máximo, as medidas do comprimento, largura e altura da caixa teriam que ser, $a = 37$, $b = 20$ e $x = 6{,}5$. E desta forma o volume obtido seria:

$$V = a \times b \times c$$
$$V = 37 \times 20 \times 6{,}5$$

De seguida era necessário encontrar uma expressão analítica para a área da base da caixa, considerando x cm a medida do quadrado que se retira à cartolina em cada canto e as medidas base da cartolina: 50 cm de comprimento e 32,5 cm de largura. Os alunos conseguiram chegar às seguintes expressões para o comprimento e largura da caixa, em função da medida de se retira x:

Comprimento da caixa: $x + a + x = 50 \Leftrightarrow a = 50 - 2x$

Largura da caixa: $x + b + x = 32{,}5 \Leftrightarrow b = 32{,}5 - 2x$

Assim, obtiveram a seguinte expressão algébrica para a área da base da caixa.

$$A = (50 - 2x)(32{,}5 - 2x)$$

Na alínea seguinte era proposto aos alunos encontrarem uma expressão analítica para o volume da caixa o que depois de terem a expressão da área da base da caixa foi muito fácil, pois rapidamente chegaram à expressão:

$$V = (50 - 2x)(32{,}5 - 2x)x$$

A questão seguinte consistia na exploração do gráfico da função que exprimia o volume recorrendo às potencialidades da calculadora. Como estes alunos nunca tinham trabalhado com uma calculadora gráfica teve de lhes ser explicado todos os procedimentos inerentes à representação de gráficos de funções numa calculadora. Os alunos obtiveram a seguinte representação gráfica.

Figura 8 - Gráfico da função do volume da caixa

Para ser mais fácil identificar posteriormente o volume máximo, foi reajustada a janela de visualização e obteve-se o gráfico seguinte:

Figura 9 - Gráfico da função do volume da caixa com a janela de visualização pretendida

Utilizando ainda a calculadora gráfica e as suas potencialidades puderem encontrar o máximo da função.

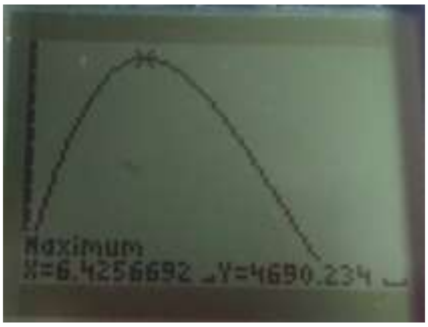


Figura 10 – Máximo da Função

Verificaram assim graficamente o que já tinham conjeturado analiticamente, embora naturalmente de forma aproximada, que quando $x = 6{,}4$ se tem $V = 4690{,}176$, isto é, que quando se retira um quadrado de $6{,}4$ cm dos quatros cantos da cartolina se obtém o volume máximo.

Depois de saberem qual a medida de x, concluíram facilmente que as medidas, que a caixa deve ter seriam as seguintes:

Comprimento da caixa: $a = 32{,}7$ cm

Largura da caixa: $b = 19{,}7$ cm

Altura da caixa: $x = 6{,}4$ cm

Depois de descobertas as dimensões da caixa, os alunos procederam a medições e construíram ainda em grupo as respetivas caixas.

Figura 11 – Alunos do 9.º ano a construir as caixas em cartolina

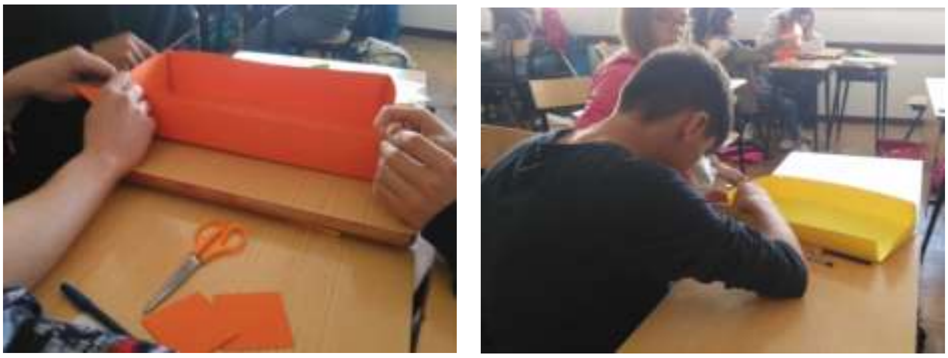


Figura 12 – Alunos do 9.º ano a construir as caixas em cartolina

No final da atividade os alunos preencheram um questionário para a avaliarem a mesma, onde mostraram a sua opinião.

3.4.2. Descrição da Atividade Prática do 11.º ano

A atividade prática aplicada na turma do 11.º ano foi aplicada numa aula de 90 minutos da aula de matemática da respetiva turma e foi realizada no laboratório de física. O principal objetivo foi o de relacionar as disciplinas de matemática e de física, nos conceitos de derivada e de velocidade através do lançamento de uma bola de voleibol.

Antes dos alunos entrarem foi preparada a atividade pelos professores de matemática e de física. O sensor de movimento foi colocado no chão e foi ligado por uma entrada USB a um computador que tinha o programa *Data Studio*, e este por sua vez foi ainda ligado a um retroprojetor, de forma a que todos os alunos pudessem acompanhar o que estava a ser feito.

O professor de físico-químico dos alunos esteve presente e ajudou na dinamização da atividade.

Uma vez que o laboratório de física apenas tem lotação para 15 alunos, teve de se proceder à divisão da turma em duas partes, sendo a primeira parte constituída por 13 alunos e a segunda parte constituída por 12 alunos. O primeiro grupo realizou a atividade nos primeiros 45 minutos da aula e o segundo realizou a atividade nos últimos 45 minutos da aula.

Após a chegada dos alunos ao laboratório de física foi-lhes entregue um guião da realização do trabalho pretendido, onde se encontrava descrito todo o procedimento que tinha de ser feito, assim como uma breve interpretação teórica e o respetivo questionário referente à atividade.

O procedimento descrito na atividade, isto é o lançamento da bola apenas se realizou uma vez com cada uma das partes da turma, como forma de agilizar o tempo.

Como forma de contextualizar a atividade foi referido que o que ia ser abordado na aula eram conteúdos que já tinham sido lecionados nas aulas de matemática e de física. Foi relembrado aos alunos que o movimento de uma determinada partícula descreve uma trajetória e que esta pode ser analisada do ponto de vista matemático. Associado ao deslocamento de uma partícula está a velocidade média num determinado intervalo de tempo. A partícula que ia ser usada seria uma bola e a mesma iria ser lançada verticalmente de baixo para cima.

No que diz respeito à disciplina de matemática foi referido que a associada à trajetória da bola está uma função e o respetivo gráfico. Os alunos foram unanimes ao dizer que a função associada à trajetoria no caso do lançamento vertical da bola seria a de uma função quadrática e que o respetivo gráfico seria o de uma parábola.

Os alunos recordaram que a expressão que descreve a trajetória da bola em função do tempo é $y(t) = y_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$,em que y_oé a posição no instante inicial, v_oo valor da velocidade no instante inicial e a o valor da aceleração.

A atividade iniciou com o lançamento da bola na vertical e os alunos observaram o movimento da bola que foi projetado no quadro, através do retroprojetor.

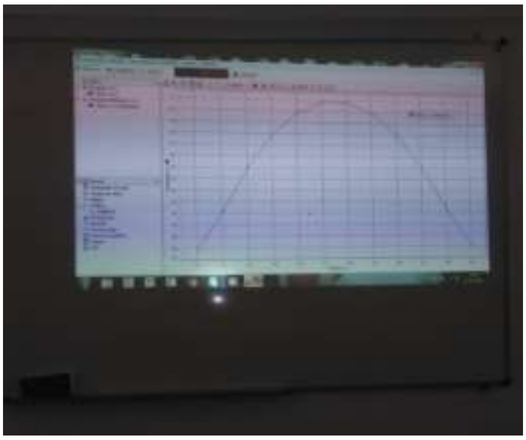


Figura 13 – Projeção do gráfico da trajetória da bola

Através do programa *Data Studio* os alunos conseguiram retirar os dados referentes à posição da bola em cada instante. De acordo com o gráfico da parábola traçado foram extraídos os dados para excel de onde os alunos copiaram os valores da posição e do tempo para as listas da sua calculadora gráfica.

Figura 14 – Introdução dos dados na calculadora

Os valores que os alunos introduziram nas listas da calculadora foram os seguintes:

x	y
1,2	0,764
1,3	1,214
1,4	1,576
1,5	1,85
1,6	2,036
1,7	2,134
1,8	2,144
1,9	2,066
2	1,9
2,1	1,646
2,2	1,304
2,3	0,874

Quadro 3 – Valores introduzidos na calculadora

Para responder à primeira questão da atividade os alunos introduziram as listas na calculadora foi-lhes indicado que fizessem a regressão quadrática dos pontos inseridos de forma a obter a expressão analítica da equação do movimento e obtiveram a seguinte equação:

$$f(x) = -4{,}4x^2 + 15{,}5x - 11{,}5$$

Na questão 2 os alunos inseriram a expressão analítica anterior na calculadora e obtiveram um gráfico semelhante ao inicialmente projetado atravaes do programa *Data Studio.*

Relativamente à questão 3 os alunos determinaram a taxa média de variação como se pode verificar na imagem da Figura 15, que apresenta o que foi escrito no quadro.

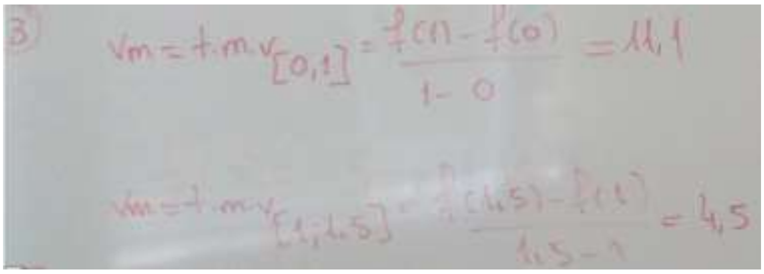


Figura 15 – Cálculo da velocidade média

Obtiveram no intervalo [0,1] a taxa média de variação de 11,1 e verificaram que a velocidade média coincide com a taxa média de variação nesse intervalo Para o intervalo [1; 1,5] obtiveram a taxa de variação 4,5. Compararam estes dois resultados e constataram que a velocidade na bola é menor no intervalo [1; 1,5] do que no intervalo [0,1]. Foi fácil para os alunos justificar este facto, pois através da análise gráfica verificaram que quando o gráfico da função atinge o máximo a velocidade anula-se nesse instante. Assim à medida que os intervalos de tempo se aproximam desse valor a velocidade média vai reduzindo.

Como os alunos estavam a utilizar pela primeira vez a calculadora nos conceitos de cálculo diferencial foi-lhes explicado todos os comandos que deveriam utilizar para a calcular a derivada num ponto.

Utilizando as regras de derivação e respondendo à questão 5 os alunos apresentaram a expressão para velocidade em cada instante que coincide com a função derivada, e obtiveram a seguinte expressão,

$$f'(x) = -8{,}8x^2 + 15{,}5$$

Uma vez que os alunos nas aulas de matemática ainda se encontravam a lecionar a monotonia e os extremos de uma função foi-lhes dada alguma ajuda no preenchimento do quadro da questão 6.

Foi relembrado que em cada ponto do gráfico pode ser traçada uma reta tangente a esse ponto e que o declive da mesma coincide com a derivada nesse ponto.

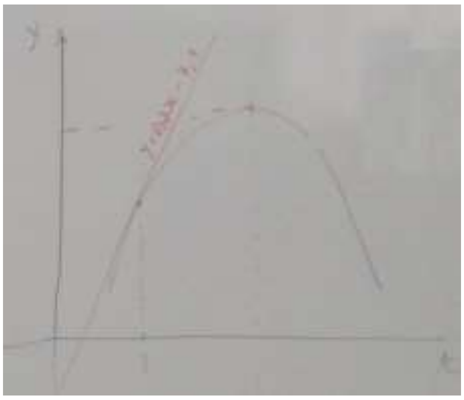


Figura 16 – Reta tangente num determinado ponto do gráfico

Os alunos perceberam que até ao ponto onde a parábola admite um máximo todas as retas tangentes a esta curva que se possam traçar têm declive positivo e depois do máximo da parábola todas as retas tangentes têm o declive negativo.

Assim foi-lhes proposto representarem na calculadora a função derivada e efetuarem o estudo do sinal da mesma para poderem relacionar o sinal da função derivada com a monotonia da função inicial.

O esboço do gráfico da função derivada foi feito no quadro, como correçao, assim como o quadro do sinal da derivada, que se apresentam nas figuras seguintes

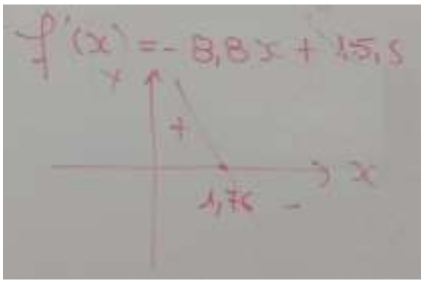


Figura 17 – Gráfico da função derivada representado no quadro

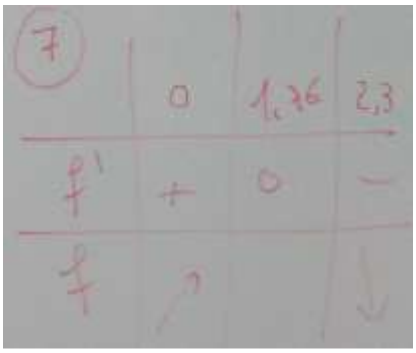


Figura 18 – Tabela de variação do sinal da função derivada

3.5. Avaliação das atividades dos alunos

De forma a avaliar as atividades realizadas em cada uma das turmas foi aplicado inquérito a cada um dos alunos com o objetivo de estes exprimirem a sua opinião da atividade em si, das relações associadas à mesma e da opinião dos alunos face à existência de aulas de caracter experimental.

3.5.1. Atividade do 9.º ano

A primeira questão do questionário prendia-se a opinião dos alunos sobre aquilo que acharam mais interessante na atividade.

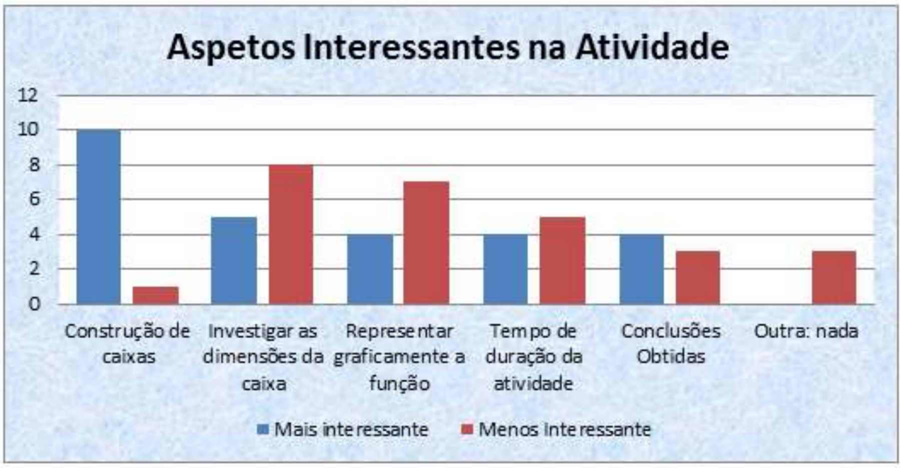


Figura 19 – Interesse dos alunos do 9.º ano na atividade realizada

De acordo com o gráfico da figura 19 verifica-se que os alunos gostaram de construir caixas em cartolina sendo esse o aspeto que os alunos mais valorizam.
Os alunos não acharam muito interessante investigar as possíveis dimensões da caixa nem representar graficamente a função que dá os volumes da caixa, tendo em conta a medida de cada quadrado que se tira em canto da cartolina.

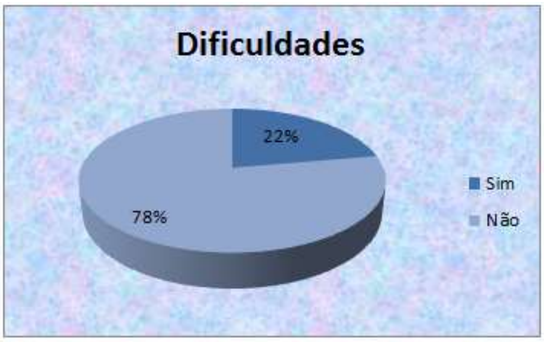


Figura 20 – Dificuldades do 9.º ano

No que toca às dificuldades sentidas, apenas 22% dos alunos assumiram que sentiram dificuldades na execução da tarefa (figura 20).

Os alunos que responderam que sentiram algumas dificuldades na resolução da atividade indicaram quais foram as que sentiram, como se verifica na figura 21.

Figura 21 – Dificuldades apresentadas

Dos alunos que sentiram dificuldades referiram que não conseguiram interpretar as perguntas nem representar graficamente a função pois não dominavam os conceitos ainda.

Figura 22 – Opinião dos alunos

Em relação à atividade os alunos, de uma forma geral consideraram que atividade estava bem orientada com questões que já tinham sido abordadas na aula e de fácil compreensão (Figura 22), sendo assim mais fácil a sua interpretação.

Figura 23 – Atividades experimentais

De acordo com a Figura 23, os alunos apontaram como aspetos positivos que com a realização de tarefas experimentais compreendem melhor a aplicação dos conceitos na realidade e conseguem adquirir novos conhecimentos matemáticos da matéria que vai sendo exposta na aula.

Em particular com esta atividade os alunos referiram que foi muito positiva a sua realização, na medida em que puderam perceber a relação entre as funções e a construção de uma simples caixa, com medidas específicas e a partir daí encontrar o volume máximo da mesma.

No entanto os alunos acharam que deveriam ter tido mais tempo para a realização da atividade, sendo este o único ponto negativo que alguns dos alunos apontaram.

No último ponto do questionário era pedido aos alunos que indicassem sugestões de atividades futuras para as aulas de matemática, e estes referiram que gostavam de ter aulas de carater mais prático que relacionassem conceitos matemáticos com aspetos da vida real, para dessa forma ver a aplicabilidade dos conteúdos no dia-a-dia. Sugeriram ainda a existência de palestras sobre como a matemática influencia o quotidiano.

3.5.2. Atividade do 11.º ano

A primeira questão do questionário prendia-se a opinião dos alunos sobre aquilo que acharam mais e menos interessante na atividade. Os resultados encontram-se no gráfico da figura 24.

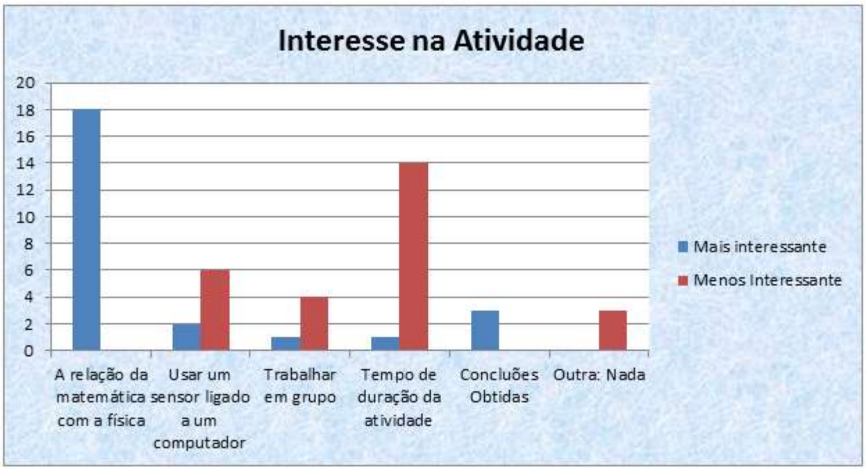


Figura 24 – Interesse dos alunos do 11.º ano na atividade realizada

De uma forma geral os alunos acharam muito interessante ver como a matemática a e física são áreas que estão tão relacionadas no dia-a-dia, como num lançamento de uma bola ao ar. Como aspeto menos positivo os alunos apontaram o tempo de realização da atividade que consideraram ter sido pouco utilizar a calculadora e para chegar às conclusões pretendidas.

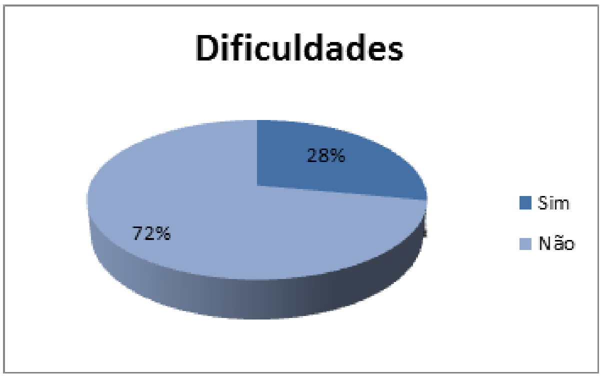


Figura 25 – Dificuldades do 11.º ano

Figura 26 – Dificuldades sentidas na atividade do 11.º ano

Em relação às dificuldades verifica-se pela análise dos gráficos das Figuras 25 e 26 que apenas 28% dos alunos assumiram ter sentido alguma dificuldade. Dessa minoria que teve dificuldades referiram que não conseguiram representar graficamente a função. Importa referir que que alguns destes alunos não possuíam calculadora motivo pelo qual não conseguiram realizar esse procedimento.

Figura 27 – Opinião dos alunos

No que diz respeito à opinião da atividade (Figura 27) os alunos maioritariamente consideraram que a a atividade estava bem orientada e que os conceitos já tinham sido abordados na aula.

Figura 28 – Atividades experimentais

De acordo com o gráfico da Figura 28, os alunos indicaram como positivo que esta atividade os tenha ajudado a compreender melhor a relação entre a matemática e a física, e que a matemática era fulcral para a compreensão da física. Mencionaram ainda que a atividade se encontrou bem orientada e dinamizada pelo que foi fácil compreender os seus objetivos e executa-la.

Na data da realização da atividade os alunos ainda não tinham dado todos conceitos de derivabilidade referentes ao programa do 11.º ano, de tal forma que ainda não tinham recorrido à calculadora para visualizar o gráfico de funções derivadas. Com esta atividade foi possível não só verem o gráfico da função derivada como também determinarem a derivada de uma função num ponto. Desta forma os alunos apontaram como aspeto positivo o facto de se poder recorrer à calculadora para o cálculo de derivadas.

No entanto os alunos acharam que deveriam ter tido mais tempo para a realização da atividade, sendo este o único ponto negativo que alguns dos alunos apontaram.

Como sugestões para atividades futuras os alunos indicaram que as aulas de matemática deveriam ter mais atividades lúdicas, dinâmicas que fossem realizadas em grupo. Propuseram ainda a realização de mais atividades neste âmbito que relacionassem a matemática não só com a física mas com as diversas disciplinas e com a vida quotidiana.

CAPÍTULO 4

Considerações Finais

O programa de matemática nos diferentes anos de ensino é cada vez mais exigente e mais extenso, havendo poucas oportunidades para planificar aulas de caráter experimental. No entanto, nos conteúdos matemáticos que forem possíveis, deve recorrer-se a aulas deste teor, pois os alunos conseguem compreender melhor os conceitos teóricos e adquirir mais facilmente as competências exigidas.

Hoje em dia é difícil arranjar estratégias que motivem mais os alunos para os conteúdos programáticos da disciplina. Muitos alunos apresentam dificuldades e outros assumem que nunca terão aptidão para a matemática pois também os seus familiares já não a tinham. Esta é uma justificação que atualmente os alunos utilizam para desculpabilizar o seu fracasso. Cabe aos professores desmistificar a matemática, não permitindo que se criem este tipo de estereótipos. É necessário por isso que os docentes inovem e reinventem estratégias que combatam o desinteresse e a desmotivação que se verifica muitas vezes nas escolas.

As aulas de matemática não podem apenas ser expositivas e de resolução de exercícios. Os alunos precisam de outro tipo de atividades para complementar os aspetos teóricos e a resolução de exercícios. É necessário mostrar em cada matéria qual a sua aplicação em contexto real.

Ao longo deste trabalho procurou-se mostrar a importância de alguns conceitos de funções do ensino secundário, nomeadamente, limites, continuidade e derivabilidade.. Foi utilizada literatura referente a estes conceitos, bem como, manuais que estão em vigor atualmente no ensino secundário, como forma de apresentar exemplos aos conceitos abordados. Apresentaram-se ainda duas aplicações práticas de alguns conceitos de funções em atividades de investigação.

A realização de atividades de investigação permitiu concluir o que já era expectável, nomeadamente que os alunos sentem que aprendem melhor os conceitos matemáticos se virem a aplicabilidade dos mesmos. Os discentes consideram que a realização de aulas dinâmicas com atividades de experimentação lhes proporciona maior interesse e motivação na disciplina.

Outro aspeto que se apresenta como conclusão é o facto da importância da relação da matemática com outras áreas. Muitas vezes os alunos estudam por si só matemática, física, química biologia, português, história ou geografia sem pensar que estas áreas possam estar relacionadas entre si.

Os alunos são incapazes de fazer a associação dos aspetos comuns das diversas áreas sem a ajuda do professor. Cabe assim aos docentes das diferentes áreas juntarem-se e realizarem atividades práticas que envolvam conceitos dos diferentes âmbitos, para ajudar o aluno a compreender melhor a realidade.

No caso deste trabalho relacionou-se, numa das atividades, a matemática com a física que são áreas com muitos aspetos em comum e que necessitam uma da outra para serem bem compreendidas. Contudo este tipo de atividades podem ser feitas para relacionar outras áreas e, dessa forma, os alunos perceberem quais os conceitos comuns às áreas em questão. Este tipo de tarefas é benéfico para o aluno uma vez que através da sua realização conseguem relacionar os temas aprendidos em diversas disciplinas num contexto específico.

No questionário que foi realizado, os alunos de uma forma geral manifestaram um parecer muito favorável no que diz respeito a existência de aulas experimentais, considerando que deveriam ocorrer, com maior frequência, aulas práticas que relacionem as diferentes disciplinas. Os discentes consideram que se assim fosse a sua aprendizagem tornar-se-ia mais completa.

Bibliografia

[1] Andrade, C.; Pereira, P.; Pimenta, P.; 2016; *Novo Ípsilon 11*, vol. 3, Raiz Editora

[2] Andrade, C.; Pereira, P.; Pimenta, P.; 2017; *Novo Ípsilon 12*, vol. 3, Raiz Editora

[3] Botas,D.;Moreira, D.; 2013; A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática - Um estudo no 1.º Ciclo; pp 253-286; Revista Portuguesa de Educação

[4] Corradini, S.; Mizukami, M.; 2013; Práticas Pedagógicas e uso da Informática; pp 85-92; Número 2, Volume 3; Revista Exitus

[5] Costa, B.; Rodrigues, E.; 2017; *Novo Espaço 12*, Parte 1, Porto Editora

[6] Fiolhais, C.; 2002; A Relação da Física com a Matemática a propósito do Ano Mundial da Matemática, Ciências das Artes Letras

[7] Lima, E. L., *Curso de Análise,* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, vol.1,1992.

[8] Neves. M.A.; Guerreiro, L.; Silva, A.P.; 2012; *Máximo Matemática A, 11º ano*, Parte 1, Porto Editora

[9] Neves. M.A.; Guerreiro, L.; Silva, A.P.; 2016; *Máximo Matemática A, 11º ano*, Parte 1, Porto Editora

[10] Neves. M.A.; Guerreiro, L.; Silva, A.P.; 2017 *Máximo Matemática A, Funções, 12º ano*, Porto Editora

[11] Pietrocola, M.; 2012; A Matemática como Estrutuante do Conhecimento Físico, Departamento de Física UFSC, Florianópolis

[12] Ponte, J.; 1990; O conceito de função no currículo de Matemática; Educação e Matemática n.º 15

[13] Saraiva, M.; Teixeira, A.;Andrade J.; 2010; Tarefas para o 10.º e o 11.º Anos do Ensino Secundário Materiais de Apoio ao Professor; Instituição de Educação - Universidade de Lisboa

[14] Stewart, J., *Cálculo,* McMaster University, Thomson, 2001.

[15] Teixeira, P.; Precatado, A.; Albuquerque, C.; Antunes, C.; Nápoles, S.;1997; *Funções 12º ano ,* Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário

[16] Teixeira, P.; Precatado, A.; Albuquerque, C.; Antunes, C.; Nápoles, S.; *Funções 11º ano ,* Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário

[17] CEF: 2018; Centro de Estudos de Fátima em <http:// http://www.cef.pt> no dia 12 de junho de 2018

Anexos

Apêndice A

Atividade de Investigação do 9.º ano

Ficha de Trabalho

9º Ano – Matemática

Maio de 2018

Nome:____ Nº. _____ Turma:____

Construção de Caixas

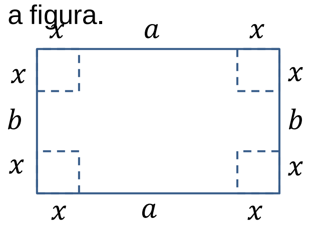
Para construir caixas usando uma cartolina retangular é necessário tem alguma noção das medidas da caixa que se pretende fazer. Como varia o volume da caixa com as medidas da base e da altura?
Existe um modelo matemático para determinar o volume máximo de uma caixa partindo de uma certa folha retangular com medidas fixas?

OBJECTIVOS

Nesta atividade construir-se-ão caixas cuja base é uma folha de cartolina que depois de recortada de certa forma se analisará qual o volume máximo que se pode obter.

Descrição da atividade

1. Partindo de uma cartolina retangular em formato A4 recorte em cada canto um quadrado com x cm de medida e construa uma caixa com a cm de comprimento, b cm de largura e x cm de altura, como sugere a figura.



2. Investigue as possíveis dimensões para a e b para que a caixa possa ser feita.

   Sugestão:
   - Considerando o comprimento da cartolina, escreva a dimensão de a em função de x.
   - Considerando a largura da cartolina, escreva a dimensão de a em função de x.

3. Determine uma expressão analítica para a área da base da caixa.

4. Determine uma expressão analítica para o volume da caixa.

5. Represente graficamente a função que dá os vários volumes em função de x, com domínio [0,10].

6. Investigue, graficamente, que dimensões deve ter a caixa para que o volume da base seja máximo?

Apêndice B

Atividade de Investigação do 11.º ano

Ficha de Trabalho

11º Ano – Matemática A

Maio de 2018

Nome:____ Nº. _____ Turma:

Classificação: ______________ Professora: *Lídia Espírito Santo*

Lançamento de uma Bola na vertical

Quando um malabarista lança uma bola ao ar, verticalmente para cima, a bola vai abrandando até alcançar a altura máxima. Depois, acelera no seu movimento descendente.

Existe um modelo matemático para as mudanças na velocidade da bola?

Qual será o modelo para o gráfico da posição vs. tempo?

Nesta experiência, será usado um sensor de movimento para recolher dados da posição, do valor da velocidade e o tempo, para uma bola atirada verticalmente para cima. A análise dos gráficos deste movimento responderá às questões colocadas acima.

OBJECTIVOS

• Recolher dados da posição, do valor da velocidade para uma bola que se move verticalmente para cima e para baixo.

• Analisar os gráficos posição vs. tempo e valor velocidade vs. tempo.

• Determinar as equações que se ajustam aos gráficos posição vs. tempo e valor da velocidade vs. tempo.

PROCEDIMENTO

1. Coloque o sensor de movimento no chão.
2. Ligue o sensor de movimento na entrada USB do computador e inicie o programa *Data Studio*.

3. Nesta etapa vai lançar a bola verticalmente para cima, por cima do sensor de movimento, por cima do sensor de movimento, e deixa-la cair em direção ao sensor de movimento. Esta etapa pode requerer alguma prática. Segure a bola exatamente por cima e use as duas mãos. Assegure-se que tira as mãos da bola logo que esta entra em movimento de modo a que não sejam detetadas pelo sensor. Pressione Iniciar para começar a recolha de dados e lance a bola verticalmente para cima. Assegure-se que tira as mãos depois que a lança. Um lançamento de 0,5 metros a 1 metro acima do sensor de movimento é suficiente. Depois de lançar a bola volte a segurar à mesma altura do que a lançou e no programa pressione Parar.

4. Examine o gráfico *posição* vs *tempo*. Repita a etapa 3 se este gráfico não mostrar uma zona de mudança gradual na posição. Em termos matemáticos, o gráfico deve ter a forma de uma parábola.

5. Assim que obtiver uma parábola deve exportar os dados do gráfico *posição* vs *tempo.*

6. Os dados recolhidos devem ser introduzidos nas listas da calculadora gráfica Ti-Nspire (Ou Ti-84) da seguinte forma, na coluna A introduzem-se os dados referentes à posição e na coluna B os dados referentes ao tempo. No cabeçalho da coluna A escreva p e no cabeçalho da coluna B escreva t

7. De seguida clicar em menu e escolher estatísticas e regressão quadrática. Irá aparecer uma janela onde na Lista X deve selecionar p e na Lista Y deve selecionar t e clicar em enter. Posteriormente carregar em Guardar ReqEqn e observar a função que aparece. Deslocar o cursor para baixo e visualizar a primeira coluna de resultados e clicar em ok. Clicar em ctrl page, escolher Adicionar gráficos e deslocar o cursor para cima até aparecer a função onde foi guardada a equação da regressão. Por fim carregar em enter e aparece o gráfico da equação da regressão.

INTERPRETAÇÃO TEÓRICA

Na **física**, uma partícula em movimento relativamente a um dado referencial descreve uma trajetória. A trajetória de uma partícula é a linha definida pelas sucessivas posições ocupadas pela partícula no seu movimento.

O **deslocamento** $\Delta\vec{r}$ é uma grandeza vetorial que indica a variação da posição de uma partícula no seu movimento num dado intervalo de tempo. A partir do deslocamento e do intervalo de tempo considerado consegue-se determinar a **velocidade média** $\vec{v}_m$ que é o quociente entre o deslocamento e o intervalo de tempo considerado.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Em termos matemáticos as noções de velocidade média e velocidade instantânea estão associadas ao cálculo da taxa média de variação e de derivada de uma função. Diz-se que um ponto está em movimento em relação a outro quando a sua posição, medida em relação à posição do outro, varia com o tempo.

Taxa média de variação

Dados uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a taxa média de variação de f entre a e b é a razão

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Baseando-se nos conteúdos de derivabilidade que aprendeu em matemática responda aos itens seguintes, A partir do gráfico traçado através da regressão quadrática.

ANÁLISE DA ATIVIDADE

1. Considere-se a função polinomial associada à equação de movimento $y(t) = y_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$ em que y_oé a posição no instante inicial, v_oo valor da velocidade no instante inicial e a o valor da aceleração. A equação do movimento é uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determine a expressão analítica da equação do movimento da bola (Procedimento 7).

2. Faça um esboço do gráfico da função.

3. Determine a velocidade média da bola nos intervalos de tempo [0,1] e [1; 1,5] e interprete o seu significado no contexto desta atividade.

4. Seja t a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1. Determine na forma reduzida a equação da reta t.

5. Determine a expressão da velocidade em cada instante.

6. A tabela seguinte relaciona o sinal da função $f'(x)$ com a monotonia da função $f(x)$. Preencha-a e retire conclusões quanto à monotonia e extremos da função.

	$-\infty$		$+\infty$
f'			
f			

7. Averigúe o que acontece à velocidade da bola no instante em que esta atinge a distância máxima do solo.

Apêndice C

Questionário referente à atividade de Investigação do 9.º ano

Questionário

Maio de 2018

Nome:____ Nº. _____ Turma:__

Avaliação da Atividade Prática

Este questionário tem como objetivo avaliar a atividade prática que acabaste de fazer, de forma a perceber quais foram os pontos fortes e os pontos fracos, o que achaste que correu bem e o que achaste que correu menos bem.

1. Dados Pessoais

1.1. Idade: ____

1.2. Sexo: Masculino: _____ Feminino: _____

1.3. Ano de escolaridade: ______

Responde a cada uma das questões seguintes com atenção e tenta ser o mais sincero possível. Coloca um (**x**) na opção que considera, na tua opinião, mais adequada.

2. Avaliação da Atividade

2.1. Em relação à atividade realizada indica o que achaste mais interessante.

A construção de caixas em cartolina	
Investigar as possíveis dimensões da caixa	
Representar graficamente a função do volume a caixa	
O tempo de duração da atividade	
As conclusões obtidas (descobrir o volume máximo que a caixa pode ter)	
Outro:__________________	

2.2. Indica o que achaste menos interessante.

A construção de caixas em cartolina	
Investigar as possíveis dimensões da caixa	
Representar graficamente a função do volume a caixa	
O tempo de duração da atividade	
As conclusões obtidas (descobrir o volume máximo que a caixa pode ter).	
Outro:__________________	

2.3. Sentiste dificuldade na resolução dos exercícios?

Sim		Não	

2.3.1. Se respondeste **sim**, indica qual das opções seguintes se adequa melhor às dificuldades que sentiste.

Não domino ainda os conceitos matemáticos	
Não consegui representar graficamente a função	
Não consegui interpretar as perguntas no geral.	
Outra: ____________________________	

2.3.2. Se respondeste **não** indica qual das opções se adequa melhor ao que sentiste.

As questões eram fáceis de compreender.	
Os conceitos abordados já tinham sido lecionados nas aulas.	
A atividade estava bem orientada.	
Outra: ____________________________	

2.4. O que achas da existência de atividades experimentais nas aulas de matemática?

Deviam acontecer frequentemente	
Ajudam a compreender melhor os conceitos.	
Não acrescentam muito às aulas de matemática.	
Não são necessárias à disciplina de matemática.	

2.5. Faz um pequeno comentário sobre esta atividade realizada indicando os aspetos que consideraste positivos e os aspetos que consideraste negativos.

____

____

2.6. Que tipo de atividades sugeres para aulas matemática futuras?

____

____

Obrigada pela tua colaboração.

Prof. *Lídia Espírito Santo*

Apêndice D

Questionário referente à atividade de Investigação do 11.º ano

Questionário

Maio de 2018

Nome:____ Nº. _____ Turma:__

Avaliação da Atividade Prática

Este questionário tem como objetivo avaliar a atividade prática que acabou de fazer, de forma a perceber quais foram os pontos fortes e os pontos fracos, o que achou que correu bem e o que achou que correu menos bem.

1. Dados Pessoais

1.1. Idade: ____

1.2. Sexo: Masculino: _____ Feminino: _____

1.3. Ano de escolaridade: ______

Responda a cada uma das questões seguintes com atenção e tente ser o mais sincero possível. Coloque um (**x**) na opção que considere, na tua opinião, mais adequada

2. Avaliação da Atividade

2.1. Em relação à atividade realizada indique o que achou mais interessante.

A relação da matemática com a física	
Usar um sensor juntamente com o computador	
Trabalhar em grupo	
O tempo de duração da atividade	
As conclusões obtidas	
Outro:_________________	

2.2. Indique o que achou menos interessante.

O tempo de duração da atividade	
Trabalhar em grupo	
Usar um sensor juntamente com o computador	
As conclusões obtidas	
Outro:___________________	

2.3. Sentiu dificuldade na resolução dos exercícios?

Sim			Não	

2.3.1. Se respondeu **sim**, indique qual das opções seguintes se adequa melhor às dificuldades que sentiu.

Não domino ainda os conceitos matemáticos	
Não consigo utilizar a calculadora gráfica	
Não consegui interpretar as perguntas	
Outra: ____________________________	

2.3.2 Se respondeu **não** indique qual das opções se adequa melhor ao que sentiu.

As questões eram fáceis de compreender	
Os conceitos abordados já tinham sido lecionados nas aulas	
A atividade estava bem orientada	
Outra: ____________________________	

2.4. O que acha da existência de atividades experimentais nas aulas de matemática?

Deviam acontecer com mais regularidade	
Ajudam a compreender melhor os conceitos	
Não acrescentam muito às aulas de matemática	
Não são necessárias à disciplina de matemática	

2.5. Faça um pequeno comentário sobre esta atividade realizada indicando os aspetos que considerou positivos e os aspetos que considerou negativos.

____

____

2.6. Que tipo de atividades sugere para aulas matemática futuras?

____

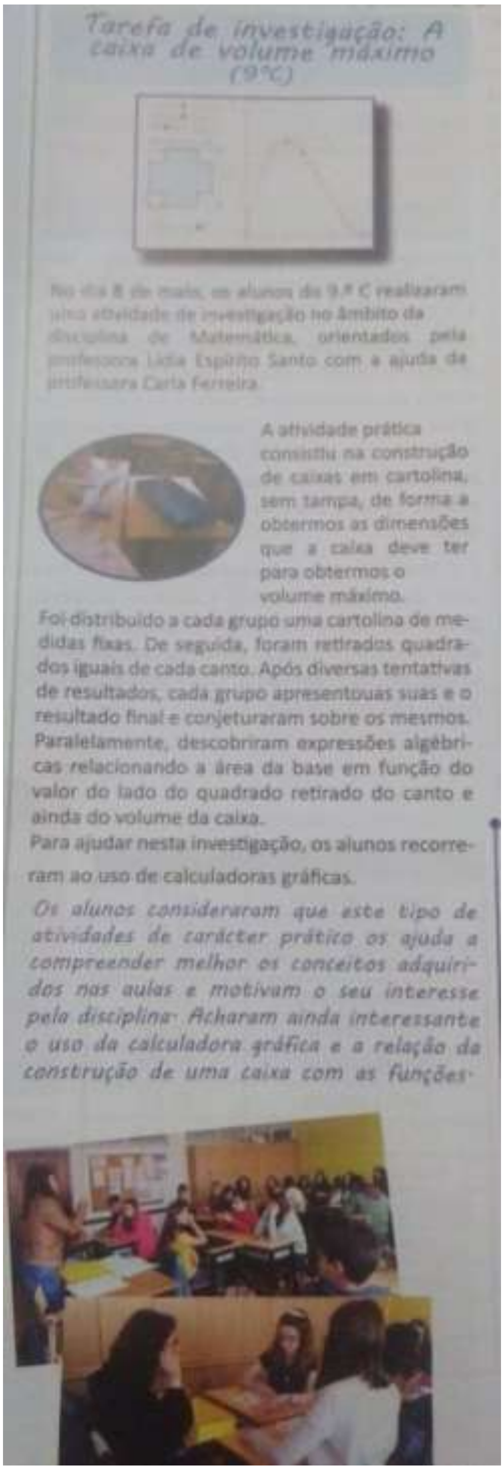
____

Obrigada pela sua colaboração.

Prof. *Lídia Espírito Santo*

Apêndice E

Divulgação das atividades de investigação no InforCef (Jornal da Escola)



Tarefa de investigação: A caixa de volume máximo (9ºC)

No dia 8 de maio, os alunos do 9.º C realizaram uma atividade de investigação no âmbito da disciplina de Matemática, orientados pela professora Lídia Espírito Santo com a ajuda da professora Carla Ferreira.

A atividade prática consistiu na construção de caixas em cartolina, sem tampa, de forma a obtermos as dimensões que a caixa deve ter para obtermos o volume máximo.

Foi distribuído a cada grupo uma cartolina de medidas fixas. De seguida, foram retirados quadrados iguais de cada canto. Após diversas tentativas de resultados, cada grupo apresentouas suas e o resultado final e conjeturaram sobre os mesmos. Paralelamente, descobriram expressões algébricas relacionando a área da base em função do valor do lado do quadrado retirado do canto e ainda do volume da caixa.

Para ajudar nesta investigação, os alunos recorreram ao uso de calculadoras gráficas.

Os alunos consideraram que este tipo de atividades de carácter prático os ajuda a compreender melhor os conceitos adquiridos nas aulas e motivam o seu interesse pela disciplina. Acharam ainda interessante o uso da calculadora gráfica e a relação da construção de uma caixa com as funções.

Figura 29 – Publicação no InforCEF da atividade realizada no 9.º ano

Tarefa de investigação:
A Matemática e a física
(11.ºC)

No dia 15 de maio, os alunos do 11.º C realizaram uma atividade de investigação no âmbito da disciplina de Matemática. A atividade prática foi dinamizada pela professora Lídia Espírito Santo e pelo professor Luís André, com a ajuda da professora Mónica Picado. Teve como principal objetivo relacionar as disciplinas de Matemática e de Física, nos conceitos de derivada e de velocidade.

A atividade iniciou-se com o lançamento de uma bola ao ar. Com o auxílio de um sensor, recolheram-se dados que permitem construir o gráfico que descreve o movimento da bola. Com recurso às potencialidades da calculadora gráfica, os alunos determinaram a expressão algébrica associada a esse movimento, calcularam a velocidade média em intervalos de tempo e a velocidade instantânea, e relacionaram os gráficos das funções do movimento bola e da velocidade atingida.

Esta tarefa interdisciplinar entre a Matemática e a Física permitiu aos alunos relacionar e aprofundar conteúdos que estão a ser lecionados nestas duas disciplinas.

Figura 30 – Publicação no InforCEF da atividade realizada no 11.º ano