UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Raquel Margarida Aminta Francisco Martins

Alunos + Professor + Matemática = Ensinar

A equação do Ensino da Matemática

Relatório de Estágio no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, orientado pela Professora Doutora Helena Albuquerque e apresentado ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

julho de 2019

Alunos+Professor+Matemática=Ensinar
A Equação do Ensino da Matemática

Raquel Margarida Aminta Francisco Martins

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education

Relatório de Estágio | Report of Stage

julho 2019 | july 2019

Agradecimentos

O Estágio Pedagógico é um percurso, da vida académica de uma futura professora, que proporciona imensos conhecimentos. Deste modo, quero agradecer a todos os que me acompanharam e se envolveram ao longo deste percurso:

- À Professora Doutora Helena Albuquerque, Orientadora Científica, pela sua compreensão, apoio, incentivo, disponibilidade e ainda, pelas aprendizagens transmitidas e oportunidades ao longo de todo o mestrado. Obrigada, também, pela força e confiança que me transmitiu ao longo destes anos;

- À Professora Margarida Cid, Orientadora Cooperante, pelas sugestões pertinentes, por toda a disponibilidade, atenção, simpatia, amizade e partilha de saberes. Muito obrigada pelo, enorme, apoio nas minhas atividades e ideias e também, pela partilha da sua experiência como professora;

- À Professora Margarida Alves, Coordenadora do Departamento de Matemática e Informática do Agrupamento de Escolas Coimbra Centro, e aos restantes docentes do grupo pela simpatia e apoio;

- À direção do Agrupamento de Escolas Coimbra Centro, principalmente à Senhora Diretora Conceição Gomes, por ter permitido a realização deste estágio e por todo o apoio prestado no decurso do mesmo;

- A toda a comunidade docente e não docente da Escola Secundária de Jaime Cortesão pelo acolhimento e simpatia;

- A todos os alunos com que tive a oportunidade de trabalhar, pela simpatia, carinho, disponibilidade, comportamento que demonstraram nos momentos de trabalho e por todos os desafios que me colocaram;

- Aos meus pais e irmã pela oportunidade e por todo o apoio, sempre incondicional, que me prestaram desde sempre;

- Aos meus amigos, pela sua amizade, pelo apoio que me ofereceram em todos os momentos, por acreditarem e me ajudarem a concretizar o meu sonho;

- Por fim, a toda a minha família, pela compreensão, apoio e incentivo.

Resumo

O presente Relatório de Estágio elaborado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, tem por objetivo descrever as atividades desenvolvidas no decurso do Estágio Pedagógico que decorreu na Escola Secundária de Jaime Cortesão, em Coimbra, durante o ano letivo 2018/2019, sob orientação da Professora Doutora Helena Albuquerque, Orientadora Científica, e da Professora Margarida Cid, Orientadora Cooperante.

No decorrer do Estágio Pedagógico a professora estagiária desenvolveu a sua prática de ensino supervisionada na turma de 10.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A e participou no trabalho desenvolvido pela Orientadora Cooperante nas turmas de 10.º e 11.º ano do Curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

Este Relatório pretende relatar/refletir as experiências vividas e o trabalho desenvolvido ao longo deste ano de estágio. O documento encontra-se organizado em capítulos, ao longo dos quais será feita uma descrição da prática pedagógica supervisionada, da participação nas estruturas de orientação pedagógica e educativa e das atividades extracurriculares desenvolvidas. A prática pedagógica compreende a observação, planificação e lecionação de aulas, a elaboração, realização e correção de testes de avaliação. O acompanhamento de uma Direção de Turma e a participação nas reuniões, de Departamento de Matemática e Informática, de Conselhos de Turma e de seminários pedagógicos, insere-se nas estruturas de orientação pedagógica e educativa. Por fim, as atividades extracurriculares abrangem as atividades dinamizadas e organizadas pelo Núcleo de Estágio de Matemática e pela escola.

Palavras-chaves: Estágio Pedagógico; Ensino da Matemática; Aprendizagens; Matemática; Professor; Aluno.

Abstract

The present Internship Report elaborated in the scope of Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic Education and Secondary, of the Faculty of Sciences and Technology of the University of Coimbra, has the purpose to describe the activities performed during the internship which took place at the Jaime Cortesão High School, in Coimbra, during the academic year 2018/2019, under the scientific supervision of Helena Albuquerque PhD, and co-supervision of Margarida Cid.

During the pedagogic internship, the intern teacher has developed her supervised teaching practice with the 10th year of the Scientific-Humanistic the Science and Technology course, class of Maths A and participated in the work developed by the co-supervisor with the 10th and 11th years of the course Scientific-Humanistic the Languages and Humanities, subject of Mathematics Applied to Social Sciences.

The aim of this report is to describe the experience acquired and reflect about the work developed throughout this year of internship. The document is organized in chapters, in which a description of the supervised pedagogical practice, participation in pedagogical and educational guidance strutures and the extracurricular activities is made. The pedagogical practice is comprised by the observation, planning and teaching of classes, elaboration, realization and assessment of evaluation tests. The follow-up in the Class Direction and participation in the meetings of the Department of Mathematics and Informatics, class council and pedagogic seminars meetings is inserted in the pedagogical and educational guidance strutures. Finally, the extracurricular activities cover the activities organized and stimulated by the mathematics internship nucleus and by the school.

Keywords: Pedagogical Internship; Mathematics Teaching; Learning; Mathematics; Teacher; Student.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas

AECC - Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
APM - Associação de Professores de Matemática
APPACDM - Associação Portuguesa de Pais e Amigos do Cidadão com Deficiência Mental
DL - Decreto Lei
DMUC - Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
ESJC - Escola Secundária de Jaime Cortesão
ISEP - Instituto Superior de Engenharia do Porto
KA - Khan Academy
MACS - Matemática Aplicada às Ciências Sociais
NEM - Núcleo de Estágio de Matemática
OPM - Olimpíadas Portuguesas de Matemática
PAAA - Plano Anual de Atividades do Agrupamento
PALOP - Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa
PLNM - Português de Língua não Materna
RVCC - Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências
SMTUC - Serviços Municipalizados de Transportes Urbanos de Coimbra
SPM - Sociedade Portuguesa de Matemática
SPO - Serviço de Psicologia e Orientação
UAARE - Unidade de Apoio ao Alto Rendimento na Escola

Introdução

O Estágio Pedagógico é um percurso cheio de aprendizagens e de partilha de saberes, onde os professores estagiários têm um primeiro contacto com o ensino.

No âmbito da unidade curricular *Estágio e Relatório* inserida no plano de estudos do segundo ano do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra é elaborado um relatório que tem como função descrever as atividades desenvolvidas no decurso do Estágio Pedagógico e apresentar uma reflexão crítica do mesmo. No caso da autora deste relatório, este decorreu na Escola Secundária de Jaime Cortesão durante o ano letivo 2018/2019.

O NEM foi constituído pela Orientadora Científica, Professora Doutora Helena Albuquerque, pela Orientadora Cooperante, Professora Margarida Cid, e pela estagiária, Raquel Martins.

A intervenção na prática pedagógica decorreu na turma 1 do 10.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A.

Com vista a atingir os objetivos propostos, o documento está dividido em cinco capítulos que pretendem descrever as principais etapas do Estágio Pedagógico.

No primeiro capítulo, Enquadramento dos Intervenientes do Estágio Pedagógico, é caraterizada a escola, o NEM e as respetivas turmas de estágio, 10.º 1, 10.º 2 e 11.º 2.

De seguida é apresentada a Prática Pedagógica Supervisionada, onde são descritas as aulas lecionadas, as estratégias implementadas e os materiais didáticos elaborados. É ainda efetuada uma abordagem referente ao processo de avaliação dos alunos.

No terceiro capítulo, Participação nas Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa, é feita uma descrição das reuniões em que a professora estagiária esteve presente e uma breve referência ao trabalho realizado na Direção de Turma, da turma 1 do 10.º ano.

No penúltimo capítulo intitulado Atividades Desenvolvidas, é apresentada uma descrição das atividades de enriquecimento curricular dinamizadas pelo NEM bem como das atividades promovidas pelo Departamento de Matemática e Informática em que houve a colaboração da professora estagiária e, por fim, das formações em que a estagiária participou ao longo do ano letivo.

No último capítulo elaborou-se uma reflexão sobre o desempenho da professora estagiária ao longo do ano de estágio.

Por fim, apresenta-se a bibliografia utilizada e os anexos considerados mais relevantes.

Capítulo 1

Enquadramento dos Intervenientes do Estágio Pedagógico

Neste capítulo são apresentados e caraterizados os intervenientes do Estágio Pedagógico, nomeadamente: a ESJC, o NEM e as turmas atribuídas à Professora Margarida Cid.

1.1 Caraterização da Escola Secundária de Jaime Cortesão

1.1.1 Breve nota Histórica

A ESJC encontra-se instalada num imóvel da primeira metade do século XVII. Este edifício já pertenceu a várias instituições e desempenhou diversificados papéis.

Fig. 1.1 Escola Secundária de Jaime Cortesão

De 1633 a 1833, o edifício pertenceu ao Mosteiro de Santa Cruz. A sua primeira função foi servir de Enfermaria dos Frades. Mais tarde, ainda funcionou como Residência do Abade, Hospedaria, Dormitório do Mosteiro e Biblioteca.

Em 1834 iniciou-se o segundo período da história do edifício. Nesta altura, com a extinção das ordens religiosas em Portugal este imóvel passou para a posse do Estado, onde, em 1848, a Câmara

Municipal de Coimbra instalou crianças abandonadas, ficando, assim, a casa conhecida como a Roda dos Expostos, passando mais tarde a designar-se por Hospício dos Abandonados.

Em fevereiro de 1911, foi extinto o Hospício e criou-se uma Maternidade transferindo-se a sua propriedade para a Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra.

Em 1923, o edifício transformou-se numa escola. Foi a Escola Industrial de Avelar Brotero que se veio instalar neste imóvel.

Mais tarde, em 1972, o imóvel passou a ser ocupado por uma nova escola, a Escola Técnica de Sidónio Pais, que posteriormente, no ano letivo 1977/1978, passou a ser designada por ESJC [10].

1.1.2 Jaime Cortesão

Jaime Zuzarte Cortesão, patrono desta escola, nasceu em Ança, Cantanhede, a vinte e nove de abril de 1884. Durante a sua vida foi médico, político, escritor e historiador.

Fig. 1.2 Jaime Cortesão

Entre 1911 e 1915, lecionou História e Literatura na cidade do Porto, onde foi eleito deputado. Também se dedicou, através da "Renascença Portuguesa" em 1912, à Poesia e a programas de intervenção cívica educativa e cultural.

Durante a primeira guerra mundial participou como voluntário do Corpo Expedicionário Português, no posto de capitão-médico.

Em 1919 foi nomeado diretor da Biblioteca Nacional de Lisboa, cargo que exerceu até 1927. Devido a ter feito parte de um grupo de pessoas que pretendia derrubar a ditadura militar foi demitido e exilou-se em França, de onde saiu devido à invasão daquele país pelo exército alemão, em 1940. Em seguida, foi para o Brasil onde lecionou História dos Descobrimentos Portugueses, numa Universidade do Rio de Janeiro.

Regressou a Portugal em 1957 e em 1958 foi eleito presidente da Sociedade Portuguesa de Escritores.

Faleceu a 14 de agosto de 1960, em Lisboa.

Jaime Cortesão foi uma figura importante na cultura portuguesa do século XX. Ao longo da sua vida mostrou-se um político, homem de intervenção cívica e um grande historiador, que deixou uma grande obra dividida entre a literatura, a poesia e a história [11].

1.1.3 Enquadramento Geográfico e Socioeconómico

A ESJC é a sede do AECC e situa-se na área urbana de Coimbra, em plena baixa. Quase todas as linhas de autocarro SMTUC tem uma paragem junto da ESJC e está, aproximadamente, a $500\,m$ da Estação Ferroviária de Coimbra A.

O AECC foi criado no ano letivo de 2012/2013 resultando da congregação dos antigos Agrupamentos de Escolas de São Silvestre e do Poeta Manuel da Silva Gaio e, ainda, da ESJC.

Neste momento é composto por dez jardins de infância, dezasseis estabelecimentos do 1.º ciclo do Ensino Básico, duas escolas dos 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e uma escola do Ensino Secundário.

«Os alunos são maioritariamente residentes nas freguesias de Cernache, S. João do Campo, S. Silvestre, União das Freguesias de Assafarge e Antanhol, União das Freguesias de Antuzede e Vil de Matos, União das Freguesias de Coimbra, União das Freguesias de S. Martinho de Árvore e Lamarosa e União das Freguesias de Santa Clara e Castelo Viegas.» (Projeto Educativo do AECC 2018/2021, p. 5). Deste modo, a mancha territorial do AECC ocupa uma área total de $121,35\ km^2$ [12].

A ESJC serve uma população escolar maioritariamente do meio urbano ou da periferia, constituindo uma população muito heterogénea.

Por outro lado, pela proximidade com algumas instituições da cidade, principalmente o Colégio de S. Caetano e o Colégio de S. Martinho, alguns alunos da ESJC encontram-se institucionalizados.

Este Agrupamento, proporciona, também, o ensino e a aprendizagem a estudantes estrangeiros, provenientes sobretudo dos PALOP e do Brasil.

1.1.4 Enquadramento Físico e Recursos Educativos

O edifício da ESJC tem sofrido melhorias para conseguir responder às especificidades atuais, sendo atualmente constituído por um edifício principal com quatro anexos e um ginásio. Conta ainda com espaços abertos acolhedores, com uma esplanada e um campo de jogos que são frequentados pelos alunos durante os tempos livres.

No edifício principal funcionam os serviços administrativos e os serviços de apoio à escola. Neste pode-se encontrar a secretaria, o gabinete de direção, a sala de professores, a sala de diretores de turma, a papelaria, a reprografia, a biblioteca, a mediateca, a galeria, a sala dos funcionários, a sala de apoio ao aluno, os serviços de Ação Social Escolar, o centro Qualifica e, ainda, algumas salas de aula, como a sala Aprender+, o laboratório de Biologia e de Geologia e uma sala de informática.

Dois dos anexos são direcionados exclusivamente para a prática educativa, dispõem de salas de aulas normais, outra sala de informática, laboratório de Física e Química, sala de expressões e sala de Educação Especial.

Os restantes anexos da escola destinam-se ao bar, à cantina e ao gabinete de SPO.

Fazem ainda parte da escola um campo aberto onde se pode praticar diversos desportos e um ginásio. Como o espaço para as aulas de Educação Física é insuficiente, as aulas de cem minutos decorrem no Estádio Universitário de Coimbra, que dista, aproximadamente, $2\,km$ da escola [12].

A escola conta com um total de dezassete salas de aulas, das quais oito são para aulas teóricas e nove são salas específicas. Todas as salas de aulas estão equipadas com pelo menos um quadro branco, um computador, um retroprojetor e em algumas existe um quadro interativo.

A mediateca da escola tem computadores à disposição dos alunos para realizarem trabalhos e pesquisas na *internet* e inclui uma sala onde se realizam palestras/sessões. A biblioteca encontra-se bem equipada e organizada.

As instalações encontram-se em bom estado de conservação, mas não existe, por exemplo, fácil acesso para pessoas com mobilidade limitada.

1.1.5 Oferta Educativa

A ESJC tem ao dispor da comunidade uma oferta educativa muito variada. No ano letivo 2018/2019, a ESJC ofereceu os cursos apresentados nas seguintes tabelas.

Tabela 1.1 Oferta formativa do Ensino Secundário (diurno)

ENSINO SECUNDÁRIO
Curso de Ciências e Tecnologias
Curso de Línguas e Humanidades
Profissionais - Técnico de Apoio à Infância - Técnico de Apoio Psicossocial - Técnico de Desporto

Tabela 1.2 Oferta formativa do Ensino Noturno

ENSINO NOTURNO
Recorrente (Secundário)
Cursos de Educação e Formação de Adultos - Secundário

Na sede do AECC funciona o Centro Qualifica (Centro de Novas Oportunidades), com RVCC, de nível básico e secundário.

De forma a promover uma Educação Inclusiva, o AECC é uma instituição de referência para a Educação de Alunos Surdos, Portadores de Cegueira e de Baixa Visão, com Perturbações de Espetro do Autismo e com Multideficiência.

No âmbito do projeto Escola Inclusiva e Intercultural, é lecionada a disciplina de PLNM, aos alunos que necessitam desta oferta formativa.

«No ano letivo de 2017/2018, o AECC passou a fazer parte do projeto UAARE cujo objetivo é proporcionar melhores condições de ensino e aprendizagem a alunos com estatuto de alto rendimento, da seleção nacional e com potencial de talento desportivo.» (Projeto Educativo do AECC 2018/2021, p. 6).

Os alunos, podem recorrer, sempre que consideram necessário, ao SPO que presta apoio psicopedagógico.

Este Agrupamento tem uma oferta formativa muito diversificada, que lhe permite abranger um público alvo muito heterogéneo [12].

1.1.6 Comunidade Escolar

No ano letivo de 2018/2019, na ESJC estavam matriculados, no regime diurno, cerca de 313 alunos. A tabela seguinte refere-se à distribuição dos alunos pelo tipo de ensino e ano de escolaridade.

Tabela 1.3 Distribuição dos alunos, do regime diurno

Tipo de Ensino	Ano de Escolaridade	Número de turmas	Número de alunos matriculados
Regular	10.º ano	2	63
	11.º ano	2	61
	12.º ano	2	62
Profissional	1.º ano	3	64
	2.º ano	2	25
	3.º ano	2	38
	Total	13	313

A escola tem um corpo docente estável. A organização dos professores divide-se em vários departamentos, nomeadamente: Departamento do Pré-escolar, Departamento do 1.º Ciclo, Departamento de Português e Línguas, Departamento de Ciências Sociais e Humanas, Departamento de Matemática e Informática, Departamento de Expressões, Departamento de Ciências Experimentais e Departamento de Educação Especial.

Prestam ainda serviço na escola, técnicos superiores (Psicólogos e interpretes da Língua Gestual Portuguesa), funcionários administrativos e assistentes operacionais.

A ESJC tem um ambiente calmo e acolhedor, onde existe uma boa relação entre alunos, professores e restantes funcionários.

De um modo geral, os estudantes são acompanhados durantes as suas aprendizagens, apoiados nas suas dificuldades e incentivados a seguir em frente e a fazer cada vez melhor.

1.2 Núcleo de Estágio de Matemática

O NEM da ESJC, no ano letivo 2018/2019, foi constituído pela professora estagiária, Raquel Martins, pela Orientadora Cooperante, Professora Margarida Cid e pela Orientadora Científica, Professora Doutora Helena Albuquerque.

Neste ano letivo, à Orientadora Cooperante foram atribuídas três turmas, uma turma do Curso de Ciências e Tecnologias (10.º ano) e duas do Curso de Línguas e Humanidades (10.º e 11.º ano).

A partir do primeiro dia de aulas, a professora estagiária esteve presente nas aulas das turmas 1 e 2 do 10.º ano e na turma 2 do 11.º ano, foi na turma 1 do 10.º ano na disciplina de Matemática A, que realizou a sua prática de ensino supervisionada.

Ao longo do ano letivo, o trabalho do NEM foi desenvolvido num ambiente calmo, organizado e em sintonia, onde houve partilha de experiências, tanto pessoais como profissionais. Este trabalho foi realizado diariamente dentro e fora da escola.

1.3 Caraterização das Turmas de Estágio

A caraterização das turmas tem como objetivo aprofundar o conhecimento sobre os alunos, que as constituem.

Este conhecimento é importante para que os professores possam identificar alguns problemas dos alunos, de modo a melhorarem o processo de ensino – aprendizagem.

Em seguida é apresentada a caraterização das turmas onde houve a intervenção do NEM. A professora estagiária debruçou-se mais sobre a turma 1 do 10.º ano pelo facto de ter participado no seu trabalho de Direção de Turma, que será apresentado no capítulo 3.

1.3.1 Turma 1 do 10.º ano

A turma 1 do 10.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias era composta por vinte e quatro alunos, dos quais treze eram rapazes e onze eram raparigas. Estes discentes tinham idades compreendidas entre os treze e os dezasseis anos, sendo a média de idades da turma de 14.8 anos.

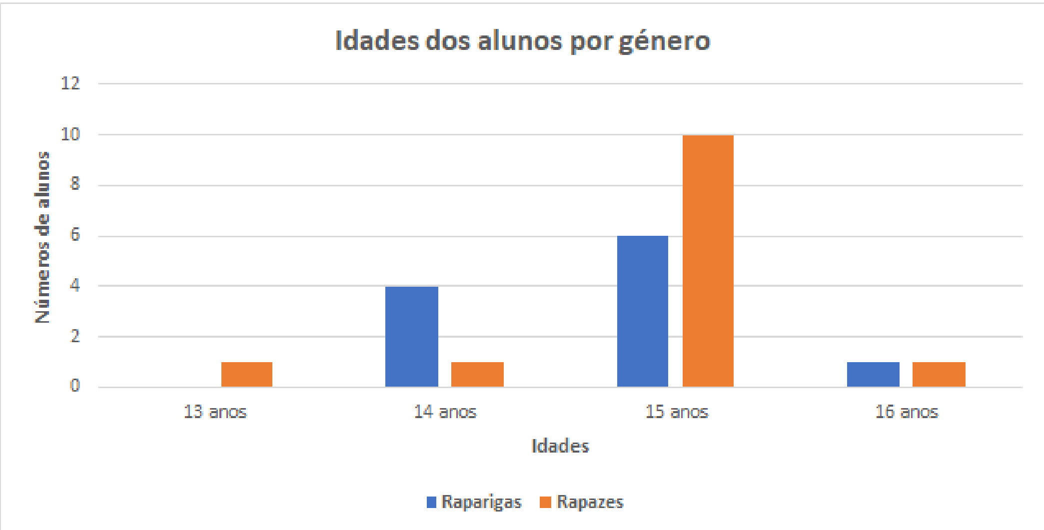


Fig. 1.3 Idades dos alunos da turma 1 do 10.º ano

Nesta turma existia um aluno Nepalês, três alunas de nacionalidade Angolana e uma aluna de nacionalidade Brasileira, os restantes eram de nacionalidade Portuguesa.

Quanto ao número de retenções em anos anteriores verificaram-se dois casos. Um aluno tinha repetido o 6.º ano e outro estava pela segunda vez no 10.º ano.

A maior parte dos alunos da turma vivia na periferia da cidade de Coimbra, havendo alguns que viviam no concelho de Montemor.

A maioria dos alunos deslocava-se de autocarro para a escola e a viagem demorava, em média, trinta e cinco minutos.

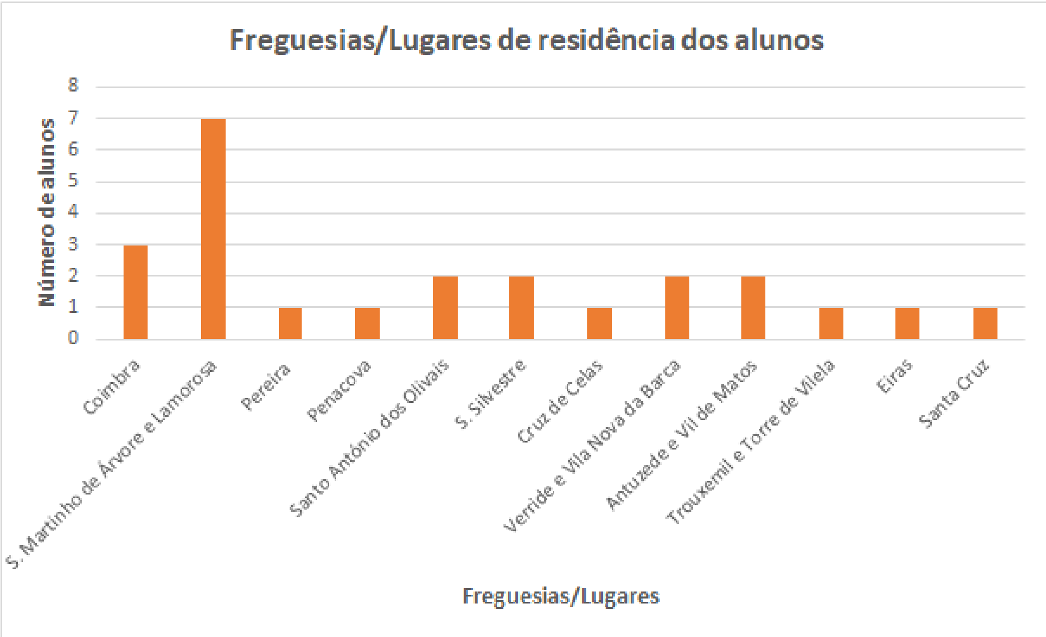


Fig. 1.4 Freguesias/Lugares de residência dos alunos da turma 1 do 10.º ano

Dezassete alunos, coabitavam com os pais. Os restantes viviam com outros familiares, tios ou irmãos, uma vez que os pais se encontravam emigrados.

Nesta turma quem assumia, na maioria dos casos, o papel de Encarregado de Educação dos seus educandos era a mãe.

Os estudantes foram também questionados acerca das suas disciplinas favoritas e das disciplinas em que tinham dificuldades, cujas respostas se podem sintetizar nos gráficos seguintes.

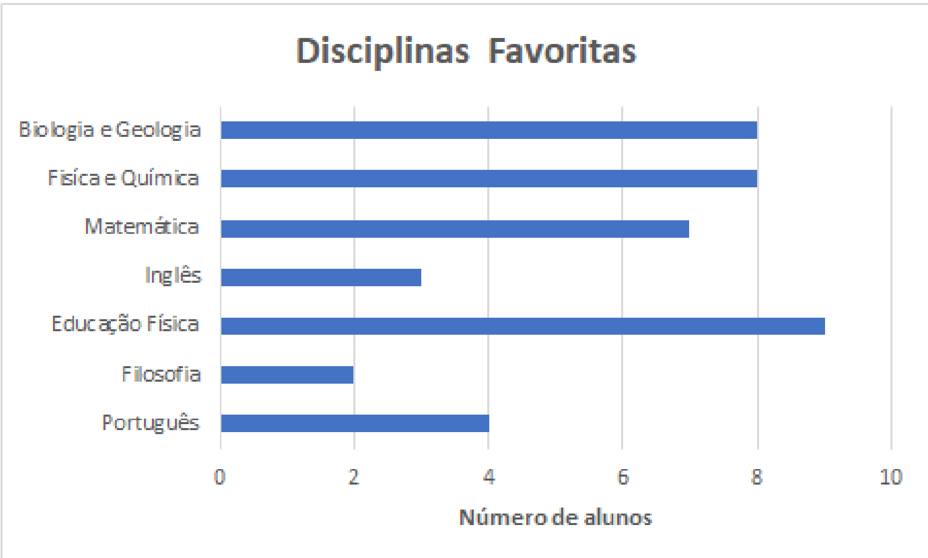


Fig. 1.5 Disciplinas favoritas dos alunos da turma 1 do 10.º ano

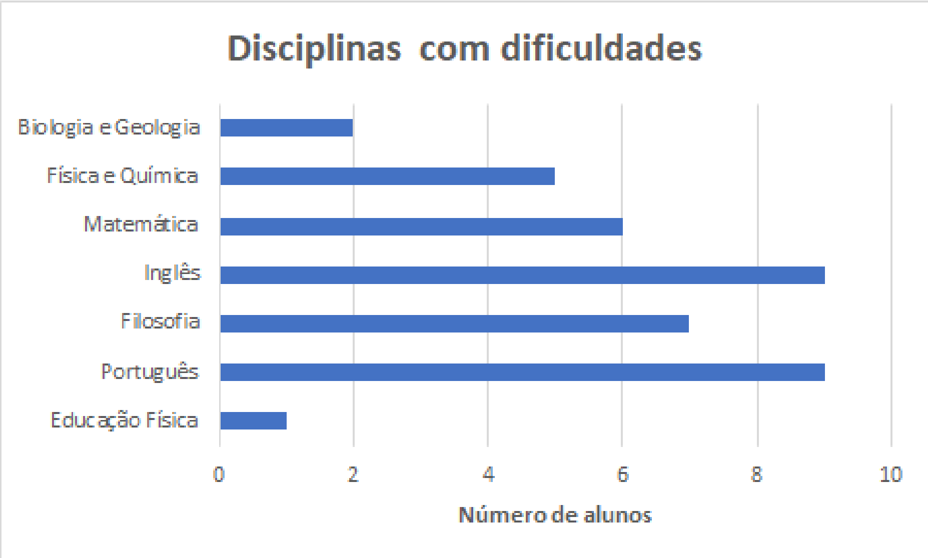


Fig. 1.6 Disciplinas com dificuldades dos alunos da turma 1 do 10.º ano

Durante os tempos livres a maioria dos alunos praticava desporto. Quatro destes alunos faziam parte do projeto UAARE.

No que se refere ao futuro, a maioria dos alunos afirmava querer tirar curso superior. Em relação à vida profissional ainda não tinham perceção da profissão que gostariam de seguir.

Estas informações, recolhidas no início do ano letivo, foram tidas em conta ao longo da prática pedagógica como instrumento para melhorar e/ou ultrapassar dificuldades dos alunos.

Relativamente ao aproveitamento dos alunos na disciplina de Matemática A era uma turma bastante heterogénea. A turma dividia-se em três grupos. Um grupo de alunos que gostava de Matemática, era empenhado, participativo e, por isso, os resultados obtidos eram muito bons. Outro grupo de alunos, embora esforçado, não conseguia acompanhar a exigência do Ensino Secundário devido as dificuldades na compreensão da língua portuguesa e o desfasamento dos programas, pelo facto de serem oriundos de sistemas de ensino diferentes do português. Os alunos que constituíam o terceiro grupo eram pouco empenhados e apresentavam falta de hábitos de trabalho e de estudo sistemático e contínuo e dificuldades de concentração e persistência.

A turma era unida, participativa e mostrava empenho nas tarefas propostas, quer dentro da sala de aula quer em atividades extracurriculares dinamizadas pela escola ou pelo NEM.

1.3.2 Turma 2 do 10.º ano

No início do ano letivo a turma 2 do 10.º ano do Curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades era constituída por vinte e um alunos, nove rapazes e doze raparigas. Por transferência de curso/escola, no final do ano esta turma era constituída por vinte e quatro alunos. As idades destes alunos pertenciam ao intervalo dos catorze aos dezoito anos. A turma era, ainda, constituída por dois alunos de Angola, um de Cabo Verde e dois do Brasil.

A maior parte dos alunos da turma vivia na periferia da cidade de Coimbra, havendo uma aluna que vivia em Mortágua.

No que se refere ao futuro, a maioria dos alunos afirmava querer tirar curso superior. Em relação à vida profissional muitos destes alunos queriam seguir Direito ou Psicologia.

No que diz respeito ao aproveitamento dos alunos na disciplina de MACS era uma turma heterogénea havendo alunos com um bom aproveitamento e outros que revelavam algumas dificuldades na aquisição e aplicação de conhecimentos bem como falta de hábitos de trabalho.

1.3.3 Turma 2 do 11.º ano

No início do ano letivo a turma 2 do 11.º ano do Curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades tinha apenas dezasseis alunos inscritos na disciplina de MACS. Por transferência de curso/escola no final do ano estavam inscritos apenas catorze alunos nesta disciplina. Destes alunos, três tinham quinze anos, seis tinham dezasseis anos, três tinham dezassete anos, uma tinha dezoito anos e outra tinha vinte anos (inscrita apenas a MACS).

A maior parte dos alunos da turma vivia na periferia da cidade de Coimbra, sendo que um dos alunos estava institucionalizado.

No que se refere ao futuro, a maioria dos alunos afirmava querer tirar curso superior. Em relação à vida profissional, muitos destes alunos queriam seguir Direito ou Psicologia.

O aproveitamento dos alunos na disciplina de MACS era fraco, havia repetidamente conversas paralelas durante as aulas. Os alunos da turma apresentavam ainda alguma imaturidade e falta de sentido de responsabilidade e predisposição para a aprendizagem. O desinteresse revelado pela disciplina levou a que os resultados obtidos no final do ano ficassem aquém do pretendido.

Capítulo 2

Prática Pedagógica Supervisionada

Neste capítulo são apresentadas e refletidas as funções desempenhadas pela professora estagiária nas turmas de estágio dentro da sala de aula, nos apoios prestados no esclarecimento de dúvidas e nos documentos realizados para completar a prática pedagógica.

2.1 Planificações

O NEM elaborou as planificações dos conteúdos a lecionar e das atividades a desenvolver ao longo do ano, que passaram a constar no PAAA.

2.1.1 Planificação Anual de Atividades do Núcleo de Estágio de Matemática

A planificação anual de atividades do NEM estava dividida em duas partes (anexo A).

Na primeira parte encontrava-se as atividades da escola, em que a professora estagiária participou e ajudou a dinamizar, e as atividades dinamizadas apenas pelo NEM. Nesta parte da planificação foram apresentados os objetivos a atingir, os intervenientes, os recursos, o local e a calendarização.

A segunda parte incluía a calendarização dos domínios/conteúdos lecionados, pela professora estagiária.

2.1.2 Planificações Anuais e a Médio Prazo

No início do ano letivo, antes do início das aulas, o NEM reuniu-se para se elaborarem as planificações anuais e a médio prazo.

De acordo com o Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Secundário, as Aprendizagens Essenciais, em vigor para as disciplinas de Matemática A - 10.º ano e MACS - 10.º ano, e os manuais adotados pela escola (Novo Ípsilon da Raiz Editora - Matemática A [1] e Máximo da Porto Editora - MACS) as planificações anuais, enquadraram os domínios, os subdomínios, os conteúdos, as aprendizagens essenciais, as ações estratégicas, os recursos/instrumentos de avaliação e a articulação disciplinar. A planificação anual da disciplina de Matemática A encontra-se no anexo B.

Para além destas planificações, foram também realizadas as planificações a médio prazo para o 1.º período (anexo C). Nestas planificações são apresentadas as atividades a realizar e os conteúdos a lecionar sendo que o número de aulas por cada domínio/subdomínio está mais pormenorizado. As restantes planificações a médio prazo foram realizadas no início do respetivo período, uma vez que, é o primeiro ano em que as Aprendizagens Essenciais estão a ser implementadas.

2.1.3 Planos de Aula

Os planos de aula elaborados durante o Estágio Pedagógico mantiveram sempre a mesma estrutura ao longo do ano, e referiram-se a tempos letivos de cem minutos. Estes planos eram elaborados pela estagiária e posteriormente corrigidos e analisados pela Orientadora Cooperante num clima de partilha de saberes e experiências.

Para elaborar a planificação de cada aula eram consultados o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, as Aprendizagens Essenciais, diversos manuais escolares e outros livros científicos que serão citados na bibliografia deste trabalho.

Os planos de aula foram elaborados tendo em consideração os seguintes fatores: as caraterísticas da turma; os materiais e recursos disponíveis; os objetivos de cada aula; os pré-requisitos; os paralelismos e as conexões com a vida real; os momentos para os alunos realizarem individualmente exercícios e/ou problemas; e, o rigor científico.

Nas primeiras páginas de cada planificação foram apresentadas informações gerais acerca da aula, como o domínio, o subdomínio, os objetivos gerais, os descritores, as aprendizagens essenciais, os conteúdos, os pré-requisitos, as capacidades transversais, as metodologia/estratégias, os recursos/materiais didáticos e a avaliação dos alunos (interesse, participação e comportamento).

Nas restantes páginas, descreveram-se as metodologias de cada aula, os conteúdos a lecionar e as estratégias de abordagem aos mesmos. Por fim, como síntese da aula, encontrava-se um plano de trabalho e o sumário da aula. Em anexo a cada plano estavam os materiais produzidos para cada aula.

As novas tecnologias foram utilizadas sempre que se considerou necessário. Estas ferramentas são fundamentais para motivar os alunos na sala de aula.

2.2 Aulas

No início do ano, a professora supervisora, com a anuência da professora estagiária, decidiu que as aulas supervisionadas seriam na turma de Matemática A (10.º 1) e nas turmas de MACS (10.º 2 e 11.º 2) a professora estagiária estaria presente e colaboraria no apoio aos alunos na realização de tarefas em sala de aula.

2.2.1 Aulas Observadas

Durante as aulas da Orientadora Cooperante, o papel da professora estagiária foi observar, aprender e auxiliar os alunos.

Os aspetos mais importantes que reteve da observação das aulas foi a constante preocupação da professora, para que todos os alunos acompanhassem as aulas, e o incentivo dado, com um reforço positivo, aos alunos a exporem as suas dúvidas. Não esquecendo o rigor matemático que fornecia aos alunos, procurando que todos os alunos compreendessem os conteúdos lecionados e não que os memorizassem.

Nas aulas práticas, a estagiária circulava na sala, tal como a Professora Margarida, para auxiliar e tirar dúvidas aos alunos sempre que solicitavam ou por iniciativa própria. Procedia de igual modo nas aulas que decorriam com o auxílio da calculadora gráfica, uma vez que, nas várias turmas havia três modelos de calculadoras, a *Texas Instruments*, a *Casio* e a *Nspire*.

Nas aulas assistidas do 11.º ano a professora estagiária acompanhou uma aluna com dificuldades de aprendizagem. A aluna era trabalhadora e empenhada, no entanto, apresentava bastantes dificuldades na disciplina de MACS. Durante este acompanhamento, a estagiária tentou explicar os conceitos de outra forma.

Os alunos, durante todo o ano, estabeleceram uma boa relação com a professora estagiária, consideraram-na uma mais valia para eles, uma vez que podiam recorrer facilmente para pedir ajuda ou para tirar dúvidas.

O acompanhamento das aulas lecionadas pela Professora Margarida foram uma mais-valia que proporcionaram imensas aprendizagens.

2.2.2 Aulas Lecionadas

De certa forma, as aulas lecionadas correspondiam ao momento mais aguardado do estágio como professora estagiária. Esta experiência foi muito enriquecedora, pois permitiu adquirir novos conhecimentos e evoluir enquanto pessoa.

Durante as aulas, houve a preocupação de explicar os conteúdos de forma cientificamente correta e com o devido rigor matemático.

Sempre que possível a abordagem a cada domínio foi iniciada através de questões aos alunos ou com a história da Matemática, sendo esta uma forma mais aliciante de focar a atenção dos alunos do que a simples exposição de conteúdos. A resolução de breves exercícios foi outra técnica usada no sentido de evitar que os alunos se distraíssem.

De uma forma geral foi utilizado o computador, o retroprojetor, *Power Points*, o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, a calculadora gráfica, o manual adotado, atividades de exploração e fichas formativas e de trabalho.

Os alunos, de um modo geral, reagiram bem às aulas lecionadas e prestaram a devida atenção aos conteúdos apresentados. O empenho dos alunos foi visível nas perguntas que realizavam durante as aulas.

As críticas construtivas e as sugestões de melhoria realizadas ao longo do ano, pela Professora Margarida e pela Professora Doutora Helena, foram bem recebidas pela professora estagiária, que as procurou incluir no seu desempenho em sala de aula.

Em seguida é apresentada uma breve descrição das aulas lecionadas, por período.

1.º Período

A primeira aula lecionada pela professora estagiária foi sobre racionalização de denominadores (anexo D).

A aula teve início com uma breve revisão da aula anterior. Em seguida a professora estagiária começou por rever, com recurso a um exemplo, o conceito de fração.

Esta revisão serviu para introduzir a racionalização de denominadores, aproveitando para explicar que a racionalização de denominadores consiste em transformar uma fração em que o denominador envolve radicais numa fração equivalente sem radicais no denominador.

Seguidamente, analisaram-se os dois principais casos de frações onde se procede a racionalização de denominadores. Para esta análise, foram apresentados exemplos concretos de frações em que o denominador se enquadrava em cada caso, e com a colaboração da turma deduziram-se estratégias para determinar frações equivalentes sem radicais no denominador.

Posteriormente, com a colaboração dos alunos, formalizou-se o caso geral para cada um dos casos estudados.

Para consolidar os conteúdos lecionados, os alunos realizaram alguns exercícios de aplicação, sendo convidados a resolver os exercícios no quadro.

Para terminar a aula, a professora propôs o trabalho de casa e solicitou que os alunos efetuassem uma síntese da mesma para registarem o sumário.

Nas restantes aulas do 1.º período, a professora estagiária lecionou o subdomínio Geometria Analítica no Plano (anexo E).

Este subdomínio iniciou-se a partir de uma pequena introdução sobre grandezas vetoriais fazendo referência, por exemplo, à disciplina de Física.

Para lecionar este subdomínio recorreu-se várias vezes ao software de geometria dinâmica *GeoGebra*, para recordar alguns conceitos básicos de Geometria, do 8.º ano de escolaridade, e para introduzir os novos conteúdos.

Para consolidar os conteúdos lecionados foram propostos exercícios, ao longo das aulas.

No final de cada aula, era solicitado aos alunos que efetuassem uma síntese para se proceder ao registo do sumário.

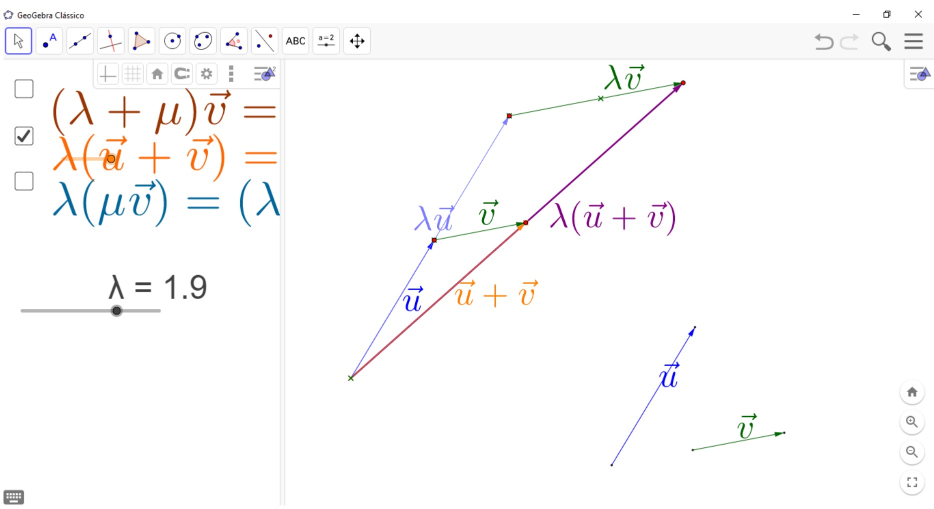


Fig. 2.1 Aplicação no GeoGebra - Propriedade distributiva em relação à adição de vetores

2.º Período

A primeira aula do 2.º período incidiu sobre a fatorização de polinómios (anexo F).

A aula iniciou-se com a professora a questionar os alunos sobre o que é a decomposição em fatores.

Depois de ouvir a opinião dos alunos conclui que fatorizar ou decompor em fatores um polinómio consiste em escrever esse polinómio como produto de polinómios, sendo, pelo menos, um dos fatores não constante e de grau inferior ao polinómio inicial.

Recorrendo a uma apresentação em *PowerPoint*, foi apresentada uma breve referência aos matemáticos envolvidos na descoberta e na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

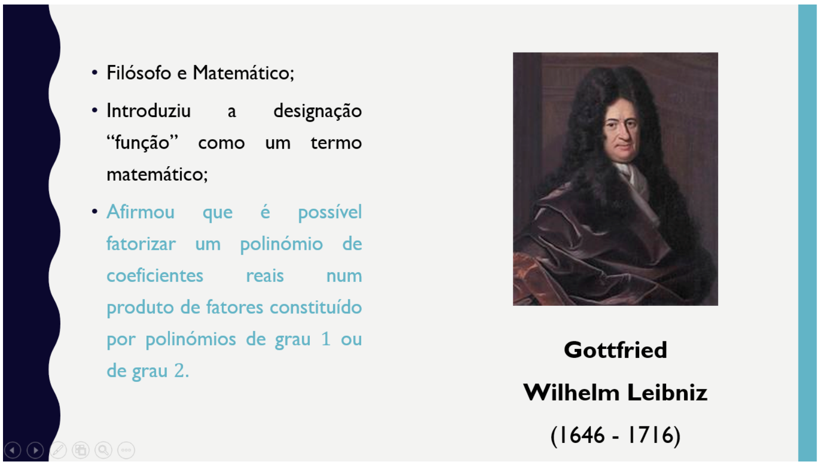


Fig. 2.2 Slide da apresentação em *Power Point* - Fatorização de polinómios

Em seguida, foram apresentados alguns exemplos que resolve sempre em diálogo com os alunos. Posteriormente, foi apresentado o Teorema Fundamental da Álgebra e propostos, novamente, alguns exercícios, pedindo a colaboração dos estudantes para os resolverem no quadro.

Por fim, a professora colocou a seguinte pergunta "Como decompor um polinómio do terceiro grau quando não é dada nenhuma raiz do polinómio?". Para responder a esta questão recorreu-se a um caso concreto, onde foi explicado aos alunos como é que se determina as raízes inteiras de um polinómio. Para os discentes consolidarem esta parte final da aula foram, novamente, propostos alguns exercícios, que foram resolvidos no quadro com a sua colaboração.

No final da aula, a professora estagiária propôs um plano de trabalho para realizarem em casa e solicitou que os alunos, em grupo turma, efetuassem uma síntese da mesma para se proceder ao registo do sumário.

Para terminar o capítulo da Álgebra foi lecionada uma aula sobre equações de grau superior a dois e inequações de grau superior a um.

Na primeira aula de Funções Reais de Variável Real houve uma parte da aula dedicada essencialmente a uma apresentação em *Power Point* para fazer uma breve introdução ao tema das funções, aos matemáticos mais importantes da história das funções, recordar o conceito de função e os modos de definir uma função estudados no 3.º ciclo (anexo G).

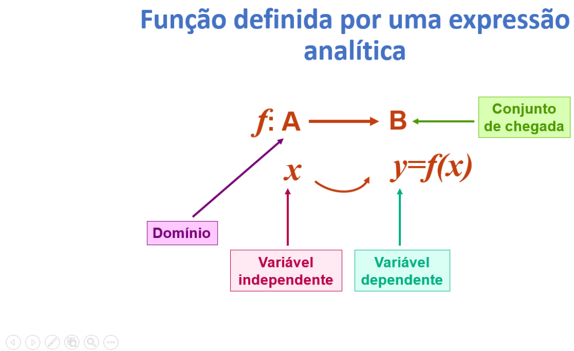


Fig. 2.3 Slide da apresentação em *Power Point* - Funções

Na última aula, foram elaboradas aplicações no software de geometria dinâmica *GeoGebra* e utilizada a calculadora gráfica (Texas *Instruments* e *Casio*) para explicar aos alunos as transformações de gráficos de funções.

As primeiras aulas, deste período letivo, foram assistidas pela Professora Doutora Helena Albuquerque.

3.º Período

Neste período, foi lecionado o estudo elementar da função quadrática. Nestas aulas esteve presente a Professora Doutora Helena Albuquerque.

Na primeira aula, através de uma apresentação em *Power Point* foi feita uma breve referência às principais situações da vida real em que se utiliza a representação gráfica de uma função quadrática (anexo H).

Fig. 2.4 Slide da apresentação em *Power Point* - Função quadrática

Em seguida, foi fornecido aos alunos uma ficha formativa com alguns casos particulares de funções quadráticas para estes estudarem as suas principais caraterísticas. De modo a concluírem as principais caraterísticas das diferentes famílias de funções quadráticas: $y = ax^2$, $y = ax^2 + k, y = a(x-h)^2$ e

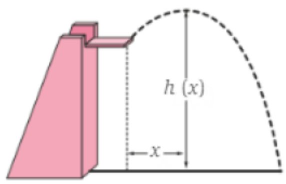
$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0,\ h,\ k\ \in \mathbb{R}$, esta ficha foi resolvida com a colaboração da turma. Tal como nos períodos transatos, para os estudantes consolidarem a matéria, foram propostos exercícios.

Para terminar, os alunos realizaram uma síntese para registarem o sumário.

Na aula seguinte, foram abordados três métodos para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, que representa graficamente uma função quadrática e resolveram-se exercícios.

A última aula lecionada foi sobre inequações quadráticas. Para esta aula a professora estagiária realizou uma ficha de trabalho com problemas de modelação da função quadrática.

6. A trajetória descrita por uma atleta quando salta de uma prancha para uma piscina é dada por $h\ (x) = -0.4\ x^2 + 2.4\ x + 8$ sendo x a distância, em metros, na horizontal, da mergulhadora à extremidade da prancha e $h\ (x)$ a distância, em metros, da mergulhadora à superfície da água.



a) Calcula $h\ (5)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

b) Determine a altura máxima atingida pela atleta.

c) Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, na horizontal, a que a atleta está da extremidade da prancha, quando toca a superfície da água. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

d) Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o intervalo em que a atleta esteve a uma altura superior a 9 metros. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Fig. 2.5 Problema de modelação da ficha de trabalho

2.3 Testes Diagnósticos e Fichas de Trabalho

Os testes diagnósticos elaborados no início do ano letivo, para as turmas de estágio, serviram para os alunos recordarem os conteúdos abordados no 3.º ciclo (para os alunos do 10.º ano) e no 10.º ano (para os alunos do 11.º ano), assim como para compreender quais os pré-requisitos essenciais à aprendizagem, do presente ano letivo, em que as turmas sentiam mais dificuldades.

A avaliação diagnóstica, nas diferentes turmas, foi corrigida pelos alunos. Estes trocaram os testes entre si, enquanto o NEM projetava a resolução. A professora estagiária analisou a correção dos alunos e fez o diagnóstico das suas dificuldades.

Para os discentes da turma 1 do 10.º ano foram realizadas quatro fichas de trabalho, a primeira sobre Radicais e Potências (anexo I), a segunda sobre Lógica e Teoria dos Conjuntos, a terceira sobre Geometria Analítica e, por fim, uma sobre Polinómios (anexo J). Estas fichas serviram para direcionar os estudantes para as matérias lecionadas na sala de aula, uma vez que, as Aprendizagens Essenciais contém conteúdos que a sua abordagem é facultativa, tendo em consideração o desempenho dos alunos, ou seja, são lecionados caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita. Desta forma, os estudantes também tiveram ao seu dispor mais uma fonte de exercícios e problemas.

Estas fichas foram disponibilizadas no *e-mail* da turma para os alunos realizarem extra aula. As dúvidas foram esclarecidas na sala de aula ou nas aulas de apoio ao estudo, apresentadas na secção 2.5.

Para a turma 2 do 11.º ano foi realizado um guia de apoio para a elaboração de um trabalho de projeto sobre a Teoria dos Grafos. Este documento tinha como objetivo direcionar os discentes para a elaboração de um trabalho de grupo (anexo K).

2.4 Documentos de Avaliação

Durante o ano de estágio foram desenvolvidos diversos materiais de suporte à avaliação, para a turma 1 do 10.º ano. Entre estes conta-se a elaboração, a correção de testes/atividades individuais e, ainda, a realização de critérios de classificação dos mesmos.

2.4.1 Elaboração dos Instrumentos de Avaliação Escrita

Ao longo do ano, a estagiária elaborou algumas atividades individuais (a segunda atividade individual encontra-se no anexo L), o 3.º e o 4.º teste de avaliação (anexo M), que posteriormente eram analisados pela Orientadora Cooperante.

Antes de cada teste de avaliação foi sempre previamente preparada e enviada para o *e-mail* da turma (uma semana antes do teste) uma matriz com os conteúdos em que o respetivo teste iria incidir e com o formulário disponível no dia do mesmo (anexo M).

Os testes de avaliação realizados, ao longo do ano letivo, tiveram sempre um caráter global, ou seja, avaliaram sempre todos os conteúdos abordados até à semana anterior ao momento da avaliação.

O terceiro teste incidiu sobre Geometria Analítica, sendo composto por cinco perguntas de escolha múltipla com uma cotação de oito pontos cada uma e seis perguntas de desenvolvimento de conteúdos.

O quarto teste foi constituído por cinco questões de escolha múltipla (valendo cada uma oito pontos) e um conjunto de questões de desenvolvimento até se atingir uma cotação total de duzentos pontos, envolvendo conteúdos de Geometria Analítica e de Polinómios.

As atividades de matéria restrita (ou atividades individuais) tiveram a duração de cerca de cinquenta minutos e foram constituídas por pequenas questões que pretendiam avaliar os conteúdos lecionados num número restrito de aulas. Este instrumento de avaliação não possuiu uma estrutura fixa, ou seja, o número de questões de desenvolvimento e de escolha múltipla era variável.

Depois de finalizados, os testes e as atividades individuais da turma 1 do 10.º ano, eram resolvidos pelo NEM, de forma a se verificar o seu grau de dificuldade e o tempo de resolução.

2.4.2 Critérios e Correção dos Instrumentos de Avaliação Escrita

A estagiária corrigiu o 1.º, o 3.º e o 4.º teste de avaliação e várias atividades individuais.

Para a classificação do 1.º teste e das atividades individuais foram utilizados os critérios elaborados, em conjunto, com a Orientadora Cooperante que apresentou e justificou os critérios de correção adotados e as respetivas cotações.

Os critérios de classificação do 3.º e do 4.º teste de avaliação foram realizados pela professora estagiária. Seguidamente, foram analisados pela Professora Margarida que proferiu algumas críticas construtivas tanto aos critério adotados bem como as cotações atribuídas a cada etapa.

Após a conclusão da correção de cada instrumento de avaliação, o NEM reunia-se sempre para discutir os resultados.

Os conselhos da Professora Margarida, durante a realização dos critérios de classificação, contribuíram, novamente, para a aprendizagem da professora estagiária.

2.5 Apoio ao Estudo

As aulas de apoio ao estudo permitiram ficar a conhecer melhor as dificuldades de alguns alunos e utilizar estratégias de ensino diversificadas, para as conseguir colmatar.

2.5.1 Aulas Extra para Esclarecimento de Dúvidas

Durante todo o ano letivo, funcionou semanalmente às terças, quartas e sextas-feiras um bloco de cinquenta minutos que serviam de aula extra aos alunos para esclarecimento de dúvidas, frequentadas de forma facultativa.

Nestas aulas, o NEM esclarecia dúvidas aos alunos, propunha exercícios de preparação para as avaliações escritas e ajudava na manipulação da calculadora gráfica.

2.5.2 Sala de Estudo Aprender+

A sala Aprender+ foi desenvolvida para os alunos inseridos no projeto UAARE. A implementação desta sala teve como objetivo melhorar as aprendizagens, consolidar os conhecimentos abordados nas aulas e esclarecer dúvidas, para que estes discentes tivessem um acompanhamento das matérias lecionadas quando se encontravam ausentes, devido à sua prática desportiva.

A sala de estudo Aprender+ estava aberta, às quartas-feiras, durante cem minutos. O apoio à disciplina de Matemática era ministrado pela Professora Margarida Cid.

Além dos alunos do projeto UAARE, sempre que alunos da Orientadora Cooperante que não pertenciam a este projeto sentissem necessidade de frequentar esse espaço, puderam fazê-lo. Estes estudantes esclareceram dúvidas e em alguns casos os seus estudos foram orientados com propostas de exercícios.

Como recursos, para estas aulas, foram utilizadas as fichas de trabalho elaboradas pela estagiária.

Ao longo do ano letivo ficou a cargo da professora estagiária acompanhar os alunos que de forma facultativa frequentavam a sala Aprender+.

Para a estagiária a participação nesta sala de estudo foi uma mais-valia, pois permitiu aplicar, mais uma vez, os seus conhecimentos em Matemática e evoluir nas suas técnicas de ensino-aprendizagem.

Fig. 2.6 Alunos da turma 2 do 10.º ano na sala Aprender+

2.6 Avaliação Sumativa dos Alunos

Os docentes do Departamento de Matemática e Informática da ESJC aprovaram, no ano letivo de 2018/2019, para as disciplinas de Matemática A e MACS a seguinte matriz de avaliação, que incluía duas partes:

- Competências Específicas - 90% : que englobava os conhecimentos matemáticos;
- Competências Transversais (Saber Ser/Estar - Cidadania) - 10%: que compreendia o comportamento e as atitudes do aluno.

Sendo que os 90% atribuídos às Competências Específicas estavam subdivididos em 80% para os testes escritos e 10% para os trabalhos realizados no âmbito da disciplina (incluindo as atividades de matéria restrita). Os restantes 10% correspondiam às Competências Transversais que se dividiam nas componentes: Assiduidade e Pontualidade; Responsabilidade e Empenho; Capacidade de Intervenção; Respeito por si e pelos outros; Ajuda e Cooperação.

A avaliação sumativa dos alunos passava pelo preenchimento de uma grelha em *Excel*. As componentes das Competências Transversais eram preenchidas com base nas informações recolhidas através da observação de cada aluno, que eram comparadas com a autoavaliação de cada um.

Capítulo 3

Participação nas Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa

O Estágio Pedagógico foi uma oportunidade para compreender o contexto escolar, como ele é, como se organiza e funciona.

Assim, neste capítulo, é apresentada uma breve descrição do trabalho desenvolvido pelo NEM na Direção de Turma e das reuniões assistidas.

3.1 Direção de Turma

Um Diretor de Turma desempenha funções que assentam na coordenação e na orientação de uma turma.

Para melhor entender este papel, a professora estagiária acompanhou a Professora Fernanda Palrinhas (professora da disciplina de Biologia e Geologia), diretora da turma 1 do 10.º ano, apoiando-a em algumas das suas tarefas.

Com o objetivo de ter contacto com as diferentes funções de uma Diretora de Turma, a estagiária teve a oportunidade de colaborar na:

- Caraterização da turma, analisou os inquéritos preenchidos pelos alunos no início do ano letivo e elaborou a representação gráfica dos resultados obtidos;
- Elaboração de algumas sínteses descritivas;
- Elaboração de relatórios para justificar a elevada percentagem de classificações inferiores a dez valores.

Esta é uma tarefa de grande importância e responsabilidade. A participação da professora estagiária nas situações descritas anteriormente foi fundamental.

3.2 Reuniões

Ao longo do Estágio Pedagógico o NEM teve a oportunidade de estar presente em várias reuniões, que de modo geral, permitem organizar o contexto escolar e/ou gerir os processos de aprendizagens.

Em seguida é apresentada uma breve descrição das reuniões em que o NEM esteve presente.

3.2.1 Reuniões de Departamento de Matemática e Informática

O Departamento de Matemática e Informática é uma estrutura de orientação educativa onde se efetuava a articulação curricular, entre as disciplinas de Matemática e Informática.

Este departamento era coordenado pela Professora Margarida Alves e contava com a presença de todos os professores de Matemática e Informática do AECC. Ao longo do ano, na ESJC, houve duas reuniões no primeiro período escolar, uma no segundo e outra no terceiro período.

No início de cada reunião a Presidente forneceu informações emanadas do Conselho Pedagógico, sobre assuntos gerais relativos ao AECC e à sua organização.

Os restantes assuntos de cada reunião prenderam-se com o funcionamento de cada disciplina. Relativamente à área disciplinar de Matemática analisaram-se e discutiram-se as planificações anuais e a médio prazo, os critérios de avaliação, questões relacionadas com a avaliação sumativa interna de cada período, as atividades extracurriculares (fazendo o respetivo balanço), as metas de sucesso por ano de escolaridade e o cumprimento dos conteúdos programáticos.

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária teve a possibilidade de estar presente em todas estas reuniões e, assim ficou a compreender melhor o trabalho desenvolvido por este órgão e com uma visão do trabalho que um professor tem de desenvolver para o seu bom funcionamento.

3.2.2 Reuniões de Conselho de Turma

O Conselho de Turma é uma estrutura de orientação educativa que tinha como objetivo acompanhar a turma, de modo a promover as melhores condições de ensino-aprendizagem a todos os seus alunos.

As reuniões de Conselho de Turma eram presididas pelo(a) Diretor(a) de Turma e contavam com a participação de todos os docentes da turma, a psicóloga e a professora de Ensino Especial (caso fosse necessário). Estas reuniões tiveram lugar a meio do primeiro período (reuniões intercalares) e no final de cada período (reuniões de avaliação interna).

No primeiro período a professora estagiária esteve presente nas reuniões intercalares da turma 2 do 10.º ano e da turma 2 do 11.º ano e na reunião de avaliação interna da turma 2 do 10.º ano.

Atendendo a que a professora estagiária não era considerada professora da escola entendeu-se que não havia enquadramento legal para que ela pudesse estar presente nas restantes reuniões de Conselho de Turma.

Reuniões Intercalares

A primeira reunião intercalar dividiu-se em duas partes, na primeira parte estiveram presentes dois representantes dos Encarregados de Educação e dois representantes dos alunos, da respetiva turma. Foram expostos problemas globais da turma relacionados com o seu aproveitamento e com o comportamento na sala de aula.

Na segunda parte, os alunos e os Encarregados de Educação abandonaram a sala para que os professores pudessem analisar as atividades extracurriculares planeadas para a turma, a avaliação individual dos alunos e delinear estratégias de ensino-aprendizagem para combater o insucesso escolar.

Reuniões de Avaliação Interna

A reunião de avaliação interna foi dedicada à avaliação sumativa de cada aluno, à análise global da turma identificando algum problema, ao balanço das atividades e à apresentação de novas atividades a desenvolver na turma.

3.2.3 Reuniões de Orientação de Estágio

As reuniões de Orientação de Estágio tinham com objetivos planificar, desenvolver, analisar e refletir a prática pedagógica e as atividades extracurriculares.

Estas reuniões decorreram todas as quarta-feiras com duração de cem minutos. Após cada seminário foi lavrada a respetiva ata onde se plasmou todo o trabalho realizado em cada um destes momentos (anexo N).

Todo o trabalho realizado pela professora estagiária foi afincadamente analisado e discutido com a Professora Margarida. De seguida, são enumerados os principais temas de trabalho abordados nas diversas reuniões de orientação de estágio:

- Planificações anuais e a médio prazo;
- Calendarização de aulas a lecionar, pela professora estagiária;
- Planificações de aulas;
- Testes de avaliação escrita do 10.º ano de Matemática A e atividades de matéria restrita;
- Critérios de classificação dos testes e das atividades de matéria restrita;
- Análise das dificuldades dos alunos com o objetivo de encontrar alternativas para as contornar;
- Análise do comportamento dos alunos;
- Avaliação dos alunos;
- Fichas de trabalho;
- Atividades de enriquecimento curricular;
- Balanço e reflexão de cada aula lecionada e atividade realizada.

Ao longo do ano de estágio esta foi a tarefa que mais enriqueceu a professora estagiária. A Professora Margarida forneceu indicações, sugestões e críticas construtivas que proporcionaram diversas aprendizagens.

3.2.4 Reuniões da Unidade de Apoio ao Alto Rendimento na Escola

No âmbito do projeto UAARE foram realizadas algumas reuniões para explicar os principais objetivos e funções deste projeto e como funciona a sua plataforma Moodle.

«As UAARE visam uma articulação eficaz entre os agrupamentos de escola, os encarregados de educação, as federações desportivas e seus agentes e os municípios, entre outros interessados, tendo por objetivo conciliar, com sucesso, a atividade escolar com a prática desportiva de alunos/atletas do ensino secundário enquadrados no regime de alto rendimento ou seleções nacionais.» (UAARE, para. 1) [13].

Nas reuniões realizadas ao longo do ano letivo na ESJC esteve presente a equipa pedagógica UAARE do Agrupamento, o professor acompanhante e o coordenador nacional do projeto, o Doutor Vitor Pardal.

A equipa pedagógica UAARE era formada por um professor de cada disciplina, que tinha como objetivo acompanhar o processo pedagógico de cada aluno envolvido no projeto, e pela psicóloga.

Nestes encontros o Doutor Vitor Pardal forneceu informações sobre o projeto, mostrando como funciona em outras escolas do país através de testemunhos de professores e alunos dessas escolas por vídeos ou por videoconferência, e, também, sobre a plataforma Moodle e as suas potencialidades. Esta plataforma pretendia sobretudo manter o contacto com os alunos quando estes se encontravam em competições/estágios, para os professores fornecerem materiais e esclarecerem dúvidas existentes.

Ao participar nestas reuniões a professora estagiária ficou a conhecer o objetivo do projeto UAARE e as potencialidades da sua plataforma para o sucesso escolar.

Fig. 3.1 Logótipo do projeto UAARE

Capítulo 4

Atividades Desenvolvidas

Neste capítulo são descritas e analisadas todas as atividades de enriquecimento curricular dinamizadas e organizadas pelo NEM, ao longo do ano letivo.

Estas atividades tiveram como objetivo motivar os alunos para a disciplina de Matemática apresentando-lhes outras vertentes desta ciência não abordadas nos programas curriculares e dinamizar a comunidade educativa onde se inseriu este Estágio Pedagógico.

4.1 Participação em Competições Matemáticas

Com o objetivo de incentivar os alunos para a disciplina de Matemática, os professores desta disciplina e o NEM inscreveram a ESJC em vários concursos matemáticos.

A participação nestas competições foi, também, uma mais-valia para a estagiária, pois permitiu-lhe ficar a conhecer os procedimentos necessários para que os concursos se possam realizar numa escola com a eficácia que é exigida.

4.1.1 Olimpíadas Portuguesas de Matemática

As OPM são um concurso nacional que consiste na resolução de problemas de Matemática organizado pela SPM.

Os alunos do 1.º Ciclo ao Ensino Secundário podem participar de forma voluntária nesta competição. Os participantes são divididos em categorias consoante a escolaridade: Mini-Olimpíadas (3.º e 4.º ano), Pré-Olimpíadas (5.º ano), Júnior (6.º e 7.º ano), categoria A (8.º e 9.º ano) e categoria B (do 10.º ao 12.º ano) [14].

As OPM, para o Ensino Secundário, consistem numa prova escrita com duração de duas horas, que é realizada pelos alunos individualmente sem consulta e sem recurso à calculadora.

A 1.ª eliminatória das OPM decorreu no dia sete de novembro e contou com a presença de três alunos (dois alunos do 10.º 1 e uma aluna do 12.º 1).

Todos os alunos demonstraram empenho na realização da prova embora não conseguissem esconder um certo desalento, perante o elevado grau de dificuldade dos problemas propostos. Destacando-se o melhor resultado de um dos alunos da turma onde se realizou a prática de ensino supervisionada, que foi admitido à 2.ª eliminatória que decorreu no dia nove de janeiro na Escola Secundária de José Falcão em Coimbra.

Para divulgar esta atividade, o NEM afixou, em locais estratégicos da escola, o seguinte cartaz:

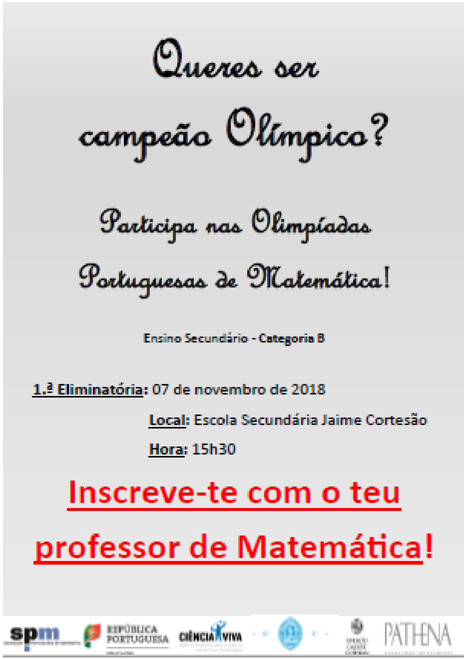


Fig. 4.1 Cartaz de divulgação da 1.º eliminatória das OPM

A professora estagiária, esteve presente na 1.ª e na 2.ª eliminatória das OPM. Na 1.ª eliminatória, desempenhou as funções de vigilância durante a prova, a correção das mesmas e enviou à comissão organizadora das OPM os resultados obtidos pelos alunos; na 2.ª eliminatória, fez o acompanhamento do aluno participante à Escola Secundária de José Falcão em Coimbra.

4.1.2 Concurso de Matemática *Pangea*

O concurso de Matemática *Pangea* é um concurso internacional organizado pelo Pangea Internacional, que conta com a participação de dezassete países.

Cada país tem uma instituição que organiza o concurso de forma local, uma vez que os programas de ensino são específicos para cada país. Em Portugal, a instituição responsável pelo concurso é a *ASEDA – Associação de Educação Académica*, uma associação sem fins lucrativos, com sede em Lisboa [15].

O concurso realiza-se em duas fases destinadas aos alunos do 3.º ao 10.º ano e consiste na realização de um teste individual de escolha múltipla que envolve conteúdos do programa de Matemática do respetivo ano de escolaridade, com a duração de uma hora.

A Professora Margarida e a estagiária decidiram participar com todos os alunos da turma 1 do 10.º ano neste concurso. As provas foram passadas na turma no dia vinte e dois de março.

Todos os alunos mostraram empenho e interesse em resolver corretamente os exercícios propostos, sem desistirem às primeiras dificuldades.

No dia oito de abril, a organização do concurso disponibilizou o nome dos alunos apurados para a 2.ª fase, onde se constatou que oito alunos foram selecionados. Dois destes alunos, acompanhados pelo NEM, deslocaram-se ao Porto (ISEP), no dia quatro de maio para realizarem a 2.ª fase do concurso.

Os alunos que participaram no concurso mostraram-se insatisfeitos com os respetivos desempenhos, uma vez que consideraram que o tempo disponível para realizar a prova não era suficiente.

No dia vinte e um de maio, quando a comissão organizadora do concurso deu a conhecer os vencedores da 2.ª fase, constatou-se que nenhum dos alunos ficou entre os dez melhores do seu ano.

Durante o concurso, a professora estagiária realizou a correção das provas da 1.ª fase e inseriu os resultados das mesmas na plataforma do concurso.

Fig. 4.2 ISEP - 2.ª fase do concurso *Pangea*

4.1.3 Canguru Matemático sem Fronteiras

O Canguru Matemático sem Fronteiras é promovido pela *Associação Canguru Sem Fronteiras*, associação de caráter internacional. Em Portugal, a organização do Canguru Matemático sem Fronteiras é da responsabilidade do DMUC, contando com o apoio da SPM, no presente ano letivo realizou-se no dia vinte e um de março.

O concurso é destinado aos alunos desde o 2.º ao 12.º ano, dividido em oito categorias: Mini-Escolar - nível I (2.º ano), Mini-Escolar - nível II (3.º ano), Mini-Escolar - nível III (4.º ano), Escolar (5.º e 6.º ano), Benjamim (7.º e 8.º ano), Cadete (9.º ano), Júnior (10.º e 11.º ano) e Estudante (12.º ano) [16]. Consiste na resolução de uma prova de escolha múltipla com três níveis de dificuldade crescente, que é realizada individualmente sem consulta e sem recurso à calculadora.

A atividade foi divulgada pelas professoras de Matemática, na sala de aula e os alunos interessados inscreveram-se, voluntariamente, junto das mesmas.

Da turma 1 do 10.º ano participaram cinco alunos, sendo que três obtiveram pontuação superior a setenta e cinco pontos (em cento e cinquenta pontos). Todos estes alunos tiveram comportamentos adequados e revelaram responsabilidade, interesse e empenho na realização da prova.

4.1.4 XV Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos

O XV Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos é uma competição destinada aos alunos desde do 1.º ciclo ao Ensino Secundário. Para os alunos do Ensino Secundário o campeonato disponha de três jogos: Produto, Avanço e Atari Go.

No ano letivo 2018/2019 a competição foi realizada na Maia e foi organizada, a nível local, pelo Agrupamento de Escolas de Pedrouços, e a nível nacional, pela: Associação Ludus; APM; SPM; e Ciência Viva [17].

A Professora Ana Paula Mouro e o NEM fizeram um levantamento dos alunos interessados em participar no XV Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.

Como cada escola só podia inscrever um aluno por cada jogo, na ESJC, foi realizado um treino para os alunos interessados ficarem a conhecer as regras dos jogos e os praticarem. Posteriormente, foi realizado um torneio entre os alunos de modo a decidir-se quem participava nos jogos e com que jogo.

O campeonato realizou-se no dia vinte e nove de março, onde participaram os alunos apurados a nível da ESJC. No jogo do Produto, participou um aluno da turma 1 do 10.º ano.

4.2 Atividades Dinamizadas pelo Núcleo de Estágio de Matemática

Nesta seção é apresentada uma breve descrição das atividades dinamizadas e organizadas apenas pelo NEM, referindo com foram realizadas e como decorreram.

4.2.1 Construção de Rosáceas, Frisos e Padrões no *GeoGebra*

A atividade *Construção de Rosáceas, Frisos e Padrões no GeoGebra* realizou-se no dia vinte e seis de novembro com os alunos das turmas A e B do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica 2,3 do Poeta Manuel da Silva Gaio e teve uma duração de cinquenta minutos, para cada turma.

A professora estagiária iniciou a atividade com uma breve abordagem aos conceitos matemáticos de Rosácea, Friso e Padrão.

Fig. 4.3 Definição de Rosácea, Friso e Padrão

Posteriormente, através do software de geometria dinâmica *GeoGebra* online, os alunos foram orientados, pela professora estagiária e também pela ficha formativa fornecida (anexo O), para procurar uma imagem na *internet* e a colocar no domínio do programa. De seguida, os alunos tiveram de indicar um conjunto de instruções ao software para este construir uma Rosácea, um Friso e/ou um Padrão a partir da imagem escolhida.

De um modo geral, os alunos tiveram comportamentos adequados, revelando responsabilidade, interesse e empenho na realização da atividade.

Esta atividade pretendia motivar os estudantes para a disciplina de Matemática, principalmente para o subdomínio vetores, translações e isometrias.

Ao realizar esta sessão a estagiária teve contacto com o currículo de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico o que lhe permitiu um grande enriquecimento profissional e pessoal.

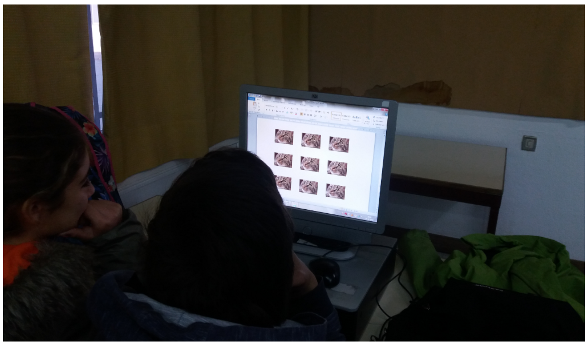


Fig. 4.4 Alunos do 8.º B durante a atividade

4.2.2 Visita de Estudo à Assembleia da República

No âmbito do tema Teoria Matemática das Eleições da disciplina de MACS, o NEM organizou uma visita de estudo à Assembleia da República.

A visita de estudo realizou-se no dia dezasseis de janeiro com os alunos de 10.º e 11.º ano do Curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades, acompanhados por quatro professoras da escola e pela professora estagiária.

A visita iniciou-se com uma visita guiada ao espaços da Assembleia da República e ao Palácio de São Bento, nomeadamente ao Refeitório dos Monges, à Escadaria Nobre, ao Salão Nobre e à Sala dos Passos Perdidos. Em seguida, foi visitada a Sala das Sessões neste momento os alunos puderam desfrutar, à vontade, dos vários lugares dos deputados e foi referido como é que estes se distribuem nas sessões plenárias, quantos deputados tem cada partido e como é que são eleitos, ou seja, foi explicado o método de Hondt. Por outro lado, também foram referidos outros tipos de eleições que se realizam em Portugal e o método que se utiliza em cada uma para eleger os seus representantes.

Depois do almoço, no Chiado, voltamos ao Palácio de São Bento para assistirmos a uma sessão parlamentar.

Para os alunos consolidarem os métodos eleitorais e estabelecer uma relação entre estes e o mundo real, foi pedido um relatório da visita e a determinação do número de deputados, por partido, da Assembleia da República por aplicação do método de Hondt.

De um modo geral, foi uma visita que agradou e motivou bastante os alunos. Tendo-se verificado que decorreu como se esperava e que estes tiveram um comportamento exemplar.

A participação pessoal, da estagiária, na organização da visita consistiu na coordenação do transporte e na elaboração do folheto para os Encarregados de Educação (anexo P) e de outros documentos necessários (lista de alunos e de contactos telefónicos). No dia da visita, acompanhou e orientou os alunos. Deste modo, ficou a perceber com é que se organizam visitas de estudo.

Fig. 4.5 AECC na Assembleia da República

4.2.3 Tarde de Matemática *Magia Matemática*

No início do ano letivo, surgiu a ideia de se realizar uma Tarde de Matemática da SPM. Depois de analisar as palestras disponíveis, o NEM escolheu a sessão proferida pela Professora Doutora Andreia Oliveira Hall do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, intitulada *Magia Matemática*.

Assim, no dia vinte de março, na presença dos alunos das turmas de estágio, a Professora Doutora Andreia proferiu a palestra.

Nesta sessão, assistimos a truques de magia Matemática, onde podemos ver como é que funcionam e qual a Matemática que está por trás.

A magia de *Adivinhar o Aniversário* foi a que mais fascinou os alunos. Neste truque, a oradora mostrou sucessivamente os cartões da figura 4.6.

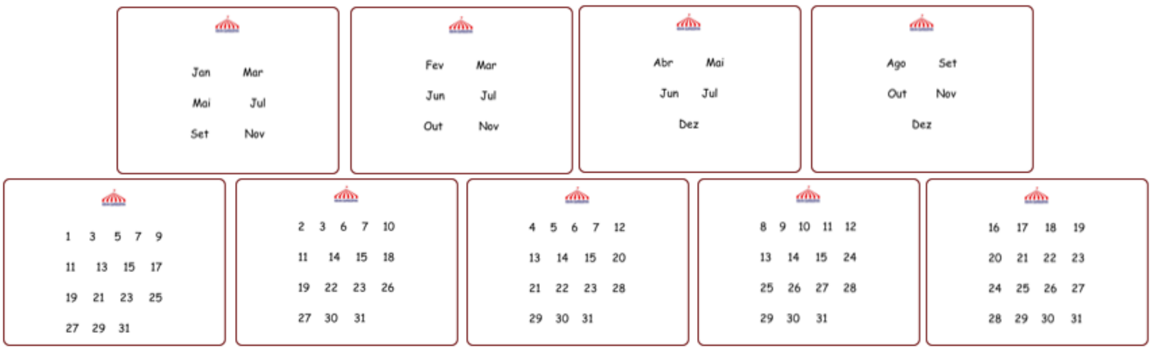


Fig. 4.6 Cartões do truque *Adivinhar o Aniversário*

Para cada cartão o aluno solicitado respondia às seguintes perguntas: "O mês do teu aniversário está aqui?" ou "O dia do teu aniversário está aqui?".

Por exemplo, suponhamos que o aluno nasceu no dia três de junho. A resposta aos primeiros quatro cartões deve ser respetivamente, não, sim, sim, não. Os cartões apresentados anteriormente foram construídos com base no código binário.

BASE 2 – CÓDIGO BINÁRIO

Mês	Base 2
Janeiro - 1	0001
Fevereiro - 2	0010
Março - 3	0011
Abril - 4	0100
Maio - 5	0101
Junho - 6	0110
Julho - 7	0111
Agosto - 8	1000
Setembro - 9	1001
Outubro - 10	1010
Novembro - 11	1011
Dezembro - 12	1100

Fig. 4.7 Código binário de cada mês do ano

Pelo facto de $0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 = 6$, concluímos que faz anos no mês de junho. Por um processo análogo para os dias, conclui-se que faz anos no dia três.

Outras magias realizadas que prenderam a atenção dos alunos foram, por exemplo, o *Número escondido*, *Nó na corda* e *Buraco na folha de papel*.

A Matemática que estava por trás da maioria dos truques apresentados era o cálculo de probabilidades. Com esta sessão os alunos do 10.º ano puderam recordar este conceito, enquanto os do 11.º ano tiveram a oportunidade de aplicar os conteúdos que estavam a ser lecionados em sala de aula, de uma forma divertida.

Ao longo da palestra os alunos mostraram-se participativos e atentos às explicações, para além disso tiveram um excelente comportamento.

Fig. 4.8 Sessão *Magia Matemática*: à esquerda a Doutora Andreia Hall e à direita uma aluna do 10.º 2

4.2.4 Visita de Estudo à Exposição Escher e à Exposição do Corpo Humano – Ciência da Vida

Com o objetivo de motivar os alunos para a disciplina de Matemática A através de outras formas de conhecimento diferentes das tradicionais salas de aula, de introduzir novos conteúdos, de consolidar os conceitos abordados na aula e de estabelecer uma relação entre conteúdos lecionados e o mundo real, o NEM realizou uma visita de estudo à Exposição Escher, ao Centro de Congressos da Alfândega do Porto.

A visita de estudo realizou-se no dia vinte e três de abril com os alunos de 10.º, 11.º e 12.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias acompanhados por três professoras e pela professora estagiária.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um especialista em desenhos impossíveis e na criação de ilusões de ótica, através do uso de perspetivas, da Geometria Hiperbólica e da Topologia [19].

Os alunos ao observarem as obras de Escher ficaram, por exemplo, a conhecer a Geometria Hiperbólica, onde as reflexões, rotações e translações, segundo retas hiperbólicas (que são os diâmetros), são isometrias. Nesta Geometria considera-se que por um ponto exterior a uma reta há inúmeras retas paralelas à primeira.

Fig. 4.9 *Mão com Esfera Refletora*, 1935

Por exemplo, na gravura *Mão com esfera refletora* os dedos do artista seguram a esfera como, também, toda a mão como imagem refletida. A mão real toca na mão refletida e os pontos em contacto têm o mesmo tamanho.

Depois de um almoço na baixa da cidade do Porto, voltamos ao centro de congressos da Alfândega do Porto para uma visita à exposição do Corpo Humano – Ciência da Vida.

De um modo geral, foi uma visita que agradou e motivou bastante os alunos. Tendo se verificado que decorreu como se esperava e que estes tiveram um comportamento exemplar.

A participação pessoal, da estagiária, na organização da visita consistiu na elaboração do folheto para os Encarregados de Educação (anexo P) e de outros documentos necessários (lista de alunos e de contactos telefónicos). No dia da visita, acompanhou a turma 1 do 12.º ano. Deste modo, aprofundou os conhecimentos que adquiriu na organização da visita de estudo descrita na secção 4.2.2.

4.2.5 Concurso *Quem quer ser matemático*

O concurso *Quem quer ser matemático* foi dinamizado pela professora estagiária e desenvolvido com os alunos da turma 1 do 10.º ano no dia seis de junho.

Este concurso foi desenvolvido na plataforma *Kahoot!* e pretendia que os alunos fizessem uma revisão dos conteúdos lecionados ao longo do ano de uma forma divertida.

O *Kahoot!* é uma plataforma gratuita que permite criar questionários, em que não há limite para o número de perguntas e o prazo de resposta para cada uma pode ser definido entre cinco e cento e vinte segundos. As perguntas são projetadas e cada aluno (ou um grupo de alunos) responde através de um *smartphone*, *tablet* ou computador. O *Kahoot!* é uma ótima ferramenta para motivar os alunos na sala de aula.

A primeira abordagem ao concurso foi realizada em sala de aula: explicaram-se as regras do mesmo, constituíram-se por sorteio os grupos de alunos (oito grupos) e realizou-se um treino para esclarecimento de possíveis dúvidas.

Assim, os alunos foram informados que se tratava de uma atividade de caráter obrigatório e que a participação de cada grupo na atividade seria pontuada de modo a contar, como trabalho, para a avaliação final do 3.º período.

Este concurso realizou-se na sala de aula e foi constituído por: dez perguntas de Álgebra (polinómios); dezanove perguntas de Geometria Analítica; e, onze perguntas de Funções Reais de Variável Real.

De um modo geral, os alunos cumpriram os objetivos da atividade, pois mostraram empenho em responder corretamente as perguntas colocadas, sem desistirem às primeiras dificuldades. Todos os alunos registaram excelentes comportamentos durante a atividade.

O regulamento e as questões de Funções Reais de Variável Real podem ser consultados nos anexos Q e R, respetivamente.

Este concurso enriqueceu a estagiária a nível profissional e pessoal, pois permitiu-lhe aprofundar os seus conhecimentos na plataforma *Kahoot!* e refletir sobre a importância do uso das novas tecnologias na aprendizagens da Matemática.

Fig. 4.10 Alunos da turma 1 do 10.º ano durante o *Quem quer ser matemático*

4.3 Atividades com Colaboração do Núcleo de Estágio de Matemática

Esta secção surge com o propósito de reunir todas as atividades não letivas realizadas no AECC com a participação do NEM o que possibilitou, à estagiária, ficar a conhecer novas atividades extracurriculares que pode propor aos seus futuros alunos.

4.3.1 Exposição Π *e outros irracionais*

Na ESJC, à semelhança dos anos letivos anteriores, foi realizada uma exposição com os trabalhos dos alunos do 10.º, 11.º e 12.º ano.

Os trabalhos dos alunos do 10.º ano foram alusivos ao número π.

O número π define-se através da razão entre o perímetro de uma circunferência e o diâmetro dessa circunferência.

Mas, para usarmos a definição anterior temos, em primeiro lugar, de calcular o perímetro de uma circunferência. A ideia é encaixar a circunferência entre polígonos regulares, inscritos e circunscritos, com um número de lados cada vez maior.

Arquimedes descobriu o perímetro de um polígono regular de noventa e seis lados, inscrito numa circunferência de raio um, o que permite obter uma boa aproximação do número π.

Ou seja, mostrou que

$$\pi = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \approx 3.14103$$

Por um processo análogo ao que utilizou para descobrir o valor aproximado de π por defeito descobriu um valor de π aproximado por excesso (circunferências circunscritas).

O número de ouro, Φ, foi o número irracional escolhido para os alunos do 11.º ano.

A razão de ouro é uma proporção que surge em vários contextos geométricos e aritméticos.

Uma situação simples onde aparece a razão de ouro foi desenvolvida por Euclides. Neste caso, consideremos um segmento de comprimento l e repartimo-lo em duas partes diferentes (uma maior e outra mais pequena). Seja x o comprimento da parte maior. Esta divisão está na razão de ouro quando:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x}.$$

Considerando que Φ representa o valor comum das duas frações representadas na razão de ouro, temos que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339\ldots$.

Para os alunos do 12.º ano o tema dos trabalhos foi o número de Neper.

O número de Neper ou número de Euler ($e \approx 2.718$) é um número irracional que é igual ao limite da sucessão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

A sucessão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente e limitada. Como toda a sucessão monótona e limitada é convergente, então esta sucessão é convergente.

Consideremos a função $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ definida de $\mathbb{R}$. Temos que $\lim f(x)$ é uma indeterminação do tipo 1^{∞}.

Seja $\ln f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. O limite de $\ln f(x)$ é dado por:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Que aplicando a regra de L'hopital é igual a:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Portanto, $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$.

Na exposição Π *e outros irracionais* é desafiada a criatividade de todos os alunos do Ensino Secundário. Nesta atividade os estudantes tinham de realizar um trabalho, individual ou em grupos de dois elementos, alusivo ao número irracional atribuído a cada ano de escolaridade em material reciclado, e que de preferência se pudesse vender.

Esta atividade teve caráter obrigatório e fez parte da avaliação sumativa no final do 2.º período.

Os alunos escolheram o que iriam realizar, sendo que estes trabalhos foram realizados fora dos tempos letivos.

Fig. 4.11 Exposição Π *e outros irracionais*

A maioria dos alunos participou na atividade proposta com empenho e responsabilidade. A média final dos trabalhos realizados foi muito positiva contribuindo para a melhoria dos resultados alcançados à disciplina de Matemática A e de MACS no final do 2.º período.

A exposição esteve patente no corredor principal da escola desde do dia catorze de março até ao dia três de maio.

Alguns destes trabalhos foram vendidos à comunidade escolar. Com esta atividade foram angariados cem euros que remeteram a favor da instituição *Ajuda de Berço*.

Com o objetivo de divulgar esta atividade a professora estagiária elaborou um cheque, que todos os alunos envolvidos assinaram e que esteve exposto no dia do Agrupamento, três de maio.

Fig. 4.12 Cheque *Irracionais Solidários*

4.3.2 Concurso *O número* π

O dia do π é comemorado a catorze de março, pelo facto de $3,14$ ser a aproximação mais conhecida deste número irracional.

Neste ano letivo, as comemorações do dia do π foram realizadas de forma criativa, através da realização de trabalhos alusivos a este número irracional, que é tão conhecido por todos os alunos.

O concurso *O número* π foi a atividade escolhida para assinalar a data. Foi da responsabilidade da Professora Marisabel Antunes e aberto à participação de todos os alunos que frequentavam o AECC, desde o 5.º ano ao 9.º ano de escolaridade.

Para participar nesta atividade os alunos tinham de construir um π utilizando materiais reciclados e que respeitasse os requisitos do regulamento.

Entretanto, foi constituído o júri do concurso do qual a professora estagiária fez parte. A cada jurado foram enviados documentos com os trabalhos a concurso (através de fotografias), sem identificação, para se atribuir a cotação desejada. Depois da apreciação dos jurados foram somadas as pontuações e divulgados os vencedores de cada categoria.

No âmbito desta atividade, o NEM realizou o regulamento e o cartaz do concurso.

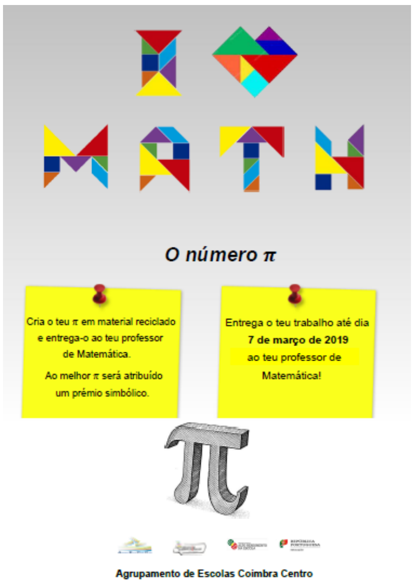


Fig. 4.13 Cartaz de divulgação do concurso *O número* π

4.4 Ações de Formação

Um professor, para além de promover atividades extracurriculares e de lecionar aulas deve investir na sua formação continuamente, na área curricular, nas metodologias de ensino e na educação em geral.

Em seguida é apresentada uma breve descrição das ações de formação frequentadas, ao longo do presente ano letivo, pela professora estagiária, que contribuíram para o seu enriquecimento pessoal e profissional.

4.4.1 O DL 54/2018: mudança de práticas para a inclusão

A ação de formação *O DL 54/2018: mudança de práticas para a inclusão* decorreu no dia doze de setembro na Escola Básica 2, 3 do Poeta Manuel da Silva Gaio sob a responsabilidade da Professora Maria João Antunes e da Professora Elvira Mendes (professoras da ESJC) e foi destinada aos professores do Departamento de Ciências Experimentais e de Matemática e Informática.

O objetivo desta ação foi sensibilizar os professores para o desenvolvimento de uma escola inclusiva com base no DL n.º 54/2018, 6 de julho.

Nesta formação foi apresentado o DL n.º 54/2018, de 6 de julho e dado conhecimento da Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva do AECC.

O Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, estabelece princípios e normas que garantem a inclusão de todos os alunos, através do aumento da sua participação nos processos de aprendizagem e na comunidade educativa.

4.4.2 Pontes para a Educação Inclusiva

Esta ação de formação teve lugar no dia oito de abril na Escola Básica 2, 3 de Arganil sob a responsabilidade da APPACDM e da Escola Profissional de Val do Rio, no âmbito do programa ERASMUS+.

Os palestrantes, da equipa portuguesa ERASMUS+ da APPACDM apresentaram as oportunidades e limitações da Educação e Formação Profissional Inclusiva em Portugal, no contexto do estudo que realizaram comparando com os resultados obtidos pelos restantes países envolvidos no projeto (Holanda, Lituânia, Estónia e Eslovénia).

As representantes da Escola Profissional de Val do Rio apresentaram o DL n.º 54/2018, de 6 de julho.

No final da ação de formação, os formandos realizaram um trabalho de grupo onde enumeraram os principais fatores de sucesso e as limitações do DL n.º 54/2018.

4.4.3 Khan Academy

A KA é promovida pela Direção-Geral da Educação, pela EDUCOM - Associação Portuguesa de Telemática Educativa e pela Fundação Portugal Telecom. A sua plataforma disponibiliza milhares de exercícios interativos e centenas de vídeos gratuitos para toda a comunidade educativa.

A KA proporciona uma nova forma de aprender gratuitamente, contando já com 64 idiomas. Sendo que 23500 exercícios e 1500 vídeos encontram-se no idioma português.

A plataforma KA em português integra caraterísticas interativas, apresentando sempre novos conteúdos através de vídeos explicativos e, também, contém exercícios práticos interativos, com sugestões de resolução e relatórios de progresso.

As oficinas da formação KA foram dinamizadas pela Professora Cláudia Ventura, num total de nove sessões. Os formandos trabalharam aspetos relacionados com as funcionalidades e metodologias de utilização da plataforma KA.

Como esta plataforma ainda não tem grandes conteúdos do Ensino Secundário a professora estagiária só esteve presente nas primeiras quatro sessões.

4.4.4 A dinâmica na sala de aula

No dia quatro de maio, a estagiária participou no colóquio intitulado *A dinâmica na sala de aula*, que foi dinamizado por três alunos do Mestrado em Ensino da Matemática, no DMUC.

Este colóquio teve como objetivo apresentar várias estratégias de ensino e recursos tecnológicos que os professores podem utilizar nas suas salas de aula.

Por fim, a professora convidada, a Professora Margarida Cid deu o seu testemunho sobre a sua vasta experiência como docente.

Capítulo 5

Reflexão Crítica do Ano de Estágio

O Estágio Pedagógico proporcionou aprendizagens dia após dia que são fundamentais para se evoluir de aluna para professora. No decorrer do mesmo foi possível colocar em prática alguns conhecimentos científicos e pedagógicos adquiridos durante a Licenciatura em Matemática e o primeiro ano de Mestrado, apreender novas estratégias e metodologias de ensino, perceber como funciona uma escola e quais os papéis que uma professora tem de desempenhar ao longo da sua vida profissional.

Ao longo deste ano letivo foram desempenhadas tarefas que se podem dividir em três componentes: organização e gestão da ESJC, prática pedagógica e atividades extracurriculares desenvolvidas.

As várias reuniões realizadas ao longo do ano permitiram melhorar o desempenho da escola e dos seus alunos, para que esta funcione com a eficácia que se deseja. Ao estar presente em algumas reuniões da escola e ao acompanhar uma direção de turma tive o privilégio de estar em contacto com algumas obrigações de uma professora.

A prática pedagógica é o trabalho mais importante que uma professora desempenha na sua profissão, envolvendo a gestão de uma turma na sala de aula, preparação/lecionação de aulas e a avaliação dos alunos.

A presença nas aulas lecionadas pela Professora Margarida foram uma mais valia, pois permitiram observar as metodologias e as estratégias utilizadas ao longo de cada aula, a preocupação que tinha para que todos os alunos compreendessem os conteúdos lecionados, o rigor científico com que abordava os conteúdos e as formas de interagir com os alunos. A observação das aulas lecionadas pela Orientadora Cooperante foram, sem dúvida, muito enriquecedoras como professora estagiária.

A relação com a Professora Margarida foi muito boa, o que me permitiu aprender com a sua experiência e com o seu conhecimento e, também, crescer a nível pessoal. Ao longo do ano, foram sendo debatidas as estratégias e as metodologias a utilizar para lecionar os conteúdos em sala de aula e, também, as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem.

O apoio da Professora Doutora Helena Albuquerque, foi incondicional, pois estava sempre disponível para transmitir os seus conhecimentos e para esclarecer perguntas/dúvidas.

Durante o Estágio Pedagógico as orientadoras, foram fazendo algumas críticas construtivas que permitiram melhorar e aperfeiçoar a minha prática letiva.

As atividades extracurriculares proporcionaram aos alunos outras formas de conhecimento diferentes das tradicionais salas de aula e intensificar a qualidade das aprendizagens, a nível pessoal e social, tendo em conta o perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória.

Com todos os alunos que tive a oportunidade de trabalhar ao longo deste ano letivo estabeleci uma relação de proximidade. Em muitos casos foi possível ficar a conhecer as suas expetativas e motivações.

Como futura docente, pretendo ser a mesma professora para todos os alunos que irei encontrar ao longo da minha carreira. Na minha opinião, um dos maiores desafios desta profissão é conseguir chegar de forma útil a todos os alunos e atender a cada um deles respeitando todas as suas particularidades.

Uma outra grande consideração que faz com que esta profissão seja maravilhosa é que um "desafio", por exemplo uma planificação de uma aula ou até mesmo de um teste, ao ser colocado em "prática" pela segunda vez tem sempre aspetos que devem ser melhorados e/ou corrigidos. Penso que só desta forma é que é possível ser uma professora cada vez mais competente.

Este percurso fez com que aumentasse a minha paixão por esta magnífica profissão tendo a certeza que é a profissão como professora que desejo exercer no meu futuro. Mas tenho consciência que uma professora está sempre a aprender e que ainda tenho muitos conhecimentos para adquirir, mas que irei alcançar muitos deles com os anos de experiência.

Para terminar, agradeço a todos os que estiveram presentes durante este ano letivo, do qual guardo imensas memórias.

Bibliografia

[1] Andrade, C., Pereira, P., Pimenta, P. (2018). Novo Ípsilon 10 - Matemática A. Raiz Editora.

[2] Costa, B., Rodrigues, E. (2018). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

[3] Lima, E., L. (1994). Curso de Análise - vol. 1. IMPA.

[4] Lima, E. L. (2001). Geometria Analítica e Álgebra Linear. IMPA.

[5] Fernandes, R. L., Ricou, M. (2004). Introdução à Álgebra, IST Press.

[6] Caraça, B. J. (1998). Conceitos Fundamentais da Matemática. Gradiva.

[7] Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática A.

[8] Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., Timóteo, M. C. (2013). Caderno de Apoio 10.º ano.

[9] Ministério da Educação e Ciência (2018). Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos.

[10] Agrupamento de Escolas Coimbra Centro. https://www.aecoimbracentro.pt. [maio 2019].

[11] Biografia de Jaime Cortesão. https://sigarra.up.pt/. [maio 2019].

[12] Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas Coimbra Centro. https://www.aecoimbracentro.pt. [maio 2019].

[13] Unidade de Apoio ao Alto Rendimento na Escola. https://desportoescolar.dge.mec.pt/unidade-de-apoio-ao-alto-rendimento-na-escola. [junho 2019].

[14] Olimpíadas Portuguesas de Matemática. http://olimpiadas.spm.pt/. [janeiro 2019].

[15] Concurso de Matemática Pangea. https://www.concurso-de-pangea.com.pt. [maio 2019].

[16] Canguru Matemático sem Fronteiras. https://www.mat.uc.pt/canguru/. [março 2019].

[17] XV Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. http://ludicum.org/cnjm/2018-2019-cnjm15. [abril 2019].

[18] Sociedade Portuguesa de Matemática. https://www.spm.pt/. [janeiro 2019].

[19] Maurits Cornelis Escher. https://www.spm.pt/escher. [abril 2019].

[20] Kahoot!. https://kahoot.com/. [junho 2019].

Anexo A

Planificação Anual do Núcleo de Estágio de Matemática

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Planificação Anual de Atividades do Núcleo de Estágio de Matemática

1. Planificação de Atividades não Letivas

Atividades	Objetivos	Intervenientes			Recursos		Local	Calendarização
		Organização	Público-Alvo	Responsáveis	Humanos	Materiais		
Olimpíadas Portuguesas de Matemática	- Criar, incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática; - Treinar a resolução de problemas; - Desenvolver o conhecimento e o raciocínio lógico matemático; -Criar hábitos de trabalho individual; -Detetar vocações precoces para esta área do saber.	Sociedade Portuguesa de Matemática	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Professores e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Salas Provas	Escola Secundária de Jaime Cortesão, de José Falcão e Agrupamen-to de Escolas Sebastião da Gama, Setúbal	**1.ª eliminatória:** 7 de novembro de 2018 **2.ª eliminatória:** 9 de janeiro de 2019 **Final Nacional:** 4 a 7 de abril de 2019
Rosáceas, Frisos e Padrões no *GeoGebra*	- Promover o gosto pela Matemática; - Construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria; - Explorar padrões geométricos; - Permitir o contacto com programas de geometria dinâmica.	Núcleo de Estágio	Alunos das turmas A e B do 8.º ano da Escola Básica 2, 3 do Poeta Manuel da Silva Gaio	Núcleo de Estágio	Alunos da Escola Básica 2, 3 do Poeta Manuel da Silva Gaio	Sala de informática Fichas formativas	Escola Básica 2, 3 do Poeta Manuel da Silva Gaio	26 de novembro de 2018

Visita de Estudo à Assembleia da República	- Consciencializar os alunos para a importância da participação cívica e democrática; - Desenvolver o espírito de observação e alargar horizontes culturais dos alunos; - Consolidar conhecimentos adquiridos e desenvolver o espírito de grupo.	Núcleo de Estágio	Alunos das turmas 10.º2 e 11.º2 da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Professores e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Transporte Folheto	Lisboa	16 de janeiro de 2019
Exposição *π e outros irracionais*	- Promover a cidadania ativa (solidariedade social); - Aumentar a literacia Matemática; - Sensibilizar os alunos para questões ambientais (reciclar materiais).	Professoras de Matemática da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Alunos das turmas 10.º1, 11.º1 e 12.º1 da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Professoras de Matemática da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Professoras de Matemática e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Placares	Escola Secundária de Jaime Cortesão	14 de março de 2019 a 3 de maio de 2019
Tarde de Matemática – *Magia Matemática*	- Aplicação da Matemática a situações da vida real; - Perceber que conceitos matemáticos que estão por trás de truques de magia.	Sociedade Portuguesa de Matemática	Alunos das turmas 10.º1, 10.º2 e 11.º 2 da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Mediateca	Escola Secundária de Jaime Cortesão	20 de março de 2019

Concurso Matemática *Pangea*	- Motivar os alunos para a disciplina de Matemática; - Proporcionar aos alunos novas experiências de aprendizagem.	Pangea Internacional ASEDA (local)	Alunos do 10.º ano da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Sala Provas	Escola Secundária de Jaime Cortesão e Instituto Superior de Engenharia do Porto	**1.ª fase:** 22 de março de 2019 **2.ª fase:** 4 de maio de 2019
Canguru Matemático sem Fronteiras	- Estimular o gosto e o estudo pela Matemática; - Atrair os alunos que têm receio da disciplina de Matemática, permitindo que estes descubram o lado lúdico da disciplina; - Tentar que os alunos se divirtam a resolver questões matemáticas e percebam que conseguir resolver os problemas propostos é uma conquista pessoal muito recompensadora.	Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Professoras de Matemática da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Professoras e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Salas Provas	Escola Secundária de Jaime Cortesão	21 de março de 2019
XV Campeonato de Jogos Matemáticos	- Sensibilizar os alunos para a importância do jogo na aprendizagem da Matemática; - Proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem propícias ao desenvolvimento de estratégias cognitivas, resolução de problemas e raciocínio matemático.	Associação Ludus, Associação de Professores de Matemática, Sociedade Portuguesa de Matemática	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Professoras de Matemática da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Professoras e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Transporte	Maia	29 de março de 2019

Visita de Estudo à Exposição Escher e à do Corpo Humano – Ciência da Vida	- Promover a divulgação do conhecimento científico e tecnológico; - Identificação de conceitos matemáticos tais como pavimentações, simetrias, representações tridimensionais de figuras impossíveis, paradoxos, entre outros; - Ligações à vida real de situações matemáticas; - Intensificar a qualidade das aprendizagens promovendo o sucesso educativo para melhorar o grau de aquisição/consolidação das competências essenciais do aluno de forma a favorecer o seu desenvolvimento global, tendo em vista o perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória.	Núcleo de Estágio	Alunos das turmas 10.º1, 11.º 1 e 12.º 1 da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Professores e alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Transporte Folheto	Porto	23 de abril de 2019
Concurso *Quem quer ser Matemático*	- Fomentar o espírito de grupo e respeito pelos outros; - Promover o gosto pela Matemática; - Desenvolver o raciocínio matemático.	Núcleo de Estágio	Alunos da turma 10.º1 da Escola Secundária de Jaime Cortesão	Núcleo de Estágio	Alunos da Escola Secundária de Jaime Cortesão e Núcleo de Estágio	Sala 20	Escola Secundária de Jaime Cortesão	6 de junho de 2019

2. Planificação de Atividades Letivas

Período	Ano	Domínio	Conteúdos	Tempos letivos Tempos de 50 min.	Tempos letivos Total	Calendarização
1.º	**10.º** (Matemática A)	**Álgebra**	Racionalização de denominadores.	2	14	27.09.2018
		Geometria Analítica	- Norma de um vetor; - Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico; - Diferença entre vetores; - Propriedades algébricas das operações com vetores; - Coordenadas de um vetor; - Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; - Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares; - Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; - Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; - Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta; - Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação vetorial de uma reta; - Sistema de equações paramétricas de uma reta; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano.	12		09.11.2018 a 27.11.2018
2.º	**10.º** (Matemática A)	**Álgebra**	- Fatorização de polinómios envolvendo a divisão euclidiana de polinómios e a identificação de raízes;	4	10	08.02.2019 a 12.02.2019

			- Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios; - Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.			
		Funções Reais de Variável Real	- Função ou aplicação f de A em B, domínio, contradomínio e conjunto de chegada; - Produtos cartesianos de conjuntos; - Gráficos de funções; - Restrições de uma função; - Imagem de um conjunto por uma função; - Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x)+c, f(x-c), f(-x)$ e $-f(x)$, com c um número real.	6		14.02.2019 a 15.02.2019 e 26.03.2019
3.º	**10.º** (Matemática A)	**Funções Reais de Variável Real**	- Domínio, contradomínio, eixo de simetria, coordenadas do vértice, extremos, monotonia, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas; - Raízes de funções quadráticas; - Inequações quadráticas; -Resolução de problemas envolvendo a função quadrática e a modelação de fenómenos reais.	6	6	14.05.2019 a 17.05.2019
Total					**30**	

Anexo B

Planificação Anual de Matemática A - 10.º Ano

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

Planificação Anual

Matemática A – 10.º Ano

Departamento de Matemática e Informática

Ano letivo 2018/2019

1. A planificação para a disciplina de Matemática A, 10.º Ano, tem por base:
   - o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologados em 2014;
   - as Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos;
   - o manual adotado "Novo Ípsilon", de acordo com os itens anteriores.

2. Esta planificação está de acordo com o calendário escolar para o ano letivo 2018/2019. Nas tabelas apresentadas abaixo está resumido o número de aulas previstas para cada período, tendo os domínios que irão ser lecionados bem como outras atividades previstas:

Período	N.º de aulas previstas (50 min)
1.º	74
2.º	80
3.º	46
Total	**200**

Período	Domínios	N.º de aulas previstas (50 min)	Total
1.º	Álgebra[1]	8	**62**
	Lógica e Teoria dos Conjuntos[2]	8	
	Geometria Analítica	46	
2.º	Geometria Analítica (cont.)	14	**68**
	Polinómios	32	
	Funções Reais de Variável Real	22	
3.º	Funções Reais de Variável Real (cont.)	37	**37**
Total		**167**	**167**

[1] Breve abordagem a conteúdos de Álgebra não referidos nas Aprendizagens Essenciais (Radicais e Potências de expoente racional).
[2] Introdução de conteúdos da Lógia e da Teoria dos Conjuntos (tema transversal) necessários para a compreensão da Geometria Analítica e das Funções Reais de Variável Real.

Outras atividades	N.º de aulas previstas (50 min)			Total
Apresentação. Definição de regras de funcionamento dentro da sala de aula. Considerações sobre a avaliação dos alunos na disciplina. Avaliação diagnóstica	2	-	-	**2**
Provas de avaliação, atividades de consolidação e remediação	7	8	4	**19**
Autoavaliação	1	1	1	**3**
Trabalhos de Projeto	2	3	4	**9**
Total	**12**	**12**	**9**	**33**
Períodos	**1.º**	**2.º**	**3.º**	

1.º Período

Domínio/Subdomínio/Conteúdo[3]	Aprendizagens Essenciais[4]	Ações estratégicas[5]	Recursos/ Instrumentos de avaliação	Tempos letivos	Articulação disciplinar
Apresentação. Definição de regras de funcionamento dentro da sala de aula. **Considerações sobre a avaliação dos alunos na disciplina.** **Avaliação diagnóstica.**	----------	----------	- Planificação; - Critérios de avaliação; - Prova de avaliação diagnóstica.	2	- Português - Filosofia - Educação Física - Física e Química
Álgebra **Radicais** - Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes; - Racionalização de denominadores; - Resolução de problemas envolvendo operações com radicais.	Não contemplado nas Aprendizagens Essenciais	- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas; - Introduzir a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma	- Manual “Novo Ípsilon”; - Caderno de Atividades; - Apresentações em PowerPoint; - Apresentações multimédia; - Animações do manual digital;	8	

[3] Programa e Metas Curriculares Matemática A. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2014. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.
[4] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.
[5] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.

<table>
<tr>
<td>Potências de expoente racional
- Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência;
- Resolução de problemas envolvendo operações com potências.</td>
<td></td>
<td rowspan="2">abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios;
- Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos;
- Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjeturas;</td>
<td rowspan="2">- Calculadora gráfica;
- GeoGebra.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lógica e Teoria dos Conjuntos
Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos (Proposições)
- Valor lógico de uma proposição; Princípio de não contradição;
- Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência;
- Prioridades das operações lógicas;
-Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedades da dupla negação; Princípio do terceiro excluído; Princípio da dupla implicação;
- Propriedade comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção;
- Primeiras Leis de De Morgan;
- Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.</td>
<td>Tema Transversal[6]</td>
<td>8</td>
<td></td>
</tr>
</table>

[6] Introdução de conteúdos da Lógia e da Teoria dos Conjuntos necessários para a compreensão da Geometria Analítica e das Funções Reais de Variável Real.

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos (Condições e Conjuntos) - Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; - Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão; - União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar; - Inclusão de conjuntos; - Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem; - Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.		- Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de funções e geometria; - Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos; - Enquadrar do ponto de vista da História da Matemática os conteúdos abordados que para o efeito se revelem particularmente adequados; - Resolver problemas,			
Geometria Analítica **Geometria analítica no plano** - Referenciais ortonormados; - Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta; - Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; - Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos; - Equação cartesiana reduzida da circunferência; - Inequações cartesianas de semiplanos; - Inequações cartesianas de círculos; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano;	- Reconhecer o significado da fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas; - Reconhecer o significado das coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta, da equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta, das			46	

- Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. **Cálculo vetorial no plano** - Norma de um vetor; - Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico; - Diferença entre vetores; - Propriedades algébricas das operações com vetores; - Coordenadas de um vetor; - Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; - Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares; - Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; - Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; - Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta; - Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação vetorial de uma reta; - Sistema de equações paramétricas de uma reta; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano.	equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos (incluindo semiplanos e círculos) e da equação cartesiana reduzida da circunferência; - Identificar Referenciais cartesianos ortonormados do espaço; - Reconhecer o significado das Equações de planos paralelos aos planos coordenados; Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; Distância entre dois pontos no espaço; Equação do plano mediador de um segmento de reta; Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; Inequação cartesiana reduzida da esfera;	atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens; - Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões; - Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.			

Geometria analítica no espaço - Referenciais cartesianos ortonormados do espaço; - Equações de planos paralelos aos planos coordenados; - Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; - Distância entre dois pontos no espaço; - Equação do plano mediador de um segmento de reta; - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; - Inequação cartesiana reduzida da esfera; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço; - Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.	- Coordenadas da soma e da diferença de vetores; Coordenadas do produto de um escalar por um vetor e do simétrico de um vetor; Relação entre as coordenadas de vetores colineares; Vetor diferença de dois pontos; Cálculo das respetivas coordenadas; Coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; Vetor diretor de uma reta; Relação entre as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta; Paralelismo de retas e igualdade do declive; Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Norma de um vetor; Multiplicação de um escalar por um vetor				

	e a sua relação com a colinearidade de vetores e com o vetor simétrico; Soma e diferença entre vetores; Propriedades das operações com vetores; Coordenadas de um vetor; Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas.				
Autoavaliação	----------	----------	Fichas de autoavaliação	1	----------
Provas de avaliação, atividades de consolidação e remediação	----------	----------	Provas de avaliação escrita	7	----------
Trabalhos de Projeto	----------	----------	----------	2	----------
Total de aulas				**74**	

2.º Período

Domínio/Subdomínio/Conteúdo[7]	Aprendizagens Essenciais[8]	Ações estratégicas[9]	Recursos/Instrumentos de avaliação	Tempos letivos	Articulação disciplinar
Geometria Analítica **Cálculo vetorial no espaço** - Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; - Equação vetorial da reta no espaço; - Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.	- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; - Reconhecer o significado e aplicar na resolução de problemas a equação vetorial de uma reta no plano e no espaço.	- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas; - Introduzir a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios; - Tirar partido da utilização da	- Manual “Novo Ípsilon”; - Caderno de Atividades; - Apresentações em PowerPoint; - Apresentações multimédia; - Animações do manual digital; - Calculadora gráfica; - GeoGebra.	14	- Português - Filosofia - Educação Física - Física e Química
Polinómios **Divisão inteira de polinómios** - Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini; - Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto; - Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades;	- Reconhecer, identificar e aplicar na resolução de problemas a divisão euclidiana de polinómios e a regra de Ruffini; a Divisibilidade de polinómios; o Teorema do resto; a			32	

[7] Programa e Metas Curriculares Matemática A. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2014. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.
[8] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.
[9] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.

- Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios; - Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.	Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades.	tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos; - Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjeturas; - Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de funções e geometria; - Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das			
Funções Reais de Variável Real **Generalidades acerca de funções** - Produtos cartesianos de conjuntos; - Gráficos de funções; - Restrições de uma função; - Imagem de um conjunto por uma função[10]; - Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas[11]; - Composição de funções; - Função inversa de uma função bijetiva. **Generalidades acerca de funções reais de variável real** - Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas; - Propriedades geométricas dos gráficos de funções; - Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; - Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa[12];	- Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação; - Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação; - Reconhecer e interpretar a paridade; as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; - Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$,			22	

[10] Conteúdo não comtemplado nas aprendizagens essenciais que será lecionado caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita.
[11] Conteúdo não comtemplado nas aprendizagens essenciais que será lecionado caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita.
[12] Conteúdo não comtemplado nas aprendizagens essenciais que será lecionado caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita.

- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c e d números reais, e não nulos.	$f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.	outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos; - Enquadrar do ponto de vista da História da Matemática os conteúdos abordados que para o efeito se revelem particularmente adequados; - Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens; - Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por			

		escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões; - Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.			
Autoavaliação	----------	----------	Fichas de autoavaliação	1	----------
Provas de avaliação, atividades de consolidação e remediação	----------	----------	Provas de avaliação escrita	8	----------
Trabalhos de Projeto	----------	----------	----------	3	----------
Total de aulas				**80**	

3.º Período

Domínio/Subdomínio/Conteúdo[13]	Aprendizagens Essenciais[14]	Ações estratégicas[15]	Recursos/Instrumentos de avaliação	Tempos letivos	Articulação disciplinar
Funções Reais de Variável Real **Generalidades acerca de funções reais de variável real** - Intervalos de monotonia de uma função real de variável real e extremos relativos e absolutos; caso das funções afins e caso das funções quadráticas; - Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real; - Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas; - Funções definidas por ramos; - Estudo da função $x \rightarrow a\|x-b\|+c, a \neq 0$; - As funções $x \rightarrow \sqrt{x}$ e $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas[16];	- Reconhecer e interpretar os intervalos de monotonia de uma função real de variável real; os extremos relativos e absolutos e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação; - Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação;	- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas; - Introduzir a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios; - Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar,	- Manual “Novo Ípsilon”; - Caderno de Atividades; - Apresentações em PowerPoint; - Apresentações multimédia; - Animações do manual digital; - Calculadora gráfica; - GeoGebra.	37	- Português - Filosofia - Educação Física - Física e Química

[13] Programa e Metas Curriculares Matemática A. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2014. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.
[14] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.
[15] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf.
[16] Conteúdo não comtemplado nas aprendizagens essenciais que será lecionado caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita.

- Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b}$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b}, a \neq 0$[17]; - Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais e módulos; - Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real; - Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.	- Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções definidas por ramos e a função módulo e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação.	criar e implementar algoritmos; - Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjeturas; - Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de funções e geometria; - Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos; - Enquadrar do ponto de vista da História da Matemática os conteúdos abordados que para o			

[17] Conteúdo não comtemplado nas aprendizagens essenciais que será lecionado caso o nível de conhecimento dos alunos da turma o permita.

		efeito se revelem particularmente adequados; - Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens; - Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões; - Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.			
Autoavaliação	----------	----------	Fichas de autoavaliação	1	----------
Provas de avaliação, atividades de consolidação e remediação	----------	----------	Provas de avaliação escrita	4	----------
Trabalhos de Projeto	----------	----------		4	----------
Total de aulas				**46**	

Anexo C

Planificação a Médio Prazo de MACS - 10.º Ano

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

Planificação a Médio Prazo

Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 10.º Ano

Departamento de Matemática e Informática

Ano letivo 2018/2019

1.º Período

Tema	Conteúdo	Aprendizagens Essenciais[1]	N.º de aulas (50')
---------	Apresentação. Definição de regras de funcionamento dentro da sala de aula. Considerações sobre a avaliação dos alunos na disciplina. Avaliação diagnóstica.	---------	2
Razões e Percentagens	- Razões; - Percentagens.	Não contemplado nas Aprendizagens Essenciais	5,5
Métodos de apoio à Decisão	- Teoria Matemática das eleições; - Maioria simples ou relativa. Sistema maioritário de uma volta; - Maioria absoluta. Sistemas maioritários de duas voltas; - Sistemas eleitorais posicionais ou preferenciais: Método da pluralidade, Método run-off standard, Método run-off sequencial, Método de Borda, Método de Condorcet; - Método eleitoral de aprovação; - Sistemas de representação proporcional: Divisor padrão, Quota padrão, Regra da quota, Quota mínima, Quota máxima, Quota arredondada; - Método de Hondt; - Método de Sainte-Lague; - Método de Hamilton; - Método de Jefferson; - Método de Adams; - Método de Webster; - Método de Hungtinton-Hill;	- Compreender os diferentes sistemas de votação; - Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições; - Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes; - Analisar algumas situações paradoxais; - Compreender que há limitações à melhoria dos sistemas de eleições; - Compreender a problemática da partilha equilibrada; - Experimentar os algoritmos usados em situações de partilha no caso contínuo e no caso discreto;	30

[1] Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. [Em linha]. Ministério da Educação e Ciência, 2018. [Consult. 18 set. 2018]. Disponível na Internet: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_macs.pdf.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>- Vantagens e desvantagens dos métodos eleitorais estudados.</td><td rowspan="2">- Compreender que a aplicação de algoritmos de partilha diferentes pode produzir resultados diferentes;
- Conceber e analisar estratégias variadas de resolução de problemas, e criticar os resultados obtidos;
- Compreender e construir argumentos matemáticos e raciocínios lógicos;
- Resolver problemas de modelação matemática, no contexto da vida real;
- Resolver problemas e atividades de investigação tirando partido da tecnologia, nomeadamente da calculadora gráfica e de programas como a Folha de Cálculo;
- Desenvolver competências sociais de investigação.</td><td></td></tr>
<tr><td>- Teoria da partilha equilibrada;
- Método do divisor-selecionador;
- Método do divisor único;
- Método do selecionador único;
- Método do último a diminuir;
- Método da faca deslizante;
- Divisão livre de inveja: algumas considerações;
- Método do ajuste na partilha;
- Método das licitações secretas;
- Método dos marcadores.</td><td>18</td></tr>
<tr><td>----------</td><td>Autoavaliação</td><td>----------</td><td>1</td></tr>
<tr><td>----------</td><td>Testes de avaliação, atividades de consolidação e remediação</td><td>----------</td><td>8</td></tr>
<tr><td>----------</td><td>Trabalhos de Projeto (Sistemas Eleitorais – Angola, Bélgica, Nepal, Portugal e Rússia)</td><td>----------</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total de aulas</td><td>69,5</td></tr>
</table>

Anexo D

Plano de Aula - Racionalização de denominadores

Escola Secundária Jaime Cortesão

Plano de aula de Matemática

Professora estagiária: Raquel Martins

Orientadora Científica: Professora Doutora Helena Albuquerque

Orientadora Cooperante: Professora Margarida Cid

- **Disciplina:** Matemática A
- **Ano/Turma:** 10.º 1
- **Lições n.º:** 9 e 10
- **Sala:** 20
- **Ano letivo:** 2018/2019
- **Data:** 27.09.2018
- **Hora:** 10h30
- **Tempos letivos (50 minutos):** 2

Domínio:

Álgebra (**ALG10**).

Subdomínio:

Radicais.

Objetivo geral:

Definir e efetuar operações com radicais (**ALG10_1**).

Descritores:

- ✓ Designar também por «fração» a representação «$\frac{a}{b}$» do quociente entre números reais a e b (com $b \neq 0$), a e b, neste contexto, respetivamente por «numerador» e «denominador» e identificar duas frações como «equivalentes» quando representam o mesmo número (**ALG10_1.10**);
- ✓ Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt{b}$ ou $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$ (a e c números inteiros, b e d números naturais) (**ALG10_1.11**).

Aprendizagens Essenciais:

Este domínio não está referido nas aprendizagens essenciais.

Conteúdo:

Racionalização de denominadores.

❖ Pré-requisitos:

- ✓ Conhecer a noção de fração e representá-la por $\frac{a}{b}$, sendo a e b números racionais e $b \neq 0$;
- ✓ Saber aplicar os casos notáveis;
- ✓ Reconhecer as propriedades algébricas dos radicais.

❖ Capacidades transversais:

- ✓ Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos;
- ✓ Raciocínio Matemático;
- ✓ Comunicação Matemática.

❖ Metodologias/Estratégias:

- ✓ Breve revisão dos conteúdos da aula anterior;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na resolução de atividades de raciocínio que obriguem a formular e testar conjeturas e generalizações;
- ✓ Trabalho de pares na resolução de exercícios de consolidação;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na discussão das conclusões e na síntese da aula.

❖ Recursos/Materiais Didáticos:

- ✓ Manual adotado (ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro – **Novo Ípsilon 10 - Volume 1, Matemática A, 10.º ano | Ensino Secundário**. 1.ª Edição. Raiz Editora, 2018. 143 p. ISBN 978-989-744-225-4);
- ✓ Quadro tradicional e giz.

❖ Avaliação dos alunos:

- ✓ Observação direta: realização de tarefas (empenho), interesse e cumprimento das regras;
- ✓ Participação oral.

❖ Descrição da Aula - Estratégias e Desenvolvimento da aula

A professora inicia a aula com uma breve revisão do que foi lecionado na aula anterior.

Recorde:

1. Dados dois números reais a e c, um número real não negativo b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, tem-se que $a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$.

Dados três números reais a, b e c e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, tem-se que $a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$.

2. Dados dois números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, tem-se que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, tem-se que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

3. Dados dois números reais não negativos a e b, com $b \neq 0$ e um número $n \in \mathbb{N}$ par, tem-se que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Dados dois números reais a e b, com $b \neq 0$ e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, tem-se $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

4. Dados dois números naturais pares n e m e um número real não negativo a, tem-se que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$.

Dados dois números naturais ímpares n e m e um número real a, tem-se: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$.

5. Dado um número real não negativo a, um número $n \in \mathbb{N}$ par e $m \in \mathbb{N}$, tem-se: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ e $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$.

Dado um número real a, um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar e $m \in \mathbb{N}$, tem-se: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ e $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$.

De seguida, em grupo turma, pede aos alunos para simplificarem as seguintes expressões:

$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

$2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (2 + 7 - 5)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{216} - \sqrt{6} = 3\sqrt{2^3 \times 3^3} - \sqrt{6} = 17\sqrt{6}$

Caso existam dúvidas, a professora solicita voluntários para a correção do trabalho de casa, no quadro. Se a dúvida for da maioria dos alunos a professora resolve os exercícios no quadro.

Os alunos solicitados para efetuarem a correção do trabalho de casa: resolvem, explicam e justificam, se necessário.

A professora orienta os alunos voluntários bem como o resto da turma na correção do trabalho de casa aproveitando para esclarecer possíveis dúvidas e para fazer revisões, caso seja necessário.

O enunciado do trabalho de casa pode ser consultado em anexo.

Página 82

28.

28.1. $\sqrt{50} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

28.2. $\sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$

28.3. $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

28.4. $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$

28.5. $\left(3 - 2\sqrt{7}\right)^2 + 6\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}} = 9 + 28 - 12\sqrt{7} + 6\frac{\sqrt{2^3 \times 7}}{\sqrt{2}} = 37 - 12\sqrt{7} + 12\sqrt{7} = 37$

29.

29.1. $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} + \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} = 7\sqrt[4]{2}$

29.2. $\sqrt[3]{17 + \sqrt{27 + \sqrt{81}}} = \sqrt[3]{17 + \sqrt{27 + 9}} = \sqrt[3]{17 + 6} = \sqrt[3]{23}$

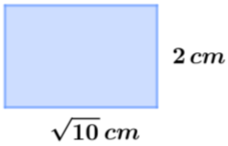
29.3. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}} \times \sqrt{\sqrt[9]{5^2}} \div \sqrt[6]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[18]{5} \times \sqrt[18]{5^2} \div \sqrt[18]{5} = \sqrt[18]{5} \times \sqrt[18]{5} = \sqrt[18]{25}$

29.4. $\frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2\sqrt{3}}}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{15}$

A professora introduz a nova matéria recorrendo aos exemplos apresentados abaixo e solicita a participação oral dos alunos, em grupo turma, para se formularem e testarem as conjeturas e generalizações pretendidas ao longo da aula.

Os alunos ouvem, registam e esclarecem possíveis dúvidas.

Começa por estender o conceito de fração através da razão entre a medida da largura e a medida do comprimento do retângulo representado abaixo.



A razão entre a medida da largura e a medida do comprimento do retângulo é $\frac{2}{\sqrt{10}}$ que é uma fração cujo numerador é 2 e o denominador é $\sqrt{10}$.

Atendendo, que se designa por fração toda a representação da forma $\frac{a}{b}$ com a e b dois números reais e $b \neq 0$, onde o número a se designa por numerador e o número b por denominador da fração, $\frac{2}{\sqrt{10}}$ é uma fração em que o denominador é um número irracional.

Designa-se por **racionalização do denominador** o processo que consiste em transformar uma fração em que o denominador envolve radicais numa fração equivalente sem radicais no denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{100}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vamos racionalizar denominadores da forma $a\sqrt{b}$ e da forma $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$, sendo a e c números inteiros, b e d números naturais.

<u>**1.º Caso**</u>**:** Denominadores da forma $a\sqrt{b}$, sendo a um número inteiro e b um número natural.

<u>**Exemplos**</u>:

$$\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3 \times \sqrt{7}}{2\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2 \times 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

De um modo geral, (podemos levar os alunos a fazer generalizações a partir destes exemplos)

$$\frac{x}{\sqrt{b}} = \frac{x \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{x\sqrt{b}}{b}, x \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$$

<u>**2.º Caso**</u>: Denominadores da forma $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$, sendo a e c números inteiros, b e d números naturais.

Nota: Dada uma expressão do tipo $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$, sendo a e c números inteiros, b e d números naturais, chama-se conjugado dessa expressão a $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ ou $c\sqrt{d} - a\sqrt{b}$.

Exemplos:

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4 \times (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4\sqrt{5}+4}{5-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = 1+\sqrt{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3 \times (\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{7-2} = \frac{3}{5}(\sqrt{7}-\sqrt{2})$$

De um modo geral,

$$\frac{x}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} = \frac{x \times (a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d})(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})} = \frac{x\,(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{a^2b - c^2d}, x \in \mathbb{R}, a\ e\ c \in \mathbb{Z}, b\ e\ d\ \in \mathbb{N}$$

Para os alunos consolidarem a matéria da aula, é sugerido que realizem os exercícios 20 (alíneas 20.1., 20.2., 20.3. e 20.4.), 21 e 22(alíneas 22.3. e 22.4.), da página 79 e o exercício 63 da página 95, do manual.

A professora circula pela sala, para verificar se os alunos estão a resolver os exercícios e/ou se têm dúvidas na sua resolução e esclarece as possíveis dúvidas.

Depois de os alunos resolverem os exercícios no caderno, solicita que resolvam os exercícios no quadro. Posteriormente, verifica se a resolução está correta e apresenta todos os passos necessários à sua compreensão.

O enunciado dos exercícios pode ser consultado em anexo.

Página 79

20.

20.1. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

20.2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

20.3. $\frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$

20.4. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$

21.

21.1. $\frac{2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1-2} = -2-2\sqrt{2}$

21.2. $\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15}}{1-3} = \frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$

21.3. $\frac{1}{3\sqrt{2}+2} = \frac{1(3\sqrt{2}-2)}{(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)} = \frac{3\sqrt{2}-2}{18-4} = \frac{3\sqrt{2}-2}{14} = \frac{3\sqrt{2}}{14} - \frac{1}{7}$

21.4. $\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} = \frac{9\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{18-12} = \frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

21.5. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})(\sqrt{3}+2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{3-20} = \frac{-\sqrt{6}-2\sqrt{10}+\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{17}$

21.6. $\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+3\sqrt{5})(\sqrt{7}+3\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-3\sqrt{5})(\sqrt{7}+3\sqrt{5})} = \frac{7+6\sqrt{35}+45}{7-45} = \frac{-7-6\sqrt{35}-45}{38} = \frac{-26-3\sqrt{35}}{19}$

22.

22.3. $\frac{3a}{\sqrt{3a+1}+1} = \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{(\sqrt{3a+1}+1)(\sqrt{3a+1}-1)} = \frac{3a(\sqrt{3a+1}-1)}{3a+1-1} = \sqrt{3a+1}-1$

22.4. $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} = \frac{1(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{a-a-1} = -\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$

Página 95

63.

63.1. $\overline{EG}^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \underset{\overline{EG}>0}{\Longleftrightarrow} \overline{EG} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$

63.2. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{45}+3}{6} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

63.3. $\frac{\overline{BC}}{\overline{FB}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{45}+6}{15-3} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

63.4. Como os resultados obtidos nas alíneas anteriores são iguais, concluímos que os retângulos $[ABCD]$ e $[BCGF]$ são semelhantes.

De seguida, a professora marca o trabalho de casa.

<u>Trabalho de casa</u>: Página 82, exercício 31 (exceto a alínea 31.2.).

Para concluir a aula a professora solicita que os alunos refiram o que foi lecionado durante a aula e, de seguida, registam o sumário.

<u>Sumário</u>: Correção do trabalho de casa.

Racionalização de denominadores.

Resolução de exercícios.

<u>Atividade Complementar</u>:

Dependendo da evolução da aula e do desempenho dos alunos os exercícios seguintes só serão resolvidos se houver tempo para a sua realização.

Caso os exercícios não sejam resolvidos nesta aula serão realizados numa das próximas aulas, assim que possível, como exercícios de consolidação da matéria.

Página 93

53. $\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = \sqrt{2\sqrt[6]{a}} = \sqrt{\sqrt[6]{2^6 a}} = \sqrt[12]{2^6 a} = (2^6 a)^{\frac{1}{12}}$

(B)

54. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\sqrt[\frac{n}{2}]{x}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\sqrt[\frac{n}{2}]{x}}{x}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{n}}}{x}} = \sqrt[2n]{x^{2-n}}$

(D)

55. (C)

56. Seja x a medida do outro cateto.

$\left(\sqrt[3]{16}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt[3]{2}\right)^2 - \sqrt[3]{4} = x^2 \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3\sqrt[3]{4} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}$

(C)

57. O raio, r, de um círculo é dado por $\pi r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Seja h a altura do triângulo, então

$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{\pi} \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}.$

Logo,

$$A = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

(A)

Anexos

Enunciado do trabalho de casa:

28 Simplifica o mais possível cada uma das expressões que se seguem:

28.1 $\sqrt{50} + 3\sqrt{2}$

28.2 $\sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{7}$

28.3 $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)$

28.4 $\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)$

28.5 $\left(3 - 2\sqrt{7}\right)^2 + 6\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}}$

29 Efetua as seguintes operações.

Apresenta o resultado na forma $a\sqrt[n]{b}$, com a , b , $n \in \mathbb{N}$.

29.1 $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} + \sqrt[4]{2}$

29.2 $\sqrt[3]{17 + \sqrt{27 + \sqrt{81}}}$

29.3 $\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}} \times \sqrt{\sqrt[9]{5^2}} : \sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}$

29.4 $\dfrac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt{\sqrt[3]{5}} \times \sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{60} \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}}$

Enunciado dos exercícios 20, 21 e 22, da página 79:

20 Racionaliza o denominador das seguintes frações:

20.1 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

20.2 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

20.3 $\frac{4}{5\sqrt{3}}$

20.4 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

20.5 $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}}$

20.6 $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4^2}}$

21 Racionaliza o denominador das seguintes frações:

21.1 $\frac{2}{1-\sqrt{2}}$

21.2 $\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}$

21.3 $\frac{1}{3\sqrt{2}+2}$

21.4 $\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

21.5 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$

21.6 $\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}$

22 Simplifica as seguintes expressões, racionalizando o denominador:

22.1 $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$, $a \neq 0$

22.2 $\frac{\sqrt[3]{1-a}}{\sqrt[3]{a-1}}$, $a \neq 1$

22.3 $\frac{3a}{\sqrt{3a+1}+1}$, $a \in \mathbb{N}$

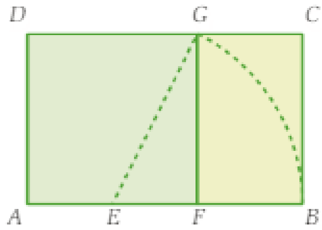
22.4 $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$, $a \in \mathbb{N}$

Enunciado do exercício 63, da página 95:

63 Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$ que foi obtido a partir do quadrado $[AFGD]$.

Sabe-se que:

- E é o ponto médio de $[AF]$;
- $\overline{AD} = \sqrt{3}$
- $\overline{EB} = \overline{EG}$



63.1 Determina $\overline{AB}$.

63.2 Calcula a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$.

63.3 Calcula a razão entre $\overline{BC}$ e $\overline{FB}$.

63.4 Compara os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores. O que podes concluir acerca dos retângulos $[ABCD]$ e $[BCGF]$?

Enunciado do trabalho de casa para a próxima aula:

31 Racionaliza os denominadores das seguintes frações:

31.1 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

31.2 $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{3}}$

31.3 $\dfrac{4}{2+3\sqrt{7}}$

31.4 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$

31.5 $\dfrac{2-3a}{\sqrt{a+2}+2\sqrt{a}}$, $a \in \mathbb{N}$

31.6 $\dfrac{1}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Enunciado da atividade complementar (exercícios da página 93):

53 Sendo a um número real positivo, a expressão $\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ é igual a qual das seguintes expressões?

(A) $(2^3a)^{\frac{1}{12}}$

(B) $(2^6a)^{\frac{1}{12}}$

(C) $(2^3a)^{\frac{1}{7}}$

(D) $(2^6a)^{\frac{1}{7}}$

Anexo E

Plano de aula - Geometria Analítica no Plano

Escola Secundária Jaime Cortesão

Plano de aula de Matemática

Professora estagiária: Raquel Martins

Orientadora Científica: Professora Doutora Helena Albuquerque

Orientadora Cooperante: Professora Margarida Cid

- **Disciplina:** Matemática A
- **Ano/Turma:** 10.º 1
- **Lições n.º:** 47 e 48
- **Sala:** Laboratório de Física
- **Ano letivo:** 2018/2019
- **Data:** 13.11.2018
- **Hora:** 08h30
- **Tempos letivos (50 minutos):** 2

Domínio:

Geometria Analítica (**GA10**).

Subdomínio:

Cálculo vetorial no plano.

Objetivo geral:

Operar com coordenadas de vetores (**GA10_4**).

Descritores:

- Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X\ (1,0)$, $Y\ (0,1)$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e_2} = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$)» e representar por «$\vec{v}(v_1, v_2)$» o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2) (**GA10_4.1**);
- Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A, o «vetor-posição do ponto A» como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto (**GA10_4.2**);
- Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ, que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$)

tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ (**GA10_4.3**).

❖ Aprendizagens Essenciais:

Coordenadas de um vetor; Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; Coordenadas da soma e da diferença de vetores; Coordenadas do produto de um escalar por um vetor e do simétrico de um vetor.

❖ Conteúdos:

- ✓ Coordenadas de um vetor;
- ✓ Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas;
- ✓ Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor.

❖ Pré-requisitos:

- ✓ Descrever posições, direções e movimentos;
- ✓ Saber indicar as coordenadas de um ponto, num referencial ortonormado;
- ✓ Compreender o conceito de vetor.

❖ Capacidades transversais:

- ✓ Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos;
- ✓ Raciocínio Matemático;
- ✓ Comunicação Matemática.

❖ Metodologias/Estratégias:

- ✓ Breve revisão dos conteúdos da aula anterior;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na resolução de atividades de raciocínio que obriguem a formular e testar conjeturas e generalizações;
- ✓ Trabalho de pares na resolução de exercícios de consolidação;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na discussão das conclusões e na síntese da aula.

❖ Recursos/Materiais Didáticos:

- ✓ Manual adotado (ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro – **Novo Ípsilon 10 - Volume 2, Matemática A, 10.º ano | Ensino Secundário**. 1.ª Edição. Raiz Editora, 2018. 143 p. ISBN 978-989-744-225-4);
- ✓ Quadro tradicional e canetas;
- ✓ Computador e projetor;
- ✓ Software GeoGebra.

❖ Avaliação dos alunos:

- ✓ Observação direta: realização de tarefas (empenho), interesse e cumprimento das regras;
- ✓ Participação oral.

❖ Descrição da Aula - Estratégias e Desenvolvimento da aula

A professora inicia a aula com uma breve revisão do que foi lecionado na aula anterior.

Recorde:

O produto de um escalar, λ, por um vetor, $\vec{u}$, é um novo vetor, $\lambda\vec{u}$, com as seguintes caraterísticas:

- ✓ Se $\lambda > 0$

  - direção do vetor $\vec{u}$, se $\vec{u} \neq 0$;

  - sentido do vetor $\vec{u}$, se $\vec{u} \neq 0$;

  - norma igual a $\lambda\|\vec{u}\|$.

- ✓ Se $\lambda < 0$

  - direção do vetor $\vec{u}$, se $\vec{u} \neq 0$;

  - sentido contrário do vetor $\vec{u}$, se $\vec{u} \neq 0$;

  - norma igual a $|\lambda|\|\vec{u}\|$.

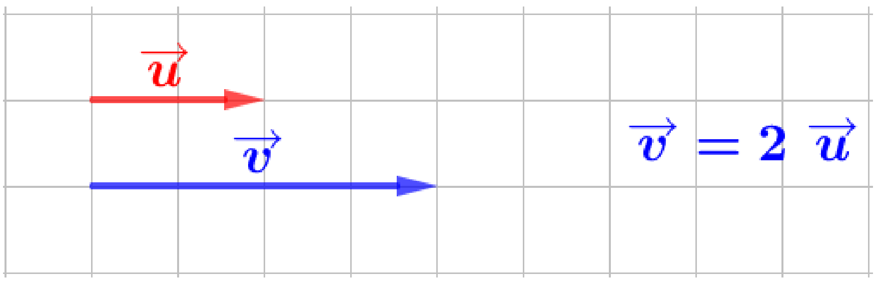
- ✓ Se $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = 0$

  - direção e sentido indefinidos;

  - norma igual a zero.

Definição: Dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, um vetor $\vec{u}$ é **colinear** a $\vec{v}$ se e apenas se existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e, neste caso, λ é único.

Exemplo:



Propriedade distributiva (em relação à adição de escalares):

Dado um qualquer vetor $\vec{u}$ e números reais λ e μ, tem-se que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

Propriedade distributiva (em relação à adição de vetores):

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer e um número real λ, tem-se que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

Dado um qualquer vetor $\vec{u}$ e números reais λ e μ, tem-se que $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

Caso existam dúvidas, a professora solicita voluntários para a correção do trabalho de casa, no quadro. Se a dúvida for da maioria dos alunos a professora resolve o exercício no quadro.

Os alunos solicitados para efetuarem a correção do trabalho de casa: resolvem, explicam e justificam, se necessário.

A professora orienta os alunos voluntários bem como o resto da turma na correção do trabalho de casa aproveitando para esclarecer possíveis dúvidas e para fazer revisões, caso seja necessário.

O enunciado do trabalho de casa pode ser consultado em anexo.

Página 45

72. Considerando o triângulo $[BAD]$, temos que

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AQ} = 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ}\right) = 2\overrightarrow{MQ}.$$

Logo, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{MQ}$ são colineares.

Analogamente, com o triângulo $[BDC]$, tem-se que

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{NC} + 2\,\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{NP}.$$

Assim, conclui-se que $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{NP}$ são colineares.

Portanto, $\overrightarrow{MQ}$ e $\overrightarrow{NP}$ são colineares.

Assim, os lados $[MQ]$ e $[NP]$ são paralelos. Com uma demonstração análoga à anterior provamos que os lados $[MN]$ e $[PQ]$ também são paralelos (considerando os triângulos $[CAB]$ e $[CAD]$).

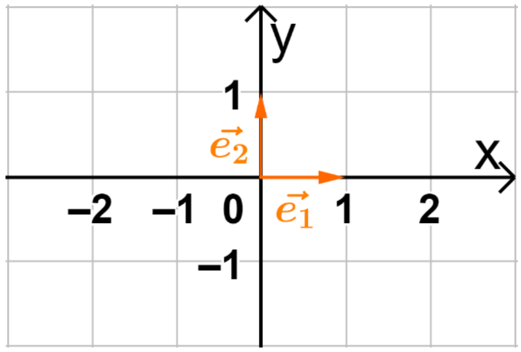
Logo, o quadrilátero $[MNPQ]$ é um paralelogramo.

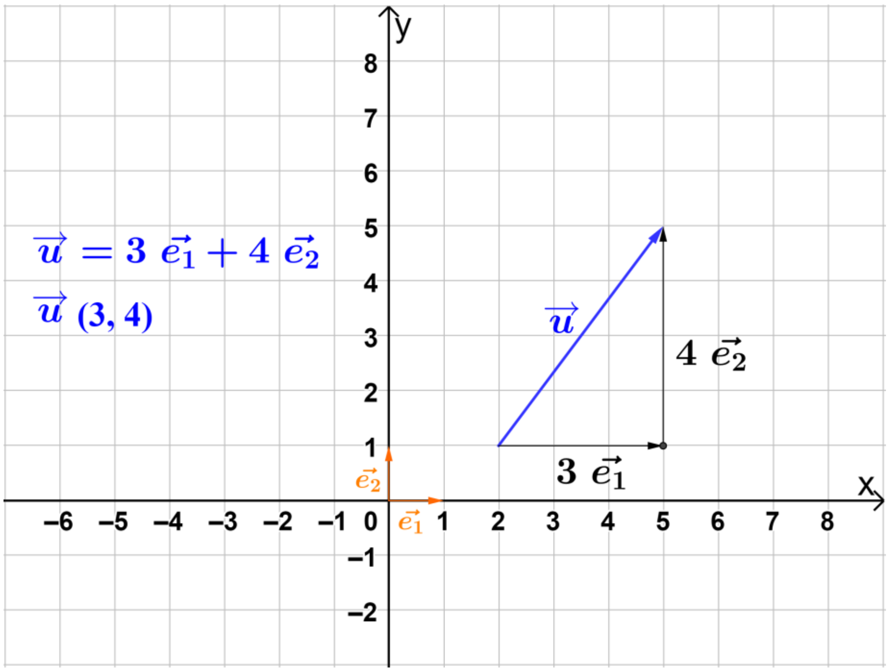
Depois de esclarecer as dúvidas dos alunos, a professora introduz a nova matéria e solicita a participação oral dos alunos, em grupo turma, para se formularem e testarem as conjeturas e generalizações pretendidas ao longo da aula.

Os alunos ouvem, registam e esclarecem possíveis dúvidas.

Coordenadas de um vetor no plano

Consideremos um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dois vetores, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OY}$, com $X(1,\ 0)$ e $Y(0,\ 1)$, tais que $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$ e $\overrightarrow{e_1}$ tem direção horizontal e $\overrightarrow{e_2}$ tem direção vertical.





$\vec{u} = 3\,\overrightarrow{e_1} + 4\,\overrightarrow{e_2}$; componentes: $3\,\overrightarrow{e_1}$ e $4\,\overrightarrow{e_2}$; coordenadas: $(3{,}4)$

De um modo geral,

Para qualquer vetor $\vec{v}$ desse plano, existe um e um só par ordenado de números reais (v_1, v_2) tal que $\vec{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$.

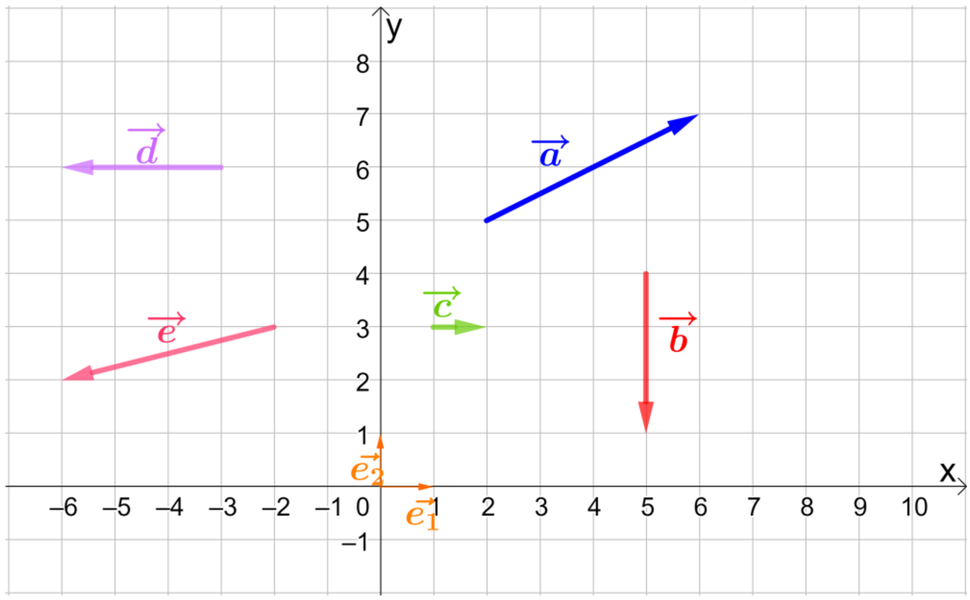
Neste caso, dizemos que:

- o par ordenado $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ é uma **base de vetores do plano**;
- o vetor $\vec{v}$ tem **componentes** $v_1\overrightarrow{e_1}$ e $v_2\,\overrightarrow{e_2}$;
- (v_1, v_2) são as **coordenadas do vetor** $\vec{v}$ na base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ e escrevemos $\vec{v}\ (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$.

<u>Exemplo</u>:

1. Na figura representa-se um plano munido de um referencial ortonormado e os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, e $\vec{e}$. Considere os vetores, $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$, da base de vetores do plano.

Escreve cada um dos vetores como combinação linear dos vetores da base e indica as componentes e as coordenadas de cada um.



Resolução:

$\vec{a} = 4\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2}$; componentes: $4\,\vec{e_1}$ e $2\,\vec{e_2}$; coordenadas: $(4,2)$

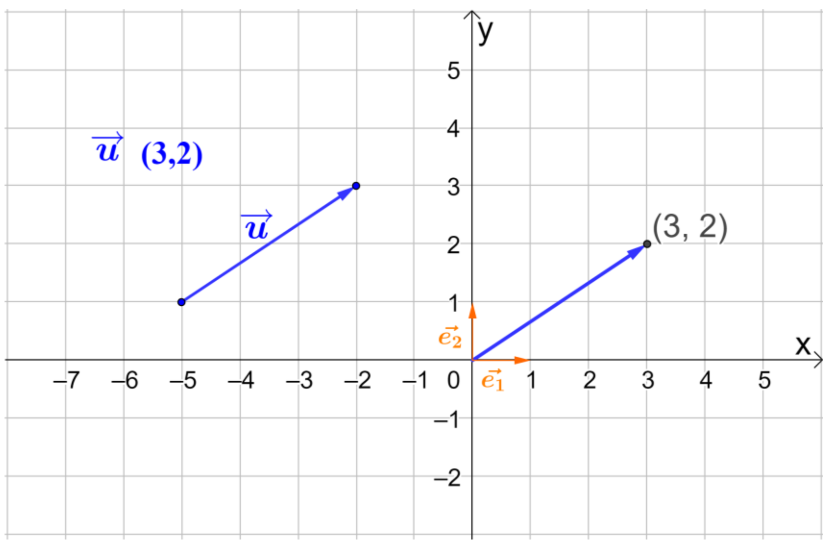
$\vec{b} = 0\,\vec{e_1} + (-3)\,\vec{e_2}$; componentes: $0\,\vec{e_1}$ e $-3\,\vec{e_2}$; coordenadas: $(0,-3)$

$\vec{c} = 1\,\vec{e_1} + 0\,\vec{e_2}$; componentes: $1\,\vec{e_1}$ e $0\,\vec{e_2}$; coordenadas: $(1,0)$

$\vec{d} = -3\,\vec{e_1} + 0\,\vec{e_2}$; componentes: $-3\,\vec{e_1}$ e $0\,\vec{e_2}$; coordenadas: $(-3,0)$

$\vec{e} = -4\,\vec{e_1} + (-1)\,\vec{e_2}$; componentes: $-4\,\vec{e_1}$ e $-1\,\vec{e_2}$; coordenadas: $(-4,-1)$

Vetor Posição



Dado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um ponto A, designamos o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ por **vetor posição** do ponto A.

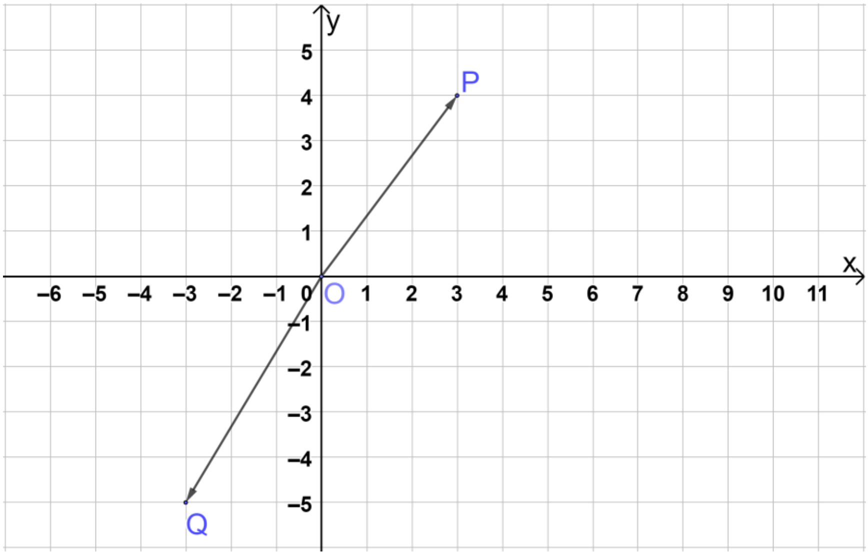
As coordenadas do vetor-posição de um dado ponto A coincidem com as coordenadas de A.

Exemplo:

2. Represente, num plano munido de um referencial ortonormado de origem O onde $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ são os vetores da base de vetores do plano, o vetor posição de cada um dos seguintes pontos:

a) $P\ (3{,}4)$
b) $Q\ (-3,-5)$

Resolução:



Igualdade entre vetores

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de um plano, com coordenadas (u_1, u_2) e (v_1, v_2), respetivamente, temos que:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}.$$

Exemplo:

3. Determine o(s) valor(es) real (reais) de p para o qual os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais.

a) $\vec{u}\ \left(\frac{p+1}{2}, -3\right)$ e $\vec{v}\ (4-2p, -3)$;

b) $\vec{u}\,(p^2, p)$ e $\vec{v}\,(9{,}3)$;

c) $\vec{u}\,(p^2 - 2p, 5)$ e $\vec{v}\,(3{,}5)$.

Resolução:

a) $\frac{p+1}{2} = 4 - 2p \Leftrightarrow p + 1 = 8 - 4p \Leftrightarrow p = \frac{7}{5}$

R.ª: $p = \frac{7}{5}$

b) $\begin{cases} p^2 = 9 \\ p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \vee p = -3 \\ p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow p = 3$

R.ª: $p = 3$

c) $p^2 - 2p = 3 \Leftrightarrow p = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow p = 3 \vee p = -1$

R.ª: $p = 3 \vee p = -1$

Coordenadas da soma e da diferença de vetores

Consideremos um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os pontos $X(1{,}0)$ e $Y(0{,}1)$ e os vetores $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OY}$, $\vec{u}\,(1{,}3)$ e $\vec{v}\,(2{,}1)$.

Escrevendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores da base e aplicando as propriedades das operações com vetores, obtemos que:

$$\vec{u} + \vec{v} = (\overrightarrow{e_1} + 3\,\overrightarrow{e_2}) + (2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = (1+2)\overrightarrow{e_1} + (3+1)\,\overrightarrow{e_2} = 3\,\overrightarrow{e_1} + 4\,\overrightarrow{e_2}$$

Logos, as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ são $(3{,}4)$.

Analogamente,

$$\vec{u} - \vec{v} = (\overrightarrow{e_1} + 3\,\overrightarrow{e_2}) - (2\,\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = (1-2)\,\overrightarrow{e_1} + (3-1)\,\overrightarrow{e_2} = -1\,\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2}$$

E assim, as coordenadas de $\vec{u} - \vec{v}$ são $(-1{,}2)$.

De um modo geral,

Dados dois vetores $\vec{u}\,(u_1, u_2)$ e $\vec{v}\,(v_1, v_2)$, de um plano munido de um referencial ortonormado de origem O:

- $\vec{u} + \vec{v}$ tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$;
- $\vec{u} - \vec{v}$ tem coordenadas $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

Coordenadas do produto de um vetor por um escalar

Consideremos um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os pontos $X(1,0)$ e $Y(0,1)$ e os vetores $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OY}$, $\vec{u}\ (1,3)$ e $\lambda = 4$.

$$4\,\vec{u} = 4(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}) = 4\,\overrightarrow{e_1} + 12\,\overrightarrow{e_2}$$

Logo, as coordenadas de $4\,\vec{u}$ são $(4,12)$.

De um modo geral,

Dado um vetor $\vec{u}\ (u_1, u_2)$ e um número real, λ, de um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, $\lambda\,\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$.

Se $\lambda = -1$, temos que $-\vec{u}\ (-u_1, -u_2)$. Isto é, $(-u_1, -u_2)$ são as coordenadas do vetor simétrico de $\vec{u}$.

Exemplos:

4. Sejam $\vec{u}\ (1, -2)$ e $\vec{v}\ (2, -3)$. Calcule as coordenadas de:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $3\,\vec{u} - \vec{v}$

Resolução:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ tem coordenadas $(1 + 2, -2 - 3) = (3, -5)$

b) $\vec{u} - \vec{v}$ tem coordenadas $(1 - 2, -2 + 3) = (-1,1)$

c) $3\,\vec{u} - \vec{v}$ tem coordenadas $3(1, -2) - (2, -3) = (3, -6) - (2, -3) = (1, -3)$

5. Determine os valores de k e a de modo que $k\ (-1,2) = (a, -4)$.

Resolução:

$$k\ (-1,2) = (a, -4) \Leftrightarrow (-k, 2k) = (a, -4) \Leftrightarrow \begin{cases} -k = a \\ 2k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

R.ª: $a = 2$ e $k = -2$

Para os alunos consolidarem a matéria da aula, é sugerido que realizem os exercícios 74, 75 e 76, respetivamente das páginas 47 e 49, do manual.

A professora circula pela sala, para verificar se os alunos estão a resolver os exercícios e/ou se têm dúvidas na sua resolução e esclarece as possíveis dúvidas.

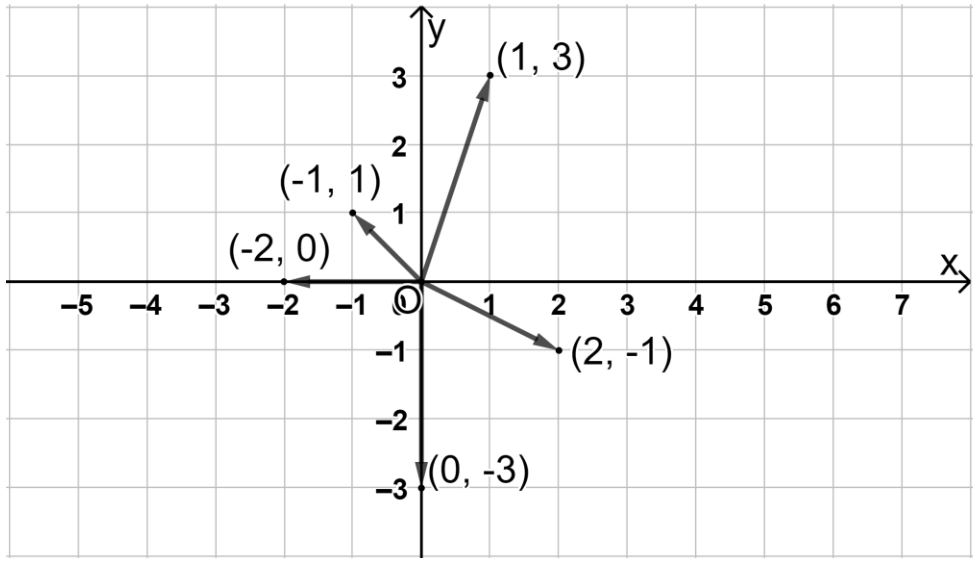
Depois de os alunos resolverem os exercícios no caderno, solicita que resolvam os exercícios no quadro. Posteriormente, verifica se a resolução está correta e apresenta todos os passos necessários à sua compreensão.

O enunciado dos exercícios pode ser consultado em anexo.

Página 47

74.

$\vec{a}\ (2,-1);\ \vec{b}\ (-2,0);\ \vec{c}\ (0,-3);\ \vec{d}\ (-1,1)\ e\ \vec{e}\ (1,3).$



Página 49

75.

$\vec{u}+\vec{v}$ tem coordenadas $(-3+1, 2-3) = (-2,-1)$

$\vec{w}+\vec{v}$ tem coordenadas $(4+1, 2-3) = (5,-1)$

$(\vec{w}+\vec{v})+\vec{u}$ tem coordenadas $(5-3, -1+2) = (2,1)$

76.

$\vec{r}+\vec{s}$ tem coordenadas $(-3-4, 3+1) = (-7,4)$

$\vec{t}+\vec{u}$ tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}-3,\ \frac{1}{2}+2\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\vec{u}-\vec{r}$ tem coordenadas $(-3+3, 2-3) = (0,-1)$

$2\,\vec{t}$ tem coordenadas $2\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) = (3,1)$

$-3\,\vec{u}$ tem coordenadas $-3(-3,2) = (9,-6)$

De seguida, a professora marca o trabalho de casa.

<u>Trabalho de casa</u>: Página 63, exercício 110.

Para concluir a aula a professora solicita que os alunos refiram o que foi lecionado durante a aula e, de seguida, registam o sumário.

<u>Sumário</u>: Correção do trabalho de casa.

Coordenadas de um vetor no plano.

Vetor posição de um ponto e respetivas coordenadas.

Igualdade de vetores.

Coordenadas da soma e da diferença de vetores.

Coordenadas do produto de um vetor por um escalar.

<u>Atividade Complementar</u>:

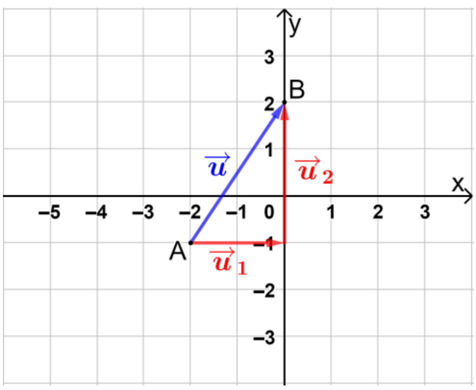
Dependendo da evolução da aula e do desempenho dos alunos o exercício seguinte só será resolvido se houver tempo para a sua realização.

Caso o exercício não seja resolvido nesta aula será realizado numa das próximas aulas, assim que possível, como exercício de consolidação da matéria.

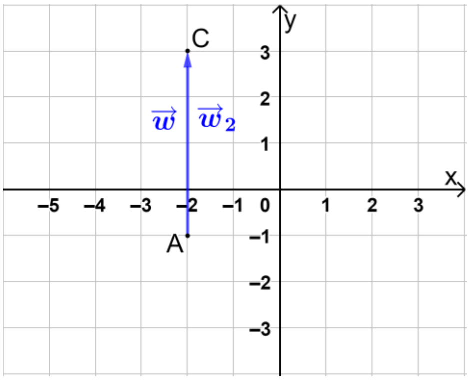
Página 47

73.1.

a) $\vec{u} = 2\,\vec{e_1} + 3\,\vec{e_2}$



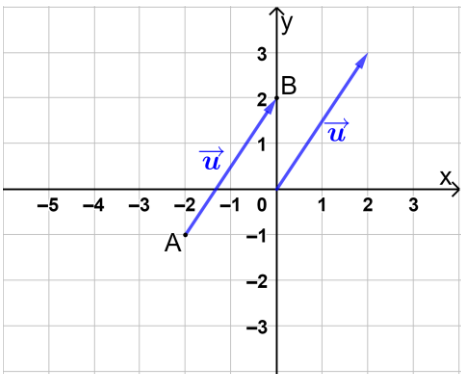
b) $\vec{w} = 0\,\vec{e_1} + 4\,\vec{e_2}$



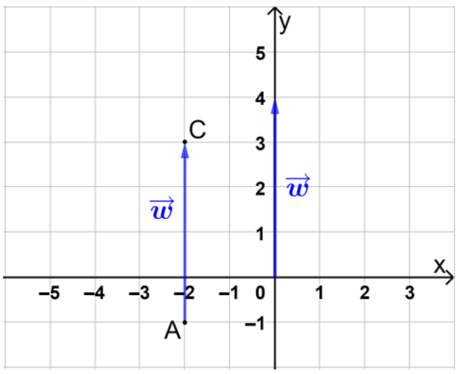
73.2. $\vec{u}\ (2,3)$ e $\vec{w}\ (0,4)$

73.3.

a)



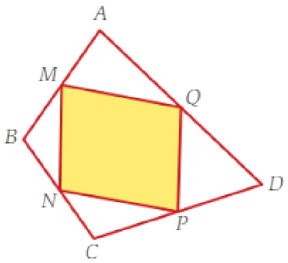
b)



Anexos

Enunciado do trabalho de casa:

72 Seja $[ABCD]$ um quadrilátero qualquer e sejam M, N, P e Q os pontos médios dos seus lados. Mostra que $[MNPQ]$ é um paralelogramo.



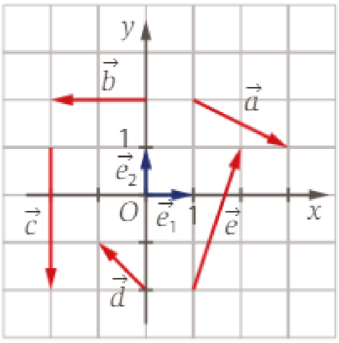
Sugestão:

- exprime $\overrightarrow{BD}$ à custa de $\overrightarrow{BA}$ e de $\overrightarrow{AD}$;
- relaciona $\overrightarrow{BA}$ com $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{AD}$ com $\overrightarrow{AQ}$;
- conclui que $\overrightarrow{MQ}$ e $\overrightarrow{BD}$ são colineares;
- conclui que $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{NP}$ são colineares.

Enunciado do exercício 74, da página 47:

74 Na figura estão representados, em referencial o.n., os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$.

Determina as coordenadas dos vetores e marca os pontos que os têm como vetores posição.



Enunciado dos exercícios 75 e 76, da página 49:

75 Sejam $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(1, -3)$ e $\vec{w}(4, 2)$. Calcula as coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$, de $\vec{w}+\vec{v}$ e de $(\vec{w}+\vec{v})+\vec{u}$.

76 Sendo $\vec{r}(-3, 3)$, $\vec{s}(-4, 1)$, $\vec{t}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\vec{u}(-3, 2)$, determina as coordenadas de $\vec{r}+\vec{s}$, $\vec{t}+\vec{u}$, $\vec{u}-\vec{r}$, $2\vec{t}$ e $-3\vec{u}$.

Enunciado do trabalho de casa para a próxima aula:

110 Considera, fixado um plano munido de um referencial o.n., os vetores $\vec{u}(-3\,,\,4)$ e $\vec{v}(2\,,\,5)$.

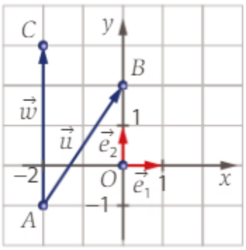
Determina as coordenadas dos vetores:

110.1 $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

110.2 $\vec{y}$ tal que $\frac{1}{3}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Enunciado da atividade complementar (exercício 73, da página 47):

73 Considera os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, representados no referencial o.n.



73.1 Determina, usando uma construção geométrica, vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{w_1}$ com a direção de $\vec{e_1}$ e vetores $\vec{u_2}$ e $\vec{w_2}$ com a direção de $\vec{e_2}$ tais que:

a. $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ **b.** $\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$

73.2 Determina o único par ordenado:

a. $(u_1\,,\ u_2)$ tal que $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$

b. $(w_1\,,\ w_2)$ tal que $\vec{w} = w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2}$

73.3 Representa através de um segmento orientado de origem O:

a. $\vec{u}$ **b.** $\vec{w}$

Anexo F

Plano de aula - Fatorização de polinómios

Escola Secundária Jaime Cortesão

Plano de aula de Matemática

Professora estagiária: Raquel Martins

Orientadora Científica: Professora Doutora Helena Albuquerque

Orientadora Cooperante: Professora Margarida Cid

- **Disciplina:** Matemática A
- **Ano/Turma:** 10.º 1
- **Lições n.º:** 109/110
- **Sala:** 9
- **Ano letivo:** 2018/2019
- **Data:** 08.02.2019
- **Hora:** 08h30
- **Tempos letivos (50 minutos):** 2

Domínio:

Álgebra (**ALG10**).

Subdomínio:

Divisão inteira de polinómios.

Objetivo geral:

Efetuar operações com polinómios (**ALG10_4**).

Descritores:

- Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que

$$P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x),$$

  tendo-se $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero (**ALG10_4.11**);
- Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio (**ALG10_4.12**).

Aprendizagens Essenciais:

Reconhecer, identificar e aplicar na resolução de problemas a divisão euclidiana de polinómios e a regra de Ruffini; a Divisibilidade de polinómios; o Teorema do resto; a Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades.

❖ Conteúdo:

Fatorização de polinómios envolvendo a divisão euclidiana de polinómios e a identificação de raízes.

❖ Pré-requisitos:

- ✓ Saber aplicar o algoritmo da divisão euclidiana de polinómios e a regra de Ruffini;
- ✓ Reconhecer o teorema do resto;
- ✓ Identificar a multiplicidade das raízes de um polinómio;
- ✓ Saber decompor um polinómio em fatores colocando os fatores comuns em evidência e recorrendo os casos notáveis da multiplicação;
- ✓ Saber determinar as raízes de um polinómio do 2.º grau.

❖ Capacidades transversais:

- ✓ Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos;
- ✓ Raciocínio Matemático;
- ✓ Comunicação Matemática.

❖ Metodologias/Estratégias:

- ✓ Trabalho em grupo turma, na resolução de atividades de raciocínio que obriguem a formular e testar conjeturas e generalizações;
- ✓ Trabalho de pares na resolução de exercícios de consolidação;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na discussão das conclusões e na síntese da aula.

❖ Recursos/Materiais Didáticos:

- ✓ Manual adotado (ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro – **Novo Ípsilon 10 - Volume 1, Matemática A, 10.º ano | Ensino Secundário**. 1.ª Edição. Raiz Editora, 2018. 143 p. ISBN 978-989-744-225-4);
- ✓ Quadro tradicional e canetas;
- ✓ Projetor e computador;
- ✓ Apresentação em Power Point.

❖ Avaliação dos alunos:

- ✓ Observação direta: realização de tarefas (empenho), interesse e cumprimento das regras;
- ✓ Participação oral.

❖ Descrição da Aula - Estratégias e Desenvolvimento da aula

A professora inicia a aula recordando a decomposição em fatores estudada no 8.º ano referindo os casos notáveis da multiplicação e como colocar fatores em evidência.

Para isso pede a colaboração dos alunos perguntando em que consiste a decomposição em fatores.

Depois de ouvir a opinião dos alunos conclui que fatorizar ou decompor em fatores um polinómio consiste em escrever esse polinómio como produto de polinómios, sendo, pelo menos, um dos fatores não constante e de grau inferior ao polinómio inicial.

A professora apresenta uma breve referência aos matemáticos envolvidos na descoberta e na demonstração do teorema fundamental da Álgebra (Power Point em anexo).

Por outro lado, vamos ver como o conhecimento de uma raiz de um polinómio permite fatorizá-lo. No contexto do nosso estudo, quando se pede para fatorizar um polinómio, fica subentendido que se deve prosseguir a fatorização até que os fatores apresentados sejam de grau menor ou igual a 1, ou, sendo de grau superior a 1, não tenham raízes reais *.i.e*. decompor no maior número possível de fatores.

Em seguida são apresentados alguns exemplos pedindo a colaboração dos alunos para os resolver.

- **Fatorização de polinómios colocando em evidência fatores comuns a todos os monómios do polinómio**

  Exemplos:

  $A\,(x) = 3\,x^2 + 2\,x = x\,(3\,x + 2)$

  $B\,(x) = 4\,(x-2) + x\,(x-2) = (x-2)(4+x)$

- **Fatorização de polinómios recorrendo aos casos notáveis da multiplicação de binómios**

  Exemplos:

  $C\,(x) = x^2 - 6\,x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$

  $D\,(y) = y^2 - 25 = (y-5)(y+5)$

- **Fatorização de polinómios colocando em evidência fatores comuns e utilizando os casos notáveis**

  Exemplo:

  $E(x) = x^3 - 4x = x\,(x^2-4) = x\,(x-2)(x+2)$

- **<u>Fatorização de polinómios do 2.º grau</u>**

<u>Exemplo</u>:

1) $F\,(x) = x^2 - x - 2$

Como $F\,(x)$ é um polinómio de grau 2, podemos determinar as suas raízes utilizando a fórmula resolvente.

Assim, $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

Considerando, por exemplo, que -1 é raiz de $F\,(x)$, então existe um polinómio, $Q\,(x)$, tal que $F(x) = (x+1)\,Q\,(x)$. Sendo que o polinómio $Q\,(x)$ é o quociente da divisão inteira de $F\,(x)$ por $x+1$, que podemos obter aplicando a Regra de Ruffini.

	1	-1	-2
-1		-1	2
	1	-2	0

Portanto, $F\,(x) = (x+1)(x-2)$.

- **<u>Fatorização de polinómios do 3.º grau</u>**

<u>Exemplo</u>:

2) $G\,(x) = 4\,x^3 - 7\,x^2 + 2\,x + 1$ sabendo que é divisível por $x - 1$

Como o polinómio $G(x)$ é divisível por $x - 1$ existe um polinómio, $Q\,(x)$, tal que $G\,(x) = (x-1)Q(x)$. Assim, aplicando a regra de Ruffini, temos que:

	4	-7	2	1
1		4	-3	-1
	4	-3	-1	0

Assim, $G\,(x) = (x-1)(4\,x^2 - 3\,x - 1)$.

Como $4\,x^2 - 3\,x - 1$ é um polinómio de grau 2, podemos determinar as suas raízes utilizando a fórmula resolvente.

Assim, $4\,x^2 - 3\,x - 1 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \iff x = 1 \vee x = -\frac{1}{4}$

Considerando, por exemplo, que 1 é raiz de $4\,x^2 - 3\,x - 1$, então existe um polinómio, $Q\,(x)$, tal que $4\,x^2 - 3\,x - 1 = (x-1)\,Q\,(x)$. Sendo que o polinómio $Q\,(x)$ é o quociente da divisão inteira de $4\,x^2 - 3\,x - 1$ por $x - 1$, que podemos obter aplicando a Regra de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 4 & -3 & -1 \\
1 & & 4 & 1 \\
\hline
 & 4 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Logo, $G\,(x) = (x-1)(x-1)(4x+1) = 4\,(x-1)^2\left(x + \frac{1}{4}\right)$.

De um modo geral, o seguinte teorema permite fatorizar polinómios conhecendo as suas raízes e respetivas multiplicidades.

Teorema Fundamental da Álgebra:

Seja $P\,(x)$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes reais (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm, respetivamente, multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, com $n_1 + \cdots + n_k \leq n$.

Então, existe um polinómio $Q\,(x)$ sem raízes reais, tal que:

$$P\,(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x).$$

O polinómio $Q\,(x)$ tem grau zero se e só se $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ e, neste caso, tem-se que $Q\,(x) = a_n$, sendo a_n o coeficiente do termo de grau n do polinómio $P\,(x)$.

Como consequência do teorema fundamental da Álgebra, temos que:

Todo o polinómio de grau n tem no máximo n raízes reais distintas.

Exemplos:

Decompõe em fatores os seguintes polinómios:

3) $H\ (x) = 2\,x^2 - 6\,x - 8$

Como $H\ (x)$ é um polinómio de grau 2, podemos determinar as suas raízes utilizando a fórmula resolvente.

Assim, $2\,x^2 - 6\,x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$

Considerando, por exemplo, que 4 é raiz de $H\ (x)$, então existe um polinómio, $Q\ (x)$, tal que $H\ (x) = (x-4)\ Q\ (x)$. Sendo que o polinómio $Q\ (x)$ é o quociente da divisão inteira de $H\ (x)$ por $x - 4$, que podemos obter aplicando a Regra de Ruffini.

	2	-6	-8
4		8	8
	2	2	0

Logo, $H\ (x) = (x-4)(2x+2) = 2\ (x-4)(x+1)$.

4) $I\ (x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ sabendo que 2 é uma raiz de $I\ (x)$

Como 2 é um zero do polinómio $I\ (x)$, então existe um polinómio, $Q\ (x)$, tal que $I\ (x) = (x-2)\ Q\ (x)$. Sendo que o polinómio $Q\ (x)$ é o quociente da divisão inteira de $I\ (x)$ por $x - 2$, que podemos obter aplicando a Regra de Ruffini.

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Portanto, $I\ (x) = (x-2)(x^2+1)$.

O polinómio $x^2 + 1$ não tem raízes reais, logo não admite nenhuma fatorização.

5) $J\ (x) =\ 2\,x^4 + 4\,x^3 - 5x^2 + 2\,x - 3$ sabendo que -3 e 1 são raízes de $J\ (x)$

Como -3 e 1 são raízes do polinómio $J\ (x)$, então existe um polinómio, $Q\ (x)$, tal que $J\ (x) = (x-1)(x+3)\ Q\ (x)$. Sendo que o polinómio, $Q\ (x)$, é o quociente da divisão inteira de $J\ (x)$ por $x-1$ e por $x+3$, logo aplicando, sucessivamente, a regra de Ruffini, temos que:

	2	4	−5	2	−3
−3		−6	6	−3	3
	2	−2	1	−1	0
1		2	0	1	
	2	0	1	0	

E assim, $J\ (x) = (x-1)(x+3)(2\,x^2+1)$.

Determinação de raízes de polinómios

Como decompor um polinómio do terceiro grau quando não é dada nenhuma raiz do polinómio?

Exemplos:

Decompõe em fatores os seguintes polinómios:

1) $K\ (x) =\ x^3 + x^2 + 4x + 4$

O seguinte resultado teórico permite determinar as raízes de polinómios de grau superior a 2.

Dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, o seu termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira de $P(x)$.

Assim, podemos afirmar que o conjunto das raízes inteiras de $P\,(x)$ está contido no conjunto dos divisores do termo de grau zero do polinómio $P(x)$. Utilizando o teorema do resto podemos verificar quais destes divisores são raízes de $P(x)$.

Se $K\,(x)$ admitir raízes inteiras, estas são divisores do termo independente (4).

Os divisores inteiros de 4 são: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$K(-1) = 0;\ K(1) = 10 \neq 0;\ K(-2) = -8 \neq 0;\ K(2) = 24 \neq 0;\ K(-4) = -60 \neq 0;$
$K(4) = 100 \neq 0$

Assim, $x = -1$ é raiz inteira de $K\,(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini, temos que:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 4 & 4 \\
-1 & & -1 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Logo, $K\,(x) = (x+1)(x^2+4)$.

2) $L\,(x) = 2\,x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 2$

Se $L\,(x)$ admitir raízes inteiras, estas são divisores do termo independente (2).

Os divisores inteiros de 2 são: $\pm 1, \pm 2$.

$L(1) = 0;\ L(-1) = -12 \neq 0;\ L(2) = 12 \neq 0;\ L(-2) = 0$

Assim, $x = 1$ e $x = -2$ são raízes inteiras de $L\,(x)$

Aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -1 & -6 & 7 & -2 \\
1 & & 2 & 1 & -5 & 2 \\
\hline
 & 2 & 1 & -5 & 2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Assim, $L\,(x) = (x-1)(2\,x^3 + x^2 - 5x + 2)$.

Pelo mesmo método utilizado anteriormente podemos verificar que 1 é raiz do polinómio $2\,x^3 + x^2 - 5x + 2$ e utilizando a regra de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -5 & 2 \\
1 & & 2 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & 3 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Assim, $L\,(x) = (x-1)(x-1)(2\,x^2 + 3\,x - 2)$.

Como $2\,x^2 + 3\,x - 2$ é um polinómio de grau 2, podemos determinar as suas raízes utilizando a fórmula resolvente.

Assim, $2\,x^2 + 3\,x - 2 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \iff x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

Considerando, por exemplo, que -2 é raiz de $L\,(x)$, então existe um polinómio, $Q\,(x)$, tal que $2\,x^2 + 3\,x - 2 = (x+2)\,Q\,(x)$. Sendo que o polinómio $Q\,(x)$ é o quociente da divisão inteira de $2\,x^2 + 3\,x - 2$ por $x + 2$, que podemos obter aplicando a Regra de Ruffini.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 2 & 3 & -2 \\
-2 & & -4 & 2 \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Logo, $L(x) = (x-1)(x-1)(x+2)(2x-1) = 2\,(x-1)^2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Para os alunos consolidarem a matéria da aula, é sugerido que realizem os exercícios 89.2, 89.3, 91, 92, 93 e 94 da página 117, do manual.

A professora circula pela sala, para verificar se os alunos estão a resolver os exercícios e/ou se têm dúvidas na sua resolução e esclarece as possíveis dúvidas.

Depois de os alunos resolverem os exercícios no caderno, solicita que resolvam os exercícios no quadro. Posteriormente, verifica se a resolução está correta e apresenta todos os passos necessários à sua compreensão.

O enunciado dos exercícios pode ser consultado em anexo.

Página 117

89.2.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & -33 & 18 \\
-3 & & -6 & 39 & -18 \\
\hline
 & 2 & -13 & 6 & \underline{\vert\ 0}
\end{array}
$$

Assim, $2x^3 - 7x^2 - 33x + 18 = (x+3)(2x^2 - 13x + 6)$.

$2x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{4} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = \frac{1}{2}$

Logo, $2x^3 - 7x^2 - 33x + 18 = 2(x-6)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$.

89.3.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -17 & 0 & 16 \\
-4 & & -4 & 16 & 4 & -16 \\
\hline
 & 1 & -4 & -1 & 4 & \underline{\vert\ 0} \\
 & & & & & \\
1 & & 1 & -3 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -4 & \underline{\vert\ 0} &
\end{array}
$$

Assim, $x^4 - 17x^2 + 16 = (x-1)(x+4)(x^2 - 3x - 4)$.

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$

Logo, $x^4 - 17x^2 + 16 = (x-4)(x-1)(x+1)(x+4)$.

91.

91.1.

3 raízes

$C\,(x) = (x-1)(x-2)Q(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$

$C\,(3) = 2 \times 1 \times (3-a)$

$C\,(3) = 30 \;\Leftrightarrow 6 - 2a = 30 \Leftrightarrow a = -12$

As raízes de $C\,(x)$ são $-12, 1$ e 2.

91.2.

$C\,(x) = (x-1)(x-2)(x+12) = x^3 + 9x^2 - 34x + 24$

91.3.

$C\,(-1) = -2 \times (-3) \times 11 = 66$

92.

$P\,(x) = a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

$P\,(-2) = -20 \Leftrightarrow -10\,a = -20 \Leftrightarrow a = 2$

$P\,(x) = 2\,(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

$\quad\quad = \;2\,x^4 + 3\,x^3 - 12\,x^2 - 7\,x + 6$

93.

93.1.

$A\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2}m + 4 = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

93.2.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -4 & -2 & 4 \\
2 & & 4 & 0 & -4 \\
\hline
 & 2 & 0 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Assim, $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x-2)(2x^2-2) = 2(x-2)(x-1)(x+1)$.

94.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -13 & 25 & -14 \\
\frac{7}{2} & & 7 & -21 & 14 \\
\hline
 & 2 & -6 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Assim, $P(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 4)$.

$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee x = 1$

Logo, $P(x) = 2(x-1)(x-2)\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

De seguida, a professora marca o trabalho de casa.

Trabalho de casa: Resolver os exercícios propostos anteriormente, que não foram resolvidos na aula.

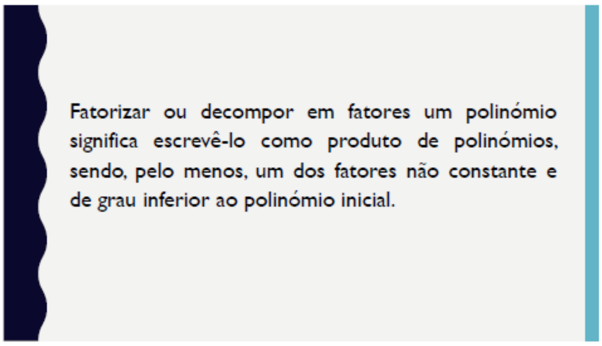
Para concluir a aula a professora solicita que os alunos refiram o que foi lecionado durante a aula e, de seguida, registam o sumário.

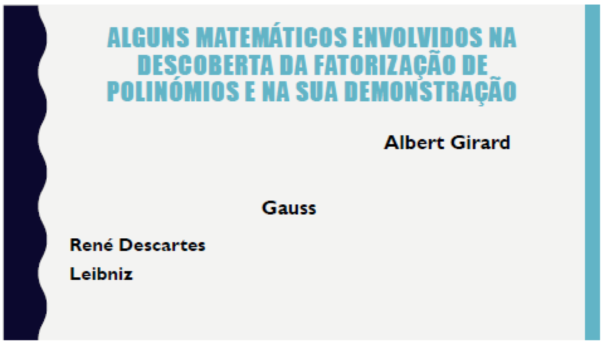
Sumário: Fatorização de polinómios.

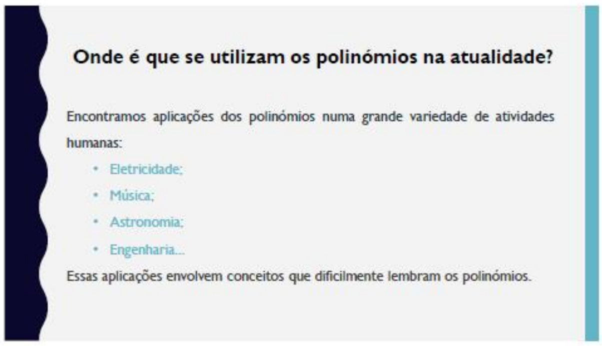
Resolução de exercícios.

Anexos

Apresentação em Power Point:







Enunciado dos exercícios da página 117:

89 Decompõe em fatores os seguintes polinómios, sabendo que possuem as raízes indicadas entre parêntesis.

89.1 $x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ (1)

89.2 $2x^3 - 7x^2 - 33x + 18$ (-3)

89.3 $x^4 - 17x^2 + 16$ $(-4 \text{ e } 1)$

89.4 $-2x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{50}{3}x^2 + 30x + 12$ $\left(-\frac{2}{3} \text{ e } 3\right)$

91 De um polinómio $C(x)$ do 3.º grau, sabe-se que o coeficiente do termo em x^3 é 1.
Sabe-se também que

- $C(1) = C(2) = 0$
- $C(3) = 30$

91.1 Quantas raízes tem o polinómio $C(x)$?
Identifica-as.

91.2 Determina $C(x)$ e escreve-o na forma reduzida.

91.3 Determina o resto da divisão inteira de $C(x)$ por $x + 1$.

92 Determina, na forma reduzida, o polinómio $P(x)$ do quarto grau que tem como raízes -3, -1, $\frac{1}{2}$ e 2 e cujo resto da divisão inteira por $x + 2$ é -20.

93 Seja $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + mx + 4$, com $m \in \mathbb{R}$.

93.1 Determina o valor de m de modo que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ seja 3.

93.2 Considera $m = -2$ e decompõe $A(x)$ em fatores do 1.º grau, sabendo que $A(x)$ é divisível por $x - 2$.

94 Sabe-se que $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$ é divisível por $2x - 7$.
Determina as raízes de $P(x)$ e escreve-o na forma $P(x) = a(x - b)(x - c)(x - d)$.

Anexo G

Plano de aula - Funções

Escola Secundária Jaime Cortesão

Plano de aula de Matemática

Professora estagiária: Raquel Martins

Orientadora Científica: Professora Doutora Helena Albuquerque

Orientadora Cooperante: Professora Margarida Cid

- **Disciplina:** Matemática A
- **Ano/Turma:** 10.º 1
- **Lições n.º:** 112/113
- **Sala:** 9
- **Ano letivo:** 2018/2019
- **Data:** 14.02.2019
- **Hora:** 10h30
- **Tempos letivos (50 minutos):** 2

Domínio:

Funções Reais de Variável Real (**FRVR10**).

Subdomínio:

Generalidades acerca de funções.

Objetivos gerais:

Definir funções (**FSS7_1**);

Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva (**FRVR10_1**).

Descritores:

- ✓ Saber, dados conjuntos A e B, que fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B», quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$ e utilizar corretamente os termos «objeto», «imagem», «domínio», «conjunto de chegada» e «variável» (**FSS7_1.1**);
- ✓ Designar uma função f de A em B por «$f: A \longrightarrow B$» ou por «f» quando esta notação simplificada não for ambígua (**FSS7_1.2**);
- ✓ Designar, dada uma função $f: A \longrightarrow B$, por «contradomínio de f» o conjunto das imagens por f dos elementos de A e representá-lo por CD_f, D'_f ou $f\ (A)$ (**FSS7_1.4**);
- ✓ Identificar, dados conjuntos A e B, o «produto cartesiano de A por B» como o conjunto $\{(a, b): a\ \in A\ \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a, b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por «$A \times B$» (**FRVR10_1.1**);

- Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$ (**FRVR10_1.2**);
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ e um conjunto C, a «restrição de f a C» como a função $f|_C: C \cap A \longrightarrow B$ tal que, $\forall\, x \in C \cap A$, $f|_C(x) = f(x)$ (**FRVR10_1.3**);
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ e $C \cap A$, o «conjunto imagem de C por f» como o conjunto $f(C) = \{y \in B: \exists x \in C: y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C, representá-lo também por «$f(x): x \in C$» (**FRVR10_1.4**);
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B» (**FRVR10_1.5**);
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B, existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B» ou por «função de A sobre B» (**FRVR10_1.6**);
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ como «bijetiva» se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por «bijeção de A em B» (**FRVR10_1.7**).

Aprendizagens Essenciais:

- Reconhecer uma função em diversas representações, e interpretá-la como relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos;
- Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.

Conteúdos:

- Função ou aplicação f de A em B, domínio, contradomínio e conjunto de chegada;
- Produtos cartesianos de conjuntos;
- Gráficos de funções;
- Restrições de uma função;
- Imagem de um conjunto por uma função;
- Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

❖ Pré-requisitos:

- ✓ Saber o conceito de função;
- ✓ Reconhecer o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada de uma função;
- ✓ Conhecer os vários modos de representar uma função.

❖ Capacidades transversais:

- ✓ Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos;
- ✓ Raciocínio Matemático;
- ✓ Comunicação Matemática;
- ✓ História da Matemática.

❖ Metodologias/Estratégias:

- ✓ Trabalho em grupo turma, na resolução de atividades de raciocínio que obriguem a formular e testar conjeturas e generalizações;
- ✓ Trabalho de pares na resolução de exercícios de consolidação;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na discussão das conclusões e na síntese da aula.

❖ Recursos/Materiais Didáticos:

- ✓ Manual adotado (ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro – **Novo Ípsilon 10 - Volume 3, Matemática A, 10.º ano | Ensino Secundário**. 1.ª Edição. Raiz Editora, 2018. 143 p. ISBN 978-989-744-225-4);
- ✓ Quadro tradicional e canetas;
- ✓ Computador e projetor;
- ✓ Apresentação em Power Point.

❖ Avaliação dos alunos:

- ✓ Observação direta: realização de tarefas (empenho), interesse e cumprimento das regras;
- ✓ Participação oral.

❖ Descrição da Aula - Estratégias e Desenvolvimento da aula

A professora inicia a aula com o esclarecimento de dúvidas, caso haja, da matéria lecionada na aula anterior.

Em seguida inicia o estudo do domínio Funções Reais de Variável Real fazendo uma breve introdução ao tema das funções, aos matemáticos mais importantes na história das funções e recordando o conceito de função e os modos de definir uma função estudados no 3.º ciclo (Power Point em anexo).

O estudo das funções é considerado um dos temas mais importantes na Matemática, pois é de enorme importância na criação e no estudo de modelos matemáticos que procuram fazer aproximações da realidade, permitindo traduzir e estudar diversos fenómenos da vida real.

Embora haja aspetos simples da noção de função que remontem a épocas anteriores, é apenas no século XVII que este conceito sofre uma evolução decisiva no sentido da sua clarificação.

Foram vários os matemáticos que deram o seu contributo para essa clarificação, entre eles Kepler, Galileu, Descartes, Leibniz, Bernoulli e Dirichlet.

Posteriormente, recorda o conceito de função e os modos de a definir.

Do Power Point realça o conceito de função que pede para que os alunos o registem no seu caderno.

Dados dois conjuntos A e B uma ***função*** *ou* ***aplicação*** *de A em B é uma correspondência que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.*

Por fim, com a colaboração dos alunos, resolve os exercícios 2, 3 e 6 da página 9 e os exercícios 12, 13 e 14 da página 15.

Página 9

2. As correspondências f e h representam funções, pois a cada elemento de A corresponde um e um só elemento de B.

Na correspondência g, existe um elemento de A que não tem correspondente em B.

Na correspondência i, há um elemento de A a que correspondem dois elementos de B.

3.1. $f(3) = 6$

3.2. $f(5) = 8$. O objeto 5 tem por imagem 8.

3.3. $D_f = \{1,2,3,4,5,6\}$

$D'_f = \{4,5,6,7,8,9\}$

3.4. $f(x) = x + 3$

6.1. $f(2) = 15$

6.2. $\frac{1}{3}x^2 \times 3 = 20 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$

Como $x > 0$, temos que $x = 2\sqrt{5}$.

6.3. $f\ (x) = \frac{60}{x^2}$

6.4. $D_f =]0, +\infty[$

Página 15

12.1. $g(1) = -1$

12.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,3\}$

12.3. $(0, -3)$

12.4. 2 pontos

12.5. $D_g =]-3, +\infty[$

$D'_g = [-4, +\infty[$

12.6. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-3,1] \cup [3, +\infty[$

13.

$$8 = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = 32$$

Logo, $y = f(x) = \frac{32}{x}$.

$$f(2) = \frac{32}{2} = 16$$

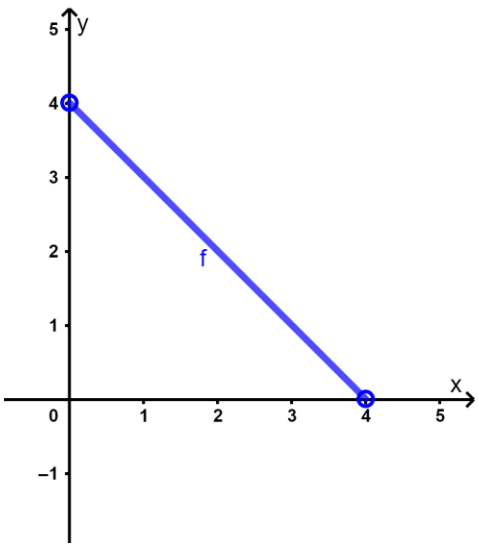
14.1.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\frac{11}{3}$
y	$\frac{7}{2}$	3	2	1	$\frac{1}{3}$

14.2. $D_f =]0,4[$

14.3. $f(x) = 4 - x$

14.4.



14.5. $D'_f =]0,4[$

Produto cartesiano

Considere os conjuntos $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4\}$.

Quantos pares ordenados podemos formar em que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento ao conjunto B?

Com os elementos de A e de B podemos formar seis pares ordenados:

$$(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)$$

Ao conjunto formado pelos seis pares ordenados chama-se produto cartesiano de A por B e representa-se por $A \times B$.

Assim: $A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$.

Dados conjuntos A e B, o ***produto cartesiano de A por B*** *representa-se por $A \times B$ e é o conjunto $\{(a,\ b): \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$ de todos os pares ordenados $(a,\ b)$ tais que $a \in A$ e $b \in B$.*

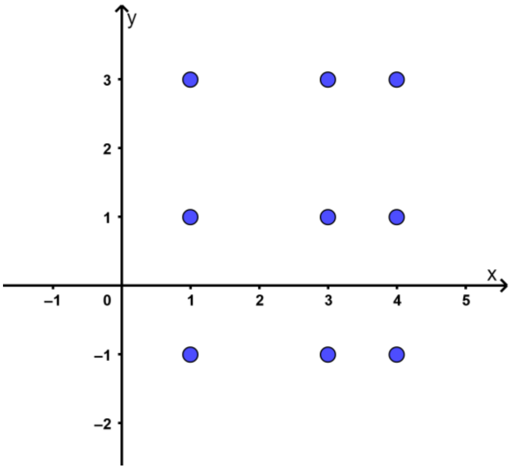
Um conjunto $G \subset A \times B$ é o ***gráfico*** *de uma função $f: A \longrightarrow B$ quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a,\ b) \in G$.*

<u>Página 11 exercícios 7 e 9</u>

7.1. 9 elementos

7.2. $A \times B = \{(1,-1),(1,1),(1,3),(3,-1),(3,1),(3,3),(4,-1),(4,1),(4,3)\}$

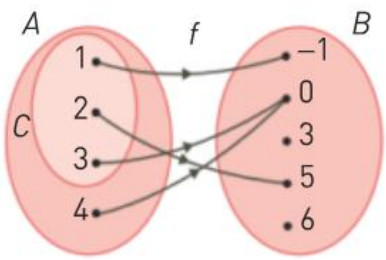
7.3.



9. $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{N}$

Restrição de uma função

Consideremos os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{-1,0,3,5,6\}$ e a função $f: A \longrightarrow B$, definida pelo seguinte diagrama de setas.



Seja $C = \{1,2,3\}$, $g: C \longrightarrow B$ e $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in C$.

$G_f = \{(1,-1),(2,5),(3,0),(4,0)\}$

$G_g = \{(1,-1),(2,5),(3,0)\}$

Tem-se que $G_g \subset G_f$.

Neste caso diz-se que g é a restrição de f a C e representa-se por $f|_C$.

Dados conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ e um conjunto C, dá-se o nome de ***restrição*** *de f a C à função $f|_C: C \cap A \longrightarrow B$, tal que*

$$\forall\, x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x).$$

Imagem de um conjunto por uma função

No exemplo anterior, $f(\{1,2,3\}) = \{-1,0,5\}$.

Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ e $C \subset A$, o ***conjunto imagem de C*** *por f é o conjunto das imagens por f dos elementos de C e representa-se por $f(C)$:*

$$f(C) = \{y \in B: \exists x \in C: y = f(x)\} = \{f(x): x \in C\}$$

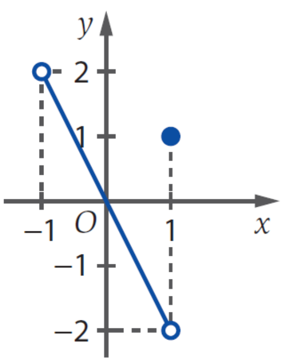
Note-se que $f(C)$ é o contradomínio da restrição de f a C.

Página 19 exercícios 16

16.1. $D_f = [-5,1]$

$D'_f =]-2,2]$

16.2.



16.3. $D_{f|_c} =]-1,1]$

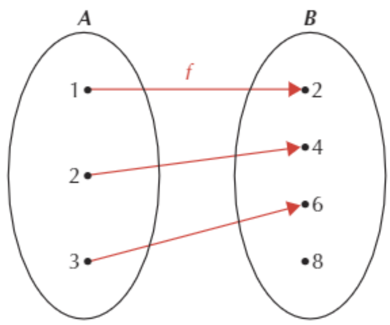
$D'_{f|_c} =]-2,2[$

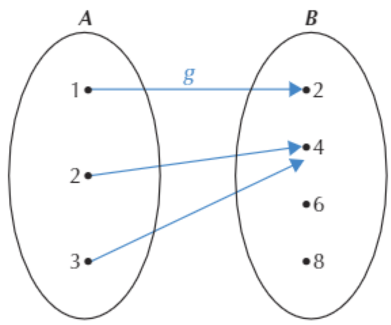
16.4. $C = [-3,-1]$

$f(C) = [1,2]$

Funções injetivas

Consideremos as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$ definidas nos diagramas sagitais abaixo.





Na função f quaisquer dois elementos distintos do domínio têm imagens distintas. Logo, a função f é injetiva.

Na função g os objetos distintos 2 e 3 têm a mesma imagem, 4. Portanto, a função g é não injetiva.

*Dados os conjuntos A e B, uma função f de A em B diz-se **injetiva** se e somente se quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas em B.*

Simbolicamente:

$f: A \longrightarrow$ B é injetiva se e somente se:

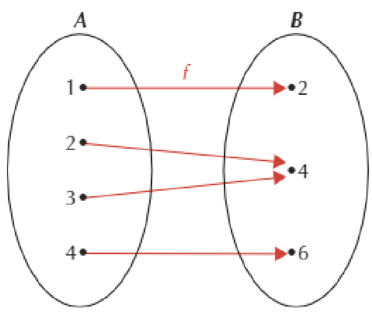
$$\forall\, x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

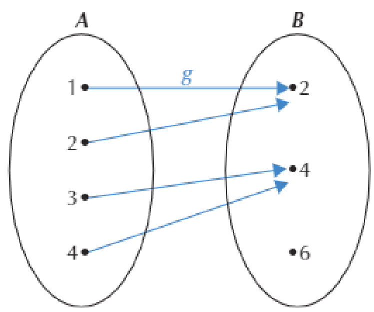
Ou, pela implicação contrarrecíproca:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Funções sobrejetivas

Consideremos as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$ definidas nos diagramas de setas abaixo.





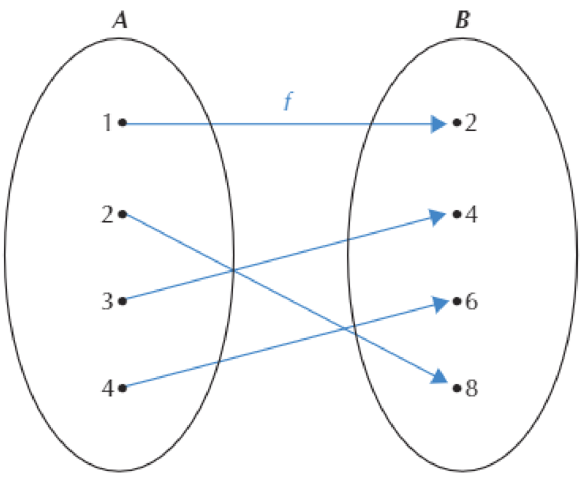
Na função f o conjunto de chegada, $\{2,4,6\}$, é igual ao contradomínio, $D'_f = \{2,4,6\}$. Diz-se que a função f é sobrejetiva, uma vez que todo o elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A.

Na função g o conjunto de chegada, $\{2,4,6\}$,é diferente do contradomínio, $D'_g = \{2,4\}$. Diz-se que a função g é não sobrejetiva, uma vez que existe pelo menos um elemento de B que não é imagem de nenhum elemento de A.

Dados os conjuntos A e B, uma função f de A em B diz-se ***sobrejetiva*** *se e só se para todo o $y \in B$ existir um elemento $x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

Funções bijetivas

Consideremos a função $f: A \longrightarrow B$ definida no diagrama de setas abaixo.



A função f é:

- Injetiva, pois objetos distintos têm imagens distintas;
- Sobrejetiva, pois todo o elemento de B é imagem de um elemento de A.

Quando uma função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, diz-se bijetiva.

Dados os conjuntos A e B, uma função f de A em B diz-se ***bijetiva*** *se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.*

Resulta da definição que uma função f *de A em B é bijetiva se e só se para todo o elemento $b \in B$ existir um e apenas um elemento a de A tal que $b = f(a)$.*

Página 23 exercícios 20, 22, 23 e 24

20. As funções f e i são injetivas, uma vez que, objetos diferentes têm imagens diferentes.

A função g é não injetiva, porque $g(1) = g(3) = 2$.

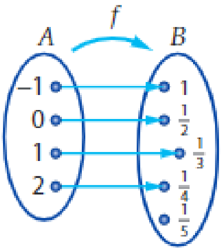
A função h é não injetiva, pois $h(r) = h(q) = c$.

* Neste exercício, a professora, explica como se verifica graficamente se uma função é injetiva.

22.1. $C = [-2,2]$

22.2. $D = [0, +\infty[$

23.1.



23.2. $D_f = \{-1,0,1,2\}$; $D'_f = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$; o conjunto de chegada é o conjunto B.

23.3. $f(2) = \frac{1}{4}$

23.4. $x = 1$

23.5. $f(C) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

23.6. Não existe nenhum objeto do domínio de f cuja imagem seja $\frac{1}{5}$.

23.7. A função f é injetiva, pois a objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

23.8. A função f é não sobrejetiva, pois o contradomínio de f não coincide com o conjunto de chegada.

24.1. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 3\,x_1 - 1 = 3\,x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Logo, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ para todos os $x_1, x_2 \in D_g$.

Portanto, g é injetiva.

24.2. A função g é sobrejetiva, pois o contradomínio, $D'_g = \mathbb{R}$, coincide com o conjunto de chegada.

Como g é injetiva e sobrejetiva, temos que g é bijetiva.

De seguida, a professora marca o trabalho de casa.

Trabalho de casa: Resolver os exercícios das páginas 19 e 23 que não foram resolvidos na aula (e terminar os exercícios propostos anteriormente, caso não sejam resolvidos na aula).

Para concluir a aula a professora solicita que os alunos refiram o que foi lecionado durante a aula e, de seguida, registam o sumário.

Sumário: Conceito de função.

Produto cartesiano de conjuntos. Gráfico de uma função.

Restrição de uma função.

Imagem de um conjunto por uma função.

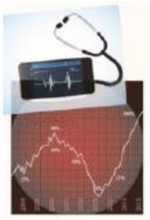
Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

Resolução de exercícios.

Anexos

Apresentação em Power Point:

Funções



- O estudo das funções é considerado um dos temas mais importantes na Matemática;
- As funções estão presentes no nosso quotidiano, sendo a base matemática para o desenvolvimento dos mais diversos sistemas;
- O conceito de função evoluiu ao longo dos tempos.

Alguns Matemáticos importantes na história das Funções

Nicolau de Oresme

Kepler
Galileu

Bernoulli

René Descartes
Leibniz

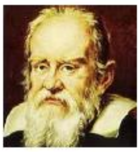
Leonhard Euler
Dirichlet

- Matemático, Físico, Astrónomo e Economista;
- Oresme terá sido o primeiro a utilizar um gráfico, para representar numa direção, o tempo e, na outra, a posição de um móvel. Designava as coordenadas por latitude e longitude.

Nicolau Oresme
(1323 - 1382)

- Matemáticos e Astrónomos;
- Com os trabalhos de Kepler sobre o movimento dos planetas e os de Galileu sobre a queda dos corpos, a Matemática foi aplicada ao estudo dos movimentos, sendo as leis dos fenómenos estudados expressas por funções.

Johannes Kepler
(1571 - 1630)



Galileu Galilei
(1584 - 1642)

$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2, t \geq 0$ (Altura de um corpo em queda livre)

$v = \sqrt{2gh_0}$ (velocidade de um corpo em queda livre)

- Filósofo, Físico e Matemático;
- Descobriu a Geometria Analítica;
- Introduziu o método analítico para definir funções;
- A representação de uma função por meio de um gráfico, só foi possível porque Descartes foi o primeiro a utilizar o referencial bidimensional, hoje conhecido por referencial cartesiano.

René Descartes
(1596 - 1650)

- Filósofo e Matemático;
- Inventou uma máquina de calcular que somava, subtraía, multiplicava, dividia e extraía raízes;
- Introduziu a palavra "função" como conceito matemático;
- Vários conhecimentos e notações relativos ao cálculo diferencial devem-se a Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716)

- Matemático;
- Apresentou a seguinte definição de função: "dá-se o nome de função de uma grandeza variável a uma quantidade obtida por qualquer processo a partir dessa grandeza variável e de constantes" e propõe a notação Φx para representar uma função.

Daniel Bernoulli
(1667 - 1748)

- Matemático e Físico;
- Efetua operações com o infinito usando as regras usuais da álgebra;
- Euler foi o primeiro a adotar a expressão $f(x)$ para o valor da função, substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica";
- Aplica métodos algébricos ao estudo das funções.

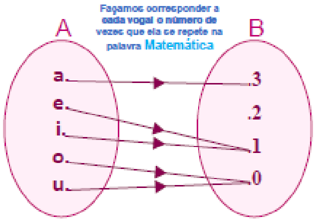
Leonhard Euler
(1707 - 1783)

- Matemático;
- Dirichlet definiu função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como é definida hoje. Afirmando que "a cada x corresponde um único y finito".

Johann Peter Dirichlet
(1805 - 1859)

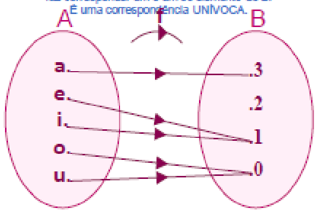
Considere o conjunto e o conjunto

Fagamos corresponder a cada vogal o número de vezes que ela se repete na palavra Matemática



Nesta correspondência, a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.
É uma correspondência UNÍVOCA.

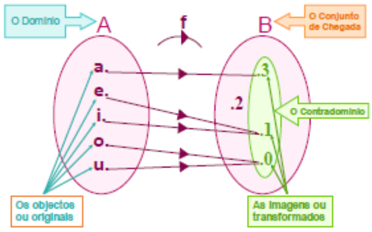
Trata-se de uma função



Definição de Função:

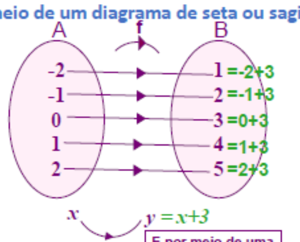
*Dados dois conjuntos A e B uma **função** ou **aplicação** de A em B é uma correspondência que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.*

Numa função podemos identificar:



Uma função diz-se bem definida quando se conhece:

Por meio de um diagrama de seta ou sagital



E por meio de uma expressão analítica.

Por meio de tabelas

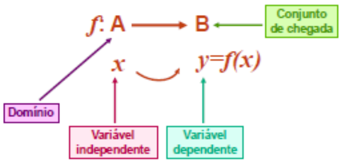
A área de um quadrado de lado x é dada, em função de x, por $A(x)$.

x	1	1,5	2	2,5	5
$A(x)$	1	2,25	4	6,25	25
	$=1^2$	$=1,5^2$	$=2^2$	$=2,5^2$	$=5^2$

E por meio de uma expressão analítica

$A(x) = x^2$

Função definida por uma expressão analítica



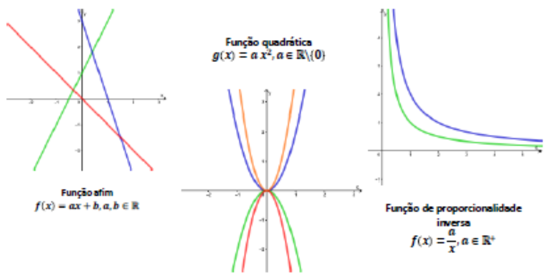
Por meio de um gráfico

Considere a função $f: \{-4,-2,0,2,4\} \rightarrow \{-5,-4,-2,-1,0,1,2,4\}$.

x	y
-4	4
-2	2
0	0
2	-2
4	-4

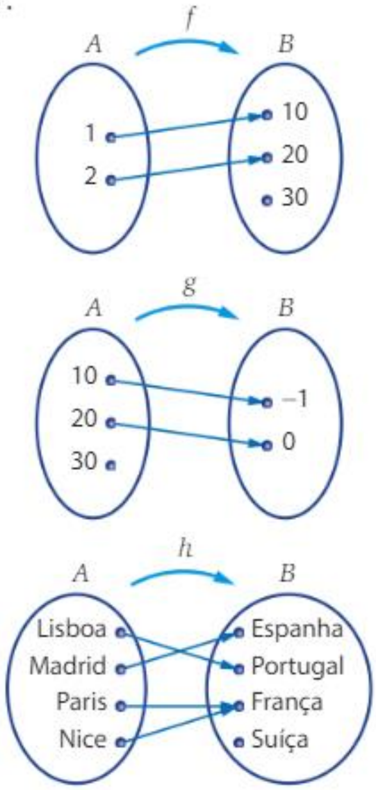
$$G_f = \{(-4,4),(-2,2),(0,0),(2,-2),(4,-4)\}$$

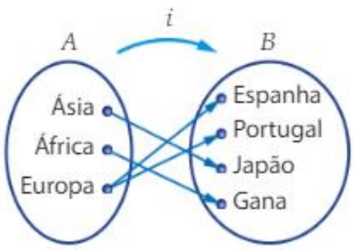
Por meio de um gráfico Cartesiano



Exercícios 2, 3 e 6 da página 9:

2 Indica, justificando, quais dos seguintes diagramas de setas representam funções de A em B.





3 A tabela seguinte representa uma função f.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	5	6	7	8	9

Indica:

3.1 a imagem de 3;

3.2 o objeto cuja imagem é 8;

3.3 o domínio e o contradomínio de f;

3.4 uma expressão analítica de f.

6 Fixada uma unidade de medida, considera a função f que ao comprimento, x, da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular de volume 20 faz corresponder a respetiva altura, h.

6.1 Determina $f(2)$.

6.2 Determina x para $h = 3$.

6.3 Determina uma expressão analítica de f.

6.4 Indica o domínio de f.

Exercícios 7 e 9 da página 11:

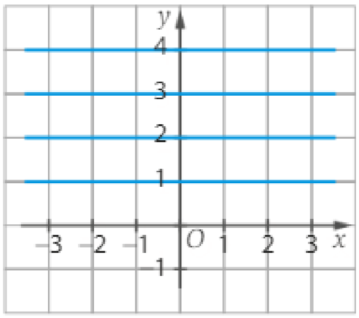
7 Considera os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 1, 3\}$.

7.1 Quantos elementos tem o produto cartesiano de A por B?

7.2 Representa em extensão $A \times B$.

7.3 Representa $A \times B$ geometricamente.

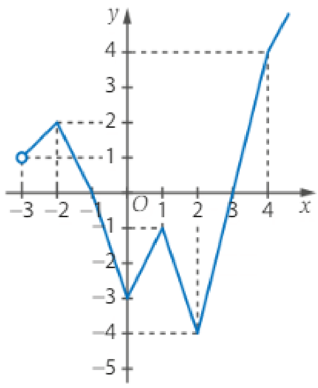
9 No referencial ortonormado da figura, está representado parcialmente o produto cartesiano de A por B, que é constituído pelas retas de equação $y = b$, com $b \in \mathbb{N}$.



Indica os conjuntos A e B.

Exercícios 12, 13 e 14 da página 15:

12 No referencial cartesiano da figura, está representada parte do gráfico da função g.



12.1 Indica o valor de $g(1)$.

12.2 Indica os valores de x para os quais $g(x) = 0$.

12.3 Indica as coordenadas do ponto do gráfico de g cuja abcissa é nula.

12.4 Quantos pontos do gráfico de g têm ordenada igual a 1?

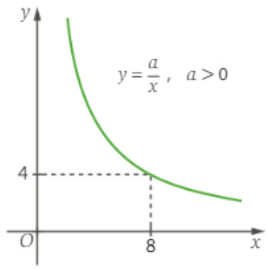
12.5 Indica o domínio e o contradomínio de g.

12.6 Para que valores de x se tem $g(x) \geqslant 0$?

Apresenta o resultado na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

13 Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa.

O ponto de coordenadas $(8\ ,\ 4)$ pertence ao gráfico da função.



Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 2 .

Adaptado de Prova Final de Matemática – 3.º CEB – 1.ª Chamada 2012

14 Considera os retângulos com 8 cm de perímetro. Tomemos x e y para medidas dos lados, em cm, desses retângulos.

Seja f a função tal que $y = f(x)$.

14.1 Completa no teu caderno a tabela seguinte.

x	$\frac{1}{2}$	1		3	
y		3	2		$\frac{1}{3}$

14.2 Indica o domínio de f .

14.3 Determina uma expressão analítica da função f .

14.4 Representa graficamente a função f .

14.5 Indica o contradomínio de f .

Exercícios da página 19:

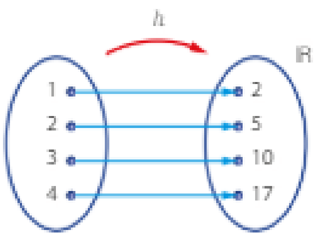
15 O gráfico da função f, de domínio $\{1, 2, 3, 4\}$ e conjunto de chegada $[1, 20]$, é o conjunto

$\{(1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17)\}$.

A função g é definida por:

$$g: \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2 + 1$$

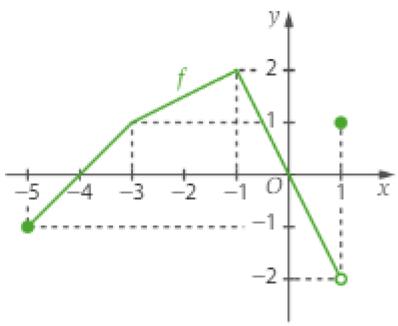
A função h, de domínio $\{1, 2, 3, 4\}$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$, fica definida pelo seguinte diagrama de setas.



15.1 Indica o contradomínio de cada uma das funções.

15.2 Das três funções dadas, duas são iguais. Quais? Justifica a tua resposta.

16 Na figura seguinte está representada graficamente a função f.



16.1 Indica o domínio e o contradomínio de f.

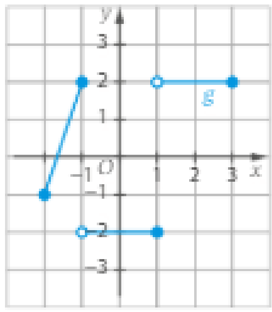
16.2 Representa graficamente a restrição da função f ao conjunto $B =]-1, 2[$.

16.3 Indica o domínio e o contradomínio de $f|_B$.

17 Considera a função g definida, em $\mathbb{R}$, pela expressão analítica $g(x) = x^2 + 1$.

Define, por uma tabela, a restrição de g ao conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

18 Na figura seguinte está representada graficamente a função g, de domínio $[-2, 3]$ e conjunto de chegada $\mathbb{R}$.



18.1 Indica o contradomínio de g.

18.2 Sendo $C =]-1, 1]$, $D = [-1, 1]$, $E = [-2, -1]$ e $F =]0, 2[$, indica:

a. $g(C)$

b. $g(D)$

c. $g(E)$

d. $g(F)$

18.3 Representa graficamente a restrição de g a $]-1, 2]$.

18.4 Representa graficamente a restrição de g a $]-10, 0[$.

19 Considera a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 1$.

Seja $C =]-10, 0[$.

19.1 Representa graficamente a restrição de f a C.

19.2 Indica o contradomínio de $f|_C$.

19.3 Define analiticamente uma função g, tal que $g = f|_C$.

Exercícios da página 23:

20 As funções a seguir representadas são injetivas? Justifica.

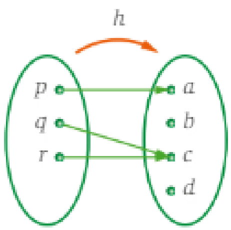
a.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	1	3	5	4

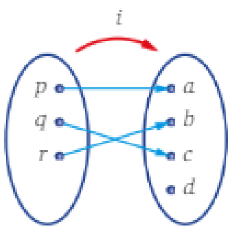
b.

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	1	2	5	4

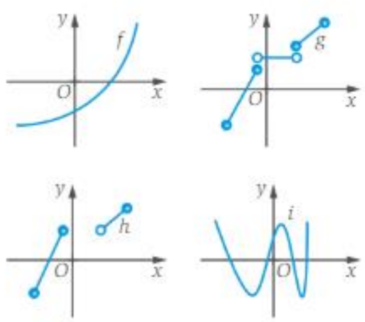
c.



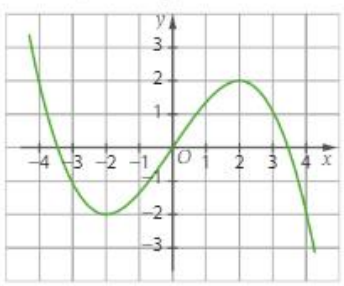
d.



21 Quais dos seguintes gráficos representam funções injetivas?



22 A função f, representada graficamente abaixo, é não injetiva.



Indica:

22.1 um intervalo de números reais C tal que a restrição de f a C seja injetiva;

22.2 um intervalo de números reais D, diferente do domínio de f, tal que a restrição de f a D seja não injetiva.

23 Considera os conjuntos

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e a função $f: A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

23.1 Define a função f por meio de um diagrama de setas.

23.2 Indica D_f, D'_f e o conjunto de chegada de f.

23.3 Indica $f(2)$.

23.4 Qual é o valor de x para o qual se tem $f(x) = \frac{1}{3}$?

23.5 Sendo $C = \{0, 1\}$, determina $f(C)$.

23.6 A equação $f(x) = \frac{1}{5}$ é impossível. Porquê?

23.7 A função f é injetiva? Justifica.

23.8 A função f é sobrejetiva? Justifica.

24 Seja $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = 3x - 1$.

24.1 Mostra que g é injetiva.

24.2 Justifica que g é bijetiva.

25 Seja $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = 2x^2$.

25.1 Calcula $h(-2)$ e $h(2)$.

O que podes concluir acerca da injetividade da função h?

25.2 Indica um intervalo de números reais C tal que a restrição de h a C seja injetiva.

25.3 Indica um intervalo de números reais D, diferente do domínio de f, e tal que a restrição de h a D seja não injetiva.

25.4 Indica qual deveria ser o conjunto de chegada da função h para que esta fosse sobrejetiva.

Anexo H

Plano de aula - Função quadrática

Escola Secundária Jaime Cortesão

Plano de aula de Matemática

Professora estagiária: Raquel Martins

Orientadora Científica: Professora Doutora Helena Albuquerque

Orientadora Cooperante: Professora Margarida Cid

- **Disciplina:** Matemática A
- **Ano/Turma:** 10.º 1
- **Lições n.º:** 170/171
- **Sala:** Laboratório de Física
- **Ano letivo:** 2018/2019
- **Data:** 14.05.2019
- **Hora:** 08h30
- **Tempos letivos (50 minutos):** 2

Domínio:

Funções Reais de Variável Real (**FRVR10**).

Subdomínio:

Generalidades acerca de funções reais de variável real.

Objetivo geral:

Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções (**FRVR10_5**).

Descritor:

Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x-b)^2+c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos (**FRVR10_5.1**).

Aprendizagens Essenciais:

Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação.

Conteúdo:

Domínio, contradomínio, eixo de simetria, coordenadas do vértice, extremos, monotonia, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas.

Pré-requisitos:

- ✓ Conhecer o conceito de função;

- ✓ Reconhecer o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada de uma função;
- ✓ Conhecer os vários modos de representar uma função;
- ✓ Reconhecer graficamente a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x) + c, f(x - c), -f(x)$ e $c\ f(x)$, com c um número real;
- ✓ Representar graficamente uma função quadrática;
- ✓ Estudar uma função quanto à sua monotonia, extremos, sentido das concavidades e zeros.

❖ Capacidades transversais:

- ✓ Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos;
- ✓ Raciocínio Matemático;
- ✓ Comunicação Matemática;
- ✓ História da Matemática.

❖ Metodologias/Estratégias:

- ✓ Trabalho em grupo turma, na resolução de atividades de raciocínio que obriguem a formular e testar conjeturas e generalizações;
- ✓ Trabalho de pares na resolução de exercícios de consolidação;
- ✓ Trabalho em grupo turma, na discussão das conclusões e na síntese da aula.

❖ Recursos/Materiais Didáticos:

- ✓ Manual adotado (ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro – **Novo Ípsilon 10 - Volume 3, Matemática A, 10.º ano | Ensino Secundário**. 1.ª Edição. Raiz Editora, 2018. 143 p. ISBN 978-989-744-225-4);
- ✓ Quadro branco e canetas;
- ✓ Computador e projetor;
- ✓ Power Point;
- ✓ Ficha formativa (em anexo);
- ✓ Software GeoGebra.

❖ Avaliação dos alunos:

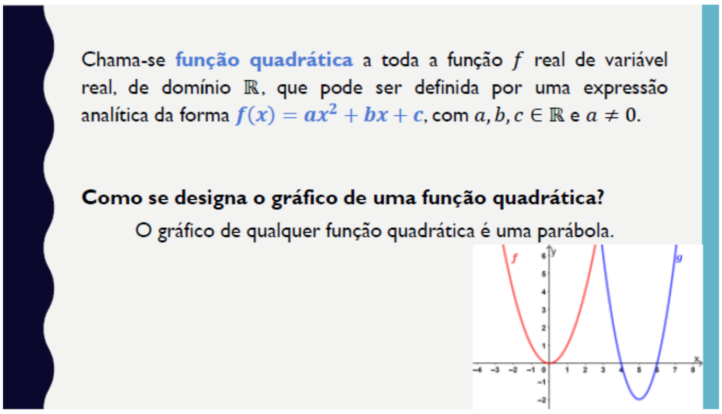
- ✓ Observação direta: realização de tarefas (empenho), interesse e cumprimento das regras;
- ✓ Participação oral.

❖ Descrição da Aula - Estratégias e Desenvolvimento da aula

A professora inicia o estudo da função quadrática fazendo uma breve referência à importância do estudo desta função noutras ciências, através de uma apresentação em Power Point.

Após o estudo, generalidades sobre funções, iremos agora estudar funções em particular. Comecemos pela função quadrática que já abordamos no 9.º ano na sua forma mais simples, $y = a\,x^2, a \neq 0$.

As funções quadráticas têm várias aplicações práticas, físicas ou teóricas no nosso dia-a-dia. São fundamentais, por exemplo, no estudo da órbita dos planetas, no movimento de projéteis, nos modelos económicos e em muitos outros problemas relacionados com as mais variadas ciências como, por exemplo, na arquitetura, na física, na mecânica, ...



Do Power Point, a professora salienta a definição de função quadrática que pede para os alunos registarem no seu caderno.

E realça que estas funções são representadas graficamente por curvas que se designam por parábolas.

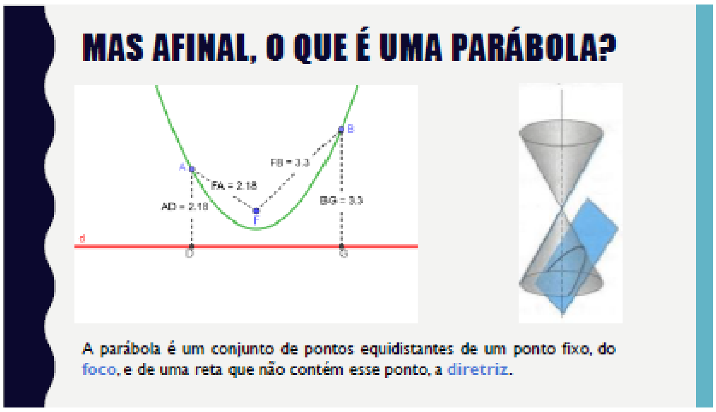
São as propriedades geométricas destas curvas que explicam a sua ampla aplicação em diversas situações do quotidiano como, por exemplo, na construção de antenas de satélite, arcos de pontes, faróis de automóveis, ...

Uma curiosidade

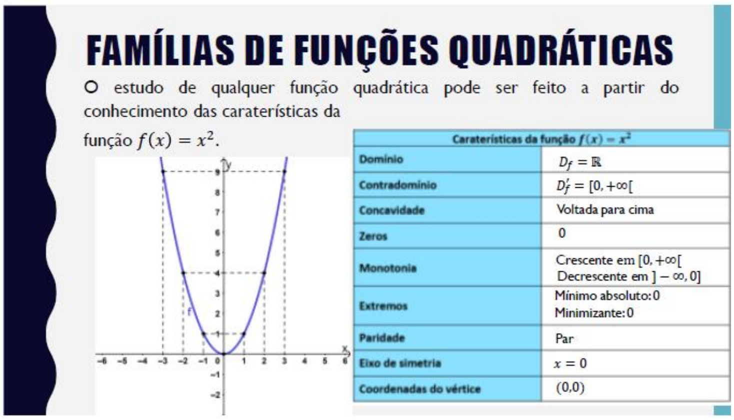
Uma corda ou corrente suspensa, presa por dois pontos e apenas sujeita ao seu próprio peso, adquire a forma de uma curva chamada catenária.

Durante muitos anos alguns cientistas confundiram esta curva com uma parábola.

Os problemas de encontrar uma equação que representasse a catenária foi um dos mais difíceis e famosos problemas da história da Matemática.



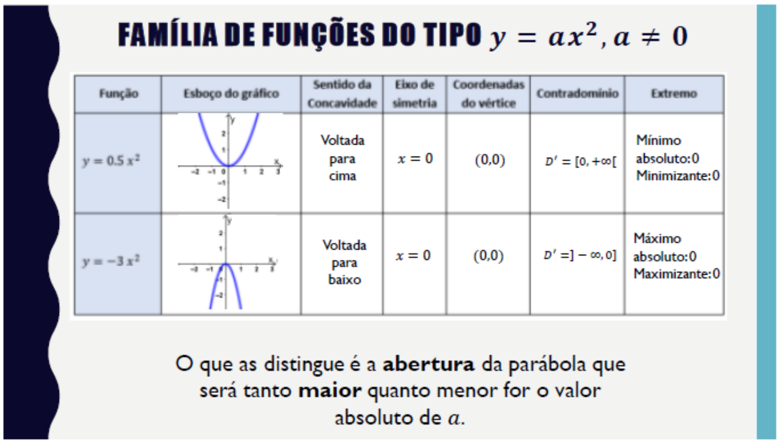
Após esta curiosidade, a professora apresenta a definição de parábola, referindo a definição de parábola enquanto lugar geométrico e como a interseção de uma superfície cónica com um plano.



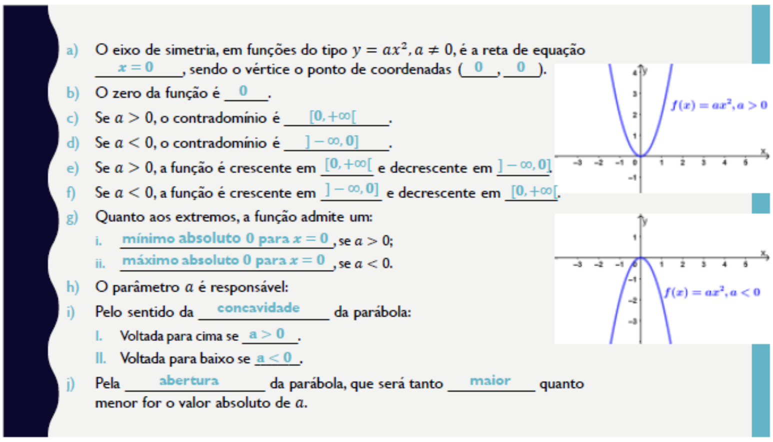
Em seguida, recorda o estudo da função $f(x) = x^2$, iniciado no 3.º ciclo. Uma vez que, o estudo de qualquer função quadrática pode ser feito a partir do conhecimento das caraterísticas da função $f(x) = x^2$ tendo em conta as transformações de gráficos de funções, estudadas no 2.º período.

Assim, as propriedades para a função $f(x) = x^2$ irão sofrer algumas alterações de acordo com estas transformações.

A professora distribui uma ficha de trabalho aos alunos e leva-os a realizar os exercícios propostos para as funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$. Seguidamente, realiza a sua correção com a colaboração dos alunos. E, para concluir o estudo destas funções, apresenta no software de geometria dinâmica GeoGebra as principais caraterísticas das funções $y = ax^2, a \neq 0$ para vários valores de a.



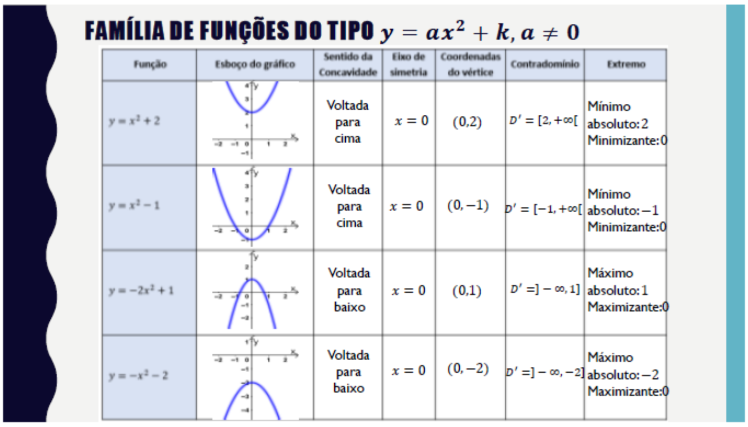
Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = 0.5\,x^2$		Voltada para cima	$x = 0$	(0,0)	$D' = [0, +\infty[$	Mínimo absoluto:0 Minimizante:0
$y = -3\,x^2$		Voltada para baixo	$x = 0$	(0,0)	$D' =]-\infty, 0]$	Máximo absoluto:0 Maximizante:0



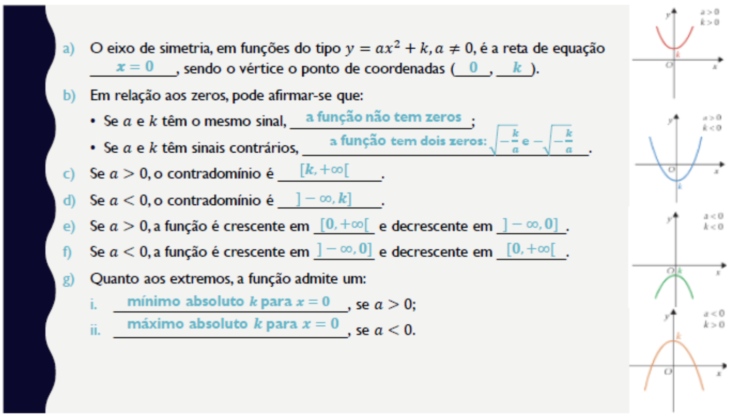
O gráfico da função $y = ax^2, a \neq 0$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ através de uma contração de coeficiente $|a|$, se $0 < |a| < 1$ ou de uma dilatação de coeficiente $|a|$, se $|a| > 1$, seguida de reflexão de eixo O_x, se $a < 0$.

Para o estudo das funções do tipo $y = a\,x^2 + k,\ y = a(x-h)^2$ e $y = a(x-h)^2 + k$, para $h, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ procede de forma análoga.

Vejamos agora algumas propriedades das funções quadráticas $y = a\,x^2 + k, a \neq 0$.

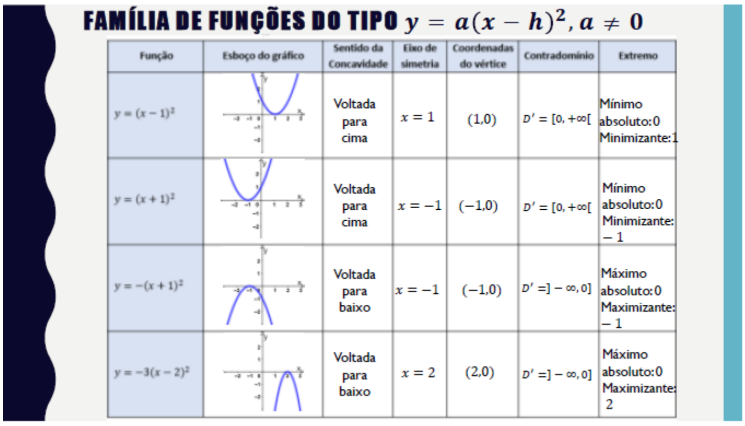


Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = x^2 + 2$		Voltada para cima	$x = 0$	(0,2)	$D' = [2, +\infty[$	Mínimo absoluto:2 Minimizante:0
$y = x^2 - 1$		Voltada para cima	$x = 0$	$(0, -1)$	$D' = [-1, +\infty[$	Mínimo absoluto:−1 Minimizante:0
$y = -2x^2 + 1$		Voltada para baixo	$x = 0$	(0,1)	$D' =]-\infty, 1]$	Máximo absoluto:1 Maximizante:0
$y = -x^2 - 2$		Voltada para baixo	$x = 0$	$(0, -2)$	$D' =]-\infty, -2]$	Máximo absoluto:−2 Maximizante:0

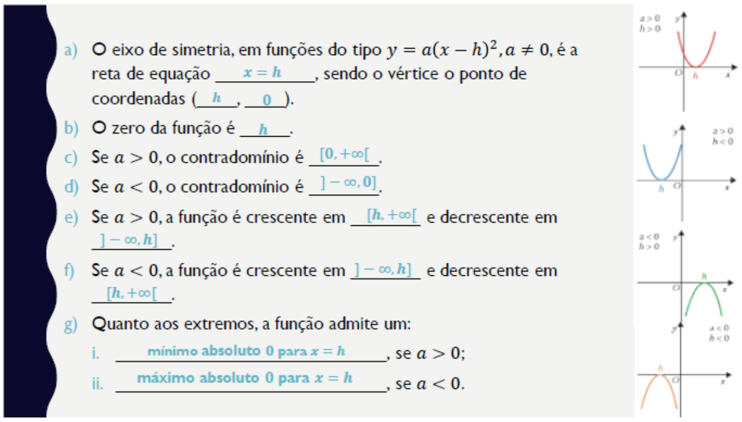


O gráfico da função $y = a\,x^2 + k, a \neq 0$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = a\,x^2, a \neq 0$ através da translação de vetor $(0, k)$.

Vejamos agora algumas propriedades das funções quadráticas $y = a(x-h)^2, a \neq 0$.

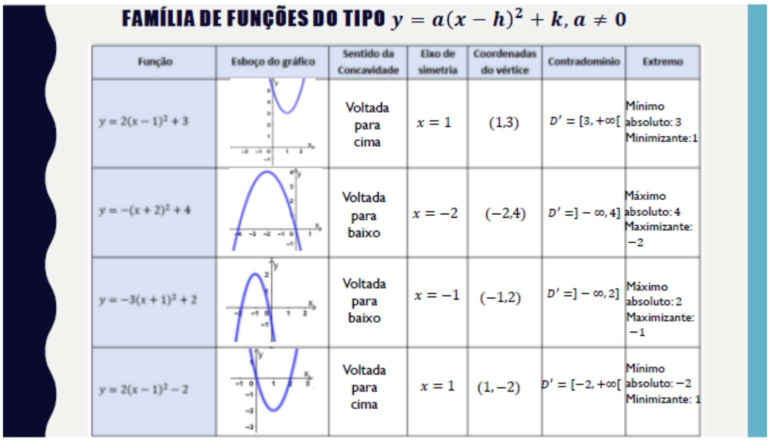


Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y=(x-1)^2$		Voltada para cima	$x=1$	$(1,0)$	$D' = [0,+\infty[$	Mínimo absoluto: 0 Minimizante: 1
$y=(x+1)^2$		Voltada para cima	$x=-1$	$(-1,0)$	$D' = [0,+\infty[$	Mínimo absoluto: 0 Minimizante: -1
$y=-(x+1)^2$		Voltada para baixo	$x=-1$	$(-1,0)$	$D' =]-\infty,0]$	Máximo absoluto: 0 Maximizante: -1
$y=-3(x-2)^2$		Voltada para baixo	$x=2$	$(2,0)$	$D' =]-\infty,0]$	Máximo absoluto: 0 Maximizante: 2

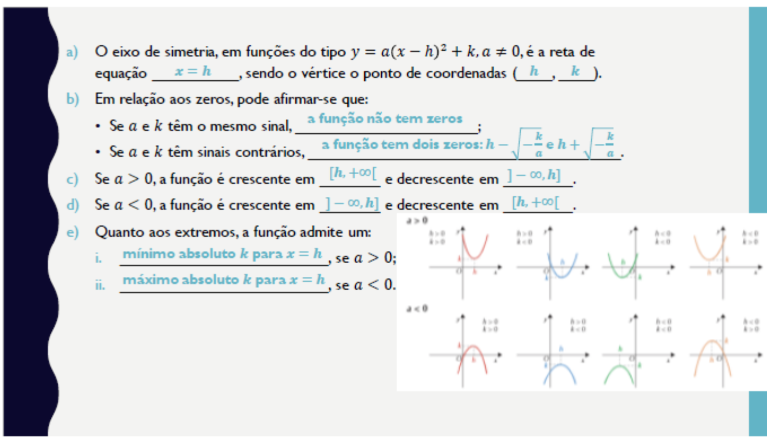


O gráfico da função $y = a(x-h)^2, a \neq 0$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = a\,x^2, a \neq 0$ através da translação de vetor $(h, 0)$.

Vejamos agora algumas propriedades das funções quadráticas $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.



Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y=2(x-1)^2+3$		Voltada para cima	$x=1$	$(1,3)$	$D' = [3,+\infty[$	Mínimo absoluto: 3 Minimizante: 1
$y=-(x+2)^2+4$		Voltada para baixo	$x=-2$	$(-2,4)$	$D' =]-\infty,4]$	Máximo absoluto: 4 Maximizante: -2
$y=-3(x+1)^2+2$		Voltada para baixo	$x=-1$	$(-1,2)$	$D' =]-\infty,2]$	Máximo absoluto: 2 Maximizante: -1
$y=2(x-1)^2-2$		Voltada para cima	$x=1$	$(1,-2)$	$D' = [-2,+\infty[$	Mínimo absoluto: -2 Minimizante: 1



O gráfico da função $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = a\,x^2, a \neq 0$ através da translação de vetor $(h, 0)$, seguida da translação de vetor $(0, k)$, isto é, através da translação de vetor (h, k).

Para terminar, a aula a professora solicita que os alunos resolvam os exercícios de aplicação presentes na ficha de trabalho.

A professora circula pela sala, para verificar se os alunos estão a resolver os exercícios e/ou se têm dúvidas na sua resolução e esclarece as possíveis dúvidas.

Depois de os alunos resolverem os exercícios no caderno, solicita que resolvam os exercícios no quadro. Posteriormente, verifica se a resolução está correta e apresenta todos os passos necessários à sua compreensão.

Exercícios de aplicação da ficha de trabalho:

1. $f\ (x) = (x-2)^2 - 4x = x^2 - 8x + 4$ é uma função quadrática. O coeficiente de x^2 é 1, logo tem a concavidade voltada para cima.

$g(x) = 2x^2 - 2(x-1)^2 = 4x - 2$ não é uma função quadrática.

$h\ (x) = 3x^3 + x(-4x - 3x^2) = -4\,x^2$ é uma função quadrática. O coeficiente de x^2 é -4, logo tem a concavidade voltada para baixo.

2.

2.1. Função f:

Coordenadas do vértice: $(1, 0)$

Eixo de simetria: $x = 1$

Função g:

Coordenadas do vértice: $(0, 1)$

Eixo de simetria: $x = 0$

Função h:

Coordenadas do vértice: $(-1, 7)$

Eixo de simetria: $x = -1$

Função i:

Coordenadas do vértice: $(4, -3)$

Eixo de simetria: $x = 4$

Função j:

Coordenadas do vértice: $(2, 5)$

Eixo de simetria: $x = 2$

2.2.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Mínimo absoluto 0 para $x = 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h\ (x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

Máximo absoluto 7 para $x = -1$

3. $y = a\,x^2 + 5$

$1 = a(-1)^2 + 5 \Leftrightarrow a = -4$

$y = -4\,x^2 + 5$

4.

a) $y = a(x-3)^2$

$-3 = a(1-3)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}(x-3)^2$

b) $y = a(x+1)^2$

$-1 = a(-2+1)^2 \Leftrightarrow a = -1$

$y = -\,(x+1)^2$

5.

a) $y = a(x+1)^2 + 2$

$0 = a(1+1)^2 + 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$

b) $y = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$

$0 = a\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 - 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$

De seguida, a professora marca o trabalho de casa.

Trabalho de casa: Resolver os exercícios propostos anteriormente, que não foram resolvidos na aula.

Para concluir a aula a professora solicita que os alunos refiram o que foi lecionado durante a aula e, de seguida, registam o sumário.

Sumário: Início do estudo da função quadrática: $y = ax^2$, $y = a\,x^2 + k$, $y = a(x-h)^2$ e $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.

Resolução de exercícios.

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Ficha Formativa** **14.05.2019**

Função quadrática

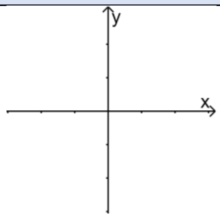
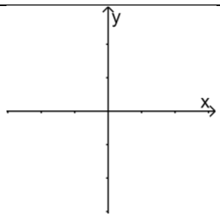
Definição: Chama-se **função quadrática** a toda a função f real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, que pode ser definida por uma expressão analítica da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O gráfico de qualquer função quadrática é uma **parábola**.

O estudo de qualquer função quadrática pode ser feito a partir do conhecimento das caraterísticas da função $f(x) = x^2$.

▪ Família de funções do tipo $y = ax^2,\ a \neq 0$

1. Complete o quadro seguinte.

Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = 0.5\,x^2$						
$y = -3\,x^2$						

1.1. Complete as frases seguintes:

a) O eixo de simetria, em funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$, é a reta de equação ___________, sendo o vértice o ponto de coordenadas (_____, _____).

b) O zero da função é ______.

c) Se $a > 0$, o contradomínio é __________.

d) Se $a < 0$, o contradomínio é __________.

e) Se $a > 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

f) Se $a < 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

g) Quanto aos extremos, a função admite um:

i. __________________________________, se $a > 0$;

ii. __________________________________, se $a < 0$.

h) O parâmetro a é responsável:

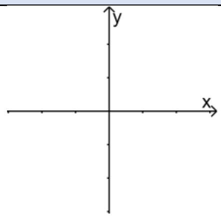
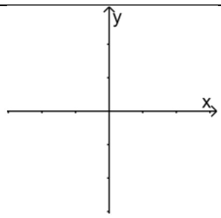
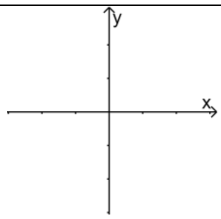
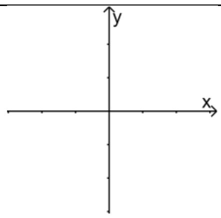
- Pelo sentido da _________________ da parábola:

- Voltada para cima se ______;
- Voltada para baixo se ______.

- Pela ________________ da parábola, que será tanto __________ quanto menor for o valor absoluto de a.

▪ **Família de funções do tipo $y = ax^2 + k,\ a \neq 0$**

2. Complete o quadro seguinte.

Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = x^2 + 2$						
$y = x^2 - 1$						
$y = -2x^2 + 1$						
$y = -x^2 - 2$						

2.1. Complete as frases seguintes:

a) O eixo de simetria, em funções do tipo $y = ax^2 + k,\ a \neq 0$, é a reta de equação _______, sendo o vértice o ponto de coordenadas (____, ____).

b) Em relação aos zeros, pode afirmar-se que:

i. Se a e k têm o mesmo sinal, _________________________________;

ii. Se a e k têm sinais contrários, ________________________________.

c) Se $a > 0$, o contradomínio é _________.

d) Se $a < 0$, o contradomínio é _________.

e) Se $a > 0$, a função é crescente em _______ e decrescente em ______.

f) Se $a < 0$, a função é crescente em _______ e decrescente em ______.

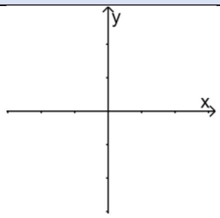
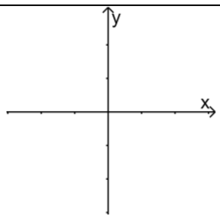
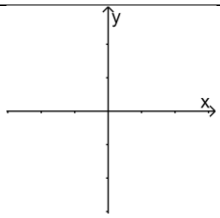
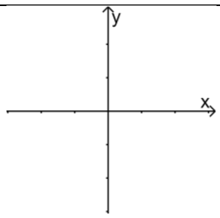
g) Quanto aos extremos, a função admite um:

i. ______________________________, se $a > 0$;

ii. ______________________________, se $a < 0$.

- **Família de funções do tipo $y = a(x - h)^2,\ a \neq 0$**

3. Complete o quadro seguinte.

Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = (x - 1)^2$						
$y = (x + 1)^2$						
$y = -(x + 1)^2$						
$y = -3(x - 2)^2$						

3.1. Complete as frases seguintes:

a) O eixo de simetria, em funções do tipo $y = a(x - h)^2,\ a \neq 0$, é a reta de equação ________, sendo o vértice o ponto de coordenadas (_____, _____).

b) O zero da função é ______.

c) Se $a > 0$, o contradomínio é __________.

d) Se $a < 0$, o contradomínio é __________.

e) Se $a > 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

f) Se $a < 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

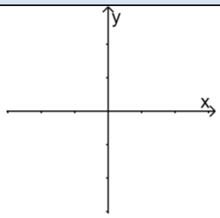
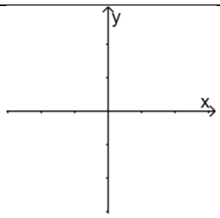
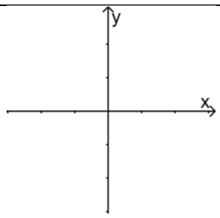
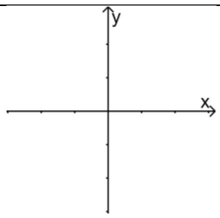
g) Quanto aos extremos, a função admite um:

i. ________________________________, se $a > 0$;

ii. ________________________________, se $a < 0$.

- **Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$**

4. Complete o quadro seguinte.

Função	Esboço do gráfico	Sentido da Concavidade	Eixo de simetria	Coordenadas do vértice	Contradomínio	Extremo
$y = 2(x-1)^2 + 3$						
$y = -(x+2)^2 + 4$						
$y = -3(x+1)^2 + 2$						
$y = 2(x-1)^2 - 2$						

4.1. Complete as frases seguintes:

a) O eixo de simetria, em funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$, é a reta de equação ________, sendo o vértice o ponto de coordenadas (_____, _____).

b) Em relação aos zeros, pode afirmar-se que:

i. Se a e k têm o mesmo sinal, ________________________________;

ii. Se a e k têm sinais contrários, ________________________________.

c) Se $a > 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

d) Se $a < 0$, a função é crescente em ________ e decrescente em _______.

e) Quanto aos extremos, a função admite um:

i. ________________________________, se $a > 0$;

ii. ________________________________, se $a < 0$.

Exercícios:

1. Considere as seguintes funções:

- $f(x) = (x-2)^2 - 4x$
- $g(x) = 2x^2 - 2(x-1)^2$
- $h(x) = 3x^3 + x(-4x - 3x^2)$

Verifique se são funções quadráticas e, caso sejam, determine para cada uma os valores do coeficiente de x^2 e o sentido da concavidade.

2. Considere as seguintes funções:

- $f(x) = 3(x-1)^2$
- $g(x) = 1 - 4x^2$
- $h(x) = -(x+1)^2 + 7$
- $i(x) = \frac{(x-4)^2}{5} - 3$
- $j(x) = (2-x)^2 + 5$

2.1. Para cada uma das funções acima referidas indique as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria, da respetiva parábola.

2.2. Faça o quadro de variação das funções f e h e indique os extremos.

3. Indique uma função do tipo $y = ax^2 + k, a \neq 0$ que tenha contradomínio de $]-\infty, 5]$ e que passe no ponto de coordenadas $(-1,1)$.

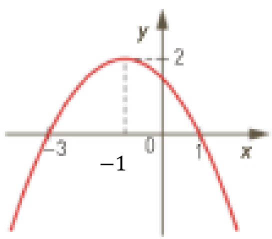
4. Indique, para cada um dos casos, uma função do tipo $y = a(x-h)^2, a \neq 0$ que satisfaça as seguintes propriedades:

a) o gráfico da função tem como eixo de simetria a reta de equação $x = 3$ e $(1,-3)$ é um ponto do seu gráfico;

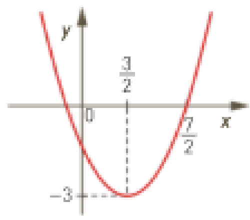
b) a função tem um zero -1 e $(-2,-1)$ é um ponto do seu gráfico.

5. Determine uma equação do tipo $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ para cada uma das parábolas representada nos gráficos seguintes.

a)



b)



Anexo I

1.ª Ficha de Trabalho - Matemática A 10.º ano: Enunciado e Resolução

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Ficha de Trabalho N.º 1 – Radicais e Potências** **setembro de 2018**

Nome: ____ N.º: _____ Turma: ____

1. Simplifique cada uma das expressões:

a. $\sqrt{12}-\sqrt{6}\times\sqrt{8}=$

b. $\sqrt{45}-2\sqrt{20}+2\sqrt{125}=$

c. $\sqrt{3}-\sqrt{27}=$

d. $(2-\sqrt{3})^2=$

e. $(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})=$

f. $2\sqrt[4]{5}-\frac{\sqrt[4]{80}}{3}+\frac{\sqrt[4]{405}}{2}=$

g. $\sqrt[8]{192}\times\sqrt[4]{2}-\frac{\sqrt[8]{3}}{5}=$

h. $(2-\sqrt{5})^2-(3\sqrt{5}-4)^2+2(10\sqrt{5}+26)=$

i. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}+3\sqrt[6]{128}-\sqrt[12]{4}=$

j. $\dfrac{5^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\div10^{\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{3}}}=$

k. $\sqrt{\dfrac{9^{\frac{2}{3}}\times3}{3^{\frac{4}{3}}}}=$

l. $\sqrt{\dfrac{2^{\frac{1}{4}}\times8^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{4}}}=$

m. $\dfrac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{-1}}+\left(x^{\frac{5}{8}}\right)^2$, com $x\in\mathbb{R}^+$

2. Seja a um número real positivo. Considera os números $x = a^{\frac{1}{3}}$ e $y = \sqrt{a^5}$.
Seja z tal que $z \times x^{-2} = y$. Qual é o valor de z?

(A) $a^3 \times \sqrt[6]{a}$ **(B)** $a^9 \times \sqrt[6]{a}$ **(C)** $a^{\frac{5}{3}}$ **(D)** $a^{\frac{4}{15}}$

3. Escreva as seguintes frações com denominador racional:

a. $\frac{5}{\sqrt{5}} =$

b. $\frac{-2}{3\sqrt{7}} =$

c. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} =$

d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} =$

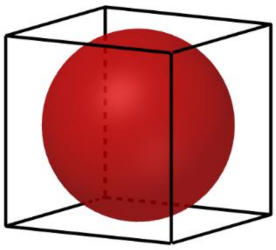
e. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$

f. $\frac{5}{7-\sqrt{2}} =$

4. A área da face de um icosaedro regular (polígono com 20 faces que são triângulos equiláteros) é $6\sqrt{2}\ cm^2$, então a área total do icosaedro é:

(A) $120\sqrt{2}\ cm^2$ **(B)** $72\sqrt{2}\ cm^2$ **(C)** $6\sqrt{40}\ cm^2$ **(D)** $6\sqrt{20}\ cm^2$

5. A esfera representada na figura está inscrita num cubo. Sabendo que o volume da esfera é igual a $288\,\pi\ cm^3$, podemos concluir que o valor exato do volume do cubo é:



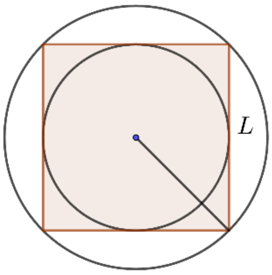
(A) $1728\ cm^3$ **(B)** $216\ cm^3$ **(C)** $216\,\pi\ cm^3$ **(D)** $216\,\pi^3 cm^3$

6. Calcule o raio, com aproximação às décimas, de uma roda sabendo que uma pessoa que ao dar 2 voltas percorreu uma distância de $\sqrt{216}$ metros.

7. Dado um quadrado de perímetro $4L$, calcule:

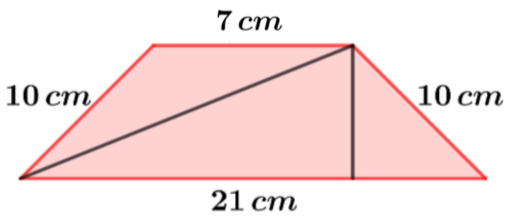
a. O raio da circunferência inscrita neste quadrado.

b. O raio da circunferência circunscrita ao quadrado.

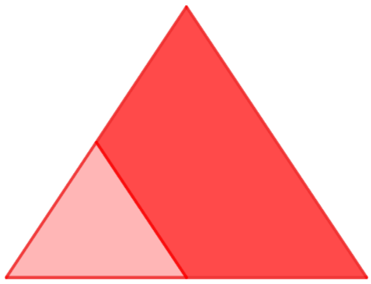


8. Considere um quadrado inscrito numa circunferência.
Sabendo que o perímetro da circunferência é $6\pi\ cm$, determina o valor exato e simplificado da medida do lado do quadrado.

9. Com os dados da figura, calcule o comprimento da diagonal e a área do trapézio.



10. Um terreno tem a forma de um triângulo equilátero de $180\ m$ de lado. Dividiu-se o terreno em duas parcelas traçando uma paralela a um dos lados contendo os pontos médios dos outros dois lados. Calcule a área da parte que tem forma de trapézio.



11. As diagonais de um losango medem $18\ cm$ e $24\ cm$. Qual é a área do círculo inscrito neste losango?

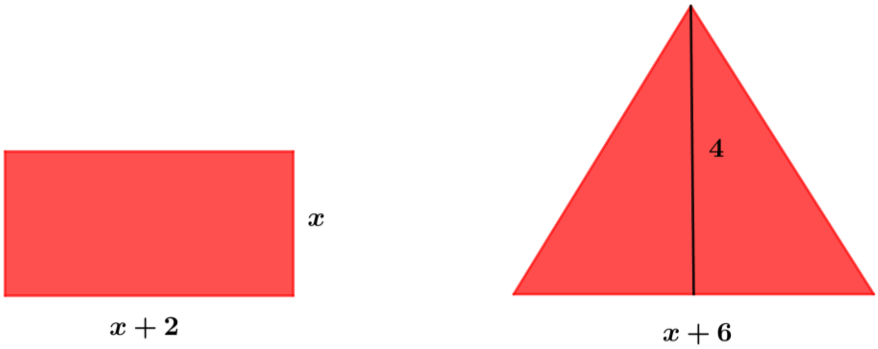
12. Uma caixa de cartão com a forma de um paralelepípedo armazena seis latas cilíndricas, iguais, com $11\ cm$ de altura. O volume total de latas transportado é $1980\ cm^3$.
Nota: As latas são tangentes às faces da caixa.

a. Determine um valor aproximado, com duas casas decimais, do volume da caixa.

b. Indique as dimensões, arredondadas as décimas, de uma nova embalagem, com a mesma forma, que armazene mais seis latas iguais.

c. Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira.
"Para transportar o dobro das latas, a nova embalagem necessita, na sua construção, do dobro da quantidade de cartão."

13. Na figura estão representados um retângulo e um triângulo.

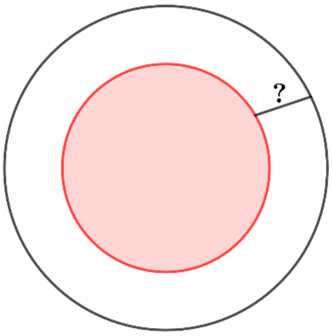


a. Determine os valores de x para os quais a área do retângulo seja igual à área do triângulo.

b. Calcule o perímetro do retângulo quando os dois polígonos têm a mesma área.

14. O senhor Aires, depois de um dia extenuante, sentou-se numa esplanada junto ao Tejo e pediu um sumo de laranja. O sumo foi-lhe servido num copo com a forma de um prisma hexagonal regular com área da base igual a $24\sqrt{3}\ cm^2$ e $10\ cm$ de altura. Como o sumo não estava suficientemente fresco, o senhor Aires pediu gelo. Sabendo que a altura do sumo no copo é de $9\ cm$ e que cada esfera de gelo tem $1\ cm$ de raio, diga qual é a quantidade máxima de esferas de gelo que o senhor Aires pode meter no copo sem que o sumo transborde.

15. Um jardim de formato circular com 6 metros de raio tem metade da sua área removida para contenção de despesas. Para isso foi cortada uma borda de largura uniforme à sua volta. Qual é a largura desta borda?



Soluções

1.
- **a.** $-2\sqrt{3}$
- **b.** $9\sqrt{5}$
- **c.** $-2\sqrt{3}$
- **d.** $7-4\sqrt{3}$
- **e.** 2
- **f.** $\frac{17\sqrt[4]{5}}{6}$
- **g.** $\frac{9}{5}\sqrt[8]{3}$
- **h.** $40\sqrt{5}$
- **i.** $6\sqrt[6]{2}$
- **j.** $\sqrt[6]{10}$
- **k.** $\sqrt{3}$
- **l.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$
- **m.** $(x^2+x)\sqrt[4]{x}$

2. (A)

3.
- **a.** $\sqrt{5}$
- **b.** $\frac{-2\sqrt{7}}{21}$
- **c.** $1+\sqrt{3}$
- **d.** $\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$
- **e.** 2
- **f.** $\frac{35+5\sqrt{2}}{47}$

4. (A)

5. (A)

6. $1{,}2\ m$

7.
- **a.** $\frac{L}{2}$
- **b.** $\frac{L\sqrt{2}}{2}$

8. $3\sqrt{2}$

9. A diagonal mede $\sqrt{247}\ cm$
A área do trapézio é $14\sqrt{51}\ cm^2$

10. $6075\sqrt{3}\ m^2$

11. $\frac{225}{4}\pi\ cm^2$

12.
- **a.** $2521{,}01\ cm^2$
- **b.** Por exemplo,
  Comprimento $\approx 18{,}54\ cm$
  Largura $\approx 12{,}36\ cm$
  Altura = $22\ cm$
- **c.** Não.

13.
- **a.** $2\sqrt{3}$
- **b.** $4+8\sqrt{3}$

14. O senhor Aires pode colocar no máximo 9 esferas de gelo no sumo.

15. $(6-3\sqrt{2})\ m$

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Ficha de Trabalho N.º 1 – Radicais e Potências** **setembro de 2018**

Proposta de Resolução

1. Simplifique cada uma das expressões:

a. $\sqrt{12} - \sqrt{6} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

b. $\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 2\sqrt{125} = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

c. $\sqrt{3} - \sqrt{27} = \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

d. $(2 - \sqrt{3})^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$

e. $(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$

f. $2\sqrt[4]{5} - \frac{\sqrt[4]{80}}{3} + \frac{\sqrt[4]{405}}{2} = 2\sqrt[4]{5} - \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} + \frac{3\sqrt[4]{5}}{2} = \frac{17\sqrt[4]{5}}{6}$

g. $\sqrt[8]{192} \times \sqrt[4]{2} - \frac{\sqrt[8]{3}}{5} = \sqrt[4]{16\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[8]{3}}{5} = 2\sqrt[8]{3} - \frac{\sqrt[8]{3}}{5} = \frac{9\sqrt[8]{3}}{5}$

h. $(2 - \sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5} - 4)^2 + 2(10\sqrt{5} + 26) =$

$= 4 + 5 - 4\sqrt{5} - 45 - 16 + 24\sqrt{5} + 20\sqrt{5} + 52 = 40\sqrt{5}$

i. $\sqrt[3]{\sqrt{2}} + 3\sqrt[6]{128} - \sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2} + 6\sqrt[6]{2} - \sqrt[6]{2} = 6\sqrt[6]{2}$

j. $\frac{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \div 10^{\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{3}}} = \frac{10^{\frac{1}{3}} \div 10^{\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{3}}} = \frac{10^{-\frac{1}{6}}}{10^{-\frac{1}{3}}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$

k. $\sqrt{\frac{9^{\frac{2}{3}} \times 3}{3^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{4}{3}} \times 3}{3^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{7}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{3}$

l. $\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{4}}} = \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{4}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt[4]{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$

m. $\frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{-1}} + \left(x^{\frac{5}{8}}\right)^2 = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^5} = (x^2 + x)\sqrt[4]{x}$

2. Seja a um número real positivo. Considera os números $x = a^{\frac{1}{3}}$ e $y = \sqrt{a^5}$.
Seja z tal que $z \times x^{-2} = y$. Qual é o valor de z?

Substituindo z pela expressão da opção (A), temos que
$z \times x^{-2} = a^3 \times \sqrt[6]{a} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^3 \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$.

R.ª: Opção (A).

3. Escreva as seguintes frações com denominador racional:

a. $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

b. $\frac{-2}{3\sqrt{7}} = \frac{-2\sqrt{7}}{3\times 7} = \frac{-2\sqrt{7}}{21}$

c. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$

d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3} = \frac{-2+\sqrt{10}}{3}$

e. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3} = 2$

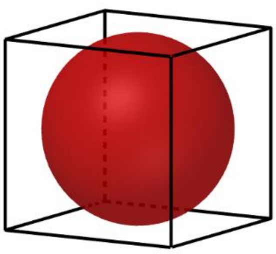
f. $\frac{5}{7-\sqrt{2}} = \frac{5(7+\sqrt{2})}{(7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})} = \frac{35+5\sqrt{2}}{49-2} = \frac{35+5\sqrt{2}}{47}$

4. A área da face de um icosaedro regular (polígono com 20 faces que são triângulos equiláteros) é $6\sqrt{2}\ cm^2$, então a área total do icosaedro é:

$A = 20 \times 6\sqrt{2} = 120\sqrt{2}\ cm^2$

R.ª: Opção (A).

5. A esfera representada na figura está inscrita num cubo. Sabendo que o volume da esfera é igual a $288\,\pi\ cm^3$, podemos concluir que o valor exato do volume do cubo é:



$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$
$288\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = 216 \Leftrightarrow r = 6\ cm.$
Logo,
$V_{cubo} = (6+6)^3 = 1728\ cm^3.$

R.ª: Opção (A).

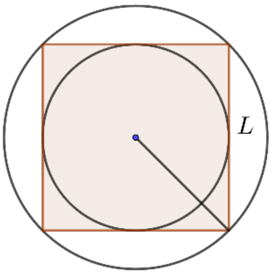
6. Calcule o raio, com aproximação às décimas, de uma roda sabendo que uma pessoa que ao dar 2 voltas percorreu uma distância de $\sqrt{216}$ metros.

$2\,P = \sqrt{216} \Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{216}}{2} \Leftrightarrow P = 3\sqrt{6}\,m$

$2\,\pi\, r = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{6}}{2\,\pi} \Leftrightarrow r \approx 1{,}2\,m$

R.ª: O raio da roda é aproximadamente $1{,}2\,m$.

7. Dado um quadrado de perímetro $4L$, calcule:



a. O raio da circunferência inscrita neste quadrado.

Seja r a medida do raio da circunferência inscrita no quadrado.
$r = \frac{L}{2}$.

b. O raio da circunferência circunscrita ao quadrado.

Seja R a medida do raio da circunferência circunscrita ao quadrado.
$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{2\,L^2}{4} \Leftrightarrow R = \pm\frac{L\sqrt{2}}{2}$, como $R > 0$, $R = \frac{L\sqrt{2}}{2}$.

8. Considere um quadrado inscrito numa circunferência.
Sabendo que o perímetro da circunferência é $6\,\pi\,cm$, determina o valor exato e simplificado da medida do lado do quadrado.

$6\,\pi = 2\,\pi\,r \Leftrightarrow r = 3\,cm$

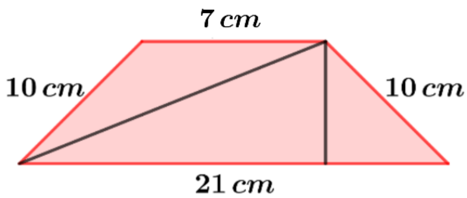
Seja x a medida de metade do lado do quadrado:

$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2\,x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$, como $x > 0$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,cm$.

Logo, a medida do lado do quadrado é $2\,x = 3\sqrt{2}\,cm$.

R.ª: O lado do quadrado mede $3\sqrt{2}\,cm$.

9. Com os dados da figura, calcule o comprimento da diagonal e a área do trapézio.



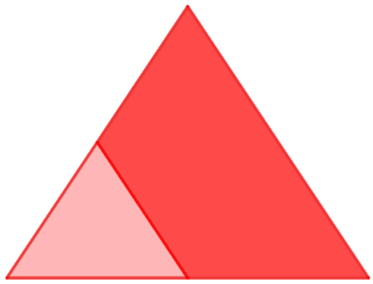
Seja h a medida da altura do trapézio.
$h^2 = 10^2 - 7^2 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{51}$, como $h > 0$, $h = \sqrt{51}\,cm$.

Seja d a medida da diagonal do trapézio.
$d^2 = 14^2 + \sqrt{51}^2 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{247}$, como $d > 0$, $d = \sqrt{247}\,cm$.

$A_{trapézio} = \frac{21+7}{2} \times \sqrt{51} = 14\sqrt{51}\,cm^2$.

R.ª: A diagonal do trapézio mede $\sqrt{247}\,cm$ e a área do trapézio é $14\sqrt{51}\,cm^2$.

10. Um terreno tem a forma de um triângulo equilátero de $180\ m$ de lado. Dividiu-se o terreno em duas parcelas traçando uma paralela a um dos lados contendo os pontos médios dos outros dois lados. Calcule a área da parte que tem forma de trapézio.



Seja h a medida da altura do trapézio.
$h^2 = 90^2 - 45^2 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{6075} \Leftrightarrow h = \pm 45\sqrt{3}$, como $h > 0$, $h = 45\sqrt{3}\ m.$

$A_{trapézio} = \frac{180+90}{2} \times 45\sqrt{3} = 6075\sqrt{3}\ m^2.$

R.ª: O trapézio tem $6075\sqrt{3}\ m^2$ de área.

11. As diagonais de um losango medem $18\ cm$ e $24\ cm$. Qual é a área do círculo inscrito neste losango?

Seja l a medida do lado do losango.
$l^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{225} \Leftrightarrow l = \pm 15$, como $l > 0$, $l = 15\ cm.$

Seja r a medida do raio do círculo.
$r = \frac{15}{2}$
$A_{círculo} = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \pi = \frac{225}{4}\pi\ cm^2.$

R.ª: A área do círculo inscrito no losango é $\frac{225}{4}\pi\ cm^2$.

12. Uma caixa de cartão com a forma de um paralelepípedo armazena seis latas cilíndricas, iguais, com $11\ cm$ de altura. O volume total de latas transportado é $1980\ cm^3$.
Nota: As latas são tangentes às faces da caixa.

a. Determine um valor aproximado, com duas casas decimais, do volume da caixa.

Seja r a medida do raio de cada lata.
$6\pi r^2 \times 11 = 1980 \Leftrightarrow r = \pm\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}}$, como $r > 0$, $r = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}}\ cm.$
$V_{caixa} = 6 \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}} \times 4 \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}} \times 11 = \frac{7920}{\pi} \approx 2521{,}01\ cm^3.$
R.ª: O volume da caixa é aproximadamente $2521{,}01\ cm^3$.

b. Indique as dimensões, arredondadas as décimas, de uma nova embalagem, com a mesma forma, que armazene mais seis latas iguais.

Comprimento:
$6 \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}} = 18{,}54\ cm$

Largura:

$$4 \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\pi}} = 12{,}36\ cm$$

Altura:

$$2 \times 11 = 22\ cm$$

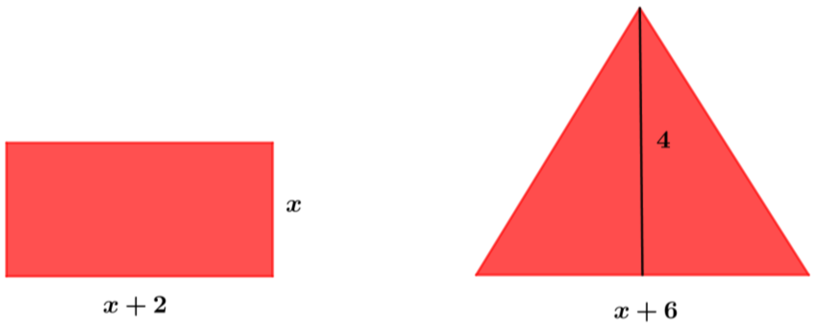
c. Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira.
"Para transportar o dobro das latas, a nova embalagem necessita, na sua construção, do dobro da quantidade de cartão."

$$A_{total\ da\ caixa\ inicial} \approx (18{,}54 \times 11) \times 2 + (12{,}36 \times 11) \times 2 + (18{,}54 \times 12{,}36) \approx 908{,}9544\ cm^2$$

$$A_{total\ da\ caixa\ nova} \approx (18{,}54 \times 22) \times 2 + (12{,}36 \times 22) \times 2 + (18{,}54 \times 12{,}36) \approx 1588{,}7544\ cm^2$$

R.ª: Como a área total da caixa que transporta o dobro das latas (caixa nova) não é o dobro da área total da caixa que transporta as 6 latas (caixa inicial) a embalagem da nova caixa não necessita do dobro da quantidade de cartão, na sua construção.

13. Na figura estão representados um retângulo e um triângulo.



a. Determine os valores de x para os quais a área do retângulo seja igual à área do triângulo.

$(x+2)\,x = \frac{(x+6)\times 4}{2} \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$, como $x > 0$, $x = 2\sqrt{3}$.

R.ª: O valor de x para o qual a área do retângulo é igual a área do triângulo é $2\sqrt{3}$.

b. Calcule o perímetro do retângulo quando os dois polígonos têm a mesma área.

$P = \left(2\sqrt{3}+2\right) \times 2 + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 4$

R.ª: O perímetro do retângulo é $8\sqrt{3} + 4$.

14. O senhor Aires, depois de um dia extenuante, sentou-se numa esplanada junto ao Tejo e pediu um sumo de laranja. O sumo foi-lhe servido num copo com a forma de um prisma hexagonal regular com área da base igual a $24\sqrt{3}\ cm^2$ e $10\ cm$ de altura. Como o sumo não estava suficientemente fresco, o senhor Aires pediu gelo. Sabendo que a altura do sumo no copo é de $9\ cm$ e que cada esfera de gelo tem $1\ cm$ de raio, diga qual é a quantidade máxima de esferas de gelo que o senhor Aires pode meter no copo sem que o sumo transborde.

$V_{cupo} = 24\sqrt{3} \times 10 = 240\sqrt{3}\ cm^3$

$V_{sumo} = 24\sqrt{3} \times 9 = 216\sqrt{3}\ cm^3$

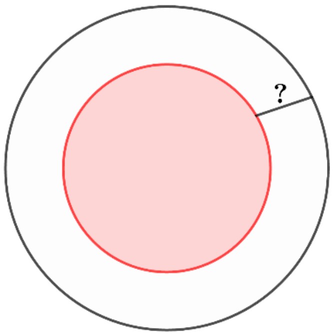
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\ cm^3$

Seja x o número de esferas de gelo.

$\frac{4}{3}\pi\, x \leq 240\sqrt{3} - 216\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\pi\, x \leq 72\sqrt{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{72\sqrt{3}}{4\pi} \Leftrightarrow x \leq \frac{18\sqrt{3}}{\pi}$

Como, $\frac{18\sqrt{3}}{\pi} \approx 9{,}924$. O Sr. Aires pode colocar no máximo 9 esferas de gelo no copo.

15. Um jardim de formato circular com 6 metros de raio tem metade da sua área removida para contenção de despesas. Para isso foi cortada uma borda de largura uniforme à sua volta. Qual é a largura desta borda?



Seja x a medida da largura da borda.
$A_{jardim} = 36\pi\ m^2$
$\frac{A_{jardim}}{2} = 18\pi\ m^2$
$(6-x)^2\pi = 18\pi \Leftrightarrow 36 + x^2 - 12x = 18 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-72}}{2} \Leftrightarrow x = 6 \pm 3\sqrt{2}.$

R.ª: Como o jardim tem $6\ m$ de raio a largura da borda é $(6 - 2\sqrt{3})\ m$.

Anexo J

4.º Ficha de Trabalho - Matemática A 10.º Ano: Enunciado e Resolução

Escola Secundária Jaime Cortesão

Ficha de Trabalho N.º 4 – Polinómios

10.º Ano **fevereiro de 2019**

1. Considere os polinómios:

$$M(x) = x - 2;\ N(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ e } P(x) = -x^4 + 2\,x^2 + 2x - 3$$

Indique o grau de:

1.1. $M(x) \times N(x)$

1.2. $M(x) \times N(x) \times P(x)$

2. Determine o polinómio que dividido por $x^2 - 1$ tem como quociente $x + 3$ e como resto $x - 2$.

3. Considere os polinómios:

$$P\ (x) = x^4 + 3x^2 + 4x - 1;\ Q\ (x) = -x^3 - 5x + 2 \text{ e } R\ (x) = 3x - 1$$

Determine na forma de polinómio reduzido:

3.1. $P\ (x) + Q(x)$

3.2. $P\ (x) \times R\ (x)$

3.3. $P\ (x) - P\ (x) \times Q\ (x)$

4. Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto das seguintes divisões:

4.1. $(4\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 - x + 1) \div (x^2 + 4)$

4.2. $(2\,x^6 - x^4 + 2\,x^2 - 2) \div (x^3 - x)$

4.3. $\left(-\frac{3}{4}\,x^3 + \frac{1}{2}x\right) \div \left(2\,x - \frac{1}{3}\right)$

4.4. $(x^5 + 3\,x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 - 3\,) \div (x^2 + 2)$

5. Determine, utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de:

5.1. $A(x) = \ x^4 - 3\,x^3 + 2\,x - 3$ por $B(x) = x + 1$.

5.2. $A(x) = \ 4\,x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 3$ por $B(x) = 4\,x - 3$.

5.3. $A(x) = \ x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6x$ por $B(x) = x + 1$.

6. Utilize a regra de Ruffini para efetuar as seguintes divisões:

6.1. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div \left(x - \sqrt{3}\right)$

6.2. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div (x)$

6.3. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div (-x - 1)$

6.4. $(x^4 - 2x^2 + x - 1) \div (4x - 2)$

7. O valor de k para o qual o polinómio $x^3 + 2x^2 + (k - 3)x - 6$ é divisível por $x + 3$ é:

(A) -24 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 24

8. Considere o polinómio $P\,(x) = x^3 + x^2 - mx - n$ com $m, n\ \in\ \mathbb{R}$. Determine m, n, de modo que o polinómio tenha como raízes -2 e 3.

9. Decomponha em fatores os seguintes polinómios:

9.1. $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$, sabendo que 1 é raiz.

9.2. $x^4 + 4\,x^3 - x^2 - 4\,x$, sabendo que é divisível por $x - 1$.

9.3. $-3x^3 - 22x^2 - 29x + 30$, sabendo que é divisível por $3x - 2$.

9.4. $x^4 + 8\,x^3 + 30\,x^2 + 56x + 40$.

10. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

10.1. $(x - 3)(x^2 - 8x + 16) \leq 0$

10.2. $-2x^3 + 10x^2 + 28x \geq 0$

11. Considere o polinómio $A\,(x) =\ x^3 + 2\,x^2 - x - 2$.

11.1. Verifique se $A\,(x)$ é divisível por $x + 1$.

11.2. Utilizando a regra de Ruffini, obtenha o quociente e o resto da divisão de $A\,(x)$ por $2x + 1$.

11.3. Resolve a equação $A\,(x) = 0$.

11.4. Resolve a inequação $A\,(x).(3 - 2x) > 0$.

12. Escreve um polinómio, na forma reduzida, que tenha como únicas raízes:

12.1. -2, sendo raiz dupla, e 5, sendo raiz simples.

12.2. $3, 1, -2$.

12.3. 4, sendo raiz dupla.

13. Determine o polinómio $P\,(x)$ tal que:

13.1. Seja do 2.º grau e admita os zeros simples $-2, 1$ e o resto da divisão de $P\,(x)$ por $x - 3$ é 1.

13.2. Seja do 3.º grau e admita os zeros simples $-1, 0$ e o resto da divisão por $x + 3$ é igual a 1 e o coeficiente do termo de maior grau é 1.

13.3. Seja do 4.º grau e admita os zeros 2 (multiplicidade dois) $-3, -2$ e o resto da divisão de $P\,(x)$ por $2x+1$ é 1.

14. Considere os seguintes polinómios:

$$A(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6;\ B(x) = x^3 - 3x \text{ e } C(x) = x^4 + 2x^2.$$

14.1. Usando a regra de Ruffini, mostre que 3 é a raiz de $A\,(x)$.

14.2. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a. $A(x) < 0$.

b. $B(x) \geq 0$.

c. $C(x) < 0$.

Soluções

1.1. 3

1.2. 7

2. $x^3 + 3\,x^2 - 5$

3.1. $x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$

3.2. $3\,x^5 - x^4 + 9\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 1$

3.3. $x^7 + 8\,x^5 + 3\,x^4 + 14\,x^3 + 17x^2 - 9\,x + 1$

4.1. $Q(x) = 4\,x^2 - 3\,x - 14$ e $R(x) = 11\,x + 57$

4.2. $Q(x) = 2\,x^3 + \ x$ e $R(x) = 3\,x^2 - 2$

4.3. $Q(x) = -\frac{3}{8}\,x^2 - \frac{1}{16}\,x + \frac{23}{96}$ e $R(x) = \frac{23}{288}$

4.4. $Q\,(x) = \ x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 10$ e $R\,(x) = 8\,x + 17$

5.1. -1

5.2. 0

5.3. 0

6.1. $Q(x) = x^3 + \sqrt{3}\,x^2 + x + \sqrt{3}$ e $R(x) = 0$

6.2. $Q(x) = x^3 - 2x$ e $R(x) = -3$

6.3. $Q(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$ e $R(x) = -4$

6.4. $Q(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{16}x + \frac{1}{32}$ e $R(x) = -\frac{15}{16}$

7. (B)

8. $m = 8$ e $n = 12$

9.1. $(x-1)(x-5)(x-6)$

9.2. $x(x-1)(x+1)(x+4)$

9.3. $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+3)(x+5)$

9.4. $(x+2)^2(x^2+4x+10)$

10.1. $x \in \left]-\infty, 3\right] \cup \{4\}$

10.2. $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup [0,7]$

11.1. $A(x)$ é divisível por $x+1$

11.2. $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$ e $R(x) = -\frac{9}{8}$

11.3. $x \in \{-2, -1, 1\}$

11.4. $x \in \left]-2, -1\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$

12.1. $x^3 - x^2 - 16x - 20$

12.2. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

12.3. $x^2 - 8x + 16$

13.1. $P(x) = \frac{1}{10}(x+2)(x-1)$

13.2. $P(x) = x(x+1)\left(x + \frac{19}{6}\right)$

13.3. $P(x) = \frac{16}{375}(x-2)^2(x+3)(x+2)$

14.1. 3 é uma raiz de $A(x)$

14.2. a. $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]2, 3\right[$

b. $x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$

c. $x \in \{ \ \}$

Escola Secundária Jaime Cortesão

Ficha de Trabalho N.º 4 – Polinómios

10.º Ano fevereiro de 2019

Proposta de Resolução

1. Considere os polinómios:

$$M(x) = x - 2;\ N(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ e } P(x) = -x^4 + 2\,x^2 + 2x - 3$$

Indique o grau de:

1.1. $M(x) \times N(x)$

Grau $\left(M(x)\ \times N(x)\right) =$ Grau $\left(M(x)\right) +$ Grau $\left(N(x)\right) = 1 + 2 = 3$

1.2. $M(x) \times N(x) \times P(x)$

Grau $\left(M(x)\ \times N(x)\ \times P(x)\right) =$ Grau $\left(M(x)\right) +$ Grau $\left(N(x)\right) +$ Grau $\left(P(x)\right) =$

$= 1 + 2\ + 4 = 7$

2. Determine o polinómio que dividido por $x^2 - 1$ tem como quociente $x + 3$ e como resto $x - 2$.

O polinómio pedido é igual a

$(x^2 - 1\,)(x + 3) + x - 2 = x^3 + 3\,x^2 - x - 3 + x - 2 = x^3 + 3\,x^2 - 5$

R.ª: O polinómio é $x^3 + 3\,x^2 - 5$.

3. Considere os polinómios:

$$P\ (x) = x^4 + 3x^2 + 4x - 1;\ Q\ (x) = -x^3 - 5x + 2 \text{ e } R\ (x) = 3x - 1$$

Determine na forma de polinómio reduzido:

3.1. $P\ (x) + Q(x)$

$P\ (x) + Q(x) = x^4 + 3x^2 + 4x - 1 - x^3 - 5x + 2 = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$

3.2. $P\ (x) \times R\ (x)$

$P\ (x) \times R\ (x) = (x^4 + 3x^2 + 4x - 1)(3x - 1) = 3\,x^5 - x^4 + 9\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 1$

3.3. $P\ (x) - P\ (x) \times Q\ (x)$

$P\ (x) - P\ (x) \times Q\ (x) =$

$= x^4 + 3x^2 + 4x - 1 - (x^4 + 3x^2 + 4x - 1)(-x^3 - 5x + 2)$

$=\ x^4 + 3x^2 + 4x - 1 - (-\,x^7 - 8\,x^5 - 2\,x^4 - 14\,x^3 - 14\,x^2 + 13\,x - 2)$

$= x^7 + 8\,x^5 + 3\,x^4 + 14\,x^3 + 17x^2 - 9\,x + 1$

4. Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto das seguintes divisões:

4.1. $(4\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 - x + 1) \div (x^2 + 4)$

$Q(x) = 4\,x^2 - 3\,x - 14$

$R(x) = 11\,x + 57$

4.2. $(2\,x^6 - x^4 + 2\,x^2 - 2) \div (x^3 - x)$

$Q(x) = 2\,x^3 + \,x$

$R(x) = 3\,x^2 - 2$

4.3. $\left(-\frac{3}{4}\,x^3 + \frac{1}{2}x\right) \div \left(2\,x - \frac{1}{3}\right)$

$Q(x) = -\dfrac{3}{8}\,x^2 - \dfrac{1}{16}\,x + \dfrac{23}{96}$

$R(x) = \dfrac{23}{288}$

4.4. $(x^5 + 3\,x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 - 3\,) \div (x^2 + 2)$

$Q\,(x) = \,x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 10$

$R\,(x) = 8\,x + 17$

5. Determine, utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de:

5.1. $A(x) = \,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x - 3$ por $B(x) = x + 1$.

$A(-1) = (-1)^4 - 3\,(-1)^3 + 2\,(-1) - 3 = -1$

R.ª: O resto da divisão de $A\,(x)$ por $B\,(x)$ é -1.

5.2. $A(x) = \,4\,x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 3$ por $B(x) = 4\,x - 3$.

$A\left(\frac{3}{4}\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = \dfrac{27}{16} - \dfrac{27}{16} = 0$

R.ª: O resto da divisão de $A\,(x)$ por $B\,(x)$ é 0.

5.3. $A(x) = \,x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6x$ por $B(x) = x + 1$.

$A\,(-1) = (-1)^4 - 4\,(-1)^3 + (-1)^2 + 6(-1) = 0$

R.ª: O resto da divisão de $A\,(x)$ por $B\,(x)$ é 0.

6. Utilize a regra de Ruffini para efetuar as seguintes divisões:

6.1. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div \left(x - \sqrt{3}\right)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\
\sqrt{3} & & \sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & 3 \\
\hline
 & 1 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & \boxed{0}
\end{array}$$

$Q(x) = x^3 + \sqrt{3}\,x^2 + x + \sqrt{3}$

$R(x) = 0$

6.2. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div (x)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\
0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & \boxed{-3}
\end{array}$$

$Q(x) = x^3 - 2x$

$R(x) = -3$

6.3. $(x^4 - 2\,x^2 - 3\,) \div (-x - 1)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\
-1 & & -1 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & 1 & \boxed{-4}
\end{array}$$

$Q(x) = -x^3 + \ x^2 + x - 1$

$R(x) = -4$

6.4. $(x^4 - 2x^2 + x - 1) \div (4x - 2)$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\
\hline
 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{8} & \boxed{-\frac{15}{16}}
\end{array}
$$

$Q(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{16}x + \frac{1}{32}$

$R(x) = -\frac{15}{16}$

7. O valor de k para o qual o polinómio $x^3 + 2x^2 + (k-3)x - 6$ é divisível por $x + 3$ é:

(A) -24 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 24

$(-3)^3 + 2(-3)^2 + (k-3)(-3) - 6 = 0 \Leftrightarrow -27 + 18 - 3k + 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

8. Considere o polinómio $P(x) = x^3 + x^2 - mx - n$ com $m, n \in \mathbb{R}$. Determine m, n, de modo que o polinómio tenha como raízes -2 e 3.

$$
\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^3 + (-2)^2 + 2m - n = 0 \\ 3^3 + 3^2 - 3m - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 2m = n \\ 40 - 5m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ m = 8 \end{cases}
$$

R.ª: Os valores de m e n são, respetivamente, $m = 8$ e $n = 12$.

9. Decomponha em fatores os seguintes polinómios:

9.1. $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$, sabendo que 1 é raiz.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -12 & 41 & -30 \\
1 & & 1 & -11 & 30 \\
\hline
 & 1 & -11 & 30 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = (x - 1)(x^2 - 11x + 30)$

$x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} \Leftrightarrow x = 6 \lor x = 5$

$x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = (x-1)(x-5)(x-6)$

9.2. $x^4 + 4\,x^3 - x^2 - 4\,x$, sabendo que é divisível por $x - 1$.

	1	4	-1	-4	0
1		1	5	4	0
	1	5	4	0	0

$x^4 + 4\,x^3 - x^2 - 4\,x = (x-1)(x^3 + 5\,x^2 + 4\,x) = x(x-1)(x^2 + 5\,x + 4)$

$x^2 + 5\,x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \lor x = -4$

$x^4 + 4\,x^3 - x^2 - 4\,x = x(x-1)(x+1)(x+4)$

9.3. $-3x^3 - 22x^2 - 29x + 30$, sabendo que é divisível por $3x - 2$.

	-3	-22	-29	30
$\frac{2}{3}$		-2	-16	-30
	-3	-24	-45	0

$-3x^3 - 22x^2 - 29x + 30 = \left(x - \dfrac{2}{3}\right)(-3\,x^2 - 24\,x - 45)$

$-3\,x^2 - 24\,x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{-6} \Leftrightarrow x = -3 \lor x = -5$

$-3x^3 - 22x^2 - 29x + 30 = \left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+3)(x+5)$

9.4. $x^4 + 8\,x^3 + 30\,x^2 + 56x + 40$.

$(-2)^4 + 8\,(-2)^3 + 30\,(-2)^2 + 56\,(-2) + 40 = 0$

$x = -2$ é uma raiz de $x^4 + 8\,x^3 + 30\,x^2 + 56x + 40$

	1	8	30	56	40
-2		-2	-12	-36	-40
	1	6	18	20	0

$x^4 + 8\,x^3 + 30\,x^2 + 56x + 40 = (x+2)(x^3 + 6\,x^2 + 18\,x + 20)$

$(-2)^3 + 6\,(-2)^2 + 18\,(-2) + 20 = 0$

$x = -2$ é uma raiz de $x^3 + 6\,x^2 + 18\,x + 20$

	1	6	18	20
-2		-2	-8	-20
	1	4	10	0

$x^4 + 8\,x^3 + 30\,x^2 + 56x + 40 = (x+2)^2(x^2 + 4x + 10)$

10. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

10.1. $(x-3)(x^2 - 8x + 16) \leq 0$

$$x^2 - 8\,x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

$(x-3)(x^2 - 8x + 16) \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x-3) \leq 0$

x	$-\infty$	3		4	$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-4)^2(x-3)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in \,]-\infty, 3] \cup \{4\}$

10.2. $-2x^3 + 10x^2 + 28x \geq 0$

$-2x^3 + 10x^2 + 28x = -2\,x\,(x^2 - 5\,x - 14)$

$x^2 - 5\,x - 14 = 0 \iff x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} \iff x = 7 \vee x = -2$

$-2x^3 + 10x^2 + 28x \geq 0 \iff -2\,x\,(x+2)(x-7) \geq 0$

x	$-\infty$	-2		0		7	$+\infty$
$-2\,x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-2\,x\,(x+2)(x-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in \left]-\infty, -2\right] \cup [0,7]$

11. Considere o polinómio $A\,(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$.

11.1. Verifique se $A\,(x)$ é divisível por $x + 1$.

$A\,(-1) = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

R.ª: Como $A\,(-1) = 0, A\,(x)$ é divisível por $x + 1$.

11.2. Utilizando a regra de Ruffini, obtenha o quociente e o resto da divisão de $A\,(x)$ por $2x + 1$.

	1	2	-1	-2
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{8}$

$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$

$R(x) = -\frac{9}{8}$

11.3. Resolve a equação $A\,(x) = 0$.

$x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

	1	2	-1	-2
-1		-1	-1	2
	1	1	-2	0

$x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = (x+1)\,(x^2 + x - 2)$

$x^2 + \ x - 2 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \iff x = -2 \ \vee x = 1$

$x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x+2)(x-1) = 0$

$\iff x = -1 \ \vee x = -2 \ \vee x = 1$

$x \in \{-2, -1, 1\}$

11.4. Resolve a inequação $A\,(x).(3-2x) > 0$.

$A\,(x).(3-2x) > 0 \iff (x+1)(x+2)(x-1)(3-2x) > 0$

x	$-\infty$	-2		-1		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-2\,x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$A\,(x).(3-2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in \,]-2, -1[\, \cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$

12. Escreve um polinómio, na forma reduzida, que tenha como únicas raízes:

12.1. -2, sendo raiz dupla, e 5, sendo raiz simples.

$P\,(x) = (x+2)^2(x-5) = (x^2+4x+4)(x-5) = x^3 - x^2 - 16\,x - 20$

12.2. $3, 1, -2$.

$P\,(x) = (x-3)(x-1)(x+2) = (x^2 - 4\,x + 3)(x+2) = x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6$

12.3. 4, sendo raiz dupla.

$P\ (x) = (x-4)^2 = x^2 - 8\,x + 16$

13. Determine o polinómio $P\ (x)$ tal que:

13.1. Seja do 2.º grau e admita os zeros simples $-2, 1$ e o resto da divisão de $P\ (x)$ por $x-3$ é 1.

$P\ (x) = a\ (x+2)(x-1)$

$P\ (3) = 1 \ \Leftrightarrow a\ (3+2)(3-1) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$

$P\ (x) = \frac{1}{10}\ (x+2)(x-1)$

13.2. Seja do 3.º grau e admita os zeros simples $-1, 0$ e o resto da divisão por $x+3$ é igual a 1 e o coeficiente do termo de maior grau é 1.

$P\ (x) = x\ (x+1)(x-c)$

$P\ (-3) = 1 \ \Leftrightarrow -3\ (-3+1)(-3-c) = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{19}{6}$

$P\ (x) = x\ (x+1)\left(x+\frac{19}{6}\right)$

13.3. Seja do 4.º grau e admita os zeros 2 (multiplicidade dois) $-3, -2$ e o resto da divisão de $P\ (x)$ por $2x+1$ é 1.

$P\ (x) = a\ (x-2)^2\ (x+3)(x+2)$

$P\ \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \ \Leftrightarrow a\ \left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 \left(-\frac{1}{2}+3\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{16}{375}$

$P\ (x) = \frac{16}{375}\ (x-2)^2\ (x+3)(x+2)$

14. Considere os seguintes polinómios:

$A(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$; $B(x) = x^3 - 3x$ e $C(x) = x^4 + 2x^2$.

14.1. Usando a regra de Ruffini, mostre que 3 é a raiz de $A\ (x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

R.ª: $A\,(x)$ é divisível por $x-3$. Logo, 3 é uma raiz de $A\,(x)$.

14.2. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a. $A(x) < 0$.

$A(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-3)(x^2 - x - 2)$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

$A(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-2)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]2,3[$

b. $B(x) \geq 0$.

$B(x) = x^3 - 3x = x\,(x^2 - 3) = x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$

c. $C(x) < 0$.

$C(x) = x^4 + 2x^2 = x^2\,(x^2 + 2)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$
x^2+2	$+$	$+$	$+$
$x^2\,(x^2+2)$	$+$	0	$+$

$x \in \{\ \}$

Anexo K

Trabalho de Projeto - MACS 11.º ano

Matemáticos da Teoria de Grafos

1. Introdução

A evolução da Matemática teve sempre um papel fundamental no desenvolvimento científico-cultural das sociedades.

A teoria de grafos foi explorada há mais de 200 anos, ao ser utilizada para resolver um problema das pontes de Konigsberg, na Rússia.

As aplicações da teoria de grafos são imensas e determinantes para uma abordagem eficaz de problemas de tipologia muito diversos. Por exemplo, aplicam-se grafos ao estudo:

- das redes rodoviárias, tentando encontrar uma forma de reduzir o congestionamento do tráfego;
- no planeamento de uma rede de comunicações viária;
- em projetos de arquitetura;
- em redes aéreas, procurando o movimento do maior número de passageiros, com o menor número de viagens possível. Os controladores de tráfego aéreo precisam de se certificar que centenas de aviões estão no lugar certo, na hora certa, uma tarefa enorme que seria quase impossível sem computadores e teoria de grafos.

A modelação por grafos tornou-se essencial na otimização das inúmeras ligações nos circuitos integrados que constituem os computadores, no controlo de multidões e na propagação de doenças. Nas últimas décadas, os modelos de grafos passaram a estar ainda mais presentes, por via da Internet e das redes sociais, das quais o Facebook é provavelmente o maior exemplo.

O recurso a um grafo, como em qualquer construção de modelos matemáticos, procura que se foque a atenção no que é essencial para a resolução do problema a abordar, deixando de lado toda a informação suplementar.

2. Trabalho de Projeto

Para alargarem os conhecimentos da teoria de grafos propomos a formação de grupos para trabalhar os seguintes temas:

Grupo 1: *O matemático Euler e as suas aplicações na Teoria de Grafos*

Grupo 2: *O matemático Hamilton e as suas aplicações na Teoria de Grafos*

Grupo 3: *O matemático Kruskal e as suas aplicações na Teoria de Grafos*

Grupo 4: *Os matemáticos Ore e Dirac e as suas aplicações na Teoria de Grafos*

Cada grupo deve abordar os seguintes itens:

- Referência biográfica do matemático em causa;
- Apresentação de um problema prático, da teoria de grafos e do matemático em causa;
- Resolução do problema prático apresentado.

3. Metodologia

- Trabalho em grupo de 4 elementos;
- Para além dos conhecimentos adquiridos nas aulas será feita pesquisa na Internet, em livros, em revistas, …;
- O trabalho escrito é realizado em formato apresentação (por exemplo, em PowerPoint);
- O trabalho deve incluir a Capa (onde deve constar a identificação do grupo, o título e a data), o Desenvolvimento (incluindo os itens apresentados anteriores) e a Bibliografia;
- Recomendamos uma pesquisa atenta da informação e uma seleção feita de uma forma sintética, objetiva e percetível.

4. Calendarização

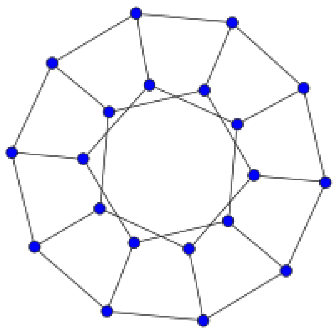
Cada grupo de trabalho deverá apresentar o trabalho no **dia 20 de novembro de 2018**.

Até dia 21 de novembro de 2018 todos os trabalhos devem ser enviados para o correio eletrónico da turma.

5. Avaliação

Parâmetros	Avaliação
Conteúdo/Rigor científico	50%
Estrutura do trabalho	5%
Criatividade	10%
Empenho	10%
Apresentação oral	25%

- Avaliação quantitativa (0 a 20 valores).



Bom trabalho!

Anexo L

2.ª Atividade individual - Matemática A 10.º Ano: Enunciado e Resolução

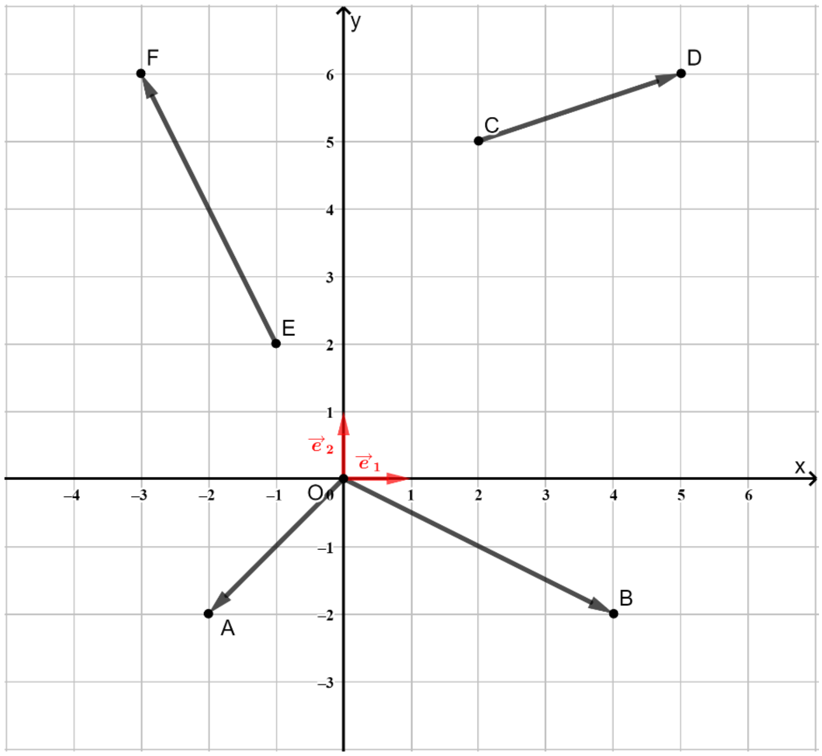
Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Atividade individual N.º 2** **Matemática A**

Nome: ______________________________ N.º: _____ Turma: ___

Classificação: ______________________ Professora: ______________________

1. Indique as coordenadas dos vetores representados no referencial ortonormado da figura.



2. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A\,(-1{,}3)$, $B\,(-2,-4)$ e $C\,(0,-2)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

3. Determine k de modo que os vetores $\vec{a}\,(1,2)$ e $\vec{b}\,(k+1,3)$ sejam colineares.

(A) $-\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{5}{2}$

4. Determine as coordenadas do vetor colinear a $\vec{u}\,(4,-3)$, que tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ e norma 10.

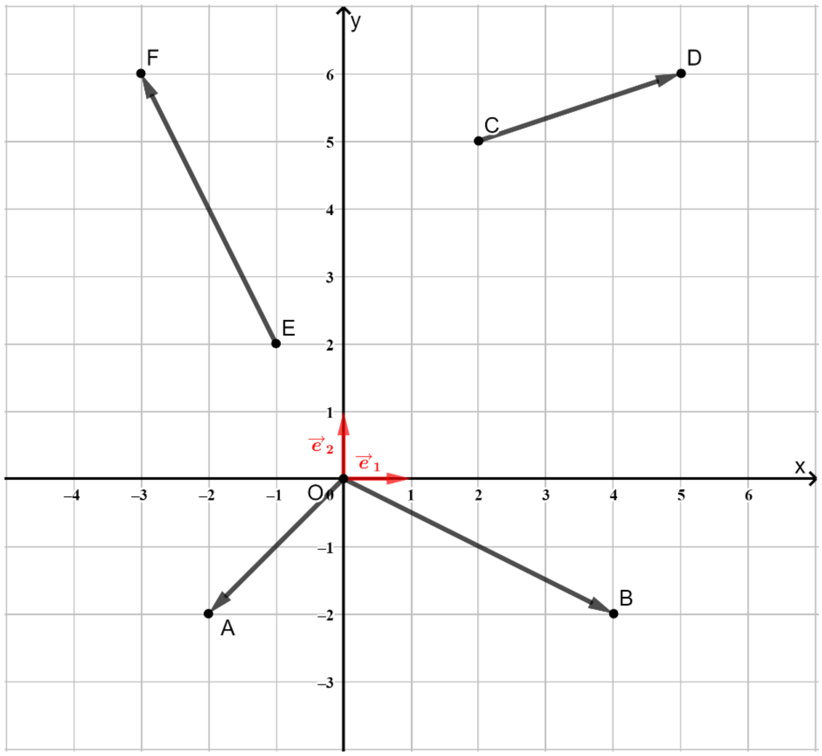
Fim

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano | **Atividade individual N.º 2** | **Matemática A**

Proposta de Resolução

1. Indique as coordenadas dos vetores representados no referencial ortonormado da figura.



$\overrightarrow{OA}\ (-2,-2)$

$\overrightarrow{OB}\ (4,-2)$

$\overrightarrow{CD}\ (3,1)$

$\overrightarrow{EF}\ (-2,4)$

2. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A\ (-1,3)$, $B\ (-2,-4)$ e $C\ (0,-2)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}\ (-1,-7)$

$\overrightarrow{BC}\ (2,2)$

$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $2(-1,-7) - \frac{1}{2}(2,2) = (-3,-15)$

R.ª O vetor $\vec{u}$ tem coordenadas $(-3,-15)$.

3. Determine k de modo que os vetores $\vec{a}\ (1,2)$ e $\vec{b}\ (k+1,3)$ sejam colineares.

$$\frac{k+1}{1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2k+2=3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

R.ª: Opção (C).

4. Determine as coordenadas do vetor colinear a $\vec{u}\,(4,-3)$, que tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ e norma 10.

Um vetor colinear com $\vec{u}$ e da forma $k\,\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, isto é, $k(4,-3) = (4k,-3k)$

$\|(4k,-3k)\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 9k^2} = 10 \Leftrightarrow 16\,k^2 + 9\,k^2 = 100 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm\,2$

Para determinarmos o vetor colinear com $\vec{u}$ de sentido contrário e norma igual a 10 o valor de k tem de se negativo, logo $k = -2$.

R.ª: O vetor colinear com $\vec{u}$ que tem sentido contrário e norma igual a 10 é $(-8, 6)$.

Anexo M

4.º Teste de Avaliação Escrita - Matemática A 10.º Ano: Matriz, Enunciado, Resolução e Critérios de Classificação

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Matemática A** **15 / 02 / 2019**

Matriz do Teste de Avaliação do dia 22 / 02 / 2019

Caraterização do teste

O teste tem por referência as Aprendizagens Essenciais que se baseiam no Programa e Metas de Matemática A do Ensino Secundário.

O teste é constituído por um único caderno.

Os itens podem ter como suporte um ou mais documentos, como textos, tabelas, figuras e gráficos.

A sequência dos itens pode não corresponder à sequência dos domínios/temas do programa.

Cada item pode envolver a mobilização de conteúdos relativos a mais do que um dos domínios do programa.

A prova inclui itens de seleção (por exemplo, escolha múltipla) e itens de construção (por exemplo, resposta restrita), distribuídos pelo teste.

O teste é cotado para 200 pontos.

O teste incide nos domínios/temas seguintes:

- Álgebra (Radicais e Potências de expoente racional) – Tema transversal;
- Álgebra (polinómios);
- Geometria Analítica (no plano e no espaço).

Domínio	Conteúdos
Álgebra (Tema Transversal)	- Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes; - Racionalização de denominadores; - Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência.

Álgebra	- Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini; - Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto; - Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades; - Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios; - Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.
Geometria Analítica (Geometria Analítica, no plano e no espaço, e Cálculo Vetorial, no plano e no espaço)	- Referenciais ortonormados no plano e no espaço; - Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano e no espaço em função das respetivas coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta no plano e no espaço; - Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; - Equação cartesiana reduzida da circunferência; - Inequações cartesianas de semiplanos; - Inequações cartesianas de círculos; - Norma de um vetor; - Multiplicação por um escalar de um vetor e a sua relação com a colinearidade e com o vetor simétrico no plano e no espaço; - Soma e diferença entre vetores no plano e no espaço; - Propriedades algébricas das operações com vetores no plano e no espaço; - Coordenadas de um vetor no plano e no espaço; - Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas no plano e no espaço; - Coordenadas da soma e da diferença de vetores no plano e no espaço; - Coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor no plano e no espaço; - Relação entre as coordenadas de vetores colineares no plano e no espaço; - Vetor diferença de dois pontos no plano e no espaço (cálculo das respetivas coordenadas); - Coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor no plano e no espaço; - Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas no plano e no espaço; - Vetor diretor de uma reta no plano e no espaço; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta no plano; - Equação reduzida da reta no plano; - Paralelismo de retas e igualdade do declive (no plano); - Equação vetorial de uma reta no plano e no espaço; - Equações de planos paralelos aos planos coordenados no espaço; - Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos no espaço; - Equação do plano mediador de um segmento de reta; - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; - Inequação cartesiana reduzida da esfera.

O teste inclui o **formulário** anexo a este documento.

Material

As respostas são registadas em folha própria. **Devem trazer folha de teste.**

Devem ser portadores de caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, régua, esquadro e compasso. O uso do lápis e do corretor não é permitido.

Não é permitida a utilização da calculadora.

Duração

O teste tem a duração de 100 minutos.

Anexo

Formulário

Geometria

Área de um polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$ (r – raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base\ \times Altura$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base\ \times Altura$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\ \pi r^3$ (r - raio)

Informações-Prova Matemática A. [Em linha]. IAVE – Instituto de Avaliação Educativa, I.P. 2019. [Consult. 14 fev. 2019]. Disponível na Internet: http://www.iave.pt/images/FicheirosPDF/Docs_Avalia%C3%A7%C3%A3o_Alunos/Info-provas/2018_2019/IP-EX-MatA635-2019.pdf.

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano | **Teste de Avaliação N.º 4** | **Matemática A**

Duração da Prova: 100 minutos | **22 / 02 / 2019**

Nome: ____ N.º: ______ Turma: ___

Nas perguntas de escolha múltipla escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a única alternativa correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Nos itens de resposta aberta apresenta os teus raciocínios de forma clara, incluindo todos os cálculos que tiveres de efetuar e tuas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Não é permitida a utilização da calculadora

1. Considere num referencial $o.n.\ Oxy$, as retas r e s, das quais se sabe que:

- a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 5 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2;
- para um certo valor real a, a reta s é definida por $(x, y) = (1, -3) + k(3, a), k \in \mathbb{R}$.

O valor de a para o qual as retas r e s são paralelas é:

(A) $-\frac{15}{2}$ **(B)** $-\frac{6}{5}$ **(C)** $-\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{15}{2}$

2. De um polinómio $P\ (x)$ do terceiro grau, sabe-se que:

- admite os zeros simples, $-2, -1$ e $\frac{1}{2}$;
- o resto da divisão por $x + 3$ é igual a 14.

Determine o polinómio $P(x)$ na forma reduzida.

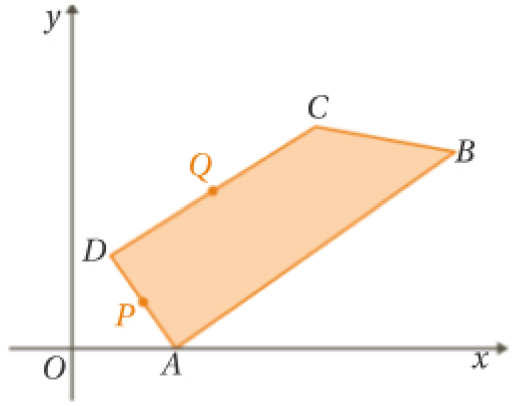
3. Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios de grau 5 e grau 2, respetivamente.

Se $C(x) = (A(x) - B(x))^2$, podemos concluir que o grau do polinómio $C(x)$ é igual a:

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 10

4. Determina os valores de k de modo que o ponto $P(k^2 - 5k + 4, k + 4, 3)$ pertença ao 2.º octante.

5. Na figura está representado, num plano munido de um referencial $o.n.Oxy$, um trapézio retângulo $[ABCD]$, de bases $[AB]$ e $[CD]$.



Sabe-se que P e Q são os pontos médios de $[AD]$ e $[CD]$, respetivamente.

5.1. Mostre que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ}$.

5.2. Admita que as coordenadas de A, P e Q são, respetivamente, $(9,0), (6,4)$ e $(11,14)$.

5.2.1. Determine uma equação vetorial da reta AC.

5.2.2. Prove que o ponto D tem coordenadas $(3,8)$.

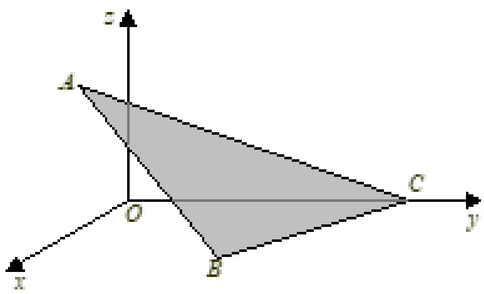
5.2.3. Prove que a circunferência de equação $x^2 - 12\,x + y^2 - 8\,y - 16 = 0$ tem centro no ponto P.

5.2.4. Sabe-se que:

- $\|\overrightarrow{DC}\| = 20$;
- $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, com $k \in \mathbb{R}$;
- a área do trapézio é igual a 250.

Determine k.

6. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao plano xOz;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- $\overrightarrow{AB}\ (2,4,-3)$ e $\overrightarrow{CB}\ (4,-2,0)$.

A ordenada do ponto C é igual a:

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

7. Considere os polinómios

- $A(x) = x^3 - 4x + 3$;
- $B(x) = 2\,x + 4$;
- $C\,(x) = -\,x^4 + 2\,x^2 - a\,x + b$, com a e b números reais.

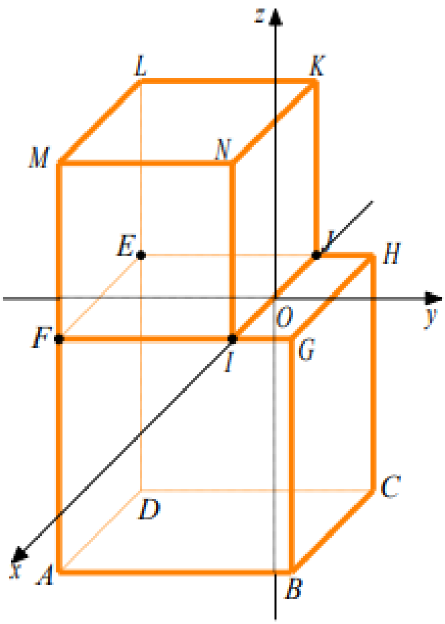
7.1. Determine para que valores reais de a e de b o resto da divisão inteira de $C\,(x)$ por $x + 1$ e igual a -3 e 2 é uma raiz do polinómio $C\,(x)$.

7.2. Determine o polinómio quociente da divisão inteira de $A\,(x)$ por $B\,(x)$, utilizando a regra de Ruffini. Apresente o polinómio quociente, na forma reduzida.

7.3. Resolva a inequação $A(x) < 3x^2 - 3x$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

8. Considere, num referencial $o.n.\,Oxyz$, o cubo $[ABCDEFH]$ e o paralelepípedo $[EHIJKLMN]$.



Sabe-se que:

- a origem é o ponto médio do segmento de reta $[IJ]$ e a face do cubo $[EFGH]$ está contida no plano xOy;
- o volume do cubo é 64 e $\overline{BL} = 9$;
- o volume do cubo é $\frac{16}{9}$ do volume do paralelepípedo.

8.1. Mostre que as coordenadas do ponto L são $(-2, -3{,}3)$.

8.2. Determine a equação da esfera de centro no ponto I e tangente ao plano FMK.

8.3. Escreve uma equação vetorial da reta que passa em D e que tem a direção do eixo das ordenadas.

8.4. Indica as coordenadas do ponto de interseção da reta paralela ao eixo Oz que contém o ponto C com o plano LMN.

9. Considere o polinómio $P\ (x) = x^{n+1} + 2x^n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira.

(A) O polinómio $P\ (x)$ é divisível por $x - 1$ se n for par.

(B) O polinómio $P\ (x)$ é divisível por $x + 1$ se n for ímpar.

(C) O polinómio $P\ (x)$ é divisível por $x - 1$ se n for ímpar.

(D) O polinómio $P\ (x)$ é divisível por $x + 1$ se n for par.

10. Considere o polinómio $P(x)$, tal que $3x^4 - x^3 - 3x + 1 = (3x - 1) \times P\ (x)$. Então $P(x)$ é dado por:

(A) $x^3 - 3$

(B) $x^3 - 1$

(C) $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

(D) $x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}$

FIM

Cotações

Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.1.**	**5.2.2.**	**5.2.3.**	**5.2.4.**	**6.**
Cotações	8	12	8	15	10	8	8	8	15	8
Questões	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**8.4.**	**9.**	**10.**	**Total**
Cotações	12	10	15	15	12	10	10	8	8	**200**

Formulário

Geometria

Área de um polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$ (r – raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base\ \times Altura$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base\ \times Altura$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\ \pi r^3$ (r - raio)

Escola Secundária Jaime Cortesão

10.º Ano **Teste de Avaliação N.º 4** **Matemática A**

Proposta de Resolução

Nas perguntas de escolha múltipla escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a única alternativa correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Nos itens de resposta aberta apresenta os teus raciocínios de forma clara, incluindo todos os cálculos que tiveres de efetuar e tuas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Não é permitida a utilização da calculadora

1. Considere num referencial $o.n.\ Oxy$, as retas r e s, das quais se sabe que:

- a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 5 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2;
- para um certo valor real a, a reta s é definida por $(x,y)=(1,-3)+k(3,a), k\in\mathbb{R}$.

O valor de a para o qual as retas r e s são paralelas é:

(A) $-\frac{15}{2}$ **(B)** $-\frac{6}{5}$ **(C)** $-\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{15}{2}$

A reta r contém o ponto $A\ (5,0)$ e o ponto $B\ (0,2)$.

$\overrightarrow{AB}\ (-5,2)$

O declive, m, da reta r é $m=-\frac{2}{5}$.

O declive, n, da reta s é $n=\frac{a}{3}$.

Logo, para as retas r e s serem paralelas temos que

$$-\frac{2}{5}=\frac{a}{3}\Leftrightarrow a=-\frac{6}{5}$$

R.ª: Opção (B).

2. De um polinómio $P\ (x)$ do terceiro grau, sabe-se que:

- admite os zeros simples, $-2,-1$ e $\frac{1}{2}$;
- o resto da divisão por $x+3$ é igual a 14.

Determine o polinómio $P(x)$ na forma reduzida.

$P\ (x)=a(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right), a\ \in\ \mathbb{R}$

$P\,(-3) = 14 \Leftrightarrow a(-3+2)(-3+1)\left(-3-\frac{1}{2}\right) = 14 \Leftrightarrow -7a = 14 \Leftrightarrow a = -2$

$P(x) = -2(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) = -2(x^2+3x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = -2\left(x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right)$

$= -2x^3 - 5x^2 - x + 2$

R.ª: Assim, a forma reduzida do polinómio, $P(x)$, é $P(x) = -2x^3 - 5x^2 - x + 2$.

3. Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios de grau 5 e grau 2, respetivamente.

Se $C(x) = (A(x) - B(x))^2$, podemos concluir que o grau do polinómio $C(x)$ é igual a:

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 10

Como o polinómio $A(x)$ é o que tem maior grau, 5, podemos concluir que o polinómio $C(x)$ tem grau igual a 10.

R.ª: Opção (D).

4. Determina os valores de k de modo que o ponto $P(k^2-5k+4, k+4, 3)$ pertença ao 2.º octante.

Um ponto de coordenadas (x, y, z) pertence ao 2.º octante se $x < 0, y > 0$ e $z > 0$.

Portanto, para o ponto P pertence ao 2.º octante, temos que $\begin{cases} k^2-5k+4<0 \\ k+4>0 \end{cases}$.

Como $k^2-5k+4=0 \Leftrightarrow k = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow k = 1 \lor k = 4$.

$k^2-5k+4<0 \Leftrightarrow (k-1)(k-4)<0$

k	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$k-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(k-1)(k-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$k^2-5k+4<0 \Leftrightarrow (k-1)(k-4)<0 \Leftrightarrow k \in \,]1,4[$

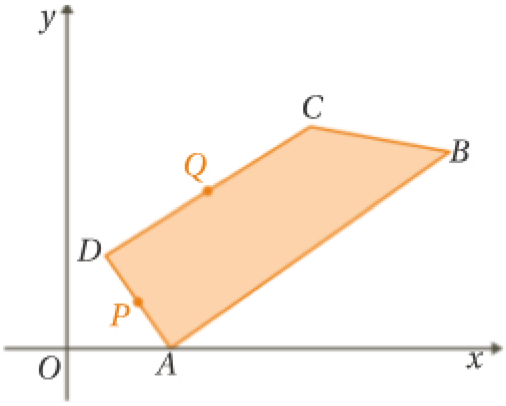
Portanto,

$$\begin{cases} k^2-5k+4<0 \\ k+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(k-4)<0 \\ k>-4 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \,]1,4[$$

R.ª: Para $k \in \,]1,4[$ o ponto P pertence ao 2.º octante.

5. Na figura está representado, num plano munido de um referencial $o.n.Oxy$, um trapézio retângulo $[ABCD]$, de bases $[AB]$ e $[CD]$.

Sabe-se que P e Q são os pontos médios de $[AD]$ e $[CD]$, respetivamente.



5.1. Mostre que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\ \overrightarrow{PD} + 2\ \overrightarrow{DQ} = 2\ \overrightarrow{PQ}$

5.2. Admita que as coordenadas de A, P e Q são, respetivamente, $(9,0), (6,4)$ e $(11,14)$.

5.2.1. Determine uma equação vetorial da reta AC.

$\overrightarrow{PQ}\ (5,10)$

Equação vetorial da reta AC: $(x, y) = (9,0) + k(5,10), k \in \mathbb{R}$

R.ª: Uma equação vetorial da reta AC é $(x, y) = (9,0) + k(5,10), k \in \mathbb{R}$.

5.2.2. Prove que o ponto D tem coordenadas $(3,8)$.

$D = P + \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AP}\ (-3,4)$

As coordenadas do ponto D são $(6,4) + (-3,4) = (3,8)$.

5.2.3. Prove que a circunferência de equação $x^2 - 12\,x + y^2 - 8\,y - 16 = 0$ tem centro no ponto P.

$x^2 - 12\,x + y^2 - 8\,y - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = 68$

O centro da circunferência tem coordenadas $(6,4)$ como as coordenadas do ponto P também são $(6,4)$ concluímos que a circunferência tem centro no ponto P.

5.2.4. Sabe-se que:

- $\|\overrightarrow{DC}\| = 20$;
- $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, com $k \in \mathbb{R}$;
- a área do trapézio é igual a 250.

Determine k.

$\|\overrightarrow{AB}\| = k\ \|\overrightarrow{DC}\|$ com $k > 0$, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm o mesmo sentido.

$\|\overrightarrow{AB}\| = 20\ k$

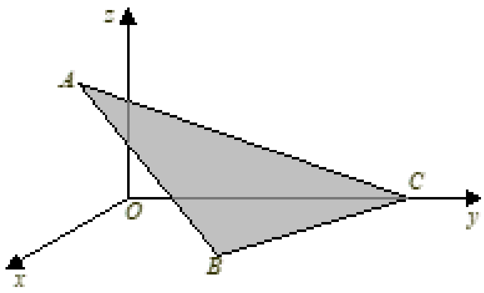
$d(A, D) = \sqrt{(9-3)^2 + (8)^2} = \sqrt{100} = 10$

Como a área do trapézio é igual a 250, vem que

$\frac{20\,k + 20}{2} \times 10 = 250 \iff k = \frac{3}{2}$

R.ª: O valor de k é $\frac{3}{2}$.

6. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao plano xOz;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- $\overrightarrow{AB}\,(2,4,-3)$ e $\overrightarrow{CB}\,(4,-2,0)$.

A ordenada do ponto C é igual a:

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$(0, y_C, 0) - (x_A, 0, z_A) = (2,4,-3) + (-4,2,0) \iff \begin{cases} x_A = 2 \\ y_C = 6 \\ z_A = 3 \end{cases}$

R.ª: Opção (C).

7. Considere os polinómios

- $A(x) = x^3 - 4x + 3$;
- $B(x) = 2\,x + 4$;
- $C\,(x) = -\,x^4 + 2\,x^2 - a\,x + b$, com a e b números reais.

7.1. Determine para que valores reais de a e de b o resto da divisão inteira de $C\,(x)$ por $x+1$ e igual a -3 e 2 é uma raiz do polinómio $C\,(x)$.

$\begin{cases} C(-1) = -3 \\ C(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1+2+a+b = -3 \\ -16+8-2a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b-4 \\ -8+2b+8+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b-4 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases}$

R.ª: Os valores de a e de b são, respetivamente, -4 e 0.

7.2. Determine o polinómio quociente da divisão inteira de $A\,(x)$ por $B\,(x)$, utilizando a regra de Ruffini.

Apresente o polinómio quociente, na forma reduzida.

$2x + 4 = 2(x+2)$

	1	0	-4	3
-2		-2	4	0
	1	-2	0	3

$2\ Q\ (x) = x^2 - 2x$

$Q\ (x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

7.3. Resolva a inequação $A(x) < 3x^2 - 3x$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

$x^3 - 4x + 3 < 3x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0$

Seja $D\ (x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

Se $D\ (x)$ admitir raízes inteiras, estas são divisores do termo independente (3).

Os divisores inteiros de 3 são: $\pm 1, \pm 3$.

$D(1) = 0$

Assim, $x = 1$ é uma raiz inteira de $D\ (x)$

	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	0

Assim, $D\ (x) = (x-1)(\,x^2 - 2x - 3)$.

Como $x^2 - 2\,x - 3$ é um polinómio de grau 2, podemos determinar as suas raízes utilizando a fórmula resolvente.

Assim, $x^2 - 2\,x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \;\Leftrightarrow x = 3\ \vee x = -1$

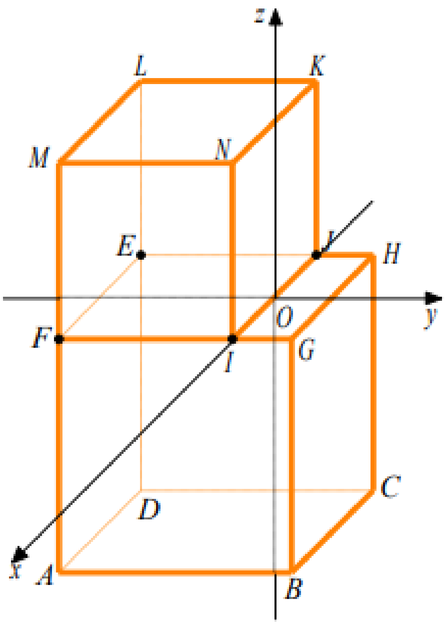
Logo, $D(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$.

$x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+1) < 0$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-1)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x^3-3x^2-x+3<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+1)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\, \cup\,]1,3[$$

8. Considere, num referencial $o.n.\,Oxyz$, o cubo $[ABCDEFH]$ e o paralelepípedo $[EHIJKLMN]$.



Sabe-se que:

- a origem é o ponto médio do segmento de reta $[IJ]$ e a face do cubo $[EFGH]$ está contida no plano xOy;
- o volume do cubo é 64 e $\overline{BL}=9$;
- o volume do cubo é $\frac{16}{9}$ do volume do paralelepípedo.

8.1. Mostre que as coordenadas do ponto L são $(-2,-3,3)$.

Seja a a medida da aresta do cubo $[ABCDEFH]$.

$a^3=64$, logo a medida da aresta do cubo é $a=4$.

Como a origem do referencial é o ponto médio do segmento de reta $[IJ]$, temos que a abcissa do ponto L é -2.

Como, $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$, temos que $\overline{BD}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$.

Por outro lado, $\overline{BL}^2=\overline{BD}^2+\overline{DL}^2$, logo $\overline{DL}=\sqrt{81-32}=7$.

Assim, $\overline{EL}=7-4=3$. Logo, a cota do ponto L é 3.

$V_{paralelepípedo}=\frac{64\times 9}{16}=36$

Como, $V_{paralelepípedo}=36$, vem que $\overline{EJ}\times 3\times 4=36 \Leftrightarrow \overline{EJ}=3$.

Por fim, concluímos que a ordenada do ponto L é -3.

Logo, as coordenadas do ponto L são $(-2,-3,3)$.

8.2. Determine a equação da esfera de centro no ponto I e tangente ao plano FMK.

$I\,(2,0,0)$

$$A_{[FIJ]}=\frac{3\times 4}{2}=6$$

Como, $\overline{FJ}^2=\overline{FI}^2+\overline{IJ}^2$, temos que $\overline{FJ}=\sqrt{16+9}=5$.

Seja r a distância do ponto I ao ponto de interseção da esfera pedida com o plano FMK.

Por outro lado, $A_{[FIJ]} = \frac{5\times r}{2}$

Logo, $\frac{5\times r}{2} = 6 \Leftrightarrow r = \frac{12}{5}$.

Portanto, a inequação da esfera de centro no ponto I e tangente ao plano FMK é $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{144}{25}$

8.3. Escreve uma equação vetorial da reta que passa em D e que tem a direção do eixo das ordenadas.

Uma equação vetorial da reta é, por exemplo: $(x, y, z) = (-2, -3, -4) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$

8.4. Indica as coordenadas do ponto de interseção da reta paralela ao eixo Oz que contém o ponto C com o plano LMN.

Equação da reta paralela ao eixo Oz que contém o ponto C: $x = -2 \wedge y = 1$

Equação do plano LMN: $z = 3$

Logo, o ponto de interseção da reta paralela ao eixo Oz que contém o ponto C com o plano LMN tem coordenadas $(-2,1,3)$.

9. Considere o polinómio $P\,(x) = x^{n+1} + 2x^n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira.

(A) O polinómio $P\,(x)$ é divisível por $x-1$ se n for par.

(B) O polinómio $P\,(x)$ é divisível por $x+1$ se n for ímpar.

(C) O polinómio $P\,(x)$ é divisível por $x-1$ se n for ímpar.

(D) O polinómio $P\,(x)$ é divisível por $x+1$ se n for par.

$P\,(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$, com n par.

R.ª: Opção (D).

10. Considere o polinómio $P(x)$, tal que $3x^4 - x^3 - 3x + 1 = (3x-1) \times P\,(x)$. Então $P(x)$ é dado por:

(A) $x^3 - 3$

(B) $x^3 - 1$

(C) $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

(D) $x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}$

$(3x-1) \times (x^3 - 1) = 3x^4 - x^3 - 3x + 1$

R.ª: Opção (B).

FIM

4.º Teste de Avaliação – Matemática A

10.º Ano

Critérios de Classificação

COTAÇÕES

1. .... **8 pontos**

2. .... **12 pontos**

3. .... **8 pontos**

4. .... **15 pontos**

5. .... **49 pontos**

5.1. .... 10 pontos

5.2. .... 39 pontos

5.2.1. .... 8 pontos

5.2.2. .... 8 pontos

5.2.3. .... 8 pontos

5.2.4. .... 15 pontos

6. .... **8 pontos**

7. .... **37 pontos**

7.1. .... 12 pontos

7.2. .... 10 pontos

7.3. .... 15 pontos

8. .... **47 pontos**

8.1. .... 15 pontos

8.2. .... 12 pontos

8.3. .... 10 pontos

8.4. .... 10 pontos

9. .... **8 pontos**

10. .... **8 pontos**

Total .... 200 pontos

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentam de forma inequívoca a única opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tipos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta o desempenho no domínio específico da disciplina e no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação do desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa faz-se de acordo com os níveis a seguir apresentados.

Níveis	**Descritores**
3	Texto bem estruturado e linguisticamente correto[1], ou com falhas esporádicas que não afetem a inteligibilidade do discurso.
2	Texto bem estruturado, mas com incorreções linguísticas que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso. OU Texto linguisticamente correto, mas com deficiências de estruturação que conduzam a alguma perda de inteligibilidade do discurso.
1	Texto com deficiências de estruturação e com incorreções linguísticas, embora globalmente inteligível.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos processos de resolução, termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.

[1] Por «texto linguisticamente correto» entende-se um texto correto nos planos da sintaxe, da pontuação e da ortografia.

4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.

apresentação de um arredondamento incorreto.	
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caraterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caraterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Exame Final Nacional de Matemática A Critérios de Classificação. [Em linha]. IAVE – Instituto de Avaliação Educativa, I.P. 2019. [Consult. 18 jan. 2019]. Disponível na Internet: https://mat.absolutamente.net/joomla/images/recursos/exames/sec/mat_a/635/18_f1_crit.pdf.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

2. .... **12 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Escrever $P\,(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x+2)$, sendo $a\ \in \mathbb{R}$ o coeficiente do termo de maior grau do polinómio $P\,(x)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Determinar o valor de a .... 4 pontos

Escrever $P(-3) = 14$ (ou $a\left(-3 - \frac{1}{2}\right)(-3+1)(-3+2) = 14$ ou equivalente) .... 2 pontos

Calcular o valor de $a\ (-2)$ .... 2 pontos

Escrever o polinómio $P\,(x)$ na forma reduzida ($P\,(x) = -2x^3 - 5x^2 - x + 2$ ou equivalente) .... 4 pontos

3. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

4. .... **15 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Reconhecer que o ponto P tem abcissa negativa e ordenada positiva . 3 pontos

Resolver a inequação $k^2 - 5k + 4 < 0$ .... 10 pontos

Determinar os zeros do polinómio $k^2 - 5k + 4$ .... 3 pontos

Escrever $k^2 - 5k + 4 = 0$ .... 1 ponto

Resolver a equação ($k = 1 \vee k = 4$) ...... 2 pontos

Decompor em fatores o polinómio $k^2 - 5k + 4$ $\left((k-1)(k-4) < 0 \text{ ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

Elaborar um quadro de sinais (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Primeira linha do quadro (variável k) ...... 1 ponto

Segunda linha do quadro (sinal de $k-1$).1 ponto

Terceira linha do quadro (sinal de $k-4$) .1 ponto

Quarta linha do quadro (sinal de $(k-1)(k-4)$) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Concluir que $k \in]1,4[$ (**ver notas 3 e 4**) .... 2 pontos

Resolver a inequação $k + 4 > 0$ .... 1 ponto

Concluir que $k \in]-4, +\infty[$ .... 1 ponto

Obter os valores de k ($k \in]1,4[$)... 1 ponto

Notas:

1. Cada erro no quadro deve corresponder a uma desvalorização de 1 ponto. Portanto, se existirem quatro erros, ou mais, a classificação a atribuir a esta etapa é de zero pontos.
2. Se esta linha estiver de acordo com as duas anteriores, mesmo que incorretas, deve ser atribuída a cotação total desta etapa.
3. A classificação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

   Resposta de acordo com a última linha do quadro .... 2 pontos

   Resposta de acordo com a última linha do quadro, a menos de uma troca de intervalo aberto para fechado ou vice-versa .... 1 ponto

   Outras situações .... 0 pontos
4. Se, por aplicação deste critério, a pontuação obtida for um número negativo, a pontuação a atribuir é 0 pontos.

5.1. .... **10 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Escrever a igualdade $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever a igualdade $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{PD}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever a igualdade $\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{DQ}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PD} + 2\,\overrightarrow{DQ}$ .... 1 ponto

Aplicar a propriedade distributiva .... 1 ponto

Concluir que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PQ}$ .... 2 pontos

5.2.1. .... **8 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AC ($\overrightarrow{PQ}$ $(5,10)$ ou um vetor colinear) .... 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta AC $((x,y)=(9,0)+k(5,10), k \in \mathbb{R}$ ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 5 pontos

2.º Processo

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AC .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PQ}$ ($\overrightarrow{PQ}$ $(5,10)$ ... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AC}$ $(10,20)$ ou um vetor colinear) .... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta AC $((x,y)=(9,0)+k(10,20), k \in \mathbb{R}$ ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 5 pontos

3.º Processo

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar as coordenadas do ponto C .... 2 pontos

Escrever $C = A + 2\,\overrightarrow{PQ}$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto $C\big(C(19,20)\big)$ .. 1 ponto

Escrever a equação pedida .... 6 pontos

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AC ($\overrightarrow{AC}$ $(10,20)$ ou um vetor colinear) .... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta AC $((x,y)=(9,0)+k(10,20), k \in \mathbb{R}$ ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Nota:

1. Se não escrever $k \in \mathbb{R}$, implica a desvalorização de 2 pontos.

5.2.2. .... **8 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Escrever $D = P + \overrightarrow{AP}$ (ou $D = A + 2\,\overrightarrow{AP}$) .... 4 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ $\left(\overrightarrow{AP}\ (-3,4)\right)$ .... 2 pontos

Calcular as coordenadas do ponto D $\big(D(3,8)\big)$ .... 2 pontos

5.2.3. .... **8 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar as coordenadas do centro da circunferência .... 6 pontos

Completar quadrados ($(x-6)^2+(y-4)^2=68$ ou equivalente) (**ver nota 1**).. 4 pontos

Indicar as coordenadas do centro da circunferência

$((6,4))$ .... 2 pontos

Justificar que o centro da circunferência coincide com o ponto P .... 2 pontos

Nota:

1. A escrita de, por exemplo, $(x+6)^2$, em vez de $(x-6)^2$, implica a desvalorização de 2 pontos.

5.2.4. .... **15 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar, em função de k, a área do trapézio .... 10 pontos

Determinar a medida da base maior do trapézio .... 5 pontos

Justificar que $k > 0$ .... 3 pontos

Obter a medida de $\overline{AB}$ $(20\,k)$ .... 2 pontos

Calcular a altura do trapézio $(\overline{AD} = 10)$ .... 4 pontos

Escrever $\frac{20\,k+20}{2} \times 10$ .... 1 ponto

Equacionar o problema $\left(\frac{20\,k+20}{2} \times 10 = 250\right)$ .... 1 ponto

Determinar o valor de k $\left(\frac{3}{2}\right)$ .... 4 pontos

6. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

7.1. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Escrever $C(-1) = -3$ e $C(2) = 0$ .... (2+2) .... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\begin{cases} -1+2+a+b=-3 \\ -16+8-2a+b=0 \end{cases} \text{ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

Resolver o sistema $\left(\begin{cases} a=-4 \\ b=0 \end{cases}\right)$ .... 4 pontos

2.º Processo

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar o resto da divisão de $C\,(x)$ por $x+1$ ($a+b+1$ ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar o resto da divisão de $C\,(x)$ por $x-2$ ($b-2a-8$ ou equivalente) .... 2 pontos

Equacionar o problema $\left(\begin{cases} a+b+1=-3 \\ b-2a-8=0 \end{cases} \text{ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

Resolver o sistema $\left(\begin{cases} a=-4 \\ b=0 \end{cases}\right)$ .... 4 pontos

7.2. .... **10 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Concluir que $(2x+4)=2(x+2)$ .... 2 pontos

Dividir o polinómio $A\ (x)$ por $x+2$ .... 4 pontos

Determinar o polinómio quociente da divisão inteira de $A\ (x)$ por

$B\ (x)$ $\left(\frac{1}{2}x^2 - x \text{ ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

7.3. .... **15 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Concluir que $A\ (x) < 3x^2 - 3x \Leftrightarrow\ x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0$ .... 1 ponto

Concluir que 1 é uma raiz do polinómio $x^3 - 3x^2 - x + 3$ .... 1 ponto

Dividir o polinómio $x^3 - 3x^2 - x + 3$ por $x-1$ .... 2 pontos

Calcular os zeros do polinómio $x^2 - 2x - 3$ .... 2 pontos

Escrever $x^2 - 2x - 3 = 0$ .... 1 ponto

Resolver a equação $(x=-1 \vee x=3)$ .... 1 ponto

Fatorizar o polinómio $x^3 - 3x^2 - x + 3$ $\big((x-3)(x-1)(x+1)\big)$ .... 2 pontos

Elaborar um quadro de sinais (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa a variável x) .... 1 ponto

Segunda linha do quadro (relativa ao sinal de $x-3$) ..... 1 ponto

Terceira linha do quadro (relativa ao sinal de $x-1$) ...... 1 ponto

Quarta linha do quadro (relativa ao sinal de $x+1$) .... 1 ponto

Quinta linha do quadro (relativa ao sinal de

$(x-3)(x-1)(x+1)$) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Concluir que $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1,3\right[$ (**ver notas 3, 4 e 5**) .... 2 pontos

Notas:

1. Cada erro no quadro deve corresponder a uma desvalorização de 1 ponto. Portanto, se existirem cinco erros, ou mais, a classificação a atribuir a esta etapa é de zero pontos.
2. Se esta linha estiver de acordo com as duas anteriores, mesmo que incorretas, deve ser atribuída a cotação total desta etapa.

3. A classificação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

    Resposta correta (ou seja, de acordo com a última linha do quadro) e apresentada na forma pedida .... 2 pontos

    Resposta de acordo com a última linha do quadro, a menos de uma troca de intervalo aberto para fechado ou vice-versa .... 1 ponto

    Resposta correta, mas não apresentada na forma pedida .... 1 ponto

    Outras situações .... 0 pontos

4. Caso a resposta do aluno seja equivalente a uma das previstas, mas esteja apresentada graficamente na reta real ou por meio de uma condição que defina o respetivo conjunto, a classificação a atribuir deve ser a indicada subtraída de 1 ponto.
5. Se, por aplicação deste critério, a pontuação obtida for um número negativo, a pontuação a atribuir é 0 pontos.

8.1. .... **15 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar a abcissa do ponto L .... 4 pontos

Calcular a medida da aresta do cubo (4) .... 2 pontos

Justificar que a abcissa do ponto L é -2 .... 2 pontos

Determinar a cota do ponto L .... 5 pontos

Calcular $\overline{BD}$ $\left(\sqrt{32} \text{ ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

Calcular $\overline{DL}$ $(7 \text{ ou equivalente})$ .... 1 ponto

Determinar $\overline{EL}$ (3) .... 1 ponto

Justificar que a cota do ponto L é 3 .... 2 pontos

Determinar a ordenada do ponto L .... 6 pontos

Determinar o volume do paralelepípedo $(36 \text{ ou equi} -$

valente) .... 2 pontos

Calcular $\overline{FI}$ (3) .... 2 pontos

Justificar que a ordenada do ponto L é -3 .... 2 pontos

8.2. .... **12 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Determinar as coordenadas do ponto I $\left(I(2{,}0{,}0)\right)$ .... 2 pontos

Determinar o raio, r .... 6 pontos

Calcular $\overline{FJ}$ (5) .... 1 ponto

Equacionar o problema $\left(6 = \frac{5r}{2}\right)$ .... 4 pontos

Calcular a medida do raio $\left(\frac{12}{5} \text{ ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

Escrever a inequação pedida $\left((x-2)^2+y^2+z^2 \leq \frac{144}{25}\right)$ (**ver notas 1, 2, 3, 4 e 5**) .... 4 pontos

Notas:

2. A escrita de, por exemplo, $(x+2)^2$, em vez de $(x-2)^2$, implica a desvalorização de 2 pontos.

3. A escrita do raio, em vez do seu quadrado, conduz a uma desvalorização de 2 pontos.

4. A escrita de uma condição que defina a superfície esférica, em vez de uma condição que defina a esfera, conduz a uma desvalorização de 2 pontos.

5. Se, por aplicação deste critério, a pontuação obtida for um número negativo, a pontuação a atribuir é 0 pontos.

8.3. .... **10 pontos**

A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas.

Indicar as coordenadas do ponto D $\left(D(-2,-3,-4)\right)$ .... 2 pontos

Obter as coordenadas de um vetor diretor da reta $\left((0,1,0) \text{ ou um vetor co}-\text{linear}\right)$ .... 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida $\left((x,y,z)=(-2,-3,-4)+k(0,1,0), k \in \mathbb{R} \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**)... 5 pontos

Nota:

1. Se não escrever $k \in \mathbb{R}$, implica a desvalorização de 2 pontos.

8.4. .... **10 pontos**

Indicar as coordenadas do ponto pedido $\left((-2,1,3)\right)$ .... 10 pontos

Dá outra resposta .... 0 pontos

9. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

10. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

Anexo N

24.ª Ata - Orientação de Estágio

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Orientação de Estágio

ATA NÚMERO 24 – 2018/2019

Aos vinte e quatro dias do mês de abril de dois mil e dezanove, pelas dez horas e trinta minutos, reuniu-se o Núcleo de Estágio de Matemática da Escola Secundária de Jaime Cortesão, na sala de professores com a presença da Professora Margarida Cid, Orientadora Cooperante, e da estagiária Raquel Martins.

Deu-se início ao seminário, com a seguinte ordem de trabalhos:

Ponto um – Balanço da visita de estudo à Exposição Escher e à exposição do Corpo Humano;

Ponto dois – Planificação das aulas de Matemática A.

No ponto um da ordem de trabalhos, efetuou-se um balanço da visita de estudo à Exposição Escher e à exposição do Corpo Humano realizada no dia vinte e três de abril com os alunos do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias da Escola Secundária de Jaime Cortesão.

Tendo-se verificado que a visita correu bem, que os alunos tiveram um comportamento exemplar e que os seguintes objetivos: promover a divulgação do conhecimento científico e tecnológico; identificação de conceitos matemáticos tais como pavimentações, simetrias, representações tridimensionais de figuras impossíveis, paradoxos, entre outros; ligações à vida real de situações matemáticas, da visita foram atingidos.

No ponto dois da ordem de trabalhos, ficou definido que a estagiária irá lecionar o estudo da função quadrática, com supervisão da Professora Margarida Cid e da Professora Doutora Helena Albuquerque, sendo que:

- no dia catorze de maio irá iniciar o estudo da função quadrática ($y = a\,x^2$, $y = a\,x^2 + k, y = a\,(x-h)^2$ e $y = a\,(x-h)^2 + k, a \neq 0$);
- no dia dezasseis de maio irá lecionar métodos para determinar as coordenadas do vértice da parábola, que representa graficamente uma função quadrática;

- no dia dezassete de maio irá lecionar inequações de segundo grau.

Ainda neste ponto da ordem de trabalhos, delinearam-se estratégias para a professora estagiária lecionar as aulas calendarizadas anteriormente.

E nada mais havendo a tratar, deu-se por encerrado o seminário, do qual se lavrou a presente ata, que, depois de lida e aprovada, será assinada nos termos da lei.

Assinaturas	Visto em ___/___/____	Núcleo de Estágio
Orientadora Cooperante	Estagiária	24 / 04 / 2019
		Ata n.º 24
__________________	__________________	Ata com 2 páginas

Anexo O

Ficha da Atividade - Construção de Rosáceas, Frisos e Padrões no *GeoGebra*

Roteiro para a construção de Rosáceas, Frisos e Padrões no *GeoGebra*

1. Abre o *GeoGebra* online;
2. Com o botão direito do rato sobre a folha gráfica 2D, retire a grelha e os eixos;
3. Procure na internet uma imagem. Guarde a imagem;
4. Selecione "Inserir imagem", conforme é indicado na figura abaixo, e insere-a na folha gráfica 2D;

Figura 1: Instrução para "Inserir imagem"

5. Agora, consegue visualizar a imagem e dois pontos A e B;
6. Move um dos pontos de modo a colocar a imagem do tamanho que quer e na posição que considere mais adequada;
7. Clique, na folha algébrica, sobre os pontos A e B de modo a escondê-los.

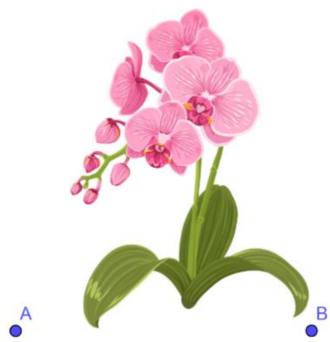


Figura 2: Exemplo de uma imagem inserida na folha gráfica 2D

♦ Guia para a construção de uma Rosácea no *GeoGebra*

1.º Passo: Escolhe, agora, "Novo Ponto" (figura ao lado) e marque um ponto, C, na folha gráfica. Este ponto vai ser o centro de rotação;

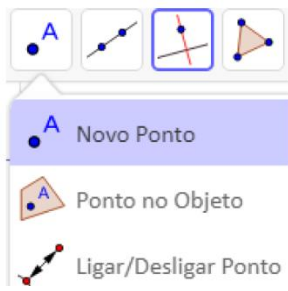


Figura 3: Instrução para inserir um ponto

2.º Passo: No campo "entrada" escreve: $Sequência(Girar(fig1, 60º\ i, C), i, 1, 5)$;

3.º Passo: Esconde os objetos auxiliares mantendo apenas a rosácea na folha gráfica 2D.

Figura 4: Exemplo de uma Rosácea construída do GeoGebra

♦ **<u>Guia para a construção de uma Friso no *GeoGebra* (Só com simetrias de translação)</u>**

No campo "entrada" escreve, sucessivamente, os seguintes comandos:

<u>1.º Comando</u>: $u = (2{,}0)$

O comprimento do vetor, 2, deve ser alterado do modo a que as figuras não fiquem sobrepostas.

Figura 5: Instrução para inserir dados no campo "entrada"

<u>2.º Comando</u>: $n = 1$

Na folha algébrica clique sobre o seletor $n = 1$ com o botão direito e selecione "Configurações" onde no campo "intervalo" irá colocar min: 0, max: 5 e incremento: 1.

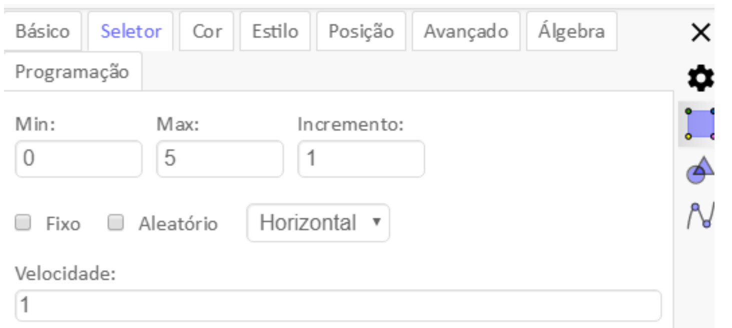


Figura 6: Instrução para limitar e incrementar um seletor

<u>3.º Comando</u>: $Sequência(Transladar(fig1, u * i), i, -n, n)$

Esconde os objetos auxiliares mantendo apenas o friso na folha gráfica 2D.

Figura 7: Exemplo de um Friso construído no GeoGebra

♦ **<u>Guia para a construção de uma Padrão no *GeoGebra* (Só com simetrias de translação)</u>**

No campo "entrada" escreve, sucessivamente, os seguintes comandos:

<u>1.º Comando</u>: $v = (0{,}4)$

O comprimento do vetor, 4, deve ser alterado de modo a que as figuras não fiquem sobrepostas.

<u>2.º Comando</u>: $m = 1$

Na folha algébrica clique sobre o seletor $n = 1$ com o botão direito e selecione "Configurações" onde no campo "intervalo" irá colocar min: 0, max: 5 e incremento: 1. (Figura 6)

<u>3.º Comando</u>: $Sequência(Transladar(l2, v * i), i, -m, m)$

Esconde os objetos auxiliares mantendo apenas o padrão na folha gráfica 2D.

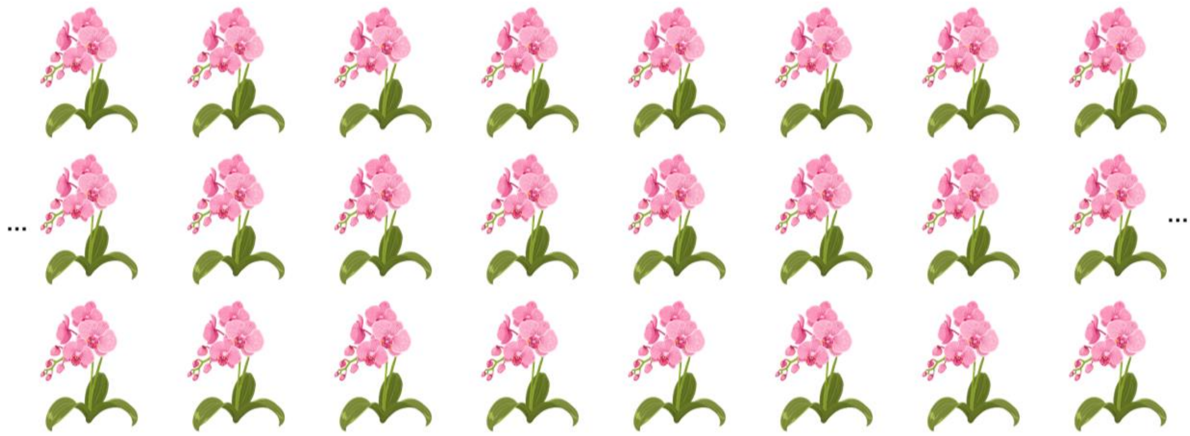


Figura 8: Exemplo de um Padrão construído no GeoGebra

Anexo P

Folhetos das Visitas de Estudo

Recortar o destacável e entregar à Professora de MACS

<u>Programa</u>:

07:00 horas – Saída da Escola Secundária Jaime Cortesão;

10:00 horas – Chegada ao Palácio de São Bento e visita guiada;

12:30 horas – Almoço no Chiado (cada um providenciará o seu);

15:00 horas – Assistência a uma sessão plenária;

17:00 horas – Partida de Lisboa;

19:45 horas – Chegada prevista à Escola Secundária Jaime Cortesão.

Escola Secundária Jaime Cortesão

Visita de Estudo à Assembleia da República

16 de janeiro de 2019

(4.ª feira)

Alunos do 10.º e 11.º Ano de MACS

<u>Disciplinas envolvidas</u>: História - 10.º Ano, Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Português – 10.º Ano

<u>Acompanhantes</u>: Prof.ª Anabela Louro, Prof.ª Isabel Alarcão, Prof.ª Margarida Cid e Prof.ª estagiária Raquel Martins

<u>Objetivos</u>:

- Incentivar o espírito de observação, análise crítica da informação e comunicação dos alunos;
- Valorizar o contributo político e cultural da civilização grega para a civilização europeia e para a Humanidade;
- Consciencializar os alunos para a importância de processos de intervenção democrática na vida coletiva da comunidade e do país;
- Desenvolver o gosto pelo conhecimento e preservação do património histórico-cultural português;
- Motivar os alunos para a aula de MACS e para o estudo desta disciplina;
- Desenvolver a capacidade de interpretar o mundo real através da disciplina de MACS;
- Desenvolver a predisposição para alargar os conhecimentos matemáticos e para os usar em contextos reais;
- Consciencializar os alunos para a importância da participação cívica e democrática;
- Consolidar conhecimentos adquiridos e desenvolver o espírito de grupo.

<u>Notas importantes</u>:

- A viagem efetua-se de autocarro;
- Os alunos devem fazer-se acompanhar de alimentação;
- O preço da viagem, por aluno, é 15 euros;
- Os alunos devem cumprir os horários estabelecidos para não provocar atrasos desnecessários;
- Não é permitido levar mochilas, sacos, máquinas fotográficas ou telemóveis para dentro do edifício da Assembleia da República;
- Durante a sessão plenária os alunos devem manter- se em silêncio, sem se manifestar ou aplaudir;
- Agradecemos, por favor, que entreguem o destacável e o dinheiro até ao dia **3 de janeiro de 2019**.

✂---

Eu______________________________tomei conhecimento da realização da visita de estudo à Assembleia da República no dia 16 de janeiro de 2019, autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando ___________________________, aluno n.º ____, da turma ____, do ____ ano, a participar na mesma. Junto envio um número de contacto e o número de telemóvel que acompanhará o meu educando na viagem bem como 15 euros.

Contacto do E.E.: ________________

Contacto do aluno(a): ________________

Coimbra, ____ de ________ de 201__

O(a) Encarregado(a) de Educação

____

Recortar o destacável e entregar à Professora de Matemática

Programa:

07:45 horas – Saída da Escola Secundária Jaime Cortesão;

10:00 horas – Chegada ao Porto e visita à exposição Escher;

12:30 horas – Almoço livre (cada um providenciará o seu);

14:30 horas – Visita à exposição do "Corpo Humano – A Ciência da Vida";

16:30 horas – Saída do Porto;

19:00 horas – Chegada prevista à Escola Secundária Jaime Cortesão.

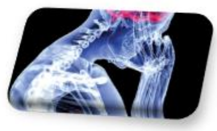
Escola Secundária Jaime Cortesão

Visita de Estudo ao Porto

Exposição de Escher e do Corpo Humano

23 de abril de 2019

(3.ª feira)



Alunos do 10.º 1, 10.º 2, 11.º 1 e 12.º 1

Disciplinas envolvidas: Matemática A

Acompanhantes: Prof.ª Margarida Cid, Prof.ª Ana Paula Mouro, Prof.ª Ana Santos e Prof.ª estagiária Raquel Martins

Objetivos:

- Promover a divulgação do conhecimento científico e tecnológico;
- Identificação de conceitos matemáticos tais como pavimentações, simetrias, representações tridimensionais de figuras impossíveis, paradoxos, entre outros;
- Ligações à vida real de situações matemáticas;
- Proporcionar outras formas de conhecimento diferentes das tradicionais salas de aula;
- Promover a sã convivência entre professores e alunos;
- Promover estratégias de implementação de cidadania e desenvovimento;
- Promover as DAC;
- Intensificar a qualidade das aprendizagens **promovendo o sucesso educativo para** melhorar o grau de aquisição/consolidação das competências essenciais do aluno de forma a favorecer o seu desenvolvimento global, tendo em vista o perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória.

Notas importantes:

- A viagem efetua-se de autocarro;
- Os alunos devem fazer-se acompanhar de alimentação;
- O preço da viagem, por aluno, é 20 euros;
- Os alunos devem cumprir os horários estabelecidos para não provocar atrasos desnecessários;
- Agradecemos, por favor, que entreguem o destacável e o dinheiro até ao dia **4 de abril de 2019**.

✂---

Eu____tomei conhecimento da realização da visita de estudo à Exposição Escher, no Porto, no dia 23 de abril de 2019, autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando ______________________________, aluno n.º ____, da turma ____, do ____ ano, a participar na mesma. Junto envio um número de contacto e o número de telemóvel que acompanhará o meu educando na viagem bem como 20 euros.

Contacto do E.E.: ______________

Contacto do aluno(a): ______________

Coimbra, ____ de ________ de 201__

O(a) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo Q

Regulamento do concurso *Quem quer ser matemático*

Regulamento do concurso *Quem quer ser matemático* – 2018/2019

Artigo 1.º

ENQUADRAMENTO

1. O concurso *Quem quer ser matemático*, inspirado no concurso *Quem quer ser milionário*, é, em 2018/2019, da responsabilidade de uma Comissão Organizadora constituída pela Professora Margarida Cid e pela professora estagiária Raquel Martins e insere-se no Plano de Atividades do Grupo de Recrutamento 500 da Escola Secundária de Jaime Cortesão.

Artigo 2.º

TEMA

2. O concurso *Quem quer ser matemático* é um jogo de 40 perguntas em que os concorrentes respondem através da plataforma *Kahoot!*. As perguntas envolvem conteúdos matemáticos.

Artigo 3.º

OBJETIVOS

a) Promover o gosto pela Matemática;
b) Desenvolver o raciocínio matemático;
c) Desenvolver a comunicação Matemática;
d) Promover a interdisciplinaridade;
e) Fomentar o espírito de grupo e respeito pelos outros;
f) Motivar os alunos para a sala de aula, através do uso das novas tecnologias;
g) Contribuir para o sucesso dos alunos.

Artigo 4.º

CONCORRENTES

1. O concurso é dirigido aos alunos que frequentam a turma 1 do 10.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Jaime Cortesão.
2. O concurso é realizado em grupos de 3 elementos.
3. Os concorrentes assumirão o compromisso de conhecer e cumprir este regulamento e acatar as decisões adotadas pela Organização do concurso.

Artigo 5.º

ESPECIFICAÇÕES GERAIS

1. O concurso realizar-se-á no *Kahoot!*. Esta plataforma de ensino gratuita foi criada em 2013 na Noruega. Pode ser utilizada em diversas situações, como por exemplo: para introduzir um novo tema, na sala de aula; para rever conteúdos; para realizar uma avaliação formativa e para inquéritos, …
2. As perguntas envolvem conteúdos matemáticos de Álgebra (Polinómios), Geometria Analítica e Funções Reais de Variável Real abordados na turma 1 do 10.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Jaime Cortesão.
3. O concurso *Quem quer ser matemático* irá consistir num quiz de conhecimento em que os concorrentes terão de responder a um conjunto de 40 perguntas, isto é, 10 perguntas de Álgebra, 10 perguntas e Geometria no Plano, 9 perguntas de Geometria no Espaço e 11 perguntas de Funções Reais de Variável Real.
4. Neste concurso as questões serão de escolha múltipla com 4 opções de resposta, em que apenas uma está correta.
5. Os concorrentes participarão no concurso através dos seus *smartphones*, *tablets* ou computadores.
6. Os alunos terão de ter acesso à *internet*.
7. Cada pergunta irá ter um tempo de resposta igual a 120 segundos.
8. A cada pergunta correta será atribuída uma classificação máxima de 1000 pontos, sendo a pontuação atribuída em função do tempo de resposta.
9. Os concorrentes que conseguirem responder várias questões seguidas corretamente serão atribuídos pontos bónus.
10. Serão desclassificados os grupos que apresentarem nomes que não permitam identificar os concorrentes.

Artigo 6.º
ESPECIFICAÇÃO DO CONCURSO *QUEM QUER SER MATEMÁTICO*

1. Os concorrentes acedem ao site https://kahoot.it.
2. Será fornecido um código aos concorrentes, que contém as opções de resposta para as questões projetadas.
3. Cada grupo irá escolher um nome para o seu grupo.
4. Os concorrentes respondem às perguntas através dos seus *smartphones*, *tablets* ou computadores escolhendo a única opção que consideram correta.

Artigo 7.º

DIREITOS INTELECTUAIS

1. Qualquer acordo ou comunicação com terceiros, independentemente da sua forma, a fim de obter a resposta correta para uma ou mais perguntas, resultará na interrupção da participação dos concorrentes no concurso.

Artigo 8.º

JÚRI

1. A decisão do júri é soberana e não passível de recurso.

Artigo 9.º
DIVULGAÇÃO DOS RESULTADOS

1. No final de cada pergunta será apresentada a resposta correta.

2. No final do *kahoot!* será apresentada a classificação final dos primeiros 5 classificados.

3. No final do concurso será transferido um ficheiro *Excel*, que permitirá analisar cada questão individualmente (quantos e quais grupos acertaram nas diversas perguntas).

Artigo 10.º

AVALIAÇÃO

1. O concurso irá ser pontuado de modo a contar para a avaliação sumativa do 3.º período, da seguinte forma:

- Cada pergunta de Geometria Analítica no Plano será cotada em 2 pontos;
- Oito perguntas de Geometria Analítica no Espaço serão cotadas em 3 pontos e uma em 7 pontos;
- Cada pergunta de Álgebra será cotada em 5 pontos;
- Cada pergunta de Funções Reais de Variável Real será cotada em 9 pontos.

Artigo 11.º

DISPOSIÇÕES FINAIS

1. Qualquer questão resultante de omissão ou dúvidas de interpretação do presente regulamento será resolvida pela Organização.

Anexo R

Questões sobre Funções Reais de Variável Real do concurso *Quem quer ser matemático*

Questões de Funções Reais de Variável Real

Selecione a única opção correta.

Full Screen

Skip

118

Seja a família de funções afim $f(x) = (5 - k)x + 6$, sendo k real.

O valor de k para que f seja uma função estritamente crescente é:

0
Answers

- k<5
- k≤5
- k>5
- k≥5

Selecione a única opção correta.

Full Screen

Skip

119

Sendo $f(x) = ax^2$ uma função quadrática de domínio $\mathbb{R}$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

0
Answers

- Se a>0 então f é crescente em]-∞,0] e decrescente em [0,+∞[
- Se a<0 então f é crescente em]-∞,0] e decrescente em [0,+∞[
- f não tem zeros
- Se a<0 então f é decrescente em]-∞,0] e crescente em [0,+∞[

Selecione a única opção correta.

Full Screen

Skip

120

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -(x-2) \text{ e } g(x) = 2(x+5).$$

$(g \circ f)(2)$ é igual a:

0
Answers

- -14
- 10
- 12
- 14

Selecione a única opção correta.

Full Screen

119

De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

$f(5) = 0$;

f é uma função par.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = f(x+3)$$

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto dos zeros do g?

Skip

0 Answers

- {0,3}
- {3,5}
- {-8,2}
- {2,8}

Selecione a única opção correta.

Full Screen

118

De uma função, h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(0) = 0$;
- h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$;
- h é uma função par.

Selecione a afirmação verdadeira.

Skip

0 Answers

- h tem um máximo relativo para x=0
- h(-1)<0
- h é estritamente decrescente no intervalo [-1,0]
- h(-2)+h(2)=0

Selecione a única opção correta.

Full Screen

119

Seja $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, a > 0$, tal que $\Delta < 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Skip

0 Answers

- f é positiva em IR
- a função admite um máximo absoluto
- a função admite dois zeros distintos
- a função admite um único zero

Selecione a única opção correta.

Full Screen

119

Seja f uma função cujos zeros são $-2, 3$ e 5. Então, os zeros da função definida por $g(x) = f(x+2)$ são:

Skip

0 Answers

- 0,5 e 7
- -4, 6 e 10
- -2,3 e 5
- -4,1 e 3

Selecione a única opção correta.

Full Screen

120

Uma expressão analítica de função quadrática com vértice $(2, 3)$ e que contém o ponto de coordenadas $(0, 11)$ pode ser:

Skip

0 Answers

- $f(x)=2(x-3)^2+7$
- $f(x)=2(x-2)^2+3$
- $f(x)=(x-2)^2+3$
- $f(x)=(x+2)^2+3$

Selecione a única opção correta.

Full Screen

120

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-3, 2]$.

Qual é o contradomínio de $2f(x) + 1$?

Skip

0 Answers

- [-6,4]
- [-2,3]
- [-5,5]
- [-3,4]

Selecione a única opção correta.

Full Screen

119

Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. Sabe-se que:

- $a > 0$;
- a função f tem um único zero, que é o número real 5.

Qual é o contradomínio de f?

Skip

0 Answers

-]-∞,0]
- [0,+∞[
-]-∞,5]
- [5,+∞[

Selecione a única opção correta.

Full Screen

119

Relativamente à função definida por $f(x) = -(x-a)^2 + b, a, b \in \mathbb{R}$, sabe-se que o seu contradomínio é $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ e que $x = 3$ é o eixo de simetria do seu gráfico. Então, pode concluir que:

Skip

0 Answers

- a=5/2 e b=3
- a=5/2 e b=-3
- a=-3 e b=5/2
- a=3 e b=5/2