Actes des XXVI^e Journées de Statistique de l'ASU
Université de Neuchâtel, 24–27 mai, 1994.

M-ESTIMATEURS À NOYAU

C.GOURIÉROUX
CREST, 15, Boulevard Gabriel Péri
92245 Malakoff Cedex, France

A.MONFORT
CREST, 15, Boulevard Gabriel Péri
92245 Malakoff Cedex, France

C.TENREIRO
Univ. Coimbra, Dep. Matemática
Apartado 3008, 3000 Coimbra, Portugal

Abstract

We consider kernel M-estimators, defined as a solution of an optimization problem of the kind :

$$\hat{\theta}_T(s) = Arg\,min_\theta \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{h_T^d} K\left[\frac{S(Y_t, \hat{\alpha}_T) - s}{h_T}\right] \psi(Y_t, \hat{\alpha}_T; s; \theta),$$

where $\hat{\alpha}_T$ tends to a limit α_∞ when T tends to infinity, and d is the dimension of the conditioning variable. We present the asymptotic properties, consistency and asymptotic normality, of such a functional estimator.

Mots clés: Noyau, estimation fonctionnelle, M-estimateurs.

1 Définition des M-estimateurs à noyau

Les M-estimateurs à noyau, sont définis comme une solution d'un problème d'optimisation du type:

$$\hat{\theta}_T(s) = Arg\,min_\theta \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{h_T^d} K\left[\frac{S(Y_t, \hat{\alpha}_T) - s}{h_T}\right] \psi(Y_t, \hat{\alpha}_T; s; \theta),$$

où S et ψ sont des fonctions connues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$, définissant les variables conditionantes et la fonction objectif, respectivement, K est un noyau, $Y_t, t = 1, \ldots, T$, sont des variables observables, h_T est une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro, et $\hat{\alpha}_T$ est une suite de variables aléatoires qui converge vers une valeur constante α_∞, lorsque T tend vers l'infini.

Ces estimateurs ont été déjà introduits pour des choix particuliers de la fonction ψ. Si par exemple, $\psi_t = (Y_t - \theta)^2$, nous obtenons l'usuel estimateur par noyau de la fonction de régression $E[Y_t \mid S_t = s]$.

Les propriétés asymptotiques de ces estimateurs fonctionnels sont obtenues de la façon usuelle [Jennrich (1969), Gouriéroux-Monfort (1989)] en utilisant les propriétés asymptotiques des estimateurs à noyau de la régression [Nadaraya (1964), Watson (1964), Bierens

(1987)] appliquées à la fonction objectif ψ et à ses première et seconde dérivées par rapport à θ.

Nous présentons dans la suite ces propriétés: convergence presque sûre et normalité asymptotiques. Divers domaines d'application des M-estimateurs à noyau (tests de la linéarité de la fonction de régression ou de la forme quadratique des erreurs ARCH dans un modèle autorregréssif,...) sont exposées dans Gouriéroux-Monfort-Tenreiro (1994). Une expérience sur données simulées est aussi proposée.

2 Quelques hypothèses

Pour assurer la convergence et la normalité asymptotique d'un M-estimateur à noyau, nous avons besoin de différents types d'hypothèses de régularité dans le processus observé, dans l'estimateur $\hat{\alpha}_T$, dans le noyau K et dans la fenêtre h_T. Nous signalerons seulement les plus importantes:

conditions sur le processus observé

$(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique fortement stationnaire et géométriquement fortement mélangeant [voir Bosq (1988)].

conditions sur le noyau

Le noyau K est différentiable à support borné, et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial K}{\partial v_j}$ sont supposées intégrables.

conditions sur la fenêtre h_T

$$h_T \to 0, \text{ et } T h_T^d \to +\infty, \text{ lorsque } T \to +\infty.$$

conditions sur l'estimateur $\hat{\alpha}_T$

$\hat{\alpha}_T$ converge presque sûrement vers une constante α_∞, lorsque $T \to +\infty$, et on suppose encore que:

$$\hat{\alpha}_T - \alpha_\infty = O\left(h_T^{d+2}\right) \text{ et } \hat{\alpha}_T - \alpha_\infty = o\left(\frac{1}{\sqrt{T h_T^d}}\right).$$

conditions d'identifiabilité asymptotique

Il existe une solution unique du problème d'optimisation:

$$Min_\theta \, L_\infty(s;\theta),$$

avec:

$$L_\infty(s;\theta) = E[\psi(Y,\alpha_\infty;s;\theta) \mid S(Y,\alpha_\infty) = s] f_S(s),$$

où f_S est la densité de probabilité de la variable aléatoire $S(Y,\alpha_\infty)$.

3 Propriétés asymptotiques

Sous les conditions précédentes, en désignant par:

$$L_T(s;\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{h_T^d} K\left[\frac{S(Y_t,\hat{\alpha}_T) - s}{h_T}\right] \psi(Y_t,\hat{\alpha}_T;s;\theta),$$

nous obtenons la convergence de $L_T(s;\theta)$ vers $L_\infty(s;\theta)$, lorsque T tend vers l'infini, uniformément en $\theta \in \Theta$, où Θ est un compact. Ceci permet de conclure, d'après les arguments classiques [Jennrich (1969)], qu'il existe, asymptotiquement, une solution $\hat{\theta}_T(s)$ du problème d'optimisation à distance finie:

$$Min_{\theta\in\Theta} L_T(s;\theta),$$

qui converge presque sûrement vers la solution $\theta_\infty(s)$ du problème d'optimisation asymptotique:

$$Min_{\theta\in\Theta} L_\infty(s;\theta).$$

Ainsi, $\hat{\theta}_T(s)$ satisfait asymptotiquement la condition du premier ordre:

$$\frac{\partial L_T}{\partial \theta}(s;\hat{\theta}_T(s)) = 0.$$

Si la limite $\theta_\infty(s)$ est à l'intérieur de l'espace des paramètres Θ, un développement de la condition du premier ordre autour de $\theta_\infty(s)$ et α_∞, nous permet de conclure que $\theta_\infty(s)$ satisfait asymptotiquement la condition:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{Th_T^d}} K\left[\frac{S(Y_t,\alpha_\infty)-s}{h_T}\right] \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\left[Y_t,\alpha_\infty;s;\theta_\infty(s)\right]$$
$$+f_S(s)E\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\theta'}[Y,\alpha_\infty;s;\theta_\infty(s)] \mid S(Y,\alpha_\infty)=s\right]\sqrt{Th_T^d}\,[\hat{\theta}_T(s)-\theta_\infty(s)] \sim 0.$$

Pour cela, nous avons besoin d'introduire des conditions supplémentaires sur le noyau et sur la fenêtre, permettant d'éliminer l'effet de biais asymptotique. Celles-ci s'écrivent:

conditions supplémentaires sur le noyau et sur la fenêtre

Le noyau K est d'ordre m, avec $m \geq 1$ [voir Bierens (1987)], et la suite (h_T) satisfait:

$$Th_T^{d+2m} \to 0, \text{ lorsque } T \to +\infty.$$

L'ordre m doit être choisi de façon à rendre compatibles les conditions imposées sur la fenêtre.

Nous pouvons maintenant utiliser les propriétés de normalité asymptotique des estimateurs à noyau de la régréssion, pour obtenir la convergence en loi du terme:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{Th_T^d}} K\left[\frac{S(Y_t,\alpha_\infty)-s}{h_T}\right] \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\left[Y_t,\alpha_\infty;s;\theta_\infty(s)\right],$$

vers la loi normale de moyenne zéro et de matrice de covariance donnée par:

$$\Omega(s) = \int K^2(v)dv\, f_S(s)C_0(s),$$

où:

$$C_0(s) = E\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta}[Y,\alpha_\infty;s;\theta_\infty(s)]\frac{\partial\psi}{\partial\theta'}[Y,\alpha_\infty;s;\theta_\infty(s)] \mid S(Y,\alpha_\infty)=s\right].$$

Nous avons alors:

Propriété : *Le M-estimateur à noyau est convergent et asymptotiquement normal:*

$$\sqrt{Th_T^d}\,[\hat{\theta}_T(s) - \theta_\infty(s)] \xrightarrow{d} N[0, \Sigma(s)],$$

où:

$$\Sigma(s) = \frac{J(s)^{-1}C_0(s)J(s)^{-1}}{f_S(s)} \int K^2(v)dv,$$

$$J(s) = E\left[\frac{-\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\theta'}[Y, \alpha_\infty; s; \theta_\infty(s)] \mid S(Y, \alpha_\infty) = s\right].$$

Nous obtenons l'expression classique $J(s)^{-1}C_0(s)J(s)^{-1}$ pour la précision asymptotique d'un M-estimateur paramétrique [voir White (1982)], où chaque matrice est évaluée par rapport à la loi de Y conditionnée par $S(Y, \alpha_\infty) = s$.

4 Références

1. **Bierens, H.J.** (1987). *Kernel Estimators of Regression Functions.* Cambridge Univ. Press.
2. **Bosq, D.** (1988). Prévision nonparamétrique d'un processus stationnaire non borné. DP. LSTA 81, Univ. Paris VI, Paris.
3. **Gouriéroux, C.** et **Monfort, A.** (1989). *Statistique et Modèles Econométriques.* Economica.
4. **Gouriéroux, C.**, **Monfort, A.** et **Tenreiro, C.** (1994). Kernel M-estimators: nonparametric diagnostics for structural models. Document de travail du CREST.
5. **Györfi, L.**, **Hardle, W.**, **Sarda, P.**, et **Vieu, P.** (1989). *Nonparametric Curve Estimation from Time Series.* Lecture Notes in Statistics, 60, Springer-Verlag.
6. **Jennrich, R.** (1969). Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators. *Ann. Math. Statist.*, **40**, 633-643.
7. **Nadaraya, E.A.** (1964). On estimating regression. *Theory Prob. Appl.*, **10**, 186-190.
8. **Watson, G.S.** (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya A*, **26**, 359-372.
9. **White, H.** (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica*, **50**, 1-25.

Université de Neuchâtel 24 - 27 mai 1994

XXVI^{e} Journées de Statistique

Association pour la Statistique et ses Utilisations

Sous l'égide de la Société de Statistique de France

Avec la participation de:
Société Française de Biométrie, Société Francophone de Classification,
Société de Statistique de Paris, Groupe des Membres Français de l'I.I.S,
Groupe M.A.S. de la S.M.A.I.

Groupe de Statistique
Pierre-à-Mazel 7, CH - 2000 Neuchâtel, Suisse
Téléphone: +41 (38) 21 14 67 - Fax: +41 (38) 21 17 30

COMITE SCIENTIFIQUE

Président :
H. Caussinus (UPS, Toulouse)

Membres :
D. Collombier (Université de Pau)
J.-J. Daudin (INA-PG, Paris)
J.-C. Deville (INSEE, Paris)
A.-M. Dussaix (ESSEC, Paris)
Y. Escoufier (U.S.T.L., Montpellier)
A. de Falguerolles (UPS, Toulouse)
B. Fichet (AIMP, Marseille)
D. Grangé (C.N.U.S.C., Montpellier)
G. Le Calvé (UHB, Rennes)
S. Morgenthaler (EPF, Lausanne)
E. Pardoux (UHP, Marseille)
C. Robert (Université de Rouen)
P. Rousseeuw (Uni. d'Antwerp, Bruxelles)
G. Saporta (CNAM, Paris)
R. Tomassone (INAPG, Paris)

COMITE D'ORGANISATION

Groupe de Statistique
Université de Neuchâtel
Suisse

Marianne Liebe
Muriel Tranchant
Christine Leuba
Corinne Becker
Jean-Pierre Renfer
Valentin Rousson
Wei Li
Tâm Bui
Gérard Geiser
Sarino Vitale
Yvette Radwick

CONFERENCIERS INVITES

José-Miguel Bernardo
Universidad de Valencia, Espagne
Hans-Hermann Bock
Technische Hochschule Aachen, Allemagne
Antony Davison
University of Oxford, Royaume-Uni
Paul Deheuvels
Université Pierre et Marie Curie, France
Ruben Gabriel
University of Rochester, USA
Christian Genest
Université Laval, Québec, Canada
M. Hallin
Université Libre de Bruxelles, Belgique
Peter Huber
Universität Bayreuth, Allemagne
Jana Jureckova
Charles University, Rép. Tchèque
Ludovic Lebart
Centre National de la Recherche Scientifique, France
Lars Lyberg
Statistics Sweden, Suède
Alfio Marazzi
Université de Lausanne, Suisse
Hélène Massam
York University, Québec, Canada
Sylvia Richardson
Institut national de la Santé et de la Recherche médicale, France
Pascal Schlich
Laboratoire de Recherche sur les Arômes, France
Justus Seely
Oregon state University, USA
Werner Stahel
Swiss Federal Institute of Technology, Suisse
Joe Whittaker
Lancaster University, Royaume-Uni
Bernard Ycart
Laboratoire de Modélisation et de Calcul, France