1 2 9 0

UNIVERSIDADE D COIMBRA

Raquel Viegas Bernardes

MEDIDAS EM RETICULADOS:
UMA ABORDAGEM LOCÁLICA À TEORIA DA MEDIDA

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Matemática Pura, orientada pelo Professor Doutor Jorge Picado e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Junho de 2020

Medidas em reticulados:
uma abordagem locálica à teoria da medida

Raquel Viegas Bernardes

1 2 9 0

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2020

Agradecimentos

Antes de mais, eu gostava de agradecer ao meu orientador, o Professor Doutor Jorge Picado, primeiro, por me ter aceite como sua orientanda (porque há já muito tempo que eu gostava de ter a oportunidade de trabalhar sob a orientação do professor); segundo, por me ter sugerido este tema para a minha dissertação (no qual eu gostei muito de trabalhar e o qual se tornou a minha constante nos momentos de dificuldade); e finalmente, por toda a atenção que me deu, por toda a disponibilidade que teve, por todas as sugestões e observações – por toda a orientação. Foi muito bom trabalhar com o professor e sem o professor este trabalho não teria sequer chegado a nascer.

Em seguida, gostava de também agradecer à minha mãe por nunca me ter deixado saltar uma refeição e por sempre ter estado a cuidar de mim, *quando* e *onde* eu me esquecia de o fazer. Ela adicionou mais tempo às 24 horas dos meus dias e por isso – e por *tudo* –, não há palavras suficientes para agradecer.

Por último, quero ainda agradecer à-música-que-ouvia-todos-os-dias, por me ter mantido sã e dado inspiração, assim como à Bia e ao Ismael, por sempre terem estado *lá*. Quando vim para este curso, eu não podia ter pedido ou imaginado melhores companheiros de viagem e tudo teria sido diferente sem vocês. Muito obrigada!

Resumo

Neste texto, estuda-se uma abordagem à teoria da medida no contexto da teoria dos *frames* e *locales* (topologia sem pontos). Primeiro, apresentam-se alguns conceitos e resultados fundamentais de reticulados e *locales*, definindo-se, em particular, o conceito de medida num reticulado sup-σ-completo X e mostrando-se que esta é uma generalização da definição tradicional. Depois, também se entra no estudo de σ-*frames* e σ-*locales*, apresentando-se alguns dos seus conceitos básicos e propriedades gerais, os quais, na sua maioria, têm um resultado ou uma propriedade correspondente na teoria de *locales*, com o qual coincidem sob a hipótese de X ser um σ-*locale* fortemente de Lindelöf. Em seguida, apresenta-se uma equivalência entre as categorias dos espaços mensuráveis sóbrios e dos σ-*locales* booleanos espaciais e, finalmente, dada uma medida μ num σ-*locale* X, estende-se essa medida a uma função μ^* definida no *co-frame* de todos os *sub*-σ-*locales* de X, $\mathcal{S}(X)$, provando-se que, se X for um σ-*locale* adequado, μ^* é uma medida em $\mathcal{S}(X)$ (Teorema IV.**1.8**). Para terminar, observa-se que, aplicando o Teorema IV.**1.8**, é possível estender a medida de Lebesgue do espaço eucliadiano $\mathbb{R}^n$ a uma medida que não só atribui, em particular, um valor a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, como também é invariante relativamente ao grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$.

Conteúdo

Introdução

Em teoria da medida, a fim de se trabalhar de forma sólida e coerente com medidas num conjunto não vazio X, é preciso restringir o conceito de medida a subconjuntos especiais de X — os subconjuntos mensuráveis. De facto, por exemplo, para $X = \mathbb{R}^n$, assumindo o axioma da escolha, é impossível definir uma medida não trivial em todos os seus subconjuntos que seja invariante relativamente ao grupo de isometrias euclidianas de $\mathbb{R}^n$ — propriedade essa que seria desejável, pois, como uma isometria não muda o "tamanho" de um subconjunto, alterando apenas a sua posição no espaço, seria de esperar que o conjunto continuasse a ter a mesma "medida". Face a esta contingência, Simpson [12] propôs uma nova maneira de abordar o problema de medir subconjuntos, adotando uma noção de "parte de X" (introduzida por Isbell em [9] e que atualmente é uma característica fundamental da chamada topologia sem pontos) mais geral do que a noção de subconjunto, mas que, em particular, a contém, e definindo uma medida consistente em todas essas "partes de X".

De modo análogo a como os *locales* generalizam os espaços topológicos, os σ-*locales* generalizam os espaços mensuráveis. Com efeito, em [1], Baboolal e Ghosh estabeleceram uma adjunção entre a categoria dos espaços mensuráveis e aplicações mensuráveis e a categoria dos σ-*locales* booleanos e aplicações σ-locálicas, que se restringe a uma equivalência entre a subcategoria plena dos espaços mensuráveis sóbrios (que contém todos os espaços mensuráveis de maior relevância em teoria da medida) e a subcategoria plena dos σ-*locales* booleanos espaciais.

Motivado por esta adjunção, Simpson, em [12], fez uma abordagem à teoria da medida dentro da categoria dos σ-*locales*. Vendo os espaços topológicos como *locales* e adotando como noção de "parte de X" o conceito de *sublocale*, Simpson começou por generalizar a definição tradicional de medida, dada apenas para álgebras booleanas sup-σ-completas, a reticulados sup-σ-completos arbitrários (Definição I.**1.11**) e construiu uma medida consistente no conjunto de todos os *sub*-σ-*locales*, sob uma propriedade moderada de separação. Por razões técnicas, os seus resultados estão desenvolvidos para σ-*locales*, porém, o seu objetivo é aplicá-los ao caso particular em que os σ-*locales* coincidem com os *locales*, o que acontece, por exemplo, quando se exige que o σ-*locale* seja fortemente de Lindelöf (Definição I.**1.7**). Esta nova abordagem permite não só construir uma medida que atribui, em particular, um valor a todo o subconjunto de X, como também, evitar as contradições usuais encontradas na teoria da medida (ver as contradições encontradas por Vitali [13] ou Banach e Tarski [3], a título de exemplo), uma vez que subconjuntos disjuntos em X podem não ser disjuntos como *sub*-σ-*locales* de X.

Posto isto, neste texto, estudar-se-á a abordagem à teoria da medida dentro da categoria dos σ-*locales* realizada por Simpson em [12], tendo em vista os seus benefícios e potencial.

Num primeiro capítulo, apresentar-se-ão alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria de reticulados e da teoria de *frames* e *locales*, introduzindo-se a definição de medida num reticulado sup-σ-completo arbitrário e outros conceitos oportunos associados a esta. Em particular, relacionar-se-á a definição de medida a ser dada com a definição convencional (em álgebras booleanas sup-σ-completas) e constatar-se-á que, de facto, a primeira pode ser considerada uma generalização da segunda. A demonstração deste resultado não foi encontrada na bibliografia, no entanto, foi deduzida a partir de técnicas clássicas da teoria da medida. Para além disso, também se recordará o Teorema de Isbell da densidade [9], que será indispensável para esta abordagem evitar os paradoxos bem conhecidos da teoria da medida, e construir-se-á o *sublocale* induzido por um subespaço, verificando-se que, se o mesmo estiver associado a um subconjunto aberto, fechado ou denso do espaço topológico, o *sublocale* induzido por ele também será aberto, fechado, ou denso, respetivamente. Se o espaço topológico verificar o axioma T_D, o conjunto de todos os seus subconjuntos estará em bijeção com o conjunto de todos os *sublocales* induzidos e, através dessa identificação, poder-se-ão ver os subconjuntos como *sublocales* [11].

Em seguida, num segundo capítulo, estudar-se-ão os σ-*frames* e os σ-*locales*. Caracterizar-se-ão alguns morfismos da categoria dos σ-*locales* e definir-se-á o conceito de *sub*-σ-*locale*, generalizando o estudo homólogo realizado para *locales* em [11]. Como o reticulado dos *sub*-σ-*locales* e o reticulado das congruências são reticulados duais, começar-se-á por ver alguns resultados no reticulado das congruências de um σ-*locale* X, com base no estudo realizado por Frith em [7] para congruências em *locales* e, depois, demonstrar-se-ão algumas propriedades gerais de *sub*-σ-*locales*. Particularmente, verificar-se-á que o conjunto de todos os *sub*-σ-*locales* de um σ-*locale* X, $\mathcal{S}(X)$, é um *co-frame*, estudar-se-ão algumas leis distributivas em $\mathcal{S}(X)$ associadas a *sub*-σ-*locales* abertos (com base nos resultados obtidos para o *frame* das congruências) e definir-se-á uma função imagem e uma função pré-imagem associadas a uma aplicação σ-locálica. Através destas funções, e observando que existe um isomorfismo de σ-*frames* entre X e $o[X]$, onde $o[X]$ denota o conjunto de todos os *sub*-σ-*locales* abertos de X, será possível estender, de forma única, um homomorfismo de σ-*frames* $f^* : X \longrightarrow Y$, a um homomorfismo de *co-frames* $f_{-1} : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(Y)$.

Em particular, se X for um σ-*locale* fortemente de Lindelöf, provar-se-á que muitos conceitos da teoria de σ-*locales* coincidirão com os seus correspondentes da teoria dos *locales*, permitindo que, neste caso, o prefixo 'σ' possa ser ignorado e reduzindo o problema à teoria de *locales*.

É de salientar que, ao longo deste capítulo, as demonstrações das propriedades dos *sub*-σ-*locales* foram adaptadas da teoria de *locales*, ou deduzidas com base nas técnicas para trabalhar com congruências em *locales* apreendidas em [7], não se encontrando em nenhuma das referências da bibliografia. Também as demonstrações relacionadas com reticulados sup-σ-completos fortemente de Lindelöf não se encontram na bibliografia, tendo sido deduzidos a partir das definições envolvidas. O estudo realizado acerca da função imagem e função pré-imagem é um desenvolvimento original deste texto, motivado por, em [12], ser definido o único homomorfismo de *co-frames* que estenderia um determinado homomorfismo de σ-*frames* (o que sugere, por preservar ínfimos arbitrários, que é uma aplicação adjunta de Galois à direita) e pelas respetivas funções homólogas na teoria dos *locales*.

No capítulo III, explorar-se-á a adjunção entre a categoria dos espaços mensuráveis e aplicações mensuráveis e a categoria dos σ-*locales* booleanos e aplicações σ-locálicas, estabelecida por Baboolal e Ghosh em [1], acompanhando o artigo em questão, mas também intercalando com uma adaptação deduzida a partir da construção da adjunção entre a categoria dos *locales* e a categoria dos espaços topológicos realizada em [11]. Atendendo à unidade e à co-unidade da adjunção a ser explorada e à analogia que existe entre esta adjunção e a adjunção entre a categoria dos *locales* e a categoria dos espaços topológicos, definir-se-ão de forma conveniente (e adequada) os conceitos de espaço mensurável sóbrio e de σ-*locale* booleano espacial e, finalmente, estabelecer-se-á uma equivalência de categorias entre a subcategoria plena dos espaços mensuráveis sóbrios e a subcategoria plena dos σ-*locales* booleanos espaciais.

Por fim, num capítulo final, seguindo de perto o artigo de Simpson [12], proceder-se-á à construção de uma medida no *co-frame* dos *sub*-σ-*locales*. Usando uma técnica padrão de medidas exteriores, estender-se-á uma medida μ em X a uma função μ^* em $\mathcal{S}(X)$ e, utilizando uma medida auxiliar a ser construída no *co-frame* dos filtros de X, mostrar-se-á que, sob a hipótese de X ser um σ-*locale* adequado, μ^* satisfará a definição de medida em $\mathcal{S}(X)$. Na prática, denotando por $\Omega(X)$ o reticulado dos abertos de um espaço topológico X, o objetivo é trabalhar no *co-frame* $\mathcal{S}(\Omega(X))$, o qual, caso X verifique também o axioma T_D, contém todos os subconjuntos de X, identificando cada subconjunto com o respetivo *sublocale* induzido.

Para terminar, mostrar-se-á como esta abordagem permite definir de forma consistente uma medida não trivial em todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, invariante relativamente ao grupo de isometrias euclidianas de $\mathbb{R}^n$, estendendo a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ a uma medida em $\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$. Assim, poder-se-ão evitar as contradições usuais da teoria da medida, uma vez que, embora correspondam a subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, os mesmos não serão disjuntos como *sublocales* (apesar da sua interseção corresponder a um *sublocale* sem pontos), não se podendo, por isso, aplicar a σ-aditividade. Ou seja, intuitivamente, os subconjuntos envolvidos nessas contradições corresponderão a subconjuntos que, conquanto não tenham pontos em comum, se intersetam na "cola" topológica (no *locale*) que liga pontos nas vizinhanças uns dos outros em $\mathbb{R}^n$.

Relativamente à bibliografia utilizada, para estudar a teoria de reticulados e a teoria de *frames* e *locales*, consultou-se, principalmente, os livros Davey-Priestley [5] e Picado-Pultr [11], estendendo a pesquisa a Frith [7], para trabalhar com congruências em σ-*locales*, e a Madden [10], para referências genéricas de σ-*frames*. Quanto aos conceitos e resultados da teoria da medida clássica envolvidos neste texto, utilizou-se, como principais referências, Evans-Gariepy [6] e Halmos [8].

Capítulo I

Reticulados e locales

1. Reticulados

1.1. Conceitos fundamentais

Seja L um conjunto e $\leq$ uma relação de ordem parcial em L, isto é, uma relação binária em L reflexiva, transitiva e antissimétrica. Ao par $(L, \leq)$, chama-se **conjunto parcialmente ordenado**.

Definição 1.1. Um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ diz-se um **reticulado** se tiver supremos finitos e ínfimos finitos, ou seja, se existir o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto finito de L.

Usualmente, se não existir ambiguidade, denotar-se-á o reticulado $(L, \leq)$ apenas por L, e o seu dual, isto é, $(L, \leq^{op})$, onde $\leq^{op}$ é a ordem parcial definida por $a \leq^{op} b$ se e só se $b \leq a$, por L^{op}. Em particular, uma vez que $\emptyset$ é um subconjunto finito, exige-se a existência de $1_L := \inf \emptyset$ e de $0_L := \sup \emptyset$, que são definidos, respetivamente, por serem o maior e o menor elemento de L.

Se todo o subconjunto numerável de um reticulado L tiver supremo, diz-se que o **reticulado** é **sup-σ-completo**. Se existir o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto de L, o **reticulado** é **completo**. Dado um subconjunto A de L, denotar-se-á, respetivamente, por $\bigvee A$ e $\bigwedge A$, o supremo e ínfimo do conjunto A, quando os mesmos existirem.

Ainda relativamente à notação, dado um reticulado L, denotar-se-á um conjunto infinito numerável de elementos de L como uma sucessão de elementos $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde $x_i \in L$, para $i \in \mathbb{N}$, e o seu supremo será representado por $\bigvee\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i$. Os supremos e ínfimos arbitrários serão denotados, respetivamente, por $\bigvee\limits_{i \in I} x_i$ e $\bigwedge\limits_{i \in I} x_i$, onde I representará um conjunto arbitrário de índices. Por fim, dado um conjunto finito de $k \in \mathbb{N}$ elementos, o seu supremo e ínfimo serão representados, respetivamente, por $x_1 \vee \ldots \vee x_k$ e $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$.

Pode ainda verificar-se que, para assegurar a sup-σ-completude, é suficiente existir $\bigvee\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i$, para toda a sucessão crescente $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. De facto, para mostrar tal propriedade, dada uma sucessão arbitrária $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, basta considerar a sucessão $(y'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde $y'_i = y_1 \vee \ldots \vee y_i$, observar que esta é crescente e que $\bigvee\limits_{j \in \mathbb{N}} y_j = \bigvee\limits_{i \in \mathbb{N}} y'_i$. Para assegurar a completude, é suficiente assegurar que existe o supremo (ou, alternativamente, o ínfimo) de todo o subconjunto.

Um **reticulado** L é **distributivo** se $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, para quaisquer $x, y, z \in L$, ou, equivalentemente, se $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definição 1.2. Seja L um reticulado.

1. Dois elementos $x,y \in L$ dizem-se **disjuntos** em L se $x \wedge y = 0_L$. Dois elementos $x,y \in L$ disjuntos que também verifiquem $x \vee y = 1_L$ dizem-se **complementos** um do outro e cada um deles diz-se um **elemento complementado**.

2. Chama-se **pseudocomplemento** de um elemento $a \in L$, e denota-se por a^*, ao maior elemento b em L disjunto de a, se tal elemento existir. Quando existe a^*, diz-se que a é um elemento **pseudocomplementado**.

O complemento de um elemento complementado $a \in L$ denotar-se-á por a^c. Nem todo o elemento de L é necessariamente complementado ou pseudocomplementado. No entanto, existindo pseudocomplemento, por definição, este é único. E, num reticulado distributivo, como todo o complemento é um pseudocomplemento, obtém-se que os complementos, quando existem, também são únicos.

Definição 1.3. Um reticulado distributivo cujos elementos são todos complementados designa-se por **álgebra de Boole**, ou **álgebra booleana**.

Outros elementos especiais de L que importa destacar são os chamados elementos primos.

Definição 1.4. Seja L um reticulado distributivo e $p \neq 1_L$ um elemento de L. Diz-se que p é um **elemento primo** em L se, para $a,b \in L$, $a \wedge b = p$ implica que $a = p$ ou $b = p$.

Definição 1.5. Seja L um reticulado e A um subconjunto não vazio de L.

1. A é um **subconjunto dirigido** se, para quaisquer $x,y \in A$, existe $z \in A$, tal que $x \leq z$ e $y \leq z$;

2. A é um **subconjunto filtrado** se, para quaisquer $x,y \in A$, existe $z \in A$, tal que $z \leq x$ e $z \leq y$.

Definição 1.6. Um **filtro**, num reticulado L, é um subconjunto F de L que verifica:

1. $1_L \in F$;

2. $\forall a,b \in L : a,b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$;

3. $\forall a,b \in L : a \in F$ e $a \leq b \Rightarrow b \in F$.

Caso F satisfaça ainda $\bigwedge F \neq 0_L$, F é um **filtro fixo**; caso contrário, F é um **filtro livre**.

Seja F um filtro próprio num reticulado L, isto é, um filtro diferente de L. Se, para quaisquer $a,b \in L$, $a \vee b \in F$ implica que $a \in F$ ou $b \in F$, diz-se que F é um **filtro primo**. Se a condição anterior puder ser fortalecida, verificando-se que, para qualquer sucessão $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em L, $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} a_i \in F$ implica que existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $a_j \in F$, diz-se que F é um **filtro σ-primo**.

A um filtro próprio F que não esteja contido em nenhum filtro próprio maior do que ele chama-se **filtro maximal**. Numa álgebra booleana, os filtros maximais coincidem com os filtros primos e designam-se por **ultrafiltros**.

Dado um reticulado sup-σ-completo L, se existir um subconjunto B de L, tal que todo o elemento $x \in L$ se possa escrever como um supremo numerável de elementos de B, diz-se que B é uma **base em**

L. Analogamente, no caso de L ser um reticulado completo, para $B \subseteq L$ ser uma base em L, é apenas requerido que todo o elemento de L se possa escrever como um supremo de elementos de B.

Por fim, observe-se em que condições é que os reticulados sup-σ-completos coincidem com os reticulado completos.

Definição 1.7. Seja L um reticulado sup-σ-completo. Diz-se que L satisfaz a propriedade da subcobertura numerável, ou que é **fortemente de Lindelöf**, se, para todo o subconjunto $S \subseteq L$, existe um subconjunto $T \subseteq S$ numerável, tal que, para todo o $s \in S$, $s \leq \bigvee T$.

Proposição 1.8. *Todo o reticulado sup-σ-completo L fortemente de Lindelöf é um reticulado completo. Mais: para qualquer subconjunto $S \subseteq L$, tem-se que $\bigvee S = \bigvee T$, onde T é o subconjunto numerável de S dado pela propriedade da subcobertura numerável.*

Demonstração. Seja L um reticulado sup-σ-completo fortemente de Lindelöf. Seja ainda S um subconjunto arbitrário de L. Dado L ser fortemente de Lindelöf, existe $T \subseteq S$ numerável, tal que, para todo o $s \in S$, $s \leq \bigvee T$. Mostre-se que $\bigvee S = \bigvee T$.

Para cada $s \in S$, $s \leq \bigvee T$. Seja agora $a \in L$, tal que $s \leq a$, para todo o $s \in S$. Então, em particular, e uma vez que $T \subseteq S$, tem-se que $z \leq a$, para todo o $z \in T$, o que implica que $\bigvee T \leq a$. Assim, por definição de supremo, não só se obtém que $\bigvee S$ existe, como também que $\bigvee S = \bigvee T$. □

Uma condição suficiente para um reticulado sup-σ-completo ser fortemente de Lindelöf é a existência de uma base numerável.

Proposição 1.9. *Todo o reticulado sup-σ-completo com uma base numerável é fortemente de Lindelöf.*

Demonstração. Seja L um reticulado sup-σ-completo com uma base numerável B. Seja ainda S um subconjunto de L. Como B é uma base numerável em L, para todo o $x \in L$, existe $A_x \subseteq B$, tal que $x = \bigvee A_x$. Defina-se $C^S = \bigcup_{s \in S} A_s$.

Uma vez que $C^S \subseteq B$ e B é numerável, C^S é numerável. Suponha-se que C^S é infinito numerável e escreva-se C^S na forma $C^S = \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. No caso de C^S ser finito e ter cardinal $k \in \mathbb{N}$, basta proceder de modo análogo, considerando apenas os índices $i \in \{1, ..., k\}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $z_i \in \{s \in S : c_i \in A_s\}$. Como $Z^S := \{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está em bijeção com $C^S = \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, Z^S é numerável. Para além disso, $Z^S \subseteq S$ e, para todo o $s \in S$, $s = \bigvee A_s \leq \bigvee C^S \leq \bigvee Z^S$, visto que $A_s \subseteq C^S$ e que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $c_i \leq z_i$.

Assim, provou-se que, para todo o $S \subseteq L$, existe $Z^S \subseteq S$ numerável, tal que $s \leq \bigvee Z^S$, o que significa que L é fortemente de Lindelöf. □

Para terminar, se uma aplicação $f : L \longrightarrow L'$ entre reticulados preservar a relação de ordem, diz-se que f é uma **aplicação monótona**. Um par de aplicações monótonas $f : L \longrightarrow L'$ e $g : L' \longrightarrow L$ é uma **adjunção de Galois** se, para todo o $x \in L$ e todo o $y \in L'$, $f(x) \leq y$ se e só se $x \leq g(y)$. Nesta situação, f é adjunta de Galois à esquerda de g e g é adjunta de Galois à direita de f. Existindo a adjunta de Galois de uma aplicação, seja à esquerda ou à direita, esta é única e, para uma aplicação monótona f ser adjunta de Galois à esquerda (resp. direita) de alguma outra aplicação, f preservar todos os supremos (resp. ínfimos) é uma condição necessária e suficiente.

1.2. Medidas em reticulados

Pretende-se, agora, definir um conceito de medida em reticulados sup-σ-completos.

Tradicionalmente, o conceito de medida é apenas reservado para as álgebras booleanas sup-σ-completas, onde é definido como uma função σ-aditiva $\nu : L \longrightarrow [0,\infty]$ que verifica $\nu(0_L) = 0$, não existindo, por isso, uma definição convencional de medida para um reticulado sup-σ-completo arbitrário.

Definição 1.10. Seja L um reticulado sup-σ-completo. Uma **função** $\nu : L \longrightarrow [0,\infty]$ diz-se **σ-aditiva** se, para qualquer sucessão $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos dois a dois, satisfaz $\nu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(x_i)$.

Contudo, recordando que o objetivo deste texto é, seguindo a ideia de A. Simpson [12], estender a definição tradicional de medida a um contexto mais amplo, adotar-se-á o seguinte conceito, que, usualmente, se designa por "σ–valuações contínuas"(ver [12]), para definir uma medida num reticulado sup-σ-completo.

Definição 1.11. Uma **medida num reticulado sup-σ-completo** L é uma função $\mu : L \longrightarrow [0,\infty]$ que satisfaz:

1. $\mu(0_L) = 0$;
2. $\forall x,y \in L : x \leq y \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(y)$; (monotonia)
3. $\forall x,y \in L, \mu(x)+\mu(y) = \mu(x\vee y)+\mu(x\wedge y)$; (modularidade)
4. $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L : x_i \leq x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x_i)$. ($\sigma$-continuidade)

Em seguida, provar-se-á que esta definição, restringida a álgebras booleanas sup-σ-completas, é equivalente à definição convencional.

Proposição 1.12. *Se L é um reticulado sup-σ-completo distributivo, então qualquer medida em L é σ-aditiva.*

Demonstração. Seja L um reticulado sup-σ-completo distributivo e seja ainda $\mu : L \longrightarrow [0,\infty]$ uma medida em L. Considere-se uma sucessão $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos dois a dois em L. Para $n \in \mathbb{N}$ e $J = \{1,...,n\}$, mostra-se, por indução sobre n, que $\mu\big(\bigvee_{i\in J} x_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)$, aplicando a modularidade de μ aos elementos $x_1 \vee \cdots \vee x_{n-1}$ e x_n e observando que, por L ser distributivo e os elementos disjuntos dois a dois, $(x_1 \vee \cdots \vee x_{n-1}) \wedge x_n = 0_L$. Consequentemente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu\big(x_1 \vee \ldots \vee x_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu\big(x_1 \vee \ldots \vee x_n\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i).$$

Defina-se, agora, $y_n = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. A sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, pela monotonia de μ, $(\mu(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sucessão crescente e, recordando que o limite de uma sucessão crescente é igual ao seu supremo e que μ é σ-contínua, notando ainda que $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, vem

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(x_1 \vee \ldots \vee x_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(y_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(y_n) = \mu\big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n\big) = \mu\big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n\big).$$

Desta forma, conclui-se que $\mu\big(\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(x_i)$. □

Para $n \in \mathbb{N}$, se $x_1,...,x_n \in L$ forem elementos disjuntos dois a dois e μ for uma medida σ-aditiva, então $\mu(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i)$.

Proposição 1.13. *Se L é uma álgebra booleana sup-σ-completa, então $\mu : L \longrightarrow [0,\infty]$ é uma medida se e só se é uma função σ-aditiva com $\mu(0_L) = 0$.*

Demonstração. Seja L uma álgebra booleana sup-σ-completa. Comece-se por supôr que μ é uma medida. Então, como L é, em particular, um reticulado sup-σ-completo distributivo, pela proposição I.1.12, μ é σ-aditiva.

Por outro lado, suponha-se que μ é σ-aditiva, com $\mu(0_L) = 0$. Sejam $x,y \in L$, tais que $x \leq y$, e considere-se x^c e y^c. Note-se que $x \vee (y \wedge x^c) = (x \vee y) \wedge (x \vee x^c) = y$ e $x \wedge (y \wedge x^c) = y \wedge (x \wedge x^c) = 0_L$, decorrendo, desta última igualdade, que x e $y \wedge x^c$ são disjuntos. Logo, dado μ ser não negativa e σ-aditiva, tem-se

$$\mu(x) \leq \mu(x) + \mu(y \wedge x^c) = \mu(x \vee (y \wedge x^c)) = \mu(y),$$

ou seja, μ é uma aplicação monótona.

Sejam agora $x,y \in L$ arbitrários. Se x e y são disjuntos, como $\mu(x \wedge y) = \mu(0_L) = 0$ e, pela σ-aditividade de μ, $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y)$, tem-se $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$. Se x e y não são disjuntos, observando que $x \vee y = x \vee (y \wedge x^c)$ e $x \wedge (y \wedge x^c) = 0_L$, vem

$$\mu(x \vee y) = \mu(x \vee (y \wedge x^c)) = \mu(x) + \mu(y \wedge x^c).$$

Mais: como $(y \wedge x^c) \wedge (y \wedge x) = 0_L$ e $(y \wedge x^c) \vee (y \wedge x) = y$,

$$\mu(y \wedge x^c) + \mu(y \wedge x) = \mu((y \wedge x^c) \vee (y \wedge x)) = \mu(y).$$

Ora, se $\mu(x \wedge y) = \infty$, pela monotonia de μ, $\mu(x) = \mu(y) = \mu(x \vee y) = \infty$ e, consequentemente, é imediato que $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$. Caso $\mu(x \wedge y) < \infty$, então pode escrever-se $\mu(y \wedge x^c) = \mu(y) - \mu(y \wedge x)$ e, portanto, $\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y) - \mu(y \wedge x)$, isto é,

$$\mu(x \vee y) + \mu(y \wedge x) = \mu(x) + \mu(y).$$

Por fim, considere-se uma sucessão crescente $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de L. Sejam ainda $y_1 = x_1$ e $y_i = x_i \wedge x_{i-1}^c$, para cada $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$. Observe-se que $\bigvee\limits_{i\in\mathbb{N}} y_i = \bigvee\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$. De facto, não só $y_i \leq x_i \leq \bigvee\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$, para todo o $i \in \mathbb{N}$, como também, sendo $d \in L$, tal que $y_i \leq d$ para todo o $i \in \mathbb{N}$, atendendo a que $x_1 \leq y_1 \leq d$ e a que, por indução sobre n, é possivel verificar que $x_n \leq d$ (uma vez que $x_n = x_{n-1} \vee y_n$, para $n > 1$), vem que $\bigvee\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i \leq d$.

Para além disso, visto que $y_1 = x_1$ e $y_n = x_n \wedge x_{n-1}^c \wedge \ldots \wedge x_1^c$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pois $(x_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente em L, tem-se que, para $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, y_i e y_j são disjuntos. Deste modo, pela σ-aditividade de μ, pode concluir-se que

$$\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(y_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(y_i).$$

Caso exista $i \in \mathbb{N}$, tal que $\mu(x_i) = \infty$, então $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x_i) = \infty$ e, pela monotonia de μ, também $\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \infty$. Logo, $\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x_i)$.

Se, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\mu(x_i) < \infty$, então $\mu(x_i \wedge x_{i-1}) \leq \mu(x_i) < \infty$ e, para $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu(y_n) = \mu(x_n \wedge x_{n-1}^c) = \mu(x_n) - \mu(x_n \wedge x_{n-1}) = \mu(x_n) - \mu(x_{n-1})$. Portanto, $\sum_{i=1}^{N} \mu(y_i) = \mu(x_N)$ e, consequentemente, como $(\mu(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ é crescente e o limite de uma sucessão crescente é o seu supremo, obtém-se

$$\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \lim_{N\to\infty} \mu(x_N) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x_i). \quad \square$$

Desta maneira, averiguou-se que a definição dada de medida num reticulado sup-σ-completo é uma extensão da definição tradicional.

Visto um reticulado completo ser um reticulado sup-σ-completo, tem-se ainda que a definição de medida num reticulado sup-σ-completo permanece válida em reticulados completos. Portanto, quando, mais adiante, se fizer referência a medidas num reticulado completo, a definição de medida utilizada é a de medida num reticulado sup-σ-completo.

Definição 1.14. Seja μ uma medida num reticulado sup-σ-completo L.

1. Se $\mu(1_L) = 1$, μ é uma **medida de probabilidade**;

2. Se $\mu(1_L) < \infty$, μ é uma **medida finita**;

3. Se existir uma sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} u_i = 1_L$ e $\mu(u_i) < \infty$ para todo o $i \in \mathbb{N}$, μ é uma **medida σ-finita**.

É fácil verificar que, sendo μ uma medida num reticulado sup-σ-completo, μ ser uma medida de probabilidade implica que μ é uma medida finita, o que, por sua vez, implica que μ é uma medida σ-finita. De facto, a primeira implicação é evidente, enquanto a segunda resulta de considerar, por exemplo, a sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, onde $u_1 = 1_L$ e $u_i = 0_L$, para todo o $i > 1$.

Na manipulação de medidas, a aritmética será realizada em $[0, \infty]$. Para evitar ambiguidades, convencionar-se-á que a subtração $x - x'$ se escreverá apenas nos casos em que $x' < x$ e $x' < \infty$.

Em seguida, introduzir-se-ão alguns conceitos de continuidade para uma medida μ.

Definição 1.15. Seja μ uma medida num reticulado sup-σ-completo L. A **medida μ** é **estavelmente σ-contínua** se, para qualquer $x \in L$ e qualquer sucessão crescente $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de L,

$$\mu\big(x \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x \wedge y_i).$$

Lema 1.16. *Seja L um reticulado sup-σ-completo e μ uma medida em L. Dada uma sucessão $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ crescente em L, se $\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) < \infty$, então $\mu\big(x \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x\wedge y_i)$, para todo o $x \in L$.*

Demonstração. Antes de mais, comece-se por observar que, pela monotonia de μ, é evidente que $\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) \geq \mu(x\wedge y_j)$, para todo o $j\in\mathbb{N}$.

Para além disso, a σ-continuidade de μ implica que $\sup_{i\in\mathbb{N}}\mu(y_i) = \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) < \infty$. Assim sendo, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n\in\mathbb{N}$, tal que $\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) - \varepsilon < \mu(y_n)$, ou seja, $\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) - \mu(y_n) < \varepsilon$.

Como μ é modular e $y_j \vee \big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) \leq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i$ e $y_j\wedge\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) \leq x\wedge y_j$, vem ainda que $\mu(y_j) + \mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) \leq \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) + \mu(x\wedge y_j)$. Portanto, para cada $\varepsilon>0$, existe $j = n\in\mathbb{N}$, tal que

$$\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) - \mu(x\wedge y_j) \leq \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) - \mu(y_j) = \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) - \mu(y_n) < \varepsilon,$$

o que equivale a dizer, em consequência de $[0,\infty]$ ser um conjunto totalmente ordenado, que $\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge y_i)$, pois $\sup_{i\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge y_i) \leq \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i\big) < \infty$. □

Lema 1.17. *Seja μ uma medida num reticulado sup-σ-completo L. Se existir uma sucessão crescente $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de L tal que:*

1. *Para todo o $i\in\mathbb{N}$, $\mu(u_i) < \infty$;*
2. *Para todo o $z\in L$, $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} (z\wedge u_i) = z$;*
3. *Para toda a sucessão crescente $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em L e todo o $i\in\mathbb{N}$, $u_i\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} z_j\big) = \bigvee_{j\in\mathbb{N}}(u_i\wedge z_j)$;*

então μ é uma medida estavelmente σ-contínua.

Demonstração. Seja $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de elementos de L e $x\in L$. Em virtude de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão crescente, $\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\wedge u_i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ é também uma sucessão crescente. Logo, aplicando, sequencialmente, a hipótese 2, a σ-continuidade de μ e a hipótese 3, vem

$$\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\big) = \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\wedge u_i\big)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\wedge u_i\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}}(y_j\wedge u_i)\big)\big).$$

Atendendo a que, pelas hipóteses 3 e 1, $\mu\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}}(y_j\wedge u_i)\big) = \mu\big(\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\wedge u_i\big) \leq \mu(u_i) < \infty$, pode aplicar-se o Lema I.1.16 e obter-se $\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}}(y_j\wedge u_i)\big)\big) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge(y_j\wedge u_i))$. Assim,

$$\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge(y_j\wedge u_i)) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge(y_j\wedge u_i))$$

e, por conseguinte, como, para j fixo, $(x\wedge u_i\wedge y_j)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente, de novo pela σ-continuidade de μ e pela hipótese 2,

$$\mu\big(x\wedge\big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} y_j\big)\big) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(x\wedge u_i\wedge y_j)\big) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\mu(x\wedge y_j). \quad \square$$

Por vezes, nos reticulados completos, pode encontrar-se ainda um requisito de continuidade mais forte que a σ-continuidade: o de continuidade.

Definição 1.18. Seja L um reticulado completo e μ uma medida em L. A **medida** μ é **contínua** se, para todo o subconjunto dirigido D de L, satisfaz $\mu(\bigvee D) = \sup_{x\in D} \mu(x)$.

Proposição 1.19. *Toda a medida num reticulado sup-σ-completo fortemente de Lindelöf é contínua.*

Demonstração. Seja L um reticulado sup-σ-completo fortemente de Lindelöf e μ uma medida em L. Comece-se por ver que, como um reticulado sup-σ-completo fortemente de Lindelöf é um reticulado completo, faz sentido considerar o conceito de continuidade. Seja D um subconjunto dirigido de L.

Por um lado, uma vez que, para todo o $x \in D$, $x \leq \bigvee D$ e, pela monotonia de μ, $\mu(x) \leq \mu(\bigvee D)$, vem

$$\sup_{x\in D} \mu(x) \leq \mu(\bigvee D).$$

Por outro lado, observe-se que, dado L ser fortemente de Lindelöf, existe $T \subseteq D$ numerável, tal que $\bigvee D = \bigvee T$. Escreva-se, sem perda de generalidade, o conjunto T na forma $T = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (no caso de T ser finito, $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$, onde $k \in \mathbb{N}$, basta considerar $x_i = x_k$, para $i > k$). Defina-se $y_1 = x_1$ e, para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, seja $y_n \in D$, tal que $y_{n-1} \leq y_n$ e $x_n \leq y_n$. A existência de y_n é garantida por T estar contido em D e D ser um subconjunto dirigido de L. A sucessão obtida, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, será uma sucessão crescente e, pela forma como foi definida, é fácil ver que também $\bigvee T = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i \leq \bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i$. Assim, pela monotonia e σ-continuidade de μ, vem

$$\mu(\bigvee D) = \mu(\bigvee T) = \mu(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i) \leq \mu(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} y_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(y_i) \leq \sup_{x\in D} \mu(x),$$

onde a última desigualdade resulta de $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão de elementos em D. $\square$

Neste texto, o conceito de continuidade não será relevante, tendo mais relevância o seu conceito dual, isto é, o conceito de co-continuidade.

Definição 1.20. Seja L um reticulado completo e seja ainda μ uma medida em L.

1. Dado um subconjunto filtrado $C \subseteq L$, se $\mu(\bigwedge C) = \inf_{x\in C} \mu(x)$, diz-se que μ é uma **medida co-contínua em** C;
2. A **medida** μ é **co-contínua** se for co-contínua em todos os subconjuntos filtrados de L.

No contexto em que será utilizado, verificar-se-á que a co-continuidade de uma medida poderá falhar, por poder existir algum subconjunto filtrado onde ela não se verifique. Não obstante, poder-se-á garantir que a medida a ser construída será co-contínua em todos os subconjuntos filtrados de medida finita.

Definição 1.21. Seja L um reticulado sup-σ-completo e μ uma medida em L. Um subconjunto $C \subseteq L$ é de **medida finita relativamente a** μ, ou μ**-finito**, se existir $x \in C$, tal que $\mu(x) < \infty$.

Observe-se que, dado um reticulado sup-σ-completo L e uma medida μ em L, um subconjunto $C \subseteq L$ é μ-finito se e só se $\inf_{x\in C} \mu(x) < \infty$.

2. Frames e locales

Recordem-se agora alguns conceitos e resultados da teoria de *frames* e *locales*, tomando como referência a abordagem à topologia sem pontos realizada em [11].

2.1. Conceitos fundamentais

Definição 2.1. Designa-se por **frame**, um reticulado completo X que verifique a lei distributiva

$$\big(\bigvee_{a\in A} a\big)\wedge b = \bigvee_{a\in A}(a\wedge b),$$

para qualquer subconjunto $A\subseteq X$ e qualquer $b\in X$.

Dados dois *frames* X e Y, uma aplicação $h : X \longrightarrow Y$ que preserve supremos arbitrários e ínfimos finitos chama-se um **homomorfismo de *frames***.

É fácil verificar que todo o *frame* X é um reticulado completo munido com uma operação de Heyting, isto é, com uma operação binária $\to$ bem definida que, para quaisquer $a,b,c\in X$, satisfaz $c\le a\to b$ se e só se $c\wedge a\le b$. No entanto, os homomorfismos de *frames* não preservam necessariamente a operação de Heyting.

Os *frames* e homomorfismos de *frames*, com a lei de composição usual de aplicações, constituem uma categoria, que será denotada por *Frm*. A categoria dual de *Frm*, denotada por *Loc*, é designada por **categoria dos *locales*** e não só os seus objetos se chamam ***locales***, como também, os seus morfismos, **aplicações locálicas**.

Dado os homomorfismos de *frames* serem aplicações monótonas que preservam todos os supremos, tem-se que todo o morfismo em *Frm* tem uma adjunta de Galois à direita, que será única. Isto motiva a se representarem as aplicações locálicas como as aplicações adjuntas de Galois à direita dos homomorfismos de *frames*, isto é, como as aplicações monótonas que preservam ínfimos arbitrários e cujas adjuntas de Galois à esquerda preservam ínfimos finitos. Relativamente à notação, dado um morfismo f em Frm, denotar-se-á o morfismo em *Loc* que lhe corresponde por f_* e, inversamente, dado um morfismo h em *Loc*, denotar-se-á o morfismo em Frm que lhe corresponde por h^*.

Do facto de se caracterizar uma aplicação locálica f como a adjunta de Galois à direita de algum homomorfismo de *frames* f^*, obtém-se a seguinte descrição de uma aplicação locálica.

Proposição 2.2. *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ entre locales é uma aplicação locálica se e só se*

1. $f(\bigwedge_{a\in A} a) = \bigwedge_{a\in A} f(a)$, *para todo o subconjunto* $A\subseteq X$;
2. $f(a) = 1$ *implica* $a = 1$;
3. $f(f^*(a)\to b) = a\to f(b)$, *para quaisquer* $a\in Y, b\in X$.

Quando o reticulado dual de um reticulado X for um *frame*, diz-se que o reticulado X é um ***co-frame***. Uma aplicação entre *co-frames* é um **homomorfismo de *co-frames*** se preservar ínfimos arbitrários e supremos finitos.

Considere-se o reticulado completo $\mathbb{P} = \{0 < 1\}$, constituído por exatamente dois elementos. Verifica-se facilmente que $\mathbb{P}$ é um *locale*. Dado um *locale* arbitrário X, define-se um **ponto** em

X como uma aplicação locálica de $\mathbb{P}$ para X, ou seja, um homomorfismo de *frames* de X para $\mathbb{P}$. Equivalentemente, pode também definir-se um ponto no *locale* X como um elemento primo (recorde-se a Definição I.1.4) no reticulado associado ao *locale* X.

Definição 2.3. Seja X um *locale*. Um subconjunto $S \subseteq X$ é um ***sublocale*** de X se é fechado para ínfimos arbitrários e se, para todo o $s \in S$ e todo o $x \in X$, $x \to s \in S$.

Observe-se que $S \subseteq X$ é um *sublocale* de X se e só se S é um *locale* para a relação de ordem induzida por X e a aplicação inclusão $j : S \longrightarrow X$ é uma aplicação locálica. Como S é fechado para ínfimos em X, os ínfimos em S coincidem com os ínfimos em X; no entanto, os supremos em S são, em geral, diferentes dos supremos em X. Também por definição de *sublocale*, $1_X = \inf \emptyset$ pertence a todos os *sublocales* de X. Logo, não existem *sublocales* vazios, sendo $\mathbb{0} = \{1_X\}$ o *sublocale* mais pequeno de X (no sentido de inclusão).

Seja $\mathcal{S}(X)$ o conjunto de todos os *sublocales* de X. Atendendo a que a interseção arbitrária de *sublocales* é ainda um *sublocale* de X, $\mathcal{S}(X)$, munido com a relação de ordem inclusão, será um reticulado completo. Denote-se, respetivamente, por $\mathbb{0}$ e $\mathbb{1}$, o menor e maior elemento de $\mathcal{S}(X)$.

Proposição 2.4. *Seja X um locale. $\mathcal{S}(X)$, munido com a relação de ordem inclusão, é um co-frame, onde $\mathbb{0} = \{1_X\}$, $\mathbb{1} = X$ e, para um conjunto de índices I não vazio e uma família $\{S_i\}_{i\in I}$ em $\mathcal{S}(X)$,*

$$\bigwedge_{i\in I} S_i = \bigcap_{i\in I} S_i \quad e \quad \bigvee_{i\in I} S_i = \{\bigwedge A : A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i\}.$$

A um *sublocale* de X da forma $o(a) = \{a \to x : x \in X\}$, para algum $a \in X$, chama-se ***sublocale* aberto** definido pelo elemento $a \in X$, e a um *sublocale* de X da forma $c(a) = \{x \in X : a \leq x\}$, chama-se ***sublocale* fechado** definido pelo elemento $a \in X$. Para cada $a \in X$, os *sublocales* $o(a)$ e $c(a)$ são complementos um do outro em $\mathcal{S}(X)$.

Alternativamente, dado um *locale* X, um *sublocale* de X também se pode representar por uma **relação de congruência no *locale*** X, isto é, por uma relação de equivalência E em X que preserva ínfimos finitos e supremos arbitrários, ou seja, que, para qualquer conjunto de índices I e quaisquer elementos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_i,y_i) \in E$, para $i \in I$, satisfaz $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in E$ e $(\bigvee_{i\in I} x_i, \bigvee_{i\in I} y_i) \in E$. Nesta representação, os *sublocales* abertos e os *sublocales* fechados de X definidos por um elemento $a \in X$ serão dados, respetivamente, pelas congruências

$$\Delta_a = \{(x,y) \in X \times X : a \wedge x = a \wedge y\} \;\text{ e }\; \nabla_a = \{(x,y) \in X \times X : a \vee x = a \vee y\}.$$

Definição 2.5. Seja X um *locale*.

1. Dado um *sublocale* $S \in \mathcal{S}(X)$, o **fecho de** S **em** X é o menor *sublocale* fechado de X que contém S. Será denotado por $\overline{S}^X$, ou, simplesmente, por $\overline{S}$, quando não houver ambiguidade.

2. Um *sublocale* S de X diz-se **denso em** X, se $\overline{S}^X = X$.

Seja S um *sublocale* de X. Atendendo a se ter que $\overline{S} = \{x \in X : \bigwedge S \leq x\}$, S é um *sublocale* denso em X se e só se $0_X \in S$. Para além disso, o menor *sublocale* de X que contém um elemento $a \in X$ é dado por

$$b(a) := \{x \to a : x \in X\}.$$

Consequentemente, pode assegurar-se a existência do menor *sublocale* denso em X.

Proposição 2.6 (Teorema de Isbell da densidade [9])**.** *Seja X um locale. Então o menor sublocale denso em X existe e é dado por $b(0_X)$.*

O resultado anterior é uma característica fundamental da topologia sem pontos, que não tem contraponto na topologia clássica. Mais adiante, no capítulo IV, será esta propriedade que terá uma participação decisiva, quando se discutirem as vantagens de abordar a teoria da medida através da categoria dos σ-*locales* e o porquê desta abordagem evitar as contradições usuais.

Proposição 2.7. *Seja X um locale. Para qualquer subconjunto $A \subseteq X$, o menor sublocale de X que contém A é dado pelo supremo $< A >:= \bigvee\{b(a) : a \in A\}$. No caso particular de A ser um sublocale de X, tem-se que $A = \bigvee\{b(a) : a \in A\} = \bigcup\{b(a) : a \in A\}$.*

Por fim, recordem-se algumas propriedades de separação associadas a *locales* [11].

Definição 2.8. Um ***locale*** X diz-se **adequado** se, para quaisquer $a, b \in X$, $a \nleq b$ implica que existe $c \in X$, tal que $a \vee c = 1_X$ e $c \to b \nleq b$.

Proposição 2.9. *Seja X um locale. São equivalentes:*

1. *X é um locale adequado;*

2. *Todo o sublocale de X se pode escrever como uma interseção de sublocales abertos;*

3. *Todo o sublocale fechado de X se pode escrever como uma interseção de sublocales abertos.*

Diz-se ainda que um *locale* X é de **dimensão zero** se tiver uma base de elementos complementados em X (isto é, se existe um subconjunto $B \subseteq X$ de elementos complementados, tal que qualquer elemento $x \in X$ se possa escrever como um supremo de elementos de B); e que X é **regular** se, para cada $x \in X$, x se pode escrever como um supremo de elementos do conjunto $\sigma(x) := \{a \in X : a \prec x\}$, onde $a \prec x$ se e só se existe $d \in X$ tal que $a \wedge d = 0_X$ e $d \vee x = 1_X$.

2.2. Sublocales induzidos

Considere-se o functor $\Omega : Top \longrightarrow Frm$, onde, para qualquer espaço topológico X, $\Omega(X)$ é o reticulado dos abertos de X e, para qualquer aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, $\Omega(f) : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ é definido por $\Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$, para todo o aberto U em Y.

Seja X um espaço topológico T_0 e Y um subespaço de X. Então a inclusão $j : Y \longrightarrow X$ está associada ao homomorfismo de *frames* sobrejetivo $\Omega(j) : \Omega(X) \longrightarrow \Omega(Y)$, onde $\Omega(j)(U) = U \cap Y$, para qualquer $U \in \Omega(X)$. Uma vez que, para quaisquer $U \in \Omega(X)$ e $V \in \Omega(Y)$,

$$\Omega(j)(U) \subseteq V \Leftrightarrow U \cap Y \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq int((X \backslash Y) \cup V),$$

tem-se que a aplicação locálica associada a $\Omega(j)$ é a aplicação $k : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$, definida por $k(V) = int((X \backslash Y) \cup V)$ para todo o $V \in \Omega(Y)$.

Assim sendo, e atendendo à imagem de um *sublocale* por uma aplicação locálica ser ainda um *sublocale*, obtém-se que o subespaço Y é representado pelo *sublocale*

$$S_Y = k[\Omega(Y)] = \{k(V) : V \in \Omega(Y)\} = \{int((X \backslash Y) \cup (U \cap Y)) : U \in \Omega(X)\}.$$

Definição 2.10. Seja X um espaço topológico T_0 e Y um subespaço de X. Chama-se ***sublocale* induzido por** Y em $\mathcal{S}(\Omega(X))$ ao *sublocale*

$$S_Y = \{int((X\backslash Y) \cup (U \cap Y)) : U \in \Omega(X)\}.$$

Definindo $p_{X,x} = X\backslash\overline{\{x\}}$, para todo o $x \in X$, tem-se ainda que $S_Y = \bigvee_{y \in Y} b(p_{X,y})$; ou seja, que S_Y é o menor *sublocale* de $\Omega(X)$ que contém os abertos $p_{X,y}$, para $y \in Y$ (ver [2]).

A correspondência $Y \to S_Y$ leva subespaços densos em *sublocales* densos e subespaços associados a subconjuntos abertos (resp. fechados) a *sublocales* abertos (resp. fechados).

Proposição 2.11. *Seja X um espaço topológico T_0 e Y um subespaço de X.*

1. *Se Y é um subconjunto aberto de X, então $S_Y = o(Y)$;*

2. *Se Y é um subconjunto fechado de X, então $S_Y = c(X\backslash Y)$;*

3. *Se Y é um subespaço denso de X, então S_Y é um sublocale denso de $\Omega(X)$.*

Demonstração. 1. Antes de mais, observe-se que $Y \to V = \bigvee\{C \in \Omega(X) : C \cap Y \subseteq V\}$, pela caracterização da operação de Heyting, e $\bigvee\{C \in \Omega(X) : C \cap Y \subseteq V\} = int((X\backslash Y) \cup (Y \cap V))$, dado $int((X\backslash Y) \cup (Y \cap V))$ ser o elemento máximo do conjunto $\{C \in \Omega(X) : C \cap Y \subseteq V\}$. Logo, é imediato que $o(Y) = \{Y \to V : V \in \Omega(X)\} = \{int((X\backslash Y) \cup (Y \cap V)) : V \in \Omega(X)\} = k[\Omega(Y)] = S_Y$.

2. Seja $W \in S_Y$. Então existe $U \in \Omega(X)$, tal que $W = int((X\backslash Y) \cup (U \cap Y))$ e, consequentemente, $X\backslash W = X\backslash int((X\backslash Y) \cup (U \cap Y)) = cl(X\backslash((X\backslash Y) \cup (U \cap Y))) = cl(Y \cap (X\backslash(U \cap Y))) \subseteq Y$. Assim, tem-se que $X\backslash W \subseteq Y$, o que implica que $X\backslash Y \subseteq W$ e, portanto, $W \in c(X\backslash Y)$.

Por outro lado, seja $W \in c(X\backslash Y)$. Visto que $(X\backslash Y) \cup W = W$, $(X\backslash Y) \cup Y = X$ e $\Omega(X)$ é um reticulado distributivo, tem-se que $W = W \cap X = ((X\backslash Y) \cup W) \cap ((X\backslash Y) \cup Y) = (X\backslash Y) \cup (W \cap Y)$.

Deste modo, como W é aberto, $(X\backslash Y) \cup (W \cap Y)$ também é aberto, obtendo-se finalmente que $W = (X\backslash Y) \cup (W \cap Y) = int((X\backslash Y) \cup (W \cap Y)) \in S_Y$.

3. Basta verificar que $0_{\Omega(X)} = \emptyset \in S_Y$. No entanto, como Y é um subespaço denso de X, $\emptyset \in \Omega(Y)$ e $S_Y = k[\Omega(Y)]$, vem imediatamente que $\emptyset = int(X\backslash Y) = int((X\backslash Y) \cup \emptyset) = k(\emptyset) \in k[\Omega(Y)] = S_Y$. □

A **representação** $Y \to S_Y$ diz-se **precisa** se for uma correspondência bijetiva entre os subespaços de X e os *sublocales* induzidos por subespaços de X. Uma condição necessária e suficiente para a representação $Y \to S_Y$ ser precisa é X verificar o axioma de separação T_D (ver [11]). (Recorde-se que um espaço topológico X satisfaz o axioma T_D se, para cada $x \in X$, existe um aberto U, tal que $x \in U$ e $U\backslash\{x\}$ também é um aberto.)

Assim sendo, se X for T_D, e uma vez que o conjunto das partes de X está em bijeção com o conjunto de todos os subespaços de X, a aplicação $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega(X))$ definida por $\varphi(Y) = S_Y$ é injetiva e, portanto, $\mathcal{P}(X)$ pode ser visto como estando contido em $\mathcal{S}(\Omega(X))$, isto é, pode considerar-se que o *co-frame* dos *sublocales* de $\Omega(X)$ contém, em particular, os subconjuntos de X.

Proposição 2.12. *Seja X um espaço topológico que satisfaça o axioma T_D e, para cada subespaço Y de X, seja S_Y o sublocale induzido por Y. A aplicação $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega(X))$, definida por $\varphi(Y) = S_Y$, é uma aplicação injetiva que preserva supremos arbitrários, mas não preserva ínfimos finitos.*

Capítulo II

σ-Frames e σ-locales

Na prática, fazer teoria da medida dentro da categoria dos *locales* seria a situação ideal. No entanto, por motivos técnicos, a abordagem a ser desenvolvida no Capítulo IV será realizada através da categoria dos σ-*locales*, que é um universo mais abrangente do que o primeiro e que resulta de se enfraquecer o conceito de *locale*. Nesse sentido, este capítulo será dedicado ao estudo de σ-*locales*.

1. Conceitos fundamentais

Definição 1.1. Chama-se ***σ-frame***, a um reticulado sup-σ-completo L que satisfaça a lei distributiva

$$\Big(\bigvee_{a\in A} a\Big)\wedge b = \bigvee_{a\in A}(a\wedge b),$$

para qualquer subconjunto numerável $A\subseteq L$ e qualquer $b\in L$. Uma aplicação entre σ-*frames* que preserve supremos numeráveis e ínfimos finitos designa-se por **homomorfismo de *σ-frames***.

Em particular, um homomorfismo de σ-*frames*, $h: L\longrightarrow M$, também preserva o supremo e o ínfimo do conjunto vazio, ou seja, $h(0_L)=0_M$ e $h(1_L)=1_M$.

Os σ-*frames* e homomorfismos de σ-*frames* constituem uma categoria que será denotada por σ-*Frm*, e *Frm* é uma subcategoria não plena de σ-*Frm*.

Definição 1.2. Um reticulado L é um ***co-σ-frame*** se o seu reticulado dual, L^{op}, for um σ-*frame*.

A categoria dual de σ-*Frm*, σ-*Frm*^{op}, é chamada **categoria dos *σ-locales*** e denotar-se-á por σ-*Loc*. Os seus objetos são designados por ***σ-locales*** e os seus morfismos, por **aplicações σ-locálicas**.

Como objetos das suas respetivas categorias, os σ-*frames* e os σ-*locales* são estruturas iguais. O que distingue as categorias σ-*Frm* e σ-*Loc* são os seus morfismos, tendo-se σ-*Loc*$(L,M)=$ σ-*Frm*(M,L)[1]. Posto isto, dada uma aplicação σ-locálica $f: L\longrightarrow M$, representar-se-á por $f^*: M\longrightarrow L$ o homomorfismo de σ-*frames* que lhe corresponde.

A proposição seguinte aborda algumas caracterizações dos morfismos em σ-*Frm* e σ-*Loc*. A sua demonstração pode ser obtida generalizando a demonstração das correspondentes caracterizações em *Frm* e *Loc* encontradas em [11].

[1]Dada uma categoria $\mathcal{C}$ e dois objetos A,B de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A,B)$ representa o conjunto dos morfismos de A para B.

Proposição 1.3. *1. Os monomorfismos em σ-Frm (resp. epimorfismos em σ-Loc) são precisamente os homomorfismos de σ-frames injetivos (resp. as aplicações σ-locálicas, cujos correspondentes homomorfismos de σ-frames são injetivos);*

2. *Os isomorfismos em σ-Frm (resp. isomorfismos em σ-Loc) são precisamente os homomorfismos de σ-frames injetivos e sobrejetivos (resp. as aplicações σ-locálicas, cujos correspondentes homomorfismos de σ-frames são bijetivos);*

3. *Os epimorfismos extremais em σ-Frm (resp. monomorfismos extremais em σ-Loc) são precisamente os homomorfismos de σ-frames sobrejetivos (resp. as aplicações σ-locálicas, cujos correspondentes homomorfismos de σ-frames são sobrejetivos).*

Definição 1.4. Designar-se-á por **ponto de um *σ-locale*** X, uma aplicação σ-locálica de $\mathbb{P}$ para X, ou seja, um homomorfismo de *σ-frames* de X para $\mathbb{P}$, onde $\mathbb{P} = \{0 < 1\}$ é o *σ-locale* com exatamente dois elementos. O conjunto de todos os pontos de um *σ-locale* X denotar-se-á por $\Sigma(X)$.

Finalmente, um conceito fundamental a apresentar é o conceito de *sub-σ-locale*. Comece-se por analisar o que é uma imersão entre *σ-locales*.

Definição 1.5. Uma aplicação σ-locálica $f : Y \longrightarrow X$ é uma **imersão** em X, se o homomorfismo de *σ-frames* f^* for sobrejetivo.

A "parte de X" que uma imersão $f : Y \longrightarrow X$ representa é $Y \equiv f(Y)$. Assim sendo, dadas duas imersões f_1, f_2, se existir um isomorfismo ϕ, tal que $f_1 \circ \phi = f_2$, tem-se que f_1 e f_2 representam a mesma "parte de X". Logo, uma classe de isomorfismo de uma imersão proporciona uma noção bem comportada de "parte de X". Mas como é possível representá-la de forma mais conveniente?

Dado um *σ-locale* X e uma relação binária E em X, $E \subseteq X \times X$, diz-se que E é uma **congruência no *σ-locale*** X, se E é uma relação de equivalência que preserva supremos numeráveis e ínfimos finitos, isto é, que, para qualquer subconjunto de índices numerável I, satisfaz

$$\forall i \in I : (x_i, y_i) \in E \Longrightarrow \big(\bigvee_{i\in I} x_i, \bigvee_{i\in I} y_i\big) \in E,$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \Longrightarrow (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in E.$$

Proposição 1.6. *Seja X um σ-locale.*

1. *Uma imersão $f : Y \longrightarrow X$ induz a congruência $E_f = \{(x,y) \in X \times X : f^*(x) = f^*(y)\}$ em X;*

2. *Uma congruência E num σ-locale X, $E \subseteq X \times X$, induz a imersão $\varphi_E : {}^{X}\!/_{E} \longrightarrow X$, correspondente ao homomorfismo de σ-frames $\varphi_E^* : X \longrightarrow {}^{X}\!/_{E}$ definido por $\varphi_E^*(x) = [x]$, onde ${}^{X}\!/_{E} = \{[x] : x \in X\}$ e $[x] = \{y \in X : (x,y) \in E\}$;*

3. *A correspondência entre imersões em X e congruências em X não é injetiva; no entanto, dadas duas imersões $h_1 : Y_1 \longrightarrow X$ e $h_2 : Y_2 \longrightarrow X$,*

$$E_{h_2} = E_{h_1} \Leftrightarrow \exists \phi \in Mor(\sigma\text{-}Loc) \text{ isomorfismo } : h_1 \circ \phi = h_2, \text{ isto é, } \phi^* \circ h_1^* = h_2^*.$$

Sendo X um σ-*locale*, ${}^{X}\!/_{E}$, munido com a ordem parcial $\leq_{X/E}$, onde $[x] \leq_{X/E} [y]$ se e só se $(x, x \wedge y) \in E$, é um σ-*locale*. Nesta estrutura, tem-se que

$$[x] \wedge [y] = [x \wedge y] \text{ e } \bigvee_{i \in \mathbb{N}} [a_i] = \left[\bigvee_{i \in \mathbb{N}} a_i \right].$$

Portanto, a classe de isomorfismos de uma imersão em X, que se comporta como uma "parte de X", é bem representada por uma congruência em X. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.7. Um *sub-σ-locale* Y de um σ-*locale* X é representado por meio de uma relação de congruência θ_Y no σ-*locale* X.

Ou seja, dada uma congruência θ_Y em X, esta determinará o *sub-σ-locale* $Y := {}^{X}\!/_{\theta_Y}$, estando associada à imersão canónica $\varphi_{\theta_Y} : {}^{X}\!/_{\theta_Y} \longrightarrow X$ que corresponde ao homomorfismo de σ-*frames* $\varphi^*_{\theta_Y} : X \longrightarrow {}^{X}\!/_{\theta_Y}$, definido por $\varphi^*_{\theta_Y}(x) = [x]_Y$, onde $[x]_Y$ é a classe de equivalência de x em Y.

Observando que qualquer interseção de congruências em X é ainda uma congruência em X, tem-se também que o conjunto de todas as relações de congruência em X, $\mathcal{C}(X)$, munido com a inclusão, $\subseteq^{\mathcal{C}}$, é um reticulado completo.

Neste reticulado, dado um conjunto de congruências $A = \{\theta_i \in \mathcal{C}(X) : i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices arbitrário, o ínfimo de A é igual a $\bigcap_{i \in I} \theta_i$ e o supremo de A é igual a $\langle \theta_i : i \in I \rangle$, onde $\langle \theta_i : i \in I \rangle$ denota a menor congruência em X que contém $\bigcup_{i \in I} \theta_i$. A existência desta congruência é garantida, uma vez que existe sempre pelo menos uma congruência que contém todas as outras, $X \times X$, e qualquer intersecção de congruências é sempre uma congruência.

Atendendo a que ${}^{X}\!/_{\theta_Y} \subseteq {}^{X}\!/_{\theta_Z}$ se e só se toda a classe de equivalência de θ_Y se escrever como uma reunião de classes de equivalência de θ_Z, e a ter-se

$$\left[\theta_Z \subseteq^{\mathcal{C}} \theta_Y\right] \Rightarrow \left[[a]_Z \subseteq [a]_Y, \forall a \in X\right] \Rightarrow \left[\forall a \in X, [a]_Y = \bigcup_{b \in [a]_Y} [b]_Z\right] \Rightarrow \left[{}^{X}\!/_{\theta_Y} \subseteq {}^{X}\!/_{\theta_Z}\right],$$

faz sentido definir-se uma relação de inclusão entre os *sub-σ-locales* de X do seguinte modo.

Definição 1.8. Dados dois *sub-σ-locales* Y e Z de um σ-*locale* X, escreve-se que $Y \subseteq^{\mathcal{S}} Z$, quando $\theta_Z \subseteq^{\mathcal{C}} \theta_Y$, ou seja, quando

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in \theta_Z \Longrightarrow (x, y) \in \theta_Y.$$

O conjunto de todos os *sub-σ-locales* de um σ-*locale* X, munido com a relação de ordem $\subseteq^{\mathcal{S}}$, denotar-se-á por $(\mathcal{S}(X), \subseteq^{\mathcal{S}})$, ou, abreviadamente, apenas por $\mathcal{S}(X)$. Ainda relativamente à notação, escrever-se-á $\mathbb{1} := \inf \emptyset_{\mathcal{S}(X)}$, $\mathbb{0} := \sup \emptyset_{\mathcal{S}(X)}$ e, quando não houver ambiguidade, denotar-se-á a inclusão entre os *sub-σ-locales* por $\subseteq$. O mesmo se aplicará à relação de inclusão entre congruências em σ-*locales*.

2. O frame das congruências

Considere-se o conjunto de todas as congruências num σ-*locale* X, $\mathcal{C}(X)$. Anteriormente, verificou-se que $\mathcal{C}(X)$, munido com a relação de ordem inclusão, é um reticulado completo, uma vez que a interseção arbitrária de congruências é ainda uma congruência. Nesta secção, verificar-se-á que $\mathcal{C}(X)$ terá estrutura de *frame* e destacar-se-ão algumas das suas propriedades gerais, cujas demonstrações podem ser obtidas por generalização das demonstrações dos correspondentes resultados em [7] para congruências em *frames*.

Proposição 2.1. *Para qualquer σ-locale X, o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{C}(X) \equiv (\mathcal{C}(X), \subseteq^{\mathcal{C}})$ é um frame, tendo-se que $0_{\mathcal{C}(X)} = \{(x,x) : x \in X\}$, $1_{\mathcal{C}(X)} = X \times X$ e, dado um conjunto de índices não vazio I e uma família $(\theta_i)_{i\in I}$ de congruências em X, $\bigwedge\limits_{i\in I} \theta_i = \bigcap\limits_{i\in I} \theta_i$ e $\bigvee\limits_{i\in I} \theta_i = \langle \theta_i : i \in I\rangle$, onde $\langle \theta_i : i \in I\rangle$ denota a menor relação de congruência que contém todas as congruências θ_i, para $i \in I$.*

Dado um σ-*locale* X, são também congruências em X os conjuntos $\nabla_a = \{(x,y) : x \vee a = y \vee a\}$ e $\Delta_a = \{(x,y) : x \wedge a = y \wedge a\}$, para qualquer $a \in X$. Mais: para cada $a \in X$, ∇_a e Δ_a serão complementos um do outro em $\mathcal{C}(X)$. Denote-se por $\rho(a,b)$ a menor relação de congruência que contém o par (a,b). Observe-se que $\rho(a,b) = \bigcap\{\theta \in \mathcal{C}(X) : (a,b) \in \theta\}$. Para além disso, também é fácil constatar que $\nabla_1 = \Delta_0 = 1_{\mathcal{C}(X)}$ e $\nabla_0 = \Delta_1 = 0_{\mathcal{C}(X)}$.

Proposição 2.2. *Seja X um σ-locale e sejam ainda $a, b \in X$.*

1. $\nabla_a = \rho(0,a)$;
2. $\Delta_a = \rho(a,1)$;
3. *Para* $a \leq b$, *tem-se* $\rho(a,b) = \rho(a,1) \cap \rho(0,b) = \Delta_a \cap \nabla_b$;
4. *Dado* $\theta \in \mathcal{C}(X)$, *tem-se que* $\theta = \bigvee\{\Delta_a \cap \nabla_b : (a,b) \in \theta, a \leq b\}$.

Algumas propriedades distributivas que importa destacar em $\mathcal{C}(X)$ resumem-se nas proposições seguintes.

Proposição 2.3. *Seja X um σ-locale. Considerem-se ainda $a, b, x_n \in X$, para $n \in \mathbb{N}$.*

1. $\nabla_a \cap \nabla_b = \nabla_{a\wedge b}$;
2. $\bigvee\limits_{i\in\mathbb{N}} \nabla_{x_i} = \nabla_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i}$;
3. $\Delta_a \vee \Delta_b = \Delta_{a\wedge b}$;
4. $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta_{x_i} = \Delta_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i}$.

Proposição 2.4. *Seja X um σ-locale. Considerem-se ainda elementos $a \in X$ e $\theta, \theta_j \in \mathcal{C}(X)$, para $j \in J$, onde J é um conjunto arbitrário de índices.*

1. $\nabla_a \vee \theta = \{(x,y) : (x \vee a, y \vee a) \in \theta\} =: \theta^a$;
2. $\Delta_a \vee \theta = \{(x,y) : (x \wedge a, y \wedge a) \in \theta\} =: \theta_a$;
3. $\nabla_a \vee (\bigcap\limits_{i\in J} \theta_i) = \bigcap\limits_{i\in J} (\nabla_a \vee \theta_i)$;
4. $\Delta_a \vee (\bigcap\limits_{i\in J} \theta_i) = \bigcap\limits_{i\in J} (\Delta_a \vee \theta_i)$.

3. O co-frame dos sub-σ-locales

3.1. Propriedades gerais

É importante agora recordar algumas propriedades padrão dos *sub-σ-locales*, que serão fundamentais para o estudo que se fará mais adiante.

Proposição 3.1. *Para qualquer σ-locale X, o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{S}(X) \equiv (\mathcal{S}(X), \subseteq^{\mathcal{S}})$ é um co-frame, onde $\mathbb{0}$ é o sub-σ-locale representado pela relação de congruência $X \times X$, $\mathbb{1}$ é o sub-σ-locale representado pela relação de congruência $\{(x,x) : x \in X\}$ e, dado um conjunto de índices não vazio I e uma família $(Y_i)_{i\in I}$ de sub-σ-locales de X,*

1. *O sub-σ-locale $\bigvee\limits_{i\in I} Y_i$ é representado pela relação de congruência $\bigcap\limits_{i\in I} \theta_i$;*

2. *O sub-σ-locale $\bigwedge\limits_{i\in I} Y_i$ é representado pela relação de congruência $\langle \theta_i : i \in I \rangle$.*

Demonstração. Consequência imediata da Proposição II.2.1, atendendo a que $\mathcal{S}(X)$ é o reticulado dual de $\mathcal{C}(X)$. □

Proposição 3.2. *Seja X um σ-locale e Z um sub-σ-locale de X. Então*

$$Z = \bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}.$$

Demonstração. Consequência imediata da Proposição II.2.2 (4). □

Definição 3.3. Seja X um σ-*locale* e considere-se um elemento $a \in X$. Representar-se-ão por **o(a)** e por **c(a)**, os *sub-σ-locales* associados, respetivamente, às relações de congruência Δ_a e ∇_a, onde $\Delta_a = \{(x,y) \in X \times X : x \wedge a = y \wedge a\}$ e $\nabla_a = \{(x,y) \in X \times X : x \vee a = y \vee a\}$.

1. Um ***sub-σ-locale*** Y de X é **aberto** se existe $a \in X$, tal que $Y = o(a)$;

2. Um ***sub-σ-locale*** Y de X é **fechado** se existe $a \in X$, tal que $Y = c(a)$.

Para além disso, $o[X] := \{o(a) : a \in X\}$ e $c[X] := \{c(a) : a \in X\}$.

Proposição 3.4. *Seja X um σ-locale.*

1. *Para todo o $a \in X$, os sub-σ-locales $o(a)$ e $c(a)$ são complementos um do outro em $\mathcal{S}(X)$;*

2. *A inclusão de $o[X]$ em $\mathcal{S}(X)$ define uma imersão de X em $\mathcal{S}(X)$ que preserva supremos numeráveis e ínfimos finitos, isto é, a função $j_1 : X \longrightarrow o[X]$, definida por $j_1(a) = o(a)$, é um isomorfismo de σ-frames.*

3. *A inclusão de $c[X]$ em $\mathcal{S}(X)$ define uma imersão de X^{op} em S(X) que leva supremos numeráveis em X para ínfimos numeráveis em $\mathcal{S}(X)$ e ínfimos finitos em X em supremos finitos em $\mathcal{S}(X)$; ou seja, $j_2 : X^{op} \longrightarrow c[X]$, definida por $j_2(a) = c(a)$, é um isomorfismo de co-σ-frames.*

Demonstração. 1. Resulta de ∇_a e Δ_a serem complementos um do outro em $\mathcal{C}(X)$, para $a \in X$.

2. Considere-se a função $j_1 : X \longrightarrow o[X]$, definida por $j_1(a) = o(a)$. Quer-se provar que j_1 é um isomorfismo de σ-*frames*, ou seja, que j_1 é um homomorfismo de σ-*frames* bijetivo.

Atendendo a que, para elementos $a, b, x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, $\Delta_0 = 1_{\mathcal{C}(X)}$, $\Delta_1 = 0_{\mathcal{C}(X)}$, $\Delta_{a \wedge b} = \Delta_a \vee \Delta_b$ e $\Delta_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Delta_{x_i}$, vem, respetivamente, $o(0) = \mathbb{0}$, $o(1) = \mathbb{1}$, $o(a \wedge b) = o(a) \wedge o(b)$ e $o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(x_i)$. Logo, j_1 preserva ínfimos finitos e supremos numeráveis.

Para além disso, $o[X]$ é um σ-*frame*. Com efeito, munindo $o[X]$ com a relação de ordem inclusão, $o[X]$ é um reticulado sup-σ-completo que verifica a lei distributiva de ínfimos finitos sobre supremos numeráveis: $o(a) \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(x_i)\big) = o(a) \wedge o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = o\big(a \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big)\big) = o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} (a \wedge x_i)\big) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(a \wedge x_i) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} (o(a) \wedge o(x_i))$. Portanto, j_1 é um homomorfismo de σ-*frames*.

É evidente, dada a definição de $o[X]$, que j_1 é sobrejetiva. Falta verificar que j_1 é injetiva. Suponha-se que $o(a) = o(b)$, para $a, b \in X$. Então $\Delta_a = \Delta_b$, o que implica que $(a, 1) \in \Delta_a = \Delta_b$ e $(b, 1) \in \Delta_b = \Delta_a$. Contudo $(a, 1) \in \Delta_b$ significa que $a \wedge b = 1 \wedge b = b$ e $(b, 1) \in \Delta_a$ significa que $b \wedge a = 1 \wedge a = a$. Assim, tem-se que $a = a \wedge b = b$ e, consequentemente, j_1 é injetiva.

3. Considere-se a função $j_2 : X^{op} \longrightarrow c[X]$, definida por $j_2(a) = c(a)$. Quer-se provar que j_2 é um isomorfismo de *co*-σ-*frames*, ou seja, que j_2 é um homomorfismo de *co*-σ-*frames* bijetivo.

Uma vez que, para quaisquer $a, b, x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, $\nabla_0 = 0_{\mathcal{C}(X)}$, $\nabla_1 = 1_{\mathcal{C}(X)}$, $\nabla_{a\wedge b} = \nabla_a \cap \nabla_b$ e $\nabla_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i} = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \nabla_{x_i}$, tem-se, respetivamente, $c(0) = \mathbb{1}$, $c(1) = \mathbb{0}$, $c(a \wedge b) = c(a) \vee c(b)$ e $c\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} c(x_i)$. Logo, j_2 preserva supremos finitos e ínfimos numeráveis.

Para além disso, $c[X]$, munido com a relação de ordem inclusão, é um *co*-σ-*frame*. De facto, não só $c[X]^{op}$ é um reticulado sup-σ-completo, como também também satisfaz a lei distributiva de ínfimos finitos sobre supremos numeráveis, visto que $c(a) \vee \big(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} c(x_i)\big) = c(a) \vee c\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = c\big(a \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big)\big) = c\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} (a \wedge x_i)\big) = \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} c(a \wedge x_i) = \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (c(a) \vee c(x_i))$. Portanto, j_2 é um homomorfismo de *co*-σ-*frames*.

Por fim, dada a definição de $c[X]$, é evidente que j_2 é sobrejetiva. Falta ver que j_2 é injetiva. Para tal, sejam $a, b \in X$, tais que $c(a) = c(b)$. Então $\nabla_a = \nabla_b$ e $(0, a) \in \nabla_a = \nabla_b$, $(0, b) \in \nabla_b = \nabla_a$. Contudo $(0, a) \in \nabla_b$ significa que $b = 0 \vee b = a \vee b$ e $(0, b) \in \nabla_a$ significa que $a = 0 \vee a = b \vee a$. Assim, $b = a \vee b = a$, obtendo-se, deste modo, que j_2 é injetiva. □

Daqui em diante, as aplicações j_1 e j_2 da proposiçao anterior serão denotadas, respetivamente, por o e c.

Proposição 3.5. *Seja X um σ-locale.*

1. *Seja $a \in X$ e $Y_i \in \mathcal{S}(X)$, para $i \in \mathbb{N}$. Então $o(a) \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} Y_i\big) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} (o(a) \wedge Y_i)$.*
2. *Seja $Y \in \mathcal{S}(X)$ e $a_i \in X$, para $i \in \mathbb{N}$. Então $Y \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(a_i)\big) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} (Y \wedge o(a_i))$.*

Demonstração. 1. Consequência da Proposição II.2.4 (4).

2. Seja $Y \in \mathcal{S}(X)$ e $a_i \in X$, para $i \in \mathbb{N}$. Quer-se mostrar que $Y \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(a_i)\big) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} (Y \wedge o(a_i))$, ou seja, que $\theta_Y \vee \big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Delta_{a_i}\big) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (\theta_Y \vee \Delta_{a_i})$. Antes de mais, observe-se que, pela Proposição II.2.4 e

II.2.3,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\theta_Y\vee\Delta_{a_i})=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\Delta_{a_i}\vee\theta_Y)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{(x,y):(x\wedge a_i,y\wedge a_i)\in\theta_Y\},$$

$$\theta_Y\vee\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{a_i}\big)=\theta_Y\vee\Delta_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i}=\Delta_{\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i}\vee\theta_Y=\{(x,y):(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big),y\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big))\in\theta_Y\}.$$

Seja $(x,y)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\theta_Y\vee\Delta_{a_i})$. Então $(x\wedge a_i,y\wedge a_i)\in\theta_Y$ para todo o $i\in\mathbb{N}$ e, como θ_Y preserva supremos numeráveis, $\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(x\wedge a_i),\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(y\wedge a_i)\big)\in\theta_Y$. Logo, aplicando a lei distributiva de X, vem $\big(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big),y\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big)\big)\in\theta_Y$, isto é, $(x,y)\in\theta_Y\vee\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{a_i}\big)$.

Suponha-se, agora, que $(x,y)\in\theta_Y\vee\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{a_i}\big)$. Então, $(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big),y\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big))\in\theta_Y$, o que implica que, para cada $j\in\mathbb{N}$, $(x\wedge a_j,y\wedge a_j)=(x\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big)\wedge a_j,y\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}a_i\big)\wedge a_j)\in\theta_Y$, uma vez que também $(a_j,a_j)\in\theta_Y$ e θ_Y preserva ínfimos finitos. Assim, obtém-se que $(x,y)\in\Delta_{a_j}\vee\theta_Y$, para todo o $j\in\mathbb{N}$, e consequentemente, $(x,y)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\Delta_{a_i}\vee\theta_Y)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\theta_Y\vee\Delta_{a_i})$. $\square$

Proposição 3.6. *Seja X um σ-locale e $Y\in\mathcal{S}(X)$.*

1. *A função $\alpha:X/_{\theta_Y}\longrightarrow\mathcal{S}(X)$, definida por $\alpha([x]_Y)=Y\wedge o(x)$, preserva supremos numeráveis, ínfimos finitos não vazios e é injetiva. Em particular, preserva também a relação de ordem.*

2. *A função $\mu:\mathcal{S}(Y)\longrightarrow\mathcal{S}(X)$, definida por $\mu(Z)=(Z)_X$, onde $(Z)_X$ é o sub-σ-locale de X associado à relação de equivalência $\theta_{(Z)_X}:=\{(x,y)\in X\times X:([x]_Y,[y]_Y)\in\theta_Z\}$, preserva supremos finitos, ínfimos não vazios e é injetiva. Para além disso,*

$$\mu[\mathcal{S}(Y)]=\{Z\in\mathcal{S}(X):Z\subseteq^{\mathcal{S}}Y\}=:\downarrow Y.$$

3. *Seja $\bar{\alpha}$ a restrição do codomínio de α a $\mathcal{O}^Y:=\{Y\wedge o(x):x\in X\}\subseteq\mathcal{S}(X)$ e $\bar{\mu}$ a restrição do codomínio de μ a $\downarrow Y$. Então $\bar{\alpha}$ é um isomorfismo de σ-frames e $\bar{\mu}$ é um isomorfismo de co-frames.*

Demonstração. 1. Antes de mais, comece-se por verificar que a função α está bem definida. Sejam $x,y\in X$, tais que $(x,y)\in\theta_Y$.

Se $(a,b)\in\theta_Y\vee\Delta_x=\Delta_x\vee\theta_Y$, então $(a\wedge x,b\wedge x)\in\theta_Y$. Mais: como $(a,a),(x,y),(b,b)\in\theta_Y$ e θ_Y preserva ínfimos finitos, também $(a\wedge x,a\wedge y),(b\wedge x,b\wedge y)\in\theta_Y$. Logo, pela simetria e transitividade de θ_Y, $(a\wedge y,b\wedge y)\in\theta_Y$, ou seja, $(a,b)\in\Delta_y\vee\theta_Y$. Portanto, $\theta_Y\vee\Delta_x\subseteq\theta_Y\vee\Delta_y$.

Por outro lado, para $(a,b)\in\Delta_y\vee\theta_Y$, então $(a\wedge y,b\wedge y)\in\theta_Y$ e, visto $(a,a),(x,y),(b,b)\in\theta_Y$ e θ_Y preservar ínfimos finitos, também $(a\wedge x,a\wedge y),(b\wedge x,b\wedge y)\in\theta_Y$. Consequentemente, pela simetria e transitividade de θ_Y, $(a\wedge x,b\wedge x)\in\theta_Y$, isto é, $(a,b)\in\Delta_x\vee\theta_Y$. Portanto, $\theta_Y\vee\Delta_y\subseteq\theta_Y\vee\Delta_x$.

Assim, tem-se que $\theta_Y\vee\Delta_x=\theta_Y\vee\Delta_y$, o que significa que $Y\wedge o(x)=Y\wedge o(y)$.

Prove-se, agora, que α preserva supremos numeráveis e ínfimos finitos não vazios. Sejam $a,b,x_i\in X$, para $i\in\mathbb{N}$. Então, $\alpha([0]_Y)=Y\wedge o(0)=Y\wedge\mathbb{0}=\mathbb{0}$,

$$\alpha\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}[x_i]_Y\big)=\alpha\big(\big[\bigvee_{i\in\mathbb{N}}x_i\big]_Y\big)=Y\wedge o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}x_i\big)=Y\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}o(x_i)\big)=\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(Y\wedge o(x_i))=\bigvee_{i\in\mathbb{N}}\alpha([x_i]_Y),$$

$$\alpha([a]_Y\wedge[b]_Y)=\alpha([a\wedge b]_Y)=Y\wedge o(a\wedge b)=Y\wedge(o(a)\wedge o(b))=(Y\wedge o(a))\wedge(Y\wedge o(b)),$$

o que equivale a dizer que $\alpha([a]_Y \wedge [b]_Y) = \alpha([a]_Y) \wedge \alpha([b]_Y)$.

Por fim, mostre-se que α é injetiva. Sejam $[a]_Y, [b]_Y \in X/_{\theta_Y}$, tais que $\alpha([a]_Y) = \alpha([b]_Y)$. Então $Y \wedge o(a) = Y \wedge o(b)$, isto é, $\theta_Y \vee \Delta_a = \theta_Y \vee \Delta_b$. Como $(a,1) \in \Delta_a \subseteq \theta_Y \vee \Delta_a = \theta_Y \vee \Delta_b$ e $(b,1) \in \Delta_b \subseteq \theta_Y \vee \Delta_b = \theta_Y \vee \Delta_a$, pela simetria e transitividade de $\theta_Y \vee \Delta_a$ e $\theta_Y \vee \Delta_b$, tem-se que $(a,b) \in \theta_Y \vee \Delta_a = \theta_Y \vee \Delta_b$. Ora, mas $(a,b) \in \theta_Y \vee \Delta_a$ implica que $(a, b \wedge a) = (a \wedge a, b \wedge a) \in \theta_Y$ e $(a,b) \in \theta_Y \vee \Delta_b$ implica que $(a \wedge b, b) = (a \wedge b, b \wedge b) \in \theta_Y$. Portanto, de novo pela simetria e transitividade de θ_Y, vem $(a,b) \in \theta_Y$, o que significa que $[a]_Y = [b]_Y$. Logo, α é injetiva.

2. Comece-se por notar que, dado θ_Z ser uma congruência em $Y \equiv X/_{\theta_Y}$, $\theta_{(Z)_X}$ é uma congruência em X. Logo, μ é uma função bem definida.

Prove-se agora que μ preserva supremos finitos. Observe-se que $\mu(\mathbb{O}_Y) = (\mathbb{O}_Y)_X$, onde $\theta_{(\mathbb{O}_Y)_X} = \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_{\mathbb{O}_Y}\}$. Contudo, $\theta_{\mathbb{O}_Y} = 1_{\mathcal{C}(Y)} = X/_{\theta_Y} \times X/_{\theta_Y}$. Logo, $\theta_{(\mathbb{O}_Y)_X} = X \times X = 1_{\mathcal{C}(X)}$ e, portanto, $\mu(\mathbb{O}_Y) = (\mathbb{O}_Y)_X = \mathbb{O}_X$.

Para além disso, para $A, B \in \mathcal{S}(Y)$, tem-se que $\mu(A \vee B) = (A \vee B)_X$, onde $(A \vee B)_X$ é representado pela congruência

$$\theta_{(A\vee B)_X} = \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_{A\vee B}\} = \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_A \cap \theta_B\}$$

$$= \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_A\} \cap \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_B\} = \theta_{(A)_X} \cap \theta_{(B)_X}.$$

Assim, tem-se que $\theta_{(A\vee B)_X} = \theta_{(A)_X} \cap \theta_{(B)_X}$, o que significa que $\mu(A \vee B) = \mu(A) \vee \mu(B)$.

Para mostrar que μ é injetiva, considerem-se $A, B \in \mathcal{S}(Y)$, tais que $\mu(A) = \mu(B)$. Então $(A)_X = (B)_X$, isto é, $\theta_{(A)_X} = \theta_{(B)_X}$, o que, por definição de $\theta_{(A)_X}$ e $\theta_{(B)_X}$, implica que $\theta_A = \theta_B$. Logo, $A = B$ e, portanto, μ é injetiva.

Verifique-se, em seguida, que $\mu[\mathcal{S}(Y)] = \{Z \in \mathcal{S}(X) : Z \subseteq^{\mathcal{S}} Y\} =: \downarrow Y$. Seja $A \in \mu[\mathcal{S}(Y)]$. Então existe $C \in \mathcal{S}(Y)$, tal que $A = \mu(C)$, o que significa que $(u,v) \in \theta_A$ se e só se $([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_C$. Quer-se mostrar que $A \in \downarrow Y$. Para tal, basta ver que $A \subseteq^{\mathcal{S}} Y$, ou seja, que $\theta_Y \subseteq \theta_A$. Seja $(u,v) \in \theta_Y$. Então $[u]_Y = [v]_Y$ e, pela reflexividade de θ_C, $([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_C$. Logo, é imediato que $(u,v) \in \theta_A$ e, portanto, $\theta_Y \subseteq \theta_A$.

Por outro lado, seja $B \in \downarrow Y$, isto é, seja $B \in \mathcal{S}(X)$, tal que $B \subseteq^{\mathcal{S}} Y$. Quer-se mostrar que $B \in \mu[\mathcal{S}(Y)]$. Se $B \subseteq^{\mathcal{S}} Y$, então $\theta_Y \subseteq \theta_B$. Seja $\alpha = \{([u]_Y, [v]_Y) : (u,v) \in \theta_B\}$. Note-se que, se $(u, \bar{u}), (v, \bar{v}) \in \theta_Y \subseteq \theta_B$ e $(u,v) \in \theta_B$, então também $(\bar{u}, \bar{v}) \in \theta_B$. Assim, α está bem definido, tendo-se que $([u]_Y, [v]_Y)$ pertencer a α não depende dos representantes de $[u]_Y$ e $[v]_Y$.

Decorre de θ_B ser uma relação de congruência em X que α é uma relação de congruência em $X/_{\theta_Y}$. Para além disso, por definição de α, $([u]_Y, [v]_Y) \in \alpha$ se e só se $(u,v) \in \theta_B$. Consequentemente, denotando por D o *sub-σ-locale* de $X/_{\theta_Y} \equiv Y$ representado por α, isso significa que $\mu(D) = B$. Portanto, $B \in \mu[\mathcal{S}(Y)]$, o que implica que também $\downarrow Y \subseteq \mu[\mathcal{S}(Y)]$.

Para terminar, mostre-se que μ preserva ínfimos não vazios. Seja I um conjunto de índices não vazio e considerem-se elementos $A_i \in \mathcal{S}(Y)$, para $i \in I$. Note-se que $\mu\big(\bigwedge_{i\in I} A_i\big) = \big(\bigwedge_{i\in I} A_i\big)_X$ e $\bigwedge_{i\in I} \mu(A_i) = \bigwedge_{i\in I} (A_i)_X$ são *sub-σ-locales* associados, respetivamente, às congruências

$$\theta_{(\bigwedge_{i\in I} A_i)_X} = \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \theta_{\bigwedge_{i\in I} A_i}\} = \{(u,v) \in X \times X : ([u]_Y, [v]_Y) \in \bigvee_{i\in I} \theta_{A_i}\};$$

$$\theta_{\bigwedge_{i\in I}(A_i)_X} = \bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X} = \bigvee_{i\in I} \{(u,v) : ([u]_Y,[v]_Y) \in \theta_{A_i}\}.$$

Dado, para cada $i \in I$, $\theta_{A_i} \subseteq \bigvee_{j\in I} \theta_{A_j}$, então $\theta_{(A_i)_X} \subseteq \theta_{(\bigwedge_{j\in I} A_j)_X}$ para todo o $i \in I$ e, consequentemente, $\bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X} \subseteq \theta_{(\bigwedge_{i\in I} A_i)_X}$.

Se $(u,v) \in \theta_{(\bigwedge_{i\in I} A_i)_X}$, isto é, se $([u]_Y,[v]_Y) \in \bigvee_{i\in I} \theta_{A_i}$, $([u]_Y,[v]_Y)$ é obtido a partir de elementos de $\bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$, tendo-se que, ou $([u]_Y,[v]_Y) \in \bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$, ou $([u]_Y,[v]_Y)$ é obtido no fecho de $\bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$ para a transitividade, ínfimos finitos e supremos numeráveis.

Caso $([u]_Y,[v]_Y) \in \bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$, então existe $j \in I$, tal que $([u]_Y,[v]_Y) \in \theta_{A_j}$ e $(u,v) \in \theta_{(A_j)_X} \subseteq \theta_{\bigwedge_{i\in I}(A_i)_X}$.

Caso $([u]_Y,[v]_Y)$ seja um dos pontos obtidos no fecho de $\bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$ para a transitividade, ínfimos finitos e supremos numeráveis, seja $\bar{J}_{(u,v)} \subseteq \bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$ o conjunto constituído pelos pontos de $\bigcup_{i\in I} \theta_{A_i}$ envolvidos (direta ou indiretamente) no processo de obtenção de $([u]_Y,[v]_Y)$, a fim de o ponto pertencer a $\bigvee_{i\in I} \theta_{A_i}$. Escreva-se $\bar{J}_{(u,v)}$ na forma $\bar{J}_{(u,v)} = \{([a_j]_Y,[b_j]_Y) \in \bigcup_{i\in I} \theta_{A_i} : j \in J\}$, para algum conjunto de índices J. Seja $J_{(u,v)} = \{(a,b) \in \bigcup_{i\in I} \theta_{(A_i)_X} : ([a_j]_Y,[b_j]_Y) \in \bar{J}_{(u,v)}\}$.

Repetindo, com os correspondentes pontos de $J_{(u,v)}$, os mesmos passos efetuados com os pontos de $\bar{J}_{(u,v)}$ para obter $([u]_Y,[v]_Y)$, no final, obtém-se um par (x_1,x_2), tal que $([x_1]_Y,[x_2]_Y) = ([u]_Y,[v]_Y)$, ou seja, tal que $(x_1,u),(x_2,v) \in \theta_Y$.

Visto $J_{(u,v)}$ estar contido em $\bigcup_{i\in I} \theta_{(A_i)_X} \subseteq \bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X}$ e $\bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X}$ ser fechado para a transitividade, ínfimos finitos e supremos numeráveis, tem-se que $(x_1,x_2) \in \bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X}$. No entanto, também $(x_1,u),(x_2,v) \in \bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X}$, uma vez que $\mu[\mathcal{S}(Y)] \subseteq \downarrow Y$ implica que $\theta_Y \subseteq \theta_{(A_i)_X}$, para qualquer $i \in I$. Portanto, pela simetria e transitividade de $\bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X}$, obtém-se $(u,v) \in \bigvee_{i\in I} \theta_{(A_i)_X} = \theta_{\bigwedge_{i\in I}(A_i)_X}$.

3. Consequência de 1 e 2, aliado ao facto de $\mathcal{O}^Y$ ser um σ-*frame*, $\downarrow Y$ ser um *co-frame* e tanto $\bar{\alpha}$ como $\bar{\mu}$ serem aplicações sobrejetivas que preservam o ínfimo do vazio. □

Consequentemente, pode concluir-se a transitividade dos *sub-σ-locales*, tendo-se que, se Y é um *sub-σ-locale* de X e Z é um *sub-σ-locale* de Y, então Z é um *sub-σ-locale* de X.

3.2. Função imagem e função pré-imagem

Sejam X,Y σ-*locales* e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. Recorde-se que $f^* : Y \longrightarrow X$ é um homomorfismo de σ-*frames*. Posto isto, considere-se a função $f^* \times f^* : Y \times Y \longrightarrow X \times X$ definida por $(f^* \times f^*)(y_1,y_2) = (f^*(y_1), f^*(y_2))$.

Proposição 3.7. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. Então $(f^* \times f^*)^{-1}(\theta) \subseteq Y \times Y$ é uma congruência em Y, para toda a congruência θ em X.*

Considere-se a função $f[-] : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(Y)$, onde $f[S]$ é representado pela relação de congruência $(f^* \times f^*)^{-1}(\theta_S)$, para todo o $S \in \mathcal{S}(X)$. Pela proposição anterior, $f[-]$ está bem definida.

Definição 3.8. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica e S um *sub-σ-locale* de X. Ao *sub-σ-locale* $f[S] \in \mathcal{S}(Y)$, representado pela congruência $(f^* \times f^*)^{-1}(\theta_S)$, chama-se **imagem de S pela aplicação σ-locálica** f, ou simplesmente, **imagem de S por** f.

Para além disso, sejam S,T *sub-σ-locales* de X, tais que $T \subseteq^{\mathcal{S}} S$, isto é, $\theta_S \subseteq \theta_T$. Então $(f^* \times f^*)^{-1}(\theta_S) \subseteq (f^* \times f^*)^{-1}(\theta_T)$, o que significa que $f[T] \subseteq^{\mathcal{S}} f[S]$. Logo, $f[-]$ é uma aplicação monótona entre $\mathcal{S}(X)$ e $\mathcal{S}(Y)$.

Pela Proposição II.3.4, X é isomorfo a $o[X]$ e Y é isomorfo a $o[Y]$. Assim, pode ver-se $f^* : Y \longrightarrow X$ como uma aplicação $f^* : o[Y] \longrightarrow o[X]$ que, a cada aberto $o(y)$, para $y \in Y$, faz corresponder o aberto $o(f^*(y))$. Mostrar-se-á que é possível estender $f^* : o[Y] \longrightarrow o[X]$ a um homomorfismo de *co-frames*

$$f_{-1}[-] : \mathcal{S}(Y) \longrightarrow \mathcal{S}(X).$$

Considere-se a função $f_{-1}[-] : \mathcal{S}(Y) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$, onde, para cada $S \in \mathcal{S}(Y)$, $f_{-1}[S]$ é representado pela congruência $\langle (f^* \times f^*)(\theta_S) \rangle$, ou seja, pela menor congruência que contêm $\{(f^*(u), f^*(v)) : (u,v) \in \theta_S\}$. É evidente que $f_{-1}[-]$ está bem definida.

Definição 3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica e $S \in \mathcal{S}(Y)$. Ao *sub-σ-locale* $f_{-1}[S] \in \mathcal{S}(X)$, representado pela congruência $\langle (f^* \times f^*)(\theta_S) \rangle$, chama-se **imagem inversa de S pela aplicação σ-locálica** f, ou, simplesmente, **imagem inversa de S por** f.

Sejam $S,T \in \mathcal{S}(Y)$, tais que $S \subseteq^{\mathcal{S}} T$, isto é, $\theta_T \subseteq \theta_S$. Então, $(f^* \times f^*)(\theta_T) \subseteq (f^* \times f^*)(\theta_S)$ e, consequentemente, $\langle (f^* \times f^*)(\theta_T) \rangle \subseteq \langle (f^* \times f^*)(\theta_S) \rangle$. Portanto, $f_{-1}[S] \subseteq^{\mathcal{S}} f_{-1}[T]$, o que mostra que $f_{-1}[-]$ também é monótona.

Uma vez que $f[-]$ e $f_{-1}[-]$ são aplicações monótonas e que, para quaisquer $S \in \mathcal{S}(X)$ e $T \in \mathcal{S}(Y)$,

$$f[S] \subseteq^{\mathcal{S}} T \Leftrightarrow \theta_T \subseteq (f^* \times f^*)^{-1}(\theta_S) \Leftrightarrow (f^* \times f^*)(\theta_T) \subseteq \theta_S$$

$$\Leftrightarrow \langle (f^* \times f^*)(\theta_T) \rangle \subseteq \theta_S \Leftrightarrow S \subseteq^{\mathcal{S}} f_{-1}[T],$$

obtém-se que $f[-], f_{-1}[-]$ formam uma adjunção de Galois, tendo-se o resultado que se segue.

Proposição 3.10. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. Então $f[-], f_{-1}[-]$ formam uma adjunção de Galois, onde $f[-]$ é o adjunto de Galois à esquerda e $f_{-1}[-]$ é o adjunto de Galois à direita. Consequentemente, $f[-]$ preserva supremos arbitrários e f_{-1} preserva ínfimos arbitrários.*

Proposição 3.11. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica e $a,b,y \in Y$.*

1. $f_{-1}[o(y)] = o(f^*(y))$;
2. $f_{-1}[c(y)] = c(f^*(y))$;
3. $f_{-1}(o(a) \vee c(b)) = f_{-1}(o(a)) \vee f_{-1}(c(b))$, *sempre que* $a \leq b$.

Demonstração. 1. Quer-se mostrar que $f_{-1}[o(y)] = o(f^*(y))$, ou seja, que $\langle (f^* \times f^*)(\Delta_y) \rangle = \Delta_{f^*(y)}$.

Seja $(\bar{u}, \bar{v}) \in (f^* \times f^*)(\Delta_y)$. Então existe $(u,v) \in \Delta_y$, tal que $(\bar{u}, \bar{v}) = (f^*(u), f^*(v))$, e, como $(u,v) \in \Delta_y$ significa que $u \wedge y = v \wedge y$, vem $f^*(u \wedge y) = f^*(v \wedge y)$. Contudo, dado f^* preservar ínfimos finitos, isso implica que $f^*(u) \wedge f^*(y) = f^*(v) \wedge f^*(y)$, isto é, $(\bar{u}, \bar{v}) = (f^*(u), f^*(v)) \in \Delta_{f^*(y)}$. Logo, $(f^* \times f^*)(\Delta_y) \subseteq \Delta_{f^*(y)}$, de onde decorre que $\langle (f^* \times f^*)(\Delta_y) \rangle \subseteq \Delta_{f^*(y)}$.

Recordando que $\Delta_{f^*(y)} = \rho(f^*(y), 1)$, para provar que $\Delta_{f^*(y)} \subseteq \langle (f^* \times f^*)(\Delta_y) \rangle$, basta verificar que $(f^*(y), 1) \in \langle (f^* \times f^*)(\Delta_y) \rangle$. No entanto, notando que $(f^*(y), 1) = (f^*(y), f^*(1))$ e $(y, 1) \in \Delta_y$, é imediato que $(f^*(y), 1) \in \langle (f^* \times f^*)(\Delta_y) \rangle$.

2. Quer-se agora provar que $f_{-1}[c(y)] = c(f^*(y))$, ou seja, que $\langle(f^* \times f^*)(\nabla_y)\rangle = \nabla_{f^*(y)}$.

Seja $(\bar{u},\bar{v}) \in (f^* \times f^*)(\nabla_y)$. Então existe $(u,v) \in \nabla_y$, tal que $(\bar{u},\bar{v}) = (f^*(u), f^*(v))$. Como $(u,v) \in \nabla_y$ significa que $u \vee y = v \vee y$ e atendendo a que f^* também preserva supremos numeráveis, vem $f^*(u) \vee f^*(y) = f^*(u \vee y) = f^*(v \vee y) = f^*(v) \vee f^*(y)$, o que implica que $(f^*(u), f^*(v)) \in \nabla_{f^*(y)}$. Logo, $(f^* \times f^*)(\nabla_y) \subseteq \nabla_{f^*(y)}$ e, consequentemente, $\langle(f^* \times f^*)(\nabla_y)\rangle \subseteq \nabla_{f^*(y)}$.

Recordando que $\nabla_{f^*(y)} = \rho(0, f^*(y))$, basta verificar que $(0, f^*(y)) \in \langle(f^* \times f^*)(\nabla_y)\rangle$, para se obter que $\nabla_{f^*(y)} \subseteq \langle(f^* \times f^*)(\nabla_y)\rangle$. Todavia, uma vez que $(0,y) \in \nabla_y$ e $(0, f^*(y)) = (f^*(0), f^*(y))$, é imediato que $(0, f^*(y)) \in (f^* \times f^*)(\nabla_y) \subseteq \langle(f^* \times f^*)(\nabla_y)\rangle$.

3. Pela monotonia de f_{-1}, vem facilmente que $f_{-1}(o(a)) \vee f_{-1}(c(b)) \subseteq f_{-1}(o(a) \vee c(b))$. Falta ver que $f_{-1}(o(a) \vee c(b)) \subseteq f_{-1}(o(a)) \vee f_{-1}(c(b))$, ou seja, que

$$\langle(f^* \times f^*)(\Delta_a \cap \nabla_b)\rangle \supseteq \langle(f^* \times f^*)(\Delta_a)\rangle \cap \langle(f^* \times f^*)(\nabla_b)\rangle = \Delta_{f^*(a)} \cap \nabla_{f^*(b)},$$

onde a última igualdade resulta das alíneas 1 e 2.

Se $a \leq b$, dado f^* ser monótona, $f^*(a) \leq f^*(b)$; logo, pela Proposição II.2.2, $\Delta_{f^*(a)} \cap \nabla_{f^*(b)} = \rho(f^*(a), f^*(b))$ e, portanto, basta verificar que $(f^*(a), f^*(b)) \in \langle(f^* \times f^*)(\Delta_a \cap \nabla_b)\rangle$, para demonstrar o pretendido. Mas $(a,b) \in \Delta_a \cap \nabla_b$, uma vez que $a \leq b$, de novo pela Proposição II.2.2; assim, é imediato que $(f^*(a), f^*(b)) \in (f^* \times f^*)(\Delta_a \cap \nabla_b) \subseteq \langle(f^* \times f^*)(\Delta_a \cap \nabla_b)\rangle$. □

Proposição 3.12. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. Então $f_{-1}[-]$ preserva supremos finitos, isto é, $f_{-1}[\mathbb{0}] = \mathbb{0}$ e, para quaisquer $S,T \in \mathcal{S}(Y)$, $f_{-1}[S \vee T] = f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T]$.*

Demonstração. Antes de mais, observe-se que $f_{-1}[\mathbb{0}] = f_{-1}(o(0)) = o(f^*(0)) = o(0) = \mathbb{0}$.

Considerem-se, agora, $S,T \in \mathcal{S}(Y)$. Pretende-se mostrar que $f_{-1}[S \vee T] = f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T]$, isto é, que $\langle(f^* \times f^*)(\theta_S \cap \theta_T)\rangle = \langle(f^* \times f^*)(\theta_S)\rangle \cap \langle(f^* \times f^*)(\theta_T)\rangle$.

Por um lado, como f_{-1} é monótona e $S \subseteq^{\mathcal{S}} S \vee T$, $T \subseteq^{\mathcal{S}} S \vee T$, então $f_{-1}[S] \subseteq f_{-1}[S \vee T]$, $f_{-1}[T] \subseteq f_{-1}[S \vee T]$ e, portanto, $f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T] \subseteq f_{-1}[S \vee T]$.

Falta ver que $f_{-1}[S \vee T] \subseteq f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T]$. Atendendo a que, pela Proposição II.3.2, qualquer $W \in \mathcal{S}(Y)$ se pode escrever na forma $W = \bigwedge\{o(x) \vee c(y) : (x,y) \in \theta_W, x \leq y\}$, note-se que, por $f_{-1}[-]$ preservar ínfimos arbitrários e pela Proposição II.3.11, não só

$$\begin{aligned} f_{-1}[S \vee T] &= f_{-1}\left[\bigwedge\{o(x) \vee c(y) : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\}\right] \\ &= \bigwedge\{f_{-1}[o(x) \vee c(y)] : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\} \\ &= \bigwedge\{o(f^*(x)) \vee c(f^*(y)) : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\}, \end{aligned}$$

como também,

$$\begin{aligned} f_{-1}[S] \vee f_{-1}[T] &= f_{-1}\left[\bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_S, a \leq b\}\right] \vee f_{-1}\left[\bigwedge\{o(c) \vee c(d) : (c,d) \in \theta_T, c \leq d\}\right] \\ &= \left(\bigwedge\{f_{-1}[o(a) \vee c(b)] : (a,b) \in \theta_S, a \leq b\}\right) \vee \left(\bigwedge\{f_{-1}[o(c) \vee c(d)] : (c,d) \in \theta_T, c \leq d\}\right) \\ &= \bigwedge\{f_{-1}[o(a) \vee c(b)] \vee f_{-1}[o(c) \vee c(d)] : (a,b) \in \theta_S, a \leq b, (c,d) \in \theta_T, c \leq d\}, \\ &= \bigwedge\{o(f^*(a)) \vee c(f^*(b)) \vee o(f^*(c)) \vee c(f^*(d)) : (a,b) \in \theta_S, a \leq b, (c,d) \in \theta_T, c \leq d\} \end{aligned}$$

$$= \bigwedge\{o(f^*(a \vee c)) \vee c(f^*(b \wedge d)) : (a,b) \in \theta_S, a \leq b, (c,d) \in \theta_T, c \leq d\}.$$

Mostrar a inclusão pretendida equivale a mostrar que

$$\bigvee\{\Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(b\wedge d)} : (a,b) \in \theta_S, a \leq b, (c,d) \in \theta_T, c \leq d\} \subseteq \bigvee\{\Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)} : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\}.$$

Para tais $a,b,c,d \in Y$, seja $x = a \vee c$ e $y = (b \vee c) \wedge (a \vee d)$. Observe-se que $f^*(a \vee c) = f^*(x)$, $f^*(b \wedge d) \leq f^*(y)$, pois $y = (b \vee c) \wedge (a \vee d) = (b \wedge a) \vee (c \wedge a) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge d)$, e $x \leq y$, uma vez que, como $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a \vee c \leq b \vee c$ e $a \vee c \leq a \vee d$. Para além disso, $(x,y) \in \theta_S \cap \theta_T$, visto que, por $(c,c), (a \vee d, a \vee d) \in \theta_S$, $(a,a), (b \vee c, b \vee c) \in \theta_T$ e θ_S, θ_T preservarem supremos e ínfimos finitos,

$$(a,b) \in \theta_S \Rightarrow (a \vee c, b \vee c) \in \theta_S \Rightarrow (x,y) = ((a \vee c) \wedge (a \vee d), (b \vee c) \wedge (a \vee d)) \in \theta_S,$$

$$(c,d) \in \theta_T \Rightarrow (a \vee c, a \vee d) \in \theta_T \Rightarrow (x,y) = ((a \vee c) \wedge (b \vee c), (b \vee c) \wedge (a \vee d)) \in \theta_T.$$

Consequentemente, dado que $(x,y) \in \theta_S \cap \theta_T$ e $x \leq y$, obtém-se que

$$\Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)} \subseteq \bigvee\{\Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)} : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\}.$$

Contudo,

$$\Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)} = \Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(y) \vee f^*(b\wedge d))} = \Delta_{f^*(a\vee c)} \cap (\nabla_{f^*(y)} \vee \nabla_{f^*(b\wedge d)})$$

$$= (\Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(y)}) \vee (\Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(b\wedge d)}),$$

o que implica que $\Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(b\wedge d)} \subseteq \Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)}$. Portanto, para todo o $a,b,c,d \in Y$ nas condições descritas,

$$\Delta_{f^*(a\vee c)} \cap \nabla_{f^*(b\wedge d)} \subseteq \bigvee\{\Delta_{f^*(x)} \cap \nabla_{f^*(y)} : (x,y) \in \theta_S \cap \theta_T, x \leq y\},$$

o que conduz à inclusão que se pretendia demonstrar. □

Desta maneira, provou-se o seguinte resultado.

Proposição 3.13. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. A aplicação $f_{-1}[-]$ é um homomorfismo de co-frames, isto é, é uma aplicação entre co-frames que preserva ínfimos arbitrários e supremos finitos.*

Por fim, verifique-se que $f_{-1}[-]$ é o único homomorfismo de *co-frames* que estende $f^* : Y \longrightarrow X$.

Proposição 3.14. *Sejam X e Y σ-locales e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica. Então a função $f_{-1}[-] : \mathcal{S}(Y) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ é a única que preserva ínfimos arbitrários, supremos finitos e que ainda verifica $f_{-1}[o(y)] = o(f^*(y))$, para todo o $y \in Y$.*

Demonstração. Pela Proposição II.3.11 e II.3.13, $f_{-1}[-]$ é um homomorfismo de *co-frames*, tal que $f_{-1}[o(y)] = o(f^*(y))$, para todo o $y \in Y$. Mais: $f_{-1}[-]$ verifica ainda $f_{-1}[c(y)] = c(f^*(y))$, para todo o $y \in Y$.

Suponha-se que, para além de $f_{-1}[-]$, existe um homomorfismo de *co-frames* $h[-]$ de $\mathcal{S}(Y)$ para $\mathcal{S}(X)$, tal que $h[o(y)] = o(f^*(y))$, para todo o $y \in Y$. Então, também $h[c(y)] = c(f^*(y))$. De facto, como $h[-]$ é um homomorfismo de *co-frames*, $h[o(y) \wedge c(y)] = h[\mathbb{0}]$ e $h[o(y) \vee c(y)] = h[\mathbb{1}]$, tem-se que $h[o(y)] \wedge h[c(y)] = \mathbb{0}$ e $h[o(y)] \vee h[c(y)] = \mathbb{1}$, ou seja, $h[c(y)]$ é o complemento de $h[o(y)] = o(f^*(y))$, o que, pela unicidade do complemento, implica que $h[c(y)] = c(f^*(y))$.

Recordando que, pela Proposição II.3.2, $Z = \bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}$, para qualquer *sub-σ-locale* Z de Y, vem

$$f_{-1}[Z] = f_{-1}\big[\bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}\big] = \bigwedge\{f_{-1}[o(a)] \vee f_{-1}[c(b)] : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}$$

$$= \bigwedge\{o(f^*(a)) \vee c(f^*(b)) : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\} = \bigwedge\{h[o(a)] \vee h[c(b)] : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}$$

$$= h\big[\bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Z, a \leq b\}\big] = h[Z],$$

dado que $f_{-1}[-]$ e $h[-]$ preservam supremos finitos e ínfimos arbitrários.

Conclui-se, assim, que $f_{-1}[-] = h[-]$; logo, $f_{-1}[-]$ é o único homomorfismo de *co-frames* que satisfaz $f_{-1}[o(y)] = o(f^*(y))$, para todo o $y \in Y$. □

4. Propriedades de separação

Interessa analisar também algumas propriedades de separação associadas a *σ-locales*, uma vez que será sob uma condição de separação moderada que, no Capítulo IV, se construirá uma medida no *co-frame* dos *sub-σ-locales*.

Considere-se $\mathcal{N}_X(Y) = \{a \in X : Y \subseteq^{\mathcal{S}} o(a)\}$, onde Y é um *sub-σ-locale* de um *σ-locale* X. $\mathcal{N}_X(Y)$ é um filtro em X ao qual se chamará **filtro da vizinhança de abertos de** Y e, quando não houver ambiguidade, denotar-se-á apenas por $\mathcal{N}(Y)$. É evidente que, para todo o $a \in X$, $a \in \mathcal{N}(o(a))$.

Definição 4.1. Seja X um *σ-locale* e $Y \in \mathcal{S}(X)$. Escrever-se-á Y° para denotar o *sub-σ-locale*

$$Y^\circ := \bigwedge_{z \in \mathcal{N}(Y)} o(z).$$

Se $Y = Y^\circ$, o ***sub-σ-locale*** Y diz-se **ajustado**. Quando todo o *sub-σ-locale* de X é ajustado, X diz-se um ***σ-locale*** **adequado**.

Mas quando é que um *σ-locale* X é adequado?

Lema 4.2. *Seja X um σ-locale e I um conjunto de índices arbitrário. Sejam ainda $S, T, S_i \in \mathcal{S}(X)$, para $i \in I$. Então*

1. $S \subseteq^{\mathcal{S}} S^\circ$;
2. $S \subseteq^{\mathcal{S}} T \Rightarrow S^\circ \subseteq^{\mathcal{S}} T^\circ$;
3. $(S \vee T)^\circ = S^\circ \vee T^\circ$;
4. $\big(\bigwedge_{i \in I} S_i\big)^\circ \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{i \in I} S_i^\circ$.

Proposição 4.3. *Seja X um σ-locale. São equivalentes:*

1. *X é um σ-locale adequado.*

2. *Todo o sub-σ-locale fechado de X é ajustado.*

Demonstração. Seja X um *σ-locale* adequado. Então todos os seus *sub-σ-locales* são ajustados e, em particular, todos os seus *sub-σ-locales* fechados são ajustados.

Suponha-se agora que todo o *sub-σ-locale* fechado de X é ajustado, ou seja, que $(c(x))^\circ = c(x)$, para todo o $x \in X$. Seja $Y \in \mathcal{S}(X)$. Uma vez que, pela Proposição II.3.2, se pode escrever Y na forma $Y = \bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Y, a \leq b\}$ e notando que, por $x \in \mathcal{N}(o(x))$ e $o(x) \subseteq^{\mathcal{S}} o(z)$ para todo o $z \in \mathcal{N}(o(x))$, $(o(x))^\circ = o(x)$, aplicando o Lema II.4.2, vem

$$Y \subseteq^{\mathcal{S}} Y^\circ = \left(\bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Y, a \leq b\}\right)^\circ \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge\{(o(a) \vee c(b))^\circ : (a,b) \in \theta_Y, a \leq b\}$$

$$= \bigwedge\{(o(a))^\circ \vee (c(b))^\circ : (a,b) \in \theta_Y, a \leq b\} = \bigwedge\{o(a) \vee c(b) : (a,b) \in \theta_Y, a \leq b\} = Y.$$

Ou seja, $Y \subseteq^{\mathcal{S}} Y^\circ \subseteq^{\mathcal{S}} Y$, o que implica que $Y = Y^\circ$. Portanto, X é um *σ-locale* adequado. □

Por fim, atendendo a, dado um *σ-locale* X, se dizer que X é de **dimensão zero** se X tiver uma base de elementos complementados; e que X é **regular** se todo o elemento $b \in X$ se puder escrever como um supremo numerável de elementos do conjunto

$$\sigma(b) := \{a \in X : a \prec b\},$$

onde $a \prec b$ se e só se existe $d \in X$ tal que $a \wedge d = 0_X$ e $d \vee b = 1_X$, pode verificar-se que X ser de dimensão zero ou regular implica que X é adequado.

Lema 4.4. *Seja X um σ-locale. Para quaisquer elementos $a, b \in X$:*

1. *$a \in X$ é complementado se e só se $o(a)$ for um sub-σ-locale fechado, sendo, nesse caso, $o(a) = c(a^c)$.*

2. *$a \prec b$ se e só se existe $d \in X$ tal que $o(a) \subseteq^{\mathcal{S}} c(d) \subseteq^{\mathcal{S}} o(b)$.*

Proposição 4.5.

1. *Todo o σ-locale de dimensão zero é um σ-locale adequado.*

2. *Todo o σ-locale regular é um σ-locale adequado.*

Demonstração. 1. Seja X um *σ-locale* de dimensão zero e considere-se uma base B em X de elementos complementados. Então, para todo o $x \in X$, existe $A_x \subseteq B$ numerável, tal que $x = \bigvee A_x$, e

$$c(x) = c\left(\bigvee A_x\right) = \bigwedge_{a \in A_x} c(a) = \bigwedge_{a \in A_x} o(a^c),$$

resultando a última igualdade do Lema II.4.4. Posto isto, também é fácil verificar que, para todo o $a \in A_x$, $a^c \in \mathcal{N}(c(x))$ e, consequentemente,

$$(c(x))^\circ = \bigwedge_{z \in \mathcal{N}(c(x))} o(z) \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{a \in A_x} o(a^c) = c(x).$$

Assim, dado, pelo Lema II.4.2, também $c(x) \subseteq^{\mathcal{S}} (c(x))^\circ$, conclui-se que $(c(x))^\circ = c(x)$, obtendo-se que todos os *sub-σ-locales* fechados de X são ajustados, o que, pela Proposição II.4.3, equivale a dizer que X é um *σ-locale* adequado.

2. Seja X um *σ-locale* regular. Então, para todo o $x \in X$, existe um subconjunto $A_x \subseteq \sigma(x)$ numerável, tal que $x = \bigvee A_x$. Note-se que, de novo pelo Lema II.4.4, para qualquer $a \in \sigma(x)$, existe $d_a \in X$, tal que $o(a) \subseteq^{\mathcal{S}} c(d_a) \subseteq^{\mathcal{S}} o(x)$. Logo, $c(x) \subseteq^{\mathcal{S}} o(d_a) \subseteq^{\mathcal{S}} c(a)$, o que implica que $\{d_a : a \in A_x\} \subseteq \mathcal{N}(c(x))$. Consequentemente,

$$(c(x))^\circ = \bigwedge_{z \in \mathcal{N}(c(x))} o(z) \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{a \in A_x} o(d_a) \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{a \in A_x} c(a) = c\big(\bigvee A_x\big) = c(x) \subseteq^{\mathcal{S}} (c(x))^\circ,$$

de onde se obtém que $(c(x))^\circ = c(x)$. Deste modo, verificou-se que todo o *sub-σ-locale* fechado de X é ajustado, ou seja, que X é um *σ-locale* adequado. □

5. Locales e σ-locales

Tal como já foi referido anteriormente, por razões técnicas, os resultados a ser apresentados no Capítulo IV estão desenvolvidos para *sub-σ-locales*. No entanto, em contextos práticos, o objetivo é aplicá-los, principalmente, a *locales*. Assim sendo, quando é que a teoria dos *σ-locales* se reduz à teoria dos *locales*, para se poder aplicar esta última ao trabalhar com *σ-locales*?

Na Proposição I.1.8, provou-se que, se um reticulado sup-σ-completo X for fortemente de Lindelöf, então X é um reticulado completo. Sob esta condição, pode ainda verificar-se que muitos conceitos da teoria de *σ-locales* coincidirão com os seus correspondentes da teoria dos *locales*, entre eles, as definições de *σ-locale* e aplicação σ-locálica.

Proposição 5.1. *1. Todo o σ-locale fortemente de Lindelöf é um locale.*

2. Toda a aplicação σ-locálica entre σ-locales fortemente de Lindelöf é uma aplicação locálica.

Demonstração. 1. Seja X um *σ-locale* fortemente de Lindelöf. Então, pela Proposição I.1.8, X é um reticulado completo e, consequentemente, para provar que X é um *locale*, basta verificar que satisfaz a lei distributiva da Definição I.2.1.

Seja A um subconjunto arbitrário de X. Dado X ser fortemente de Lindelöf, existe $Z \subseteq A$ numerável, tal que $a \leq \bigvee Z$, para todo o $a \in A$, e $\bigvee A = \bigvee Z$. Assim, para qualquer $b \in X$, pela lei distributiva do *σ-locale* X,

$$\big(\bigvee_{a \in A} a\big) \wedge b = \big(\bigvee_{z \in Z} z\big) \wedge b = \bigvee_{z \in Z} (z \wedge b) = \bigvee_{a \in A} (a \wedge b),$$

onde a última igualdade resulta de se provar não só que, para todo o $a \in A$, $a \wedge b \leq \big(\bigvee_{a \in A} a\big) \wedge b = \bigvee_{z \in Z} (z \wedge b)$, como também que, para qualquer $d \in X$, tal que $a \wedge b \leq d$ para todo o $a \in A$, em particular, $z \wedge b \leq d$ para todo o $z \in Z$ e, consequentemente, $\bigvee_{z \in Z} (z \wedge b) \leq d$.

2. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação σ-locálica entre *σ-locales* fortemente de Lindelöf. Então f^* preserva ínfimos finitos e supremos numeráveis. Mostre-se que f^* também preserva supremos arbitrários.

Seja A um subconjunto arbitrário de Y. Como Y é fortemente de Lindelöf, existe $Z \subseteq A$ numerável, tal que $a \leq \bigvee Z$, para todo o $a \in A$. Para além disso, também $\bigvee A = \bigvee Z$; assim, e recordando que f^* preserva supremos numeráveis, vem

$$f^*\big(\bigvee_{a \in A} a\big) = f^*\big(\bigvee_{z \in Z} z\big) = \bigvee_{z \in Z} f^*(z) = \bigvee_{a \in A} f^*(a),$$

resultando a última igualdade não só de $f^*(a) \leq f^*\big(\bigvee_{a \in A} a\big) = \bigvee_{z \in Z} f^*(z)$, para todo o $a \in A$, como também de, para qualquer $d \in X$, tal que $f^*(a) \leq d$ para todo o $a \in A$, em particular, $f^*(z) \leq d$ para todo o $z \in Z$ e, consequentemente, $\bigvee_{z \in Z} f^*(z) \leq d$.

Logo, f^* preserva ínfimos finitos e supremos arbitrários e f é uma aplicação locálica. □

Sendo X um *σ-locale* fortemente de Lindelöf, X será, então, um *locale*, e recordando que, alternativamente, os *sublocales* de X podem ser representados por relações de congruência no *locale* X, também o *co-frame* dos *sub-σ-locales* de X coincidirá com o *co-frame* dos *sublocales* de X.

Proposição 5.2. *Seja X um σ-locale fortemente de Lindelöf. Então os sub-σ-locales do σ-locale X são exatamente os sublocales do locale X. Em particular, S é um sub-σ-locale de X se e só se S é um sublocale de X.*

Demonstração. Como X ser um *σ-locale* fortemente de Lindelöf implica que X é um *locale*, faz sentido falar-se em *sublocales* de X. Quer-se mostrar que os *sub-σ-locales* de X são exatamente os *sublocales* de X. Para tal, mostrar-se-á que S é um *sub-σ-locale* de X se e só se S é um *sublocale* de X, ou seja, que θ_S é uma congruência no *σ-locale* X (excepcionalmente, designar-se-á a mesma por σ-congruência, ao longo desta demonstração) se e só se θ_S é uma relação de congruência no *locale* X.

Se θ_S for uma congruência em X, é evidente que, em particular, será uma σ-congruência em X. Suponha-se, agora, que θ_S é uma σ-congruência em X. Dado θ_S preservar, por definição de σ-congruência, ínfimos finitos, falta verificar que também preserva supremos arbitrários.

Seja I um conjunto de índices arbitrário e considerem-se elementos $(a_i, b_i) \in \theta_S$, para $i \in I$. Visto que X é fortemente de Lindelöf, para $\{a_i : i \in I\}$ e $\{b_i : i \in I\}$, existem, respetivamente, $J_1 \subseteq I$ e $J_2 \subseteq I$ numeráveis, tais que, para todo o $i \in I$, $a_i \leq \bigvee_{j \in J_1} a_j$ e $b_i \leq \bigvee_{j \in J_2} b_j$. Mais: tem-se ainda que $\bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{j \in J_1} a_j$ e $\bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{j \in J_2} b_j$. Seja $J = J_1 \cup J_2$. Como J_1 e J_2 são numeráveis, J é numerável. Para além disso, dado que $J_1, J_2 \subseteq J$ e $J \subseteq I$, tem-se que

$$\bigvee_{j \in J_1} a_j \leq \bigvee_{j \in J} a_j \leq \bigvee_{j \in I} a_j = \bigvee_{j \in J_1} a_j \quad \text{e} \quad \bigvee_{j \in J_2} b_j \leq \bigvee_{j \in J} b_j \leq \bigvee_{j \in I} b_j = \bigvee_{j \in J_2} b_j.$$

Logo, $\bigvee_{j \in J} a_j = \bigvee_{j \in I} a_j$, $\bigvee_{j \in J} b_j = \bigvee_{j \in I} b_j$ e, portanto, $(\bigvee_{i \in I} a_i, \bigvee_{i \in I} b_i) = (\bigvee_{j \in J} a_j, \bigvee_{j \in J} b_j) \in \theta_S$, uma vez que θ_S preserva supremos numeráveis e J é um conjunto numerável. □

Por último, relativamente às propriedades de separação, atendendo a que, sob a condição de X ser fortemente de Lindelöf, para qualquer $a \in X$, a congruência Δ_a no *σ-locale* X é uma congruência no *locale* X e que, nos dois casos, ela representa, respetivamente, um *sub-σ-locale* aberto e um *sublocale* aberto, conclui-se que o conjunto dos *sub-σ-locales* abertos de X coincide com o conjunto dos *sublocales* abertos de X e, consequentemente, X ser um σ-*locale* adequado fortemente de Lindelöf será equivalente a X ser um *locale* adequado.

Proposição 5.3. *Seja X um σ-locale fortemente de Lindelöf. Então X é um σ-locale adequado se e só se X é um locale adequado.*

Demonstração. Antes de mais, observe-se que, se X é um σ-*locale* fortemente de Lindelöf, os *sub-σ-locales* de X são precisamente os *sublocales* de X e, em particular, os *sub-σ-locales* abertos de X são precisamente os *sublocales* abertos de X.

Seja X um σ-*locale* adequado. Então todo o *sub-σ-locale* Y de X pode escrever-se na forma $Y = \bigwedge_{z\in\mathcal{N}(Y)} o(z)$, o que significa que todo o *sublocale* de X se pode escrever como uma interseção de *sublocales* abertos. Logo, pela Proposição I.2.9, X é um *locale* adequado.

Suponha-se, agora, que X é um *locale* adequado. Então, para qualquer *sublocale* Y de X, existe $B \subseteq X$, tal que $Y = \bigwedge_{x\in B} o(x)$ e, consequentemente, como $B \subseteq \mathcal{N}(Y)$, vem

$$Y \subseteq Y^\circ = \bigwedge_{z\in\mathcal{N}(Y)} o(z) \subseteq \bigwedge_{x\in B} o(x) = Y.$$

Assim, obtém-se que $Y = Y^\circ$, para todo o *sub-σ-locale* Y de X e, portanto, X é um σ-*locale* adequado. □

Para além disso, também as condições suficientes, estudadas anteriormente, para X ser um σ-*locale* adequado serão equivalentes às suas correspondentes na teoria dos *locales*.

Proposição 5.4. *Seja X um σ-locale fortemente de Lindelöf.*

1. *X é um σ-locale de dimensão zero se e só se X é um locale de dimensão zero;*

2. *X é um σ-locale regular se e só se X é um locale regular.*

Demonstração. 1. Por um lado, se X for um σ-*locale* de dimensão zero, é evidente que X é um *locale* de dimensão zero: pois a base de elementos complementados no σ-*locale* X será uma base de elementos complementados no *locale* X.

Por outro lado, suponha-se que X é um *locale* de dimensão zero. Seja B uma base de elementos complementados em X. Para todo o $x \in X$, existe $A_x \subseteq B$, tal que $x = \bigvee A_x$. Para além disso, como X é fortemente de Lindelöf, para cada $x \in X$, existe $B_x \subseteq A_x$ numerável, tal que $a \leq \bigvee B_x$, para todo o $a \in A_x$, e $x = \bigvee A_x = \bigvee B_x$. Assim, e como $B_x \subseteq B$, obtém-se que todo o elemento $x \in X$ se pode escrever como um supremo numerável de elementos de B, o que implica que B é uma base de elementos complementados no σ-*locale* X, ou seja, X é um σ-*locale* de dimensão zero.

2. Por definição de σ-*locale* regular e de *locale* regular, é imediato que se X for um σ-*locale* regular, então X será um *locale* regular.

Seja X é um *locale* regular. Para todo o $x \in X$, existe $A_x \subseteq \sigma(x)$, tal que $x = \bigvee A_x$. Para além disso, dado X ser fortemente de Lindelöf, para cada $x \in X$, existe $B_x \subseteq A_x$ numerável, tal que $a \leq \bigvee B_x$, para todo o $a \in A_x$, e $x = \bigvee A_x = \bigvee B_x$. Logo, visto que $B_x \subseteq \sigma(x)$, todo o elemento $x \in X$ pode escrever-se como um supremo numerável de elementos de $\sigma(x)$, o que implica que X é um σ-*locale* regular. □

Mas, na prática, e para concluir este capítulo, a partir de um *locale* X, como se pode averiguar se X é um σ-*locale* fortemente de Lindelöf, para se poder deixar de lado o prefixo 'σ'?

Proposição 5.5. *Todo o locale com uma base numerável é um* σ*-locale fortemente de Lindelöf.*

Demonstração. Seja X um *locale* com uma base numerável. Então X é um σ-*locale*, em consequência de X ser *locale*, e por X ser um *locale* com uma base numerável, também X, como σ-*locale*, terá uma base numerável (pois qualquer supremo que envolva elementos da base, terá, necessariamente, de ser um supremo numerável). Logo, pela Proposição I.1.9, segue que X é um σ-*locale* fortemente de Lindelöf. □

Capítulo III

Uma equivalência categorial envolvendo os espaços mensuráveis

Neste capítulo, pretende-se mostrar que existe uma adjunção entre a categoria dos espaços mensuráveis e aplicações mensuráveis e a categoria dos σ-*locales* booleanos e aplicações σ-locálicas, que conduz a uma equivalência de categorias entre a subcategoria plena dos espaços mensuráveis sóbrios e a subcategoria plena dos σ-*locales* booleanos espaciais. As demonstrações omitidas ao longo deste capítulo podem ser encontradas em [1].

1. As categorias Mens e Bσ-Loc

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Considere-se ainda o conjunto das partes de X, $\mathcal{P}(X)$.

1. Designa-se por **σ-álgebra em** X, uma família $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaça: $\emptyset, X \in \mathcal{A}$; para todo o $A \in \mathcal{A}$, $A^c := X - A \in \mathcal{A}$; e, para qualquer família $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, também $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.
2. O conjunto X, munido com uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, diz-se um **espaço mensurável**, denotando-se por $(X,\mathcal{A})$, ou, simplesmente, X, quando não houver ambiguidade relativamente à σ-álgebra considerada. Os elementos da σ-álgebra $\mathcal{A}$ designam-se por **conjuntos $\mathcal{A}$-mensuráveis**.

Caso $X = \emptyset$, a única σ-álgebra em X é $\{\emptyset\}$, o que conduz ao espaço mensurável $(\emptyset, \{\emptyset\})$.

Definição 1.2. Uma aplicação $f : (X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{A}_Y)$ entre espaços mensuráveis é uma **função $(\mathcal{A}_X,\mathcal{A}_Y)$-mensurável**, ou, simplesmente, **mensurável**, se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$, para todo o $B \in \mathcal{A}_Y$.

Os conjuntos mensuráveis e aplicações mensuráveis, com a lei de composição usual de aplicações, formam a categoria dos espaços mensuráveis, que será denotada por *Mens*.

Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra associada a algum conjunto não vazio X. Munida com a relação de ordem induzida por $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Boole sup-σ-completa, onde os ínfimos finitos serão dados pelas interseções finitas e os supremos numeráveis pelas reuniões numeráveis. Como também verifica a lei distributiva da Definição II.1.1, obtém-se que $\mathcal{A}$ é, mais especificamente, um σ-*frame* booleano, isto é, um σ-*frame*, cujo reticulado sup-σ-completo associado tem estrutura de álgebra de Boole.

Atendendo a que os homomorfismos de σ-*frames* entre σ-*frames* booleanos preservam complementos, tem-se que os σ-*frames* booleanos e os homomorfismos entre eles constituem uma subcategoria plena de σ-*Frm*, que se denotará por $B\sigma$-*Frm*. A categoria dual de $B\sigma$-*Frm*, $B\sigma$-*Loc*, corresponderá à subcategoria plena de σ-*Loc* dos σ-*locales* booleanos e aplicações σ-locálicas.

2. Descrevendo a adjunção

Pretende-se construir uma adjunção entre as categorias *Mens* e $B\sigma$-*Loc*. Para tal, comece-se por definir os functores envolvidos na adjunção.

Seja $\mathcal{B}(X,\mathcal{A}_X)=\mathcal{A}_X$, para todo o espaço mensurável $(X,\mathcal{A}_X)$ e, para toda a aplicação mensurável $f:(X,\mathcal{A}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{A}_Y)$, seja $\mathcal{B}f$ a aplicação σ-locálica de $\mathcal{A}_X$ para $\mathcal{A}_Y$, onde $(\mathcal{B}f)^*=f^{-1}$. Uma vez que $(\mathcal{B}id_X)^*=id^*_{\mathcal{A}_X}$ e $(\mathcal{B}(g\circ f))^*=(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}=(\mathcal{B}f)^*\circ(\mathcal{B}g)^*$ (em $B\sigma$-*Frm*), tem-se que $\mathcal{B}:$ *Mens* $\longrightarrow B\sigma$-*Loc* é um functor de *Mens* para $B\sigma$-*Loc*.

Seja $\Sigma(L)$ o conjunto de todos os pontos de um σ-*locale* L. Defina-se $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}=\{\Sigma_L(a):a\in L\}$, onde $\Sigma_L(a)=\{\alpha\in\Sigma(L):\alpha(a)=1\}$, para $a\in L$. Para todo o σ-*locale* booleano L, $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$ é uma σ-álgebra em $\Sigma(L)$.

Mais: dada uma aplicação σ-locálica $h:L\longrightarrow M$ entre σ-*locales* booleanos, considere-se a aplicação $\Sigma h:\Sigma(L)\longrightarrow\Sigma(M)$ definida por $\Sigma h(\alpha)=\alpha\circ h^*$, para cada $\alpha\in\Sigma(L)$, caso $\Sigma(L)\neq\emptyset$, ou por ser a única aplicação que existe de $\emptyset$ para $\Sigma(M)$, caso $\Sigma(L)=\emptyset$. Atendendo à definição de ponto, é evidente que Σh está bem definida. Para além disso, também se tem que Σh é uma aplicação mensurável. Com efeito, seja $B\in\mathcal{A}_{\Sigma(M)}$. Se $\Sigma(L)=\emptyset$, como $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}=\{\emptyset\}$ e $(\Sigma h)^{-1}[B]=\emptyset$, obtém-se imediatamente o pretendido. Se $\Sigma(L)\neq\emptyset$, seja $b\in M$, tal que $B=\Sigma_M(b)=\{\alpha\in\Sigma(M):\alpha(b)=1\}$. Então

$$(\Sigma h)^{-1}[B]=\{\alpha\in\Sigma(L):(\Sigma h)(\alpha)\in B\}=\{\alpha\in\Sigma(L):\alpha\circ h^*(b)=1\}=\Sigma_L(h^*(b))\in\mathcal{A}_{\Sigma(L)}.$$

Deste modo, uma vez que não só $\Sigma id_X=id_{\Sigma X}$, como também $\Sigma(f\circ g)=\Sigma f\circ\Sigma g$, pois $(\emptyset,\{\emptyset\})$ é objeto inicial de *Mens* e $\Sigma(f\circ g)(\alpha)=\alpha\circ(f\circ g)^*=\alpha\circ g^*\circ f^*=\Sigma f(\Sigma g(\alpha))=(\Sigma f\circ\Sigma g)(\alpha)$, obtém-se que $\Sigma:B\sigma$-*Loc*$\longrightarrow$*Mens* é um functor de $B\sigma$-*Loc* para *Mens*.

O objetivo desta secção é mostrar que o functor $\mathcal{B}$ é adjunto esquerdo de Σ.

Proposição 2.1. *Considere-se um σ-locale L.*

1. *Existe uma correspondência bijetiva entre os pontos de L e os filtros σ-primos de L, que a cada ponto α de L faz corresponder o filtro σ-primo $F_\alpha=\alpha^{-1}(1)$ e a cada filtro σ-primo F faz corresponder o ponto α_F de L dado por $\alpha_F(u)=1$ se e só se $u\in F$;*

2. *Se L for um σ-locale booleano, então os filtros σ-primos em L são precisamente os ultrafiltros em L que são fechados para ínfimos numeráveis;*

3. *Seja $(X,\mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável e considere-se o caso em que $L=\mathcal{A}_X$. Então, identificando $\mathbb{P}$ com $\{0,1\}\subseteq[0,\infty]$, μ é uma medida não nula em L com valores em $\{0,1\}$ se e só se existe um ponto α no σ-locale $\mathcal{A}_X$, definido por $\alpha(U)=\mu(U)$, para $U\in\mathcal{A}_X$, tal que $\mu=i\circ\alpha$, onde i é a aplicação inclusão de $\{0,1\}$ em $[0,\infty]$.*

Dado um espaço mensurável $(X,\mathcal{A}_X)$, defina-se a aplicação $\eta_X : (X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow \Sigma\mathcal{B}X$, onde $\eta_X = id_{(\emptyset,\{\emptyset\})}$ se $X=\emptyset$ e, caso $X \neq \emptyset$, para cada $x \in X$, $\eta_X(x) : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathbb{P}$ é o homomorfismo de σ-*frames* definido por $\eta_X(x)(U) = 1$ se e só se $x \in U$, para $U \in \mathcal{A}_X$. A aplicação η_X é uma aplicação mensurável. De facto, seja $A \in \mathcal{A}_{\Sigma\mathcal{B}X}$, isto é, seja $A = \Sigma_{\mathcal{A}_X}(U) = \{\alpha \in \Sigma(\mathcal{A}_X) : \alpha(U) = 1\}$, para algum $U \in \mathcal{A}_X$. Então

$$\eta_X^{-1}(A) = \eta_X^{-1}(\Sigma_{\mathcal{A}_X}(U)) = \{x \in X : \eta_X(x) \in \Sigma_{\mathcal{A}_X}(U)\} = \{x \in X : \eta_X(x)(U) = 1\} = U \in \mathcal{A}_X.$$

Proposição 2.2. *A família $\eta = (\eta_X)_{X \in Ob(Mens)}$ é uma transformação natural de 1_{Mens} para $\Sigma \circ \mathcal{B}$.*

Demonstração. Seja $f : (X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{A}_Y)$ uma aplicação mensurável. Se $X=\emptyset$, dado $(\emptyset,\{\emptyset\})$ ser objeto inicial de *Mens*, é evidente que $(\Sigma\circ\mathcal{B})f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$. Se $X \neq \emptyset$, para cada $x \in X$,

$$(\Sigma\circ\mathcal{B})(f)(\eta_X(x)) = (\Sigma(\mathcal{B}f)(\eta_X(x))) = \eta_X(x)\circ(\mathcal{B}f)^* = \eta_X(x)\circ f^{-1} = \eta_Y(f(x)),$$

visto que, para todo o $U \in \mathcal{A}_Y$,

$$(\eta_X(x))(f^{-1}(U)) = 1 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow f(x) \in U \Leftrightarrow \eta_Y(f(x))(U) = 1.$$

Logo, $(\Sigma\circ\mathcal{B})f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$ para toda a aplicação mensurável f e, portanto, $(\eta_X)_{X \in Ob(Mens)}$ é uma transformação natural. $\square$

Dado um σ-*locale* booleano L, considere-se a aplicação $\varepsilon_L : L \longrightarrow \mathcal{B}\Sigma L$, onde $\varepsilon_L(a) = \Sigma_L(a)$. Atendendo a $\mathcal{B}\Sigma L = \{\Sigma_L(a) : a \in L\}$, é evidente que ε_L está bem definida. Para além disso, ε_L é também um homomorfismo de σ-*frames*. Com efeito, seja $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos em L. Recordando que $\alpha \in \Sigma(L)$ tem valores em $\{0,1\}$,

$$\varepsilon_L(a_1 \wedge a_2) = \Sigma_L(a_1 \wedge a_2) = \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(a_1 \wedge a_2) = 1\} = \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(a_1) \wedge \alpha(a_2) = 1\}$$

$$= \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(a_1) = 1\} \cap \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(a_2) = 1\} = \Sigma_L(a_1) \cap \Sigma_L(a_2) = \varepsilon_L(a_1) \cap \varepsilon_L(a_2)$$

e

$$\varepsilon_L\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} a_i\big) = \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} a_i\big) = 1\} = \{\alpha \in \Sigma(L) : \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha(a_i) = 1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(a_i) = 1\}.$$

Logo, ε_L é um homomorfismo de σ-*frames*.

Denote-se por $\sigma_L : \mathcal{B}\Sigma L \longrightarrow L$ a aplicação σ-locálica representada pelo homomorfismo de σ-*frames* ε_L, isto é, a aplicação σ-locálica que verifica $\sigma_L^* = \varepsilon_L$.

Proposição 2.3. *A família $\sigma = (\sigma_L)_{L \in Ob(B\sigma\text{-}Loc)}$ é uma transformação natural de $\mathcal{B}\circ\Sigma$ para $1_{B\sigma\text{-}Loc}$.*

Demonstração. Seja $f : L \longrightarrow M$ uma aplicação σ-locálica entre σ-*locales* booleanos. Para qualquer $x \in M$, atendendo às definições de $\mathcal{B}$ e ε_M,

$$(((\mathcal{B}\circ\Sigma)(f))^* \circ \varepsilon_M)(x) = (\mathcal{B}(\Sigma f))^*(\varepsilon_M(x)) = (\Sigma f)^{-1}(\Sigma_M(x)) = \{\alpha \in \Sigma(L) : \Sigma f(\alpha) \in \Sigma_M(x)\}$$

$$= \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha \circ f^* \in \Sigma_M(x)\} = \{\alpha \in \Sigma(L) : \alpha(f^*(x)) = 1\} = \Sigma_L(f^*(x)) = \varepsilon_L(f^*(x)).$$

Desta forma, tem-se que $((\mathcal{B}\circ\Sigma)(f))^*\circ\varepsilon_M=\varepsilon_L\circ f^*$ em $B\sigma$-*Frm*, ou seja, $f\circ\sigma_L=\sigma_M\circ(\mathcal{B}\circ\Sigma)(f)$ em $B\sigma$-*Loc* e, consequentemente, $(\sigma_L)_{L\in Ob(B\sigma\text{-}Loc)}$ é uma transformação natural de $\mathcal{B}\circ\Sigma$ para $1_{B\sigma\text{-}Loc}$. $\square$

Proposição 2.4. *Seja L um σ-frame booleano. Então*

1. *ε_L é uma aplicação sobrejetiva;*

2. *ε_L é uma aplicação injetiva se e só se ε_L preserva a relação de ordem de L no sentido estrito.*

Demonstração. 1. Atendendo à definição de ε_L, é evidente que ε_L é uma aplicação sobrejetiva.

2. Por um lado, decorre facilmente da injetividade de ε_L e do facto de ε_L preservar ínfimos finitos que ε_L preserva a relação de ordem de L no sentido estrito. Por outro, considerando que ε_L preserva a relação de ordem de L no sentido estrito, por redução ao absurdo, conclui-se facilmente que ε_L tem de ser injetiva. $\square$

Finalmente, está-se em condições de provar a adjunção pretendida, isto é, que $\mathcal{B}$ é adjunto esquerdo de Σ. Considerem-se as transformações naturais $\eta:1_{Mens}\longrightarrow\Sigma\circ\mathcal{B}$ e $\sigma:\mathcal{B}\circ\Sigma\longrightarrow 1_{B\sigma\text{-}Loc}$.

Se $\Sigma(L)=\emptyset$, atendendo a que $(\emptyset,\{\emptyset\})$ é objeto inicial de *Mens*, tem-se que $\Sigma(\sigma_L)\circ\eta_{\Sigma L}=1_{\Sigma L}$. Se $\Sigma(L)\neq\emptyset$, para qualquer $\alpha\in\Sigma(L)$, por definição de Σ, $\Sigma\sigma_L(\eta_{\Sigma L}(\alpha))=\eta_{\Sigma L}(\alpha)\circ\varepsilon_L$. Para cada $a\in L$, dado que $\eta_{\Sigma L}(\alpha)(\varepsilon_L(a))=\eta_{\Sigma L}(\alpha)(\Sigma_L(a))=1$ se e só se $\alpha\in\Sigma_L(a)$, ou seja, se e só se $\alpha(a)=1$, tem-se que $\eta_{\Sigma L}(\alpha)\circ\varepsilon_L=\alpha$. Logo, para todo o $\alpha\in\Sigma(L)$, $\Sigma\sigma_L(\eta_{\Sigma L}(\alpha))=\alpha$, o que significa que $\Sigma(\sigma_L)\circ\eta_{\Sigma L}=1_{\Sigma L}$.

Para além disso, para $U\in\mathcal{B}X$, $((\mathcal{B}\eta_X)^*(\varepsilon_{\mathcal{B}X}(U))=(\mathcal{B}\eta_X)^*(\Sigma_{\mathcal{B}X}(U))=\eta_X^{-1}(\Sigma_{\mathcal{A}_X}(U))=U$, onde a última igualdade já foi verificada, quando se mostrou que η_X é uma aplicação mensurável. Assim, vem que $(\mathcal{B}\eta_X)^*\circ\varepsilon_{\mathcal{B}X}=1_{\mathcal{B}X}$ em $B\sigma$-*Frm*, isto é, que $\sigma_{\mathcal{B}X}\circ\mathcal{B}\eta_X=1_{\mathcal{B}X}$ em $B\sigma$-*Loc*.

Desta maneira, mostrou-se então o resultado que se segue.

Proposição 2.5. *Os functores $\mathcal{B}$ e Σ são adjuntos, sendo $\mathcal{B}$ adjunto esquerdo, Σ adjunto direito, com unidade de adjunção $\eta:1_{Mens}\longrightarrow\Sigma\circ\mathcal{B}$ e co-unidade de adjunção $\sigma:\mathcal{B}\circ\Sigma\longrightarrow 1_{B\sigma\text{-}Loc}$.*

Para terminar, recordando que, para qualquer σ-*locale* booleano L, ε_L é um homomorfismo de σ-*frames* sobrejetivo, e notando que, no caso particular de $L=\mathcal{B}X$ para algum espaço mensurável $(X,\mathcal{A}_X)$, como $(\mathcal{B}\eta_X)^*\circ\varepsilon_{\mathcal{B}X}=1_{\mathcal{B}X}$, ε_L é também injetivo, tem-se que, para todo o espaço mensurável $(X,\mathcal{A}_X)$, $\varepsilon_{\mathcal{B}X}$ (e, consequentemente, $\sigma_{\mathcal{B}X}$) é um isomorfismo.

3. A equivalência de categorias

Definição 3.1. Um ***σ-locale*** booleano L diz-se **espacial** se existe um espaço mensurável $(X,\mathcal{A}_X)$, tal que L é isomorfo a $\mathcal{A}_X$.

Proposição 3.2. *Seja L um σ-locale booleano. Então L é espacial se e só se σ_L for um isomorfismo.*

Demonstração. Se $\sigma_L:\mathcal{B}\Sigma L\longrightarrow L$ é um isomorfismo, é evidente que $(\Sigma(L),\mathcal{A}_{\Sigma(L)})$ é um espaço mensurável, tal que L é isomorfo a $\mathcal{B}\Sigma L=\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$.

Por outro lado, suponha-se que L espacial. Seja $(X,\mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável, tal que L é isomorfo a $\mathcal{A}_X=\mathcal{B}X$, e considere-se um isomorfismo $h:L\longrightarrow\mathcal{B}X$ em $B\sigma$-*Loc*. Seja ainda $\bar{h}$ o morfismo, tal que $\bar{h} \circ h = id_L$ e $h \circ \bar{h} = id_{\mathcal{B}X}$. Como $(\sigma_L)_{L \in Ob(B\sigma\text{-}Loc)}$ é uma transformação natural, tem-se que $h \circ \sigma_L = \sigma_{\mathcal{B}X} \circ \mathcal{B}\Sigma h$, o que implica que $\sigma_L = \bar{h} \circ \sigma_{\mathcal{B}X} \circ \mathcal{B}\Sigma h$. Ou seja, σ_L pode escrever-se como uma composição de isomorfismos e, por isso, é também um isomorfismo. □

Nem todos os σ-*frames* booleanos são espaciais. A subcategoria dos σ-*frames* booleanos espaciais constituirá uma subcategoria plena de *B*σ*-Frm* e será denotada por *SpB*σ*-Frm*. A categoria dual de *SpB*σ*-Frm*, *SpB*σ*-Loc*, representará a subcategoria dos σ-*locales* booleanos espaciais e será uma subcategoria plena de *B*σ*-Loc*.

Definição 3.3. Diz-se que a **σ-álgebra** $\mathcal{A}_X$ de um espaço mensurável X **separa pontos de** X se, para todo o par de elementos distintos $x, y \in X$, existem $U, V \in \mathcal{A}_X$, tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 3.4. *Seja $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável. A aplicação mensurável η_X é injetiva se e só se $\mathcal{A}_X$ separa pontos de X.*

Demonstração. Antes de mais, observe-se que, caso $X = \emptyset$, então é imediato que $\eta_X = id_{(\emptyset, \{\emptyset\})}$ é uma aplicação injetiva e que $\{\emptyset\}$ separa pontos de $\emptyset$ – pois nem sequer há pontos para separar. Logo, a equivalência é válida para o espaço mensurável $(\emptyset, \{\emptyset\})$.

Considere-se agora que $X \neq \emptyset$. Comece-se por supor que $\mathcal{A}_X$ separa pontos de X. Sejam $x, y \in X$, tais que $\eta_X(x) = \eta_X(y)$. Se $x \neq y$, como $\mathcal{A}_X$ separa pontos de X, existem $U, V \in \mathcal{A}_X$, tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Consequentemente, $\eta_X(x)(U) = 1$, $\eta_X(x)(V) = 0$, $\eta_X(y)(U) = 0$ e $\eta_X(y)(V) = 1$, o que conduz ao absurdo $\eta_X(x) \neq \eta_X(y)$. Portanto, $x = y$.

Por outro lado, seja η_X uma aplicação injetiva. Sejam ainda $x, y \in X$, tais que $x \neq y$ (e note-se que, se X for singular, $\mathcal{A}_X$ separa trivialmente pontos de X). Então $\eta_X(x) \neq \eta_X(y)$, ou seja, existe $U \in \mathcal{A}_X$, tal que $\eta_X(x)(U) \neq \eta_X(y)(U)$. Nestas circunstâncias, supondo, sem perda de generalidade, que $\eta_X(x)(U) = 1$ (e $\eta_X(y)(U) = 0$), U e U^c são elementos de $\mathcal{A}_X$, tais que $U \cap U^c = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in U^c$. □

Definição 3.5. Seja $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável. Uma **medida** em X com valores em $\{0, 1\}$, isto é, uma medida $\mu : \mathcal{A}_X \longrightarrow [0, \infty]$ com valores em $\{0, 1\}$, diz-se **concentrada num ponto** se existir $x \in X$, tal que, para todo o $U \in \mathcal{A}_X$, $\mu(U) = 1$ se e só se $x \in U$.

Proposição 3.6. *Seja $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A unidade $\eta_X : X \longrightarrow \Sigma\mathcal{B}X$ é sobrejetiva;*

2. *Todo o filtro σ-primo em $\mathcal{A}_X$ é fixo;*

3. *Os filtros σ-primos em $\mathcal{A}_X$ são precisamente os filtros da forma $U_x = \{U \in \mathcal{A}_X : x \in U\}$, para $x \in X$;*

4. *Toda a medida não nula $\mu : \mathcal{A}_X \longrightarrow [0, \infty]$ com valores em $\{0, 1\}$ é concentrada em algum ponto de X.*

Consequentemente, para todo o espaço mensurável $(X, \mathcal{A}_X)$, $\eta_X : X \longrightarrow \Sigma\mathcal{B}X$ é um isomorfismo em *Mens* se e só se $\mathcal{B}X = \mathcal{A}_X$ separa pontos de X e se alguma das condições da Proposição III.3.6 se verifica.

Definição 3.7. Seja $(X,\mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável. Diz-se que X é um **espaço mensurável sóbrio** se $\mathcal{A}_X$ separa pontos de X e se todo o filtro σ-primo em $\mathcal{A}_X$ é fixo.

A subcategoria dos espaços mensuráveis sóbrios, *SMens*, é uma subcategoria plena de *Mens*.

Proposição 3.8. *Seja L um σ-locale booleano. $(\Sigma(L),\mathcal{A}_{\Sigma(L)})$ é um espaço mensurável sóbrio.*

Demonstração. Caso L seja um σ-*locale* booleano, tal que $\Sigma(L)=\emptyset$, então $(\Sigma(L),\mathcal{A}_{\Sigma(L)})=(\emptyset,\{\emptyset\})$ e, como $\eta_\emptyset = id_{(\emptyset,\{\emptyset\})}$ é uma aplicação injetiva e sobrejetiva, pelas Proposições III.3.4 e III.3.6, tem-se que $(\emptyset,\{\emptyset\})$ é um espaço mensurável sóbrio.

Considere-se que $\Sigma(L)\neq\emptyset$. Comece-se por verificar que $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$ separa pontos de $\Sigma(L)$. Se $\Sigma(L)$ é singular, $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$ separa trivialmente pontos de $\Sigma(L)$. Se $\Sigma(L)$ não é singular, sejam $\alpha_1,\alpha_2\in\Sigma(L)$, tais que $\alpha_1\neq\alpha_2$. Então existe $x\in L$, tal que $\alpha_1(x)\neq\alpha_2(x)$. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $\alpha_1(x)=1$ e $\alpha_2(x)=0$. Então $\alpha_1\in\Sigma_L(x)$ e $\alpha_2\notin\Sigma_L(x)$ e, como

$$\alpha_1(x)=1\Rightarrow\alpha_1(x^c)=\alpha_1(x^c)\wedge\alpha_1(x)=\alpha_1(x^c\wedge x)=\alpha_1(0)=0$$

$$\alpha_2(x)=0\Rightarrow\alpha_2(x^c)=\alpha_2(x^c)\vee\alpha_2(x)=\alpha_2(x^c\vee x)=\alpha_2(1)=1,$$

vem que $\alpha_1\notin\Sigma_L(x^c)$ e $\alpha_2\in\Sigma_L(x^c)$.

Para além disso, dado ser impossível existir $\alpha\in\Sigma(L)$, tal que $\alpha(x)=\alpha(x^c)=1$, tem-se que $\Sigma_L(x)\cap\Sigma_L(x^c)=\emptyset$. Assim, $\Sigma_L(x)$ e $\Sigma_L(x^c)$ são elementos de $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$, tais que $\alpha_1\in\Sigma_L(x)$, $\alpha_2\in\Sigma_L(x^c)$ e $\Sigma_L(x)\cap\Sigma_L(x^c)=\emptyset$.

Seja agora F um filtro σ-primo em $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$. Quer-se provar que $F=U_x=\{U\in\mathcal{A}_{\Sigma(L)}:x\in U\}$, para algum $x\in\Sigma(L)$. Considere-se $G=\{a\in L:\Sigma_L(a)\in F\}$. Uma vez que F é um filtro σ-primo em $\mathcal{A}_{\Sigma(L)}$, é fácil verificar que G é um filtro σ-primo em L.

Consequentemente, o ponto de L que corresponde ao filtro σ-primo G é dado por $\alpha_G: L\longrightarrow\mathbb{P}$, onde $\alpha_G(x)=1$ se e só se $x\in G$, e, para terminar, basta observar que $F=U_{\alpha_G}$ e aplicar a Proposição III.3.6. De facto,

$$\Sigma_L(a)\in F\Leftrightarrow a\in G\Leftrightarrow\alpha_G(a)=1\Leftrightarrow\alpha_G\in\Sigma_L(a)\Leftrightarrow\Sigma_L(a)\in U_{\alpha_G}.\quad\square$$

Seja $\mathcal{B}_1$ a restrição do codomínio de $\mathcal{B}$ a *SpBσ-Loc* e Σ_1 a restrição do codomínio de Σ a *SMens*. Se X é um espaço mensurável, é evidente que $\mathcal{B}X=\mathcal{B}_1X$ é um σ-*locale* booleano espacial. Se L é um σ-*locale* booleano, verificou-se na proposição anterior que $\Sigma L=\Sigma_1L$ é um espaço mensurável sóbrio. Denote-se por $\mathcal{B}_2$ a restrição do domínio de $\mathcal{B}_1$ a *SMens* e por Σ_2 a restrição do domínio de Σ_1 a *SpBσ-Loc*. Tem-se que $\mathcal{B}_2$ e Σ_2 são, respetivamente, functores de *SMens* para *SpBσ-Loc* e de *SpBσ-Loc* para *SMens* bem definidos.

Proposição 3.9. *As subcategorias SMens e SpBσ-Loc são equivalentes.*

Demonstração. Provar-se-á que $\mathcal{B}_2\circ\Sigma_2=1_{SpB\sigma\text{-}Loc}$ e $\Sigma_2\circ\mathcal{B}_2=1_{SMens}$.

Se L é um σ-*locale* booleano espacial, σ_L é um isomorfismo de σ-*locales* booleanos e $\overline{\sigma}=(\sigma_L)_{L\in Ob(SpB\sigma\text{-}Loc)}$ é um isomorfismo natural de $\mathcal{B}_2\circ\Sigma_2$ para $1_{SpB\sigma\text{-}Loc}$.

Se X é um espaço mensurável sóbrio, η_X é um isomorfismo em *Mens* e $\overline{\eta}=(\eta_X)_{X\in Ob(SMens)}$ é um isomorfismo natural de 1_{SMens} para $\Sigma_2\circ\mathcal{B}_2$. $\square$

Ou seja, pela Proposição III.**3.9**, *SMens* e *SpB*σ*-Loc* são categorias equivalentes. Importa agora averiguar "quanto" dos espaços mensuráveis onde se pratica teoria da medida está contido em *SMens*.

Nem todo o espaço mensurável é sóbrio. Contudo, em [1], Baboolal e Ghosh concluíram que qualquer espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, qualquer espaço métrico separável e qualquer espaço topológico T_1 com uma base numerável para a sua topologia, munido com a σ-álgebra gerada pela respetiva topologia, é um espaço mensurável sóbrio. Portanto, a maior parte dos espaços mensuráveis de maior relevância para a teoria da medida, como, por exemplo, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, são espaços mensuráveis sóbrios, o que sugere uma possível abordagem à teoria da medida dentro da subcategoria *SpB*σ*-Loc*, ou, mais abrangentemente, dentro da categoria σ*-Loc*.

Capítulo IV

Medidas em σ-Loc

1. Construindo uma medida no co-frame dos sub-σ-locales

Ao longo deste capítulo, seja X um σ-*locale* e μ uma medida em X, ou seja, uma medida considerada no reticulado sup-σ-completo X.

Proposição 1.1. *Qualquer medida num σ-locale é estavelmente σ-contínua.*

Demonstração. Seja X um σ-*locale* e $\mu : X \longrightarrow [0,\infty]$ um medida em X. Atendendo à lei distributiva de X e à σ-continuidade de μ, para qualquer $x \in X$ e qualquer sucessão crescente $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de X, tem-se

$$\mu\big(x \wedge \big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big)\big) = \mu\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} (x \wedge x_i)\big) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(x \wedge x_i),$$

uma vez que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ crescente implica que $(x \wedge x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é também crescente.

Logo, μ é uma medida estavelmente σ-contínua. □

A partir da medida μ em X, construir-se-á uma "medida exterior", μ^*, no *co-frame* $\mathcal{S}(X)$. O objetivo desta secção será provar que μ^* é uma medida em $\mathcal{S}(X)$.

Definição 1.2. Seja μ uma medida num σ-*locale* X. Considere-se a função $\mu^* : \mathcal{S}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$\mu^*(Y) = \inf_{x\in\mathcal{N}(Y)} \mu(x).$$

A função μ^* é designada por **medida exterior associada a μ em $\mathcal{S}(X)$**.

No contexto da teoria da medida, a aplicação μ^* pode ser considerada uma "medida exterior", no sentido de verificar as condições da noção de medida exterior σ-subaditiva, isto é, de ser uma aplicação não negativa que satisfaz $\mu^*(\mathbb{0}) = 0$ e $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, para qualquer $A \in \mathcal{S}(X)$ e qualquer família $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(X)$, tais que $A \subseteq^{\mathcal{S}} \bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Com efeito, supondo já provado que μ^* é uma medida em $\mathcal{S}(X)$, μ^* ser não negativa e $\mu^*(\mathbb{0}) = 0$ são consequências imediatas da definição de medida. Visto que a modularidade e a não negatividade de μ^* implicam que $\mu^*\big(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, aplicando limites quando n tende para ∞ e definindo $B_n = \bigvee_{i=1}^{n} A_i$, obtém-se que $\lim_n \mu^*(B_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Contudo, como $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente, $(\mu^*(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão crescente e, consequentemente, pela σ-continuidade de μ^*, $\lim_n \mu^*(B_n) = \sup_n \mu^*(B_n) = \mu^*\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} B_i\big) = \mu^*\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$. Deste modo, tem-se que $\mu^*\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ e, se $A \subseteq^{\mathcal{S}} \bigvee_{i\in\mathbb{N}} A_i$, pela monotonia de μ^*, vem

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Seja $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todos os filtros em X e considere-se a relação de ordem $\subseteq'$ em $\mathcal{F}(X)$, definida por, para $A, B \in \mathcal{F}(X)$, $A \subseteq' B$ se e só se $B \subseteq A$.

Proposição 1.3. *Seja X um σ-locale. Então o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{F}(X) \equiv (\mathcal{F}(X), \subseteq')$ é um co-frame, com $0_{\mathcal{F}(X)} = X$, $1_{\mathcal{F}(X)} = \{1_X\}$ e supremos e ínfimos não vazios dados, respetivamente, por $\bigvee_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} F_i$ e*

$$\bigwedge_{i\in I} F_i = \{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n : \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \exists i \in I \text{ tal que } x_j \in F_i\},$$

onde I é um conjunto de índices não vazio e $F_i \in \mathcal{F}(X)$, para $i \in I$.

Defina-se, agora, uma "medida exterior" $\mu^\circ : \mathcal{F}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ em $\mathcal{F}(X)$, de modo análogo ao realizado em $\mathcal{S}(X)$.

Definição 1.4. Seja X um σ-*locale* e μ uma medida em X. Designa-se por **medida exterior associada a μ em** $\mathcal{F}(X)$, a função $\mu^\circ : \mathcal{F}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$\mu^\circ(F) := \inf_{x\in F} \mu(x).$$

Por definição de μ^* e μ°, vem facilmente que $\mu^*(Y) = \mu^\circ(\mathcal{N}(Y))$, para $Y \in \mathcal{S}(X)$.

A ideia da demonstração a ser realizada (no teorema principal deste texto) é mostrar que μ^* é uma medida em $\mathcal{S}(X)$, utilizando o facto de μ° ser uma medida em $\mathcal{F}(X)$ e as relações que podem ser estabelecidas entre μ^* e μ°.

As demonstrações dos próximos dois resultados podem ser encontradas em [12].

Proposição 1.5. *Seja X um σ-locale e μ uma medida em X. A função μ° é uma medida co-contínua em $\mathcal{F}(X)$.*

Para $F \in \mathcal{F}(X)$, tal que $\mu^\circ(F) < \infty$, seja $\theta_{r(F)}$ a relação binária em X definida por

$$(x,y) \in \theta_{r(F)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists w \in F : \mu(w) < \infty \text{ e } \begin{cases} \mu(w \wedge x) - \mu(w \wedge x \wedge y) < \varepsilon \\ \mu(w \wedge y) - \mu(w \wedge x \wedge y) < \varepsilon \end{cases}.$$

Note-se que $\mu^\circ(F) < \infty$ equivale a dizer que F é um subconjunto de X de medida μ-finita.

Proposição 1.6. *Seja $F \in \mathcal{F}(X)$, tal que $\mu^\circ(F) < \infty$. Então $\theta_{r(F)}$ é uma relação de congruência em X e o σ-locale associado a $\theta_{r(F)}$, $r(F)$, satisfaz $r(F) \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{z\in F} o(z)$ e $\mu^*(r(F)) = \mu^\circ(F)$.*

Posto isto, estabelece-se a seguinte adjunção de Galois.

Proposição 1.7. *Seja X um σ-locale e μ uma medida em X. Considerem-se ainda as funções $\mathcal{N} : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{R} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ definidas, respetivamente, por $\mathcal{N}(Y) = \{z \in X : Y \subseteq^{\mathcal{S}} o(z)\}$ e $\mathcal{R}(F) := \bigwedge_{z\in F} o(z)$.*

1. *O par de funções $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$ é uma adjunção de Galois.*

2. *A função $\mathcal{N}$ preserva supremos arbitrários, e a função $\mathcal{R}$ preserva ínfimos arbitrários e supremos finitos.*

3. *Para todo o $F \in \mathcal{F}(X)$, tal que $\mu^\circ(F) < \infty$, tem-se $\mu^*(\mathcal{R}(F)) = \mu^\circ(F)$.*

Demonstração. 1. Comece-se por notar que $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$ são aplicações monótonas. De facto, sejam $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}(X)$ e $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$. Se $Y_1 \subseteq^{\mathcal{S}} Y_2$, então $\mathcal{N}(Y_2) \subseteq \mathcal{N}(Y_1)$ e, portanto, $\mathcal{N}(Y_1) \subseteq' \mathcal{N}(Y_2)$. Se $F_1 \subseteq' F_2$, então $F_2 \subseteq F_1$ e $\langle \Delta_z : z \in F_2\rangle \subseteq^{\mathcal{C}} \langle \Delta_z : z \in F_1\rangle$. Logo, $\bigwedge_{z\in F_1} o(z) \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{z\in F_2} o(z)$, o que significa que $\mathcal{R}(F_1) \subseteq^{\mathcal{S}} \mathcal{R}(F_2)$.

Por conseguinte, para provar que $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$ formam uma adjunção de Galois, basta ver que, para quaisquer $Y \in \mathcal{S}(X)$ e $F \in \mathcal{F}(X)$,

$$\mathcal{N}(Y) \subseteq' F \Leftrightarrow F \subseteq \mathcal{N}(Y) \Leftrightarrow \forall z \in F,\ z \in \mathcal{N}(Y) \Leftrightarrow \forall z \in F,\ Y \subseteq^{\mathcal{S}} o(z)$$

$$\Leftrightarrow Y \subseteq^{\mathcal{S}} \bigwedge_{z\in F} o(z) \Leftrightarrow Y \subseteq^{\mathcal{S}} \mathcal{R}(F).$$

2. $\mathcal{N}$ preservar supremos arbitrários e $\mathcal{R}$ preservar ínfimos arbitrários decorre, de imediato, do facto de $\mathcal{N}$ ser uma aplicação monótona adjunta de Galois à esquerda e de $\mathcal{R}$ ser uma aplicação monótona adjunta de Galois à direita.

Seja agora $\uparrow x = \{w \in X : x \leq w\}$, para $x \in X$. Por definição de filtro em X, verifica-se facilmente que $\uparrow x \in \mathcal{F}(X)$. Para além disso, para qualquer $F \in \mathcal{F}(X)$, $F = \bigwedge_{z\in F} \uparrow z$. De facto, seja $x \in \bigwedge_{z\in F} \uparrow z$. Então, pela Proposição IV.1.3, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$, onde, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \uparrow z_i$, para algum $z_i \in F$. Contudo, por F ser filtro, se $z_i \in F$, $\uparrow z_i \subseteq F$. Assim sendo, $x_i \in F$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, o que, visto F ser fechado para ínfimos finitos, implica que $x \in F$. Por outro lado, se $x \in F$, $x \in \uparrow x \subseteq \bigwedge_{z\in F} \uparrow z$.

Desta forma, para quaisquer $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$,

$$\mathcal{R}(F_1 \vee F_2) = \mathcal{R}\big(\big(\bigwedge_{z_1\in F_1} \uparrow z_1\big) \vee \big(\bigwedge_{z_2\in F_2} \uparrow z_2\big)\big) = \mathcal{R}\big(\bigwedge_{z_1\in F_1} \bigwedge_{z_2\in F_2} (\uparrow z_1 \vee \uparrow z_2)\big)$$

$$= \mathcal{R}\big(\bigwedge_{z_1\in F_1} \bigwedge_{z_2\in F_2} \uparrow (z_1 \vee z_2)\big) = \bigwedge_{z_1\in F_1} \bigwedge_{z_2\in F_2} \mathcal{R}(\uparrow (z_1 \vee z_2)) = \bigwedge_{z_1\in F_1} \bigwedge_{z_2\in F_2} o(z_1 \vee z_2),$$

sendo a última igualdade consequência de, dado $z_1 \vee z_2 \leq w$, para todo o $w \in \uparrow (z_1 \vee z_2)$, e $o : X \longrightarrow o[X]$ ser monótona, $\mathcal{R}(\uparrow (z_1 \vee z_2)) = \bigwedge\{o(w) : w \in \uparrow (z_1 \vee z_2)\} = o(z_1 \vee z_2)$. Como o

também preserva supremos numeráveis,

$$\mathcal{R}(F_1 \vee F_2) = \bigwedge_{z_1 \in F_1} \bigwedge_{z_2 \in F_2} (o(z_1) \vee o(z_2)) = \big(\bigwedge_{z_1 \in F_1} o(z_1) \big) \vee \big(\bigwedge_{z_2 \in F_2} o(z_2) \big) = \mathcal{R}(F_1) \vee \mathcal{R}(F_2).$$

Para terminar, notando que $0_X \leq x$ implica que $o(0_X) \subseteq^{\mathcal{S}} o(x)$ para todo o $x \in X$, e que $o(0_X) = \mathbb{0}$, vem

$$\mathcal{R}(0_{\mathcal{F}(X)}) = \mathcal{R}(X) = \bigwedge_{z \in X} o(x) = o(0_X) = \mathbb{0}.$$

3. Seja $F \in \mathcal{F}(X)$, tal que $\mu^\circ(F) < \infty$. Por um lado, uma vez que $F \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{R}(F))$,

$$\mu^*(\mathcal{R}(F)) = \inf_{x \in \mathcal{N}(\mathcal{R}(F))} \mu(x) \leq \inf_{x \in F} \mu(x) = \mu^\circ(F).$$

Por outro lado, como $\mu^\circ(F) < \infty$, pela Proposição IV.1.6, $r(F) \subseteq^{\mathcal{S}} \mathcal{R}(F)$ e $\mu^*(r(F)) = \mu^\circ(F)$. Mas $r(F) \subseteq^{\mathcal{S}} \mathcal{R}(F)$ implica que $\mathcal{N}(\mathcal{R}(F)) \subseteq \mathcal{N}(r(F))$, o que, por sua vez, implica que $\mu^*(r(F)) \leq \mu^*(\mathcal{R}(F))$. Por consequência, $\mu^\circ(F) = \mu^*(r(F)) \leq \mu^*(\mathcal{R}(F))$, o que conclui a demonstração. □

Se X for adequado, para $Y \in \mathcal{S}(X)$, vem $Y = \bigwedge_{z \in \mathcal{N}(Y)} o(z) = \mathcal{R}(\mathcal{N}(Y))$.

Finalmente, está-se em condições de demonstrar o teorema principal deste texto.

Teorema 1.8. *Seja X um σ-locale adequado. Seja ainda μ uma medida em X.*

1. *A medida exterior associada a μ, μ^*, é uma medida em $\mathcal{S}(X)$.*

2. *μ^* é uma medida co-contínua em subconjuntos filtrados de $\mathcal{S}(X)$ de medida μ^*-finita.*

3. *Se μ é uma medida σ-finita, então μ^* é uma medida estavelmente σ-contínua.*

Demonstração. 1. Comece-se por determinar o valor de μ^* em $\mathbb{0}$. Como $0_X \in \mathcal{N}(o(0_X)) = \mathcal{N}(\mathbb{0})$ e, atendendo à monotonia de μ, $\mu(0_X) \leq \mu(x)$ para todo o $x \in X$,

$$\mu^*(\mathbb{0}) = \inf_{x \in \mathcal{N}(\mathbb{0})} \mu(x) = \mu(0_X) = 0.$$

Sejam $S, T \in \mathcal{S}(X)$, tais que $S \subseteq^{\mathcal{S}} T$. Então $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$ e, consequentemente,

$$\mu^*(S) = \inf_{x \in \mathcal{N}(S)} \mu(x) \leq \inf_{x \in \mathcal{N}(T)} \mu(x) = \mu^*(T).$$

Considerem-se, agora, $S, T \in \mathcal{S}(X)$ arbitrários. Se $\mu^*(S) = \infty$ ou $\mu^*(T) = \infty$, uma vez que, por μ^* ser monótona, $\mu^*(S \vee T) = \infty$, é imediato que $\mu^*(S) + \mu^*(T) = \mu^*(S \vee T) + \mu^*(S \wedge T)$. Caso $\mu^*(S) < \infty$ e $\mu^*(T) < \infty$,

$$\mu^*(S) + \mu^*(T) = \mu^\circ(\mathcal{N}(S)) + \mu^\circ(\mathcal{N}(T))$$

$$= \mu^\circ(\mathcal{N}(S) \vee \mathcal{N}(T)) + \mu^\circ(\mathcal{N}(S) \wedge \mathcal{N}(T)) = \mu^*(\mathcal{R}(\mathcal{N}(S) \vee \mathcal{N}(T))) + \mu^*(\mathcal{R}(\mathcal{N}(S) \wedge \mathcal{N}(T))),$$

onde a penúltima e a última igualdade resultam, respetivamente, da modularidade de μ° e da Proposição IV.1.7, dado $\mathcal{N}(S)\vee\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{N}(S)\wedge\mathcal{N}(T)$ serem subconjuntos de X de medida μ-finita. Assim sendo, visto que $\mathcal{R}$ preserva supremos finitos e ínfimos arbitrários e que, por X ser um σ-*locale* adequado, $\mathcal{R}(\mathcal{N}(S))=S$ e $\mathcal{R}(\mathcal{N}(T))=T$,

$$\mu^*(S)+\mu^*(T)=\mu^*(\mathcal{R}(\mathcal{N}(S))\vee\mathcal{R}(\mathcal{N}(T)))+\mu^*(\mathcal{R}(\mathcal{N}(S))\wedge\mathcal{R}(\mathcal{N}(T)))=\mu^*(S\vee T)+\mu^*(S\wedge T).$$

Para terminar, seja $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de *sub-σ-locales* crescente em $\mathcal{S}(X)$. Recordando que $\mathcal{N}$ preserva supremos arbitrários, que μ° é σ-contínua e notando ainda que, se $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é crescente em $\mathcal{S}(X)$, $(\mathcal{N}(S_i))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente em $(\mathcal{F}(X),\subseteq')$, vem

$$\mu^*\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}S_i\big)=\mu^\circ\big(\mathcal{N}\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}S_i\big)\big)=\mu^\circ\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{N}(S_i)\big)=\sup_{i\in\mathbb{N}}\mu^\circ(\mathcal{N}(S_i))=\sup_{i\in\mathbb{N}}\mu^*(S_i).$$

2. Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto filtrado de $\mathcal{S}(X)$ de medida μ^*-finita. Uma vez que X é um σ-*locale* adequado e $\mathcal{R}$ preserva ínfimos arbitrários,

$$\mu^*\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}Y\big)=\mu^*\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{R}(\mathcal{N}(Y))\big)=\mu^*\big(\mathcal{R}\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{N}(Y)\big)\big).$$

Como $\mathcal{C}$ é um subconjunto de medida μ^*-finita, existe $Z\in\mathcal{C}$, tal que $\mu^*(Z)<\infty$. Logo, pela monotonia de μ°, $\mu^\circ\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{N}(Y)\big)\leq\mu^\circ(\mathcal{N}(Z))=\mu^*(Z)<\infty$ e, aplicando a Proposição IV.1.7,

$$\mu^*\big(\mathcal{R}\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{N}(Y)\big)\big)=\mu^\circ\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{N}(Y)\big).$$

Por último, observando que $\mathcal{C}$ ser um subconjunto filtrado de $\mathcal{S}(X)$ implica que $\{\mathcal{N}(Y):Y\in\mathcal{C}\}$ é um subconjunto filtrado de $\mathcal{F}(X)$, decorre da co-continuidade de μ° que

$$\mu^*\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}Y\big)=\mu^\circ\big(\bigwedge_{Y\in\mathcal{C}}\mathcal{N}(Y)\big)=\inf_{Y\in\mathcal{C}}\mu^\circ(\mathcal{N}(Y))=\inf_{Y\in\mathcal{C}}\mu^*(Y).$$

3. Seja μ uma medida σ-finita e considere-se a sucessão $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em X que satisfaz $\bigvee_{i\in\mathbb{N}}x_i=1_X$ e $\mu(x_i)<\infty$ para todo o $i\in\mathbb{N}$. Considerem-se ainda $y_i=x_1\vee\ldots\vee x_i$ e $S_i=o(y_i)$, para cada $i\in\mathbb{N}$.

Dado a sucessão $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser crescente em X, a sucessão $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será crescente em $\mathcal{S}(X)$.

Para além disso, a sucessão $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ também satisfaz

$$\forall i\in\mathbb{N},\mu^*(S_i)=\mu^\circ(\mathcal{N}(S_i))=\mu^\circ(\mathcal{N}(o(y_i)))\leq\mu(y_i)=\mu\big(\bigvee_{1\leq j\leq i}x_j\big)\leq\sum_{j=1}^{i}\mu(x_j)<\infty,$$

já que, por indução sobre n, é possível provar que $\mu\big(\bigvee_{1\leq j\leq n}x_j\big)\leq\sum_{j=1}^{n}\mu(x_j)$.

Mais: para qualquer $S\in\mathcal{S}(X)$, recordando a Proposição II.3.5 e o facto de que $o:X\longrightarrow o[X]$ preserva supremos numeráveis, atendendo a que $\bigvee_{i\in\mathbb{N}}y_i=\bigvee_{i\in\mathbb{N}}x_i$ e $o(1_X)=\mathbb{1}$, então

$$\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(S\wedge S_i)=\bigvee_{i\in\mathbb{N}}(S\wedge o(y_i))=S\wedge\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}o(y_i)\big)=S\wedge o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}y_i\big)$$

$$= S \wedge o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} x_i\big) = S \wedge o(1_X) = S \wedge \mathbb{1} = S.$$

Por fim, sendo $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente em $\mathcal{S}(X)$, de novo pela Proposição II.3.5,

$$\forall i \in \mathbb{N}, S_i \wedge \big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} Y_j\big) = \bigvee_{j\in\mathbb{N}} (S_i \wedge Y_j).$$

Desta maneira, averiguou-se que $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão que verifica todas as hipóteses do Lema I.1.17, o que permite aplicar o referido lema para concluir que μ^* é estavelmente σ-contínua. $\square$

Corolário 1.9. *Seja X um σ-locale adequado. Seja ainda μ uma medida em X. Então a medida exterior μ^* é uma medida em $\mathcal{S}(X)$ e*

1. *Se μ for uma medida σ-finita, então μ^* é uma medida σ-finita;*
2. *Se μ for uma medida finita, então μ^* é uma medida finita.*

Demonstração. 1. Suponha-se que μ é uma medida σ-finita. Então, por definição de medida σ-finita, existe uma sucessão $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em X, tal que $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} u_i = 1_X$ e $\mu(u_i) < \infty$ para todo o $i \in \mathbb{N}$.

Considere-se a sucessão $(o(u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(X)$. Esta sucessão verifica

$$\bigvee_{i\in\mathbb{N}} o(u_i) = o\big(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} u_i\big) = o(1_X) = \mathbb{1},$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mu^*(o(u_i)) = \inf_{x\in\mathcal{N}(o(u_i))} \mu(x) = \mu(u_i) < \infty.$$

Portanto, μ^* é também uma medida σ-finita.

2. Caso μ seja uma medida finita, pela monotonia de μ, $\mu(x) \le \mu(1_X) < \infty$, para todo o $x \in X$. Logo, $\mu^*(\mathbb{1}) = \inf_{x\in\mathcal{N}(\mathbb{1})} \mu(x) < \infty$, o que significa que μ^* é uma medida finita. $\square$

Seja Y um *sub-σ-locale* de X. Uma vez que os *sub-σ-locales* de Y podem ser vistos como *sub-σ-locales* de X, uma questão que agora naturalmente se levanta é se a restrição de μ^* a $\mathcal{S}(Y)$ é também uma medida em $\mathcal{S}(Y)$. Recorde-se que, pela Proposição II.3.6, Y e $\{Y \wedge o(x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{S}(X)$ são *σ-locales* isomorfos e $\mathcal{S}(Y)$ é isomorfo (como *co-frame*) a $\{Z \in \mathcal{S}(X) : Z \subseteq^{\mathcal{S}} Y\} \subseteq \mathcal{S}(X)$.

Corolário 1.10. *Seja X um σ-locale adequado e μ uma medida em X. Seja ainda $Y \in \mathcal{S}(X)$.*

Denote-se por $\mu_{|Y}$ a restrição de μ^* a $\mathcal{O}^Y := \{Y \wedge o(x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{S}(X)$. Então $\mu_{|Y}$ é uma medida em Y e a medida exterior associada a $\mu_{|Y}$ é a restrição de μ^* a $\downarrow Y := \{Z \in \mathcal{S}(X) : Z \subseteq^{\mathcal{S}} Y\} \subseteq \mathcal{S}(X)$.

Demonstração. Antes de mais, observe-se que, como $\mathcal{O}^Y$ é um *σ-locale*, a restrição de $\mu^* : \mathcal{S}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ a $\mathcal{O}^Y$ será uma medida em $\mathcal{O}^Y$: pode verificar-se que $\mu_{|Y}$ satisfará as condições de medida, por as herdar de μ^*, em resultado de $\mathcal{O}^Y$ ser um reticulado sup-σ-completo.

Dado Y ser um *sub-σ-locale* de X, pela Proposição II.3.6, $Y \equiv X/_{\theta_Y}$ é isomorfo a $\mathcal{O}^Y$. Seja $\bar{\alpha}$ o isomorfismo de *σ-frames* de Y para $\mathcal{O}^Y$ dado nessa proposição. Então $\mu_{|Y} \equiv \mu_{|Y} \circ \bar{\alpha}$ é uma medida em Y.

Mais: para um *sub-σ-locale* Y de X, de novo pela Proposição II.3.6, tem-se que $\mathcal{S}(Y)$ é isomorfo a $\downarrow Y \subseteq \mathcal{S}(X)$. Seja $\bar{\mu}$ o isomorfismo de *co-frames* de $\mathcal{S}(Y)$ para $\downarrow Y$ dado nessa proposição. Quer-se mostrar que a restrição de μ^* a $\downarrow Y$ é igual (a menos de isomorfismo) a $\mu^*_{|Y}$.

Comece-se por observar que a restrição de μ^* a $\downarrow Y$ é uma função $(\mu^*)_{|\downarrow Y} : \downarrow Y \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$(\mu^*)_{|\downarrow Y}(Z) = \mu^*(Z) = \inf_{z\in\mathcal{N}(Z)} \mu(z).$$

Por outro lado, a medida exterior associada a $\mu_{|Y}$ em $\mathcal{S}(Y)$ é dada pela função $\mu^*_{|Y} : \mathcal{S}(Y) \longrightarrow [0,\infty]$, onde

$$\mu^*_{|Y}(Z) = \inf_{[z]_Y\in\mathcal{N}_Y(Z)} (\mu_{|Y}\circ\bar{\alpha})([z]_Y) = \inf_{[z]_Y\in\mathcal{N}_Y(Z)} \mu_{|Y}(Y\wedge o(z)).$$

Provar-se-á que $\mu^*_{|Y} = (\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu}$. Ora, atendendo a que

$$([x]_Y,[y]_Y)\in\Delta_{[z]_Y} \Leftrightarrow [x]_Y\wedge[z]_Y = [y]_Y\wedge[z]_Y \Leftrightarrow [x\wedge z]_Y = [y\wedge z]_Y \Leftrightarrow (x\wedge z, y\wedge z)\in\theta_Y \Leftrightarrow (x,y)\in\Delta_z\vee\theta_Y,$$

tem-se que $\bar{\mu}(o([z]_Y)) = (o([z]_Y))_X = Y\wedge o(z)$. Consequentemente, uma vez que, para $Z\in\mathcal{S}(Y)$, $\bar{\mu}(Z)\in\downarrow Y$, isto é, $\bar{\mu}(Z) = (Z)_X \subseteq^{\mathcal{S}} Y$, vem

$$[z]_Y\in\mathcal{N}_Y(Z) \Leftrightarrow Z\subseteq^{\mathcal{S}} o([z]_Y) \Leftrightarrow (Z)_X = \bar{\mu}(Z)\subseteq^{\mathcal{S}}\bar{\mu}(o([z]_Y)) = Y\wedge o(z) \Leftrightarrow (Z)_X\subseteq^{\mathcal{S}} o(z) \Leftrightarrow z\in\mathcal{N}((Z)_X).$$

Tem-se ainda que, para qualquer $Z\in\mathcal{S}(Y)$,

$$((\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu})(Z) = \mu^*((Z)_X) = \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \mu(z), \text{ e}$$

$$\mu^*_{|Y}(Z) = \inf_{[z]_Y\in\mathcal{N}_Y(Z)} \mu_{|Y}(Y\wedge o(z)) = \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \mu^*(Y\wedge o(z)) = \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \Big(\inf_{w\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))} \mu(w)\Big).$$

Por um lado, como $z\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))$, $\inf_{w\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))} \mu(w)\le\mu(z)$ e, portanto,

$$\mu^*_{|Y}(Z) = \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \Big(\inf_{w\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))} \mu(w)\Big) \le \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \mu(z) = ((\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu})(Z).$$

Por outro lado, visto que, para $z\in\mathcal{N}((Z)_X)$, $(Z)_X\subseteq^{\mathcal{S}} Y\wedge o(z)$, então $\mathcal{N}(Y\wedge o(z))\subseteq\mathcal{N}((Z)_X)$ e, consequentemente,

$$\mu^*((Z)_X) = \inf_{w\in\mathcal{N}((Z)_X)} \mu(w) \le \inf_{w\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))} \mu(w),\ \forall z\in\mathcal{N}((Z)_X),$$

o que implica

$$((\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu})(Z) = \mu^*((Z)_X) \le \inf_{z\in\mathcal{N}((Z)_X)} \Big(\inf_{w\in\mathcal{N}(Y\wedge o(z))} \mu(w)\Big) = \mu^*_{|Y}(Z).$$

Assim, $\mu^*_{|Y}(Z) = ((\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu})(Z)$, para todo o $Z\in\mathcal{S}(Y)$, ou seja, $\mu^*_{|Y} = (\mu^*)_{|\downarrow Y}\circ\bar{\mu}$. □

2. Aplicações

Uma das limitações da teoria da medida clássica é a impossibilidade de definir uma medida não trivial e consistente em todos os subconjuntos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, que seja invariante relativamente ao grupo de isometrias do espaço.

Nesta secção, para terminar, mostrar-se-á que esta nova abordagem à teoria da medida permite, de facto, a construção de tal medida.

2.1. Construindo uma medida definida em todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Seja $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Considere-se o *locale* $\Omega(\mathbb{R}^n)$ constituído por todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ para a topologia euclidiana. Como $\Omega(\mathbb{R}^n)$ verifica o segundo axioma da numerabilidade, $\Omega(\mathbb{R}^n)$ tem uma base numerável. Logo, pela Proposição II.**5.5**, $\Omega(\mathbb{R}^n)$ será um σ-*locale* fortemente de Lindelöf e, portanto, daqui em diante, deixar-se-á de lado o prefixo 'σ'.

Para além disso, $\mathbb{R}^n$ é um espaço topológico regular, o que implica que $\Omega(\mathbb{R}^n)$ é um *locale* regular [11]. Portanto, pela Proposição II.**4.5**, $\Omega(\mathbb{R}^n)$ é um *locale* adequado.

Seja agora $\mathcal{L}^n$ a medida de Lebesgue n-dimensional. Recordando que $\mathcal{L}^n$ é uma medida de Borel, em particular, todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos $\mathcal{L}^n$-mensuráveis, o que significa que $\mathcal{L}^n$ está definida em todos os elementos de $\Omega(\mathbb{R}^n)$. Denote-se por λ_n a medida de Lebesgue n-dimensional restringida a $\Omega(\mathbb{R}^n)$.

Atendendo a que a família de subconjuntos $\mathcal{L}^n$-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, constitui uma σ-álgebra, ou seja, é uma álgebra booleana sup-σ-completa, $\mathcal{L}^n$ é uma medida em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ no sentido da definição tradicional, isto é, de ser uma função σ-aditiva que verifica $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$. Portanto, pela Proposição I.**1.13**, $\mathcal{L}^n$ é uma medida em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ (no sentido da Definição I.**1.11**) e, consequentemente, também λ_n é uma medida em $\Omega(\mathbb{R}^n)$.

Pelo teorema IV.**1.8**, λ_n pode estender-se a uma medida $\lambda_n^* : \mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow [0,\infty]$. Mostrar-se-á que λ_n^* é invariante relativamente ao grupo de isometrias euclidianas de $\mathbb{R}^n$, ou seja, ao conjunto das funções bijetivas de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ que preservam a distância euclidiana entre quaisquer dois pontos.

Seja $t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Então t é contínua e preserva a medida de abertos, isto é, $\lambda_n(t^{-1}(U)) = \lambda_n(U)$, para todo o $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Mais: por t ser contínua, a função $t^{-1} : \Omega(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^n)$ é um homomorfismo de *frames* e, como $\Omega(\mathbb{R}^n)$ e $o[\Omega(\mathbb{R}^n)]$ são isomorfos, pode ver-se t^{-1} como uma aplicação $t^{-1} : o[\Omega(\mathbb{R}^n)] \longrightarrow o[\Omega(\mathbb{R}^n)]$ que, a cada aberto $o(U)$, com $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, faz corresponder o aberto $o(t^{-1}(U))$. Pela Proposição II.**3.14**, t^{-1} pode ser estendida a uma função $((t^{-1})_*)_{-1} : \mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$ que preserva ínfimos arbitrários e supremos finitos. A fim de simplificar a notação, escreva-se simplesmente t_{-1} em vez de $((t^{-1})_*)_{-1}$.

Proposição 2.1. *Seja $t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Para cada sublocale Y de $\Omega(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lambda_n^*(Y) = \lambda_n^*(t_{-1}(Y)).$$

Demonstração. Seja Y um *sublocale* de $\Omega(\mathbb{R}^n)$. Por um lado, visto que, para todo o $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n(U) = \lambda_n(t^{-1}(U))$ e $\lambda_n(t^{-1}(U)) = \lambda_n^*(o(t^{-1}(U)))$, tem-se que

$$\lambda_n^*(Y) = \inf_{U \in \mathcal{N}(Y)} \lambda_n(U) = \inf_{U \in \mathcal{N}(Y)} \lambda_n(t^{-1}(U)) = \inf_{U \in \mathcal{N}(Y)} \lambda_n^*(o(t^{-1}(U))) \geq \lambda_n^*\Big(\bigwedge_{Z \in \mathcal{N}(Y)} o(t^{-1}(Z))\Big),$$

onde a última desigualdade resulta de λ_n^* ser monótona e $\bigwedge_{Z \in \mathcal{N}(Y)} o(t^{-1}(Z)) \subseteq o(t^{-1}(U))$, para todo o $U \in \mathcal{N}(Y)$. Como também $t_{-1}(o(U)) = o(t^{-1}(U))$, para todo o $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, t_{-1} preserva ínfimos arbitrários e $\Omega(\mathbb{R}^n)$ é adequado, vem

$$\lambda_n^*(Y) \geq \lambda_n^*\big(\bigwedge_{Z\in\mathcal{N}(Y)} t_{-1}(o(Z))\big) = \lambda_n^*(t_{-1}(\bigwedge_{Z\in\mathcal{N}(Y)} o(Z))) = \lambda_n^*(t_{-1}(Y)).$$

Por outro lado, note-se que, como $t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria euclidiana, t é uma aplicação contínua, bijetiva e aberta, o que equivale a dizer que t é um homeomorfismo. Seja $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a inversa de t. Dado s ser a aplicação inversa de uma isometria, s é também uma isometria. Assim, para um *sublocale* $A \subseteq \Omega(\mathbb{R}^n)$, de modo análogo ao efetuado para t_{-1}, pode verificar-se que $\lambda_n^*(A) \geq \lambda_n^*(s_{-1}(A))$ e, fazendo $A = t_{-1}(Y)$, obtém-se

$$\lambda_n^*(t_{-1}(Y)) \geq \lambda_n^*(s_{-1}(t_{-1}(Y))) = \lambda_n^*(Y),$$

uma vez que, por s ser inversa de t, s_{-1} é inversa de t_{-1}, bastando observar que $s_{-1} \circ t_{-1}$ e $t_{-1} \circ s_{-1}$ coincidem com $id_{\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))}$ nos *sublocales* abertos e nos *sublocales* fechados de $\Omega(\mathbb{R}^n)$, para se concluir que $s_{-1} \circ t_{-1} = id_{\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))}$ e $t_{-1} \circ s_{-1} = id_{\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))}$. □

Desta forma, mostrou-se que

$$\lambda_n^*(Y) = \lambda_n^*(t_{-1}(Y)),$$

para todo o *sublocale* Y de $\Omega(\mathbb{R}^n)$, estabelecendo-se a invariância de λ_n^* relativamente ao grupo de isometrias euclidianas de $\mathbb{R}^n$.

Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^n$. Denote-se por S_Z o *sublocale* induzido por Z em $\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$. Visto que $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff, $\mathbb{R}^n$ é T_D. Logo, a representação $Z \longrightarrow S_Z$ é precisa, o que implica que $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$, onde $\varphi(Z) = S_Z$, é uma aplicação injetiva. Isto significa que se pode ver o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ como um subconjunto de $\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$ e, portanto, através de φ, a medida λ_n^* em $\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$ atribui, em particular, a cada $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, o valor $\lambda_n^*(Z) := \lambda_n^*(\varphi(Z)) = \lambda_n^*(S_Z)$.

Quando $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável, o valor de $\lambda_n^*(Z)$ coincide com $\mathcal{L}^n(Z)$, dado $\mathcal{L}^n$ ser uma medida regular exterior, isto é, dado ser uma medida que, para todo o conjunto A $\mathcal{L}^n$-mensurável, verifica

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\mathcal{L}^n(G) : A \subseteq G, G \text{ aberto e } \mathcal{L}^n\text{-mensurável}\}.$$

Proposição 2.2. *Para todo o conjunto Z $\mathcal{L}^n$-mensurável, $\lambda_n^*(Z) = \mathcal{L}^n(Z)$. Consequentemente, λ_n^* pode ser vista como uma extensão de $\mathcal{L}^n$ a $\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))$.*

Demonstração. Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável. Recordando que, para $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $S_U = o(U)$, e notando que, por φ ser injetiva e preservar supremos arbitrários, $Z \subseteq U$ se e só se $S_Z \subseteq^{\mathcal{S}} S_U$, tem-se

$$\lambda_n^*(Z) = \lambda_n^*(\varphi(Z)) = \lambda_n^*(S_Z) = \inf\{\lambda_n(U) : U \in \mathcal{N}(S_Z)\} = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : S_Z \subseteq o(U)\}$$

$$= \inf\{\mathcal{L}^n(U) : S_Z \subseteq S_U, U \in \Omega(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : Z \subseteq U, U \in \Omega(\mathbb{R}^n)\}$$

$$= \inf\{\mathcal{L}^n(U) : Z \subseteq U, U \text{ aberto e } \mathcal{L}^n\text{-mensurável}\} = \mathcal{L}^n(Z),$$

onde as últimas duas igualdades resultam de todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ serem $\mathcal{L}^n$-mensuráveis e $\mathcal{L}^n$ ser uma medida regular exterior. □

Deste modo, e ao contrário do que acontece na teoria da medida usual, é possível construir uma medida não trivial e consistente que atribui um valor a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e que é invariante relativamente ao grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$.

2.2. Evitando os paradoxos clássicos

Outra vantagem que é possível retirar desta abordagem locálica à teoria da medida é o facto de se evitarem as contradições usuais, como, por exemplo, as encontradas por Vitali [13] ou Banach e Tarski [3], uma vez que dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ podem ser disjuntos e, no entanto, não serem disjuntos como *sublocales*, não se podendo, por isso, aplicar a σ-aditividade. Intuitivamente, isto traduz-se no facto de, apesar de não terem pontos em comum, eles se intersetarem na "cola locálica" que liga pontos na vizinhança uns dos outros em $\mathbb{R}^n$.

A título de exemplo de dois *sublocales* sem pontos em comum, mas que ainda assim não são disjuntos, seja $Z = \mathbb{Q}^n$ e $W = \mathbb{I}^n$, onde $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ denotam, respetivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Como $\mathbb{Q}^n$ e $\mathbb{I}^n$ são subespaços densos de $X = \mathbb{R}^n$, então, pela Proposição I.**2.11**, S_Z e S_W são *sublocales* densos de $\Omega(\mathbb{R}^n)$. Logo, em consequência do Teorema de Isbell da densidade (Proposição I.**2.6**), ambos contêm o menor *sublocale* denso de $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $b(\emptyset)$, o que implica que

$$S_Z \cap S_W \supseteq b(\emptyset) \neq 0_{\mathcal{S}(\Omega(\mathbb{R}^n))},$$

ou seja, S_Z e S_W não são disjuntos.

No entanto, $S_Z \cap S_W$ é um *sublocale* sem pontos, pois $\Sigma(S_Z \cap S_W) = \emptyset$. De facto, suponha-se, por redução ao absurdo, que $\Sigma(S_Z \cap S_W) \neq \emptyset$. Como $S_Z \cap S_W$ é um *sublocale* de $\Omega(\mathbb{R}^n)$, todo o ponto de $S_Z \cap S_W$ é um ponto de $\Omega(\mathbb{R}^n)$. Logo, recordando que os pontos de um *locale* podem ser definidos como os elementos primos do reticulado associado, uma vez que $\Omega(\mathbb{R}^n)$ é sóbrio e, por isso, todos os seus elementos primos são da forma $\mathbb{R}^n \backslash \{x\}$, para algum $x \in \mathbb{R}^n$, existe $y \in \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in \Sigma(S_Z \cap S_W) \subseteq S_Z \cap S_W$. Ou seja, $\mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in S_Z$ e $\mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in S_W$. Da primeira igualdade e atendendo a que $S_Z = \bigvee\limits_{z \in Z} b(\mathbb{R}^n \backslash \{z\})$, obtém-se que

$$\exists\, S \subseteq \bigcup_{z \in Z} b(\mathbb{R}^n \backslash \{z\}) : \mathbb{R}^n \backslash \{y\} = \bigwedge S.$$

Como $\Omega(\mathbb{R}^n)$ satisfaz o axioma T_D, a igualdade anterior implica que $\mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in S$ (ver [4]). Assim,

$$\exists\, z \in Z : \mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in b(\mathbb{R}^n \backslash \{z\}) = \{\emptyset, \mathbb{R}^n \backslash \{z\}\},$$

de onde vem, pela sobriedade de $\Omega(\mathbb{R}^n)$, que $y = z \in Z$. Analogamente, dado $\mathbb{R}^n \backslash \{y\} \in S_W$, também se tem que $y \in W$. Contudo, como $Z \cap W = \emptyset$, tal y não pode existir! Portanto, $\Sigma(S_Z \cap S_W) = \emptyset$. Mais especificamente, generalizando o raciocínio anterior, tem-se que

$$\Sigma(S_Z \cap S_W) \subseteq \{X \backslash \{x\} : x \in Z \cap W\} = \emptyset.$$

Posto isto, S_Z e S_W constituem um exemplo de *sublocales* sem pontos em comum que não são disjuntos. O que acontece nas contradições encontradas por Vitali ou Banach e Tarski recai precisamente nesta situação: apesar dos conjuntos por eles construídos serem disjuntos, não são disjuntos como *sublocales*. Portanto, a σ-aditividade não se pode aplicar a esses *sublocales*, evitando-se assim as contradições apontadas.

3. Observações finais

Em conclusão, ao longo deste texto, não só se definiu uma nova noção de medida, como também se constatou que, adotando como noção de "parte de X" a noção de *sub(-σ-)locale*, é possível construir uma medida definida em todas essas "partes de X" sob a hipótese de X ser adequado.

Na prática, dado um espaço topológico X, a ideia é trabalhar no *locale* $\Omega(X)$ e, se $\Omega(X)$ for adequado (o que acontece, quando, por exemplo, X é regular), a partir de uma medida em $\Omega(X)$, construir-se uma medida em $\mathcal{S}(\Omega(X))$. Em particular, caso X também verifique o axioma T_D, identificando cada subconjunto de X com o respetivo *sublocale* induzido, tal medida fica definida em todos os subconjuntos de X.

A hipótese de X ser um σ-*locale* adequado, a fim de, dada uma medida μ em X, a medida exterior a μ em $\mathcal{S}(X)$ ser uma medida em $\mathcal{S}(X)$, não pode ser dispensada (sendo um problema interessante averiguar se poderá, pelo menos, ser enfraquecida). Por exemplo, se $\mathbb{S}$ for o *locale* de Sierpinski, $\mathbb{S} = \{0 < a < 1\}$, $\mathbb{S}$ será um σ-*locale* fortemente de Lindelöf não adequado e, considerando a medida $\nu : \mathbb{S} \longrightarrow [0, \infty]$ em $\mathbb{S}$, onde $\nu(0) = 0$, $\nu(a) = \nu(1) = 1$, a medida exterior a ν em $\mathcal{S}(\mathbb{S})$, ν^*, não satisfará a modularidade da definição de medida. Logo, ν^* não será uma medida em $\mathcal{S}(\mathbb{S})$. Contudo, a fim de contornar a hipótese de X ter de ser um σ-*locale* adequado e generalizar o teorema para um σ-*locale* arbitrário, uma sugestão proposta por Simpson em [12], mas que ainda é apenas uma conjetura a ser explorada, seria alterar a definição de medida exterior a μ em $\mathcal{S}(X)$, utilizando combinações booleanas de *sub-σ-locales* abertos e fechados para determinar a medida exterior, em vez de utilizar apenas *sub-σ-locales* abertos.

Para além disso, também é possível verificar que a co-continuidade de μ^* pode falhar em subconjuntos filtrados de $\mathcal{S}(X)$ que não tenham medida μ^*-finita, e que, se μ não for uma medida σ-finita, então μ^* pode não ser uma medida estavelmente σ-contínua (ver [12]).

Para terminar, outra aplicação interessante desta nova abordagem, explorada por Simpson na parte final de [12], consiste em proporcionar uma solução para o paradoxo associado à noção canónica de aleatoriedade, através do menor *sub(-σ-)locale* de X com medida $M < \infty$, onde $M = \mu(1_X)$ (supondo que μ é uma medida finita de X e X é um σ-*locale* adequado) e abrindo caminho para o tratamento de processos aleatórios no contexto da topologia sem pontos.

A ideia por detrás dessa aplicação é verificar que o menor *sub-σ-locale* de X de medida M, $Ran(\mu)$, é a interseção em $\mathcal{S}(X)$ de todos os *sub-σ-locales* abertos de medida M, e $Ran(\mu)$ ser um *sub-σ-locale* não trivial de "elementos μ-aleatórios" (interpretando que um "elemento de X gerado μ-aleatoriamente" deve pertencer a qualquer "parte" de X de medida M, isto é, deve pertencer a todos os *sub-σ-locales* de X de medida M). Em particular, se $M = 1$, notando que μ é uma medida de probabilidade, isto traduz-se no facto de todo o "elemento aleatório" de X satisfazer toda a "lei de probabilidade". Para além disso, Simpson observou ainda que, sendo $\mu_{|Ran(\mu)}$ a restrição de μ^* a $\mathcal{O}^{Ran(\mu)}$, $\mu_{|Ran(\mu)}$ será uma medida em $Ran(\mu)$ e $Ran(\mu_{|Ran(\mu)}) = Ran(\mu)$. Ou seja, $Ran(\mu)$ é a sua própria "parte aleatória", o que motiva definir-se um novo conceito, o conceito de σ-*locale* aleatório, como um σ-*locale* X adequado, munido com uma medida finita μ, que satisfaz $Ran(\mu) = X$.

Bibliografia

[1] D. BABOOLAL E P. GHOSH, *A duality involving Borel spaces*, Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 76 (2008), pp. 209–215.

[2] D. BABOOLAL, J.PICADO E P.PILLAY, *Hewitt's irresolvability and induced sublocales in spatial frames*, Quaestiones Mathematicae. aceite para publicação.

[3] S. BANACH E A. TARSKI, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae, 6 (1924), pp. 244–277.

[4] B. BANASCHEWSKI E A. PULTR, *Pointfree aspects of the T_D axiom of classical topology*, Quaestiones Mathematicae, 33 (2010), pp. 369–385.

[5] B. DAVEY E H. PRIESTLEY, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge, 2 ed., 2002.

[6] L. EVANS E R. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 2015. Revised Edition.

[7] J. FRITH, *Structured frames*, tese de doutoramento, University of Cape Town, Cape Town, 1987.

[8] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Springer, 1988.

[9] J. R. ISBELL, *Atomless parts of spaces*, Mathematica Scandinavica, 31 (1972), pp. 5–32.

[10] J. MADDEN, *k-frames*, Journal of Pure and Applied Algebra, 70 (1991), pp. 107–127.

[11] J. PICADO E A. PULTR, *Frames and Locales: topology without points*, vol. 28 of Frontiers in Mathematics, Springer, Basel, 2012.

[12] A. SIMPSON, *Measure, randomness and sublocales*, Annals of Pure and Applied Algebra, 163 (2012), pp. 1642–1659.

[13] G. VITALI, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, 1905.