



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA

Bernardo Monteiro dos Santos de Aguiar da Câmara

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO ENSAIO BIAXIAL EM  
PROVETE CRUCIFORME**

Dissertação no âmbito do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica na especialidade de Produção e Projeto orientada pelo Doutor André Filipe Gomes Pereira e pelo Doutor Pedro André Dias Prates e apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Fevereiro de 2021



1 2



9 0

FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE  
COIMBRA

## **Análise de sensibilidade do ensaio biaxial em provete cruciforme**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Produção e Projeto

### **Sensitivity analysis of the biaxial test on a cruciform specimen**

**Autor**

**Bernardo Monteiro dos Santos de Aguiar da Câmara**

**Orientadores**

**André Filipe Gomes Pereira**

**Pedro André Dias Prates**

**Júri**

<b>Presidente</b>	<b>Doutora Nataliya Sakharova</b> Investigadora Doutorada da Universidade de Coimbra
<b>Orientador</b>	<b>Doutor André Filipe Gomes Pereira</b> Investigador Doutorado da Universidade de Coimbra <b>Professor Doutor José Valdemar Bidarra Fernandes</b> Professor Catedrático da Universidade de Coimbra
<b>Vogais</b>	<b>Doutor Vasco Manuel Neto Simões</b> Investigador Doutorado da Universidade de Coimbra

**Coimbra, fevereiro, 2021**



“Try not to become a person of success, but rather try to become a person of  
value”

Albert Einstein



## Agradecimentos

Durante a elaboração desta dissertação encontrei vários desafios que só foram possíveis de ser ultrapassados graças ao apoio de várias pessoas às quais quero manifestar o meu agradecimento.

Ao Professor André Filipe Gomes Pereira e ao Professor Pedro André Dias Prates pela disponibilidade e por toda a orientação que me deram que foi essencial na realização deste trabalho.

Aos meus pais por me terem dado a oportunidade de lutar pelos meus sonhos. Sem vocês nada disto teria sido possível. Obrigado por todo o apoio e carinho que sempre me deram, tanto nos bons como nos maus momentos.

Aos restantes membros da minha família por terem estado sempre presentes e por todas as gargalhadas partilhadas com eles.

À Edite por ter estado sempre comigo neste longo percurso. Por todos os obstáculos que me ajudaste a ultrapassar, por todas as vitórias partilhadas contigo e por toda a motivação que me deste para alcançar os meus objetivos.

Aos meus amigos e colegas que marcaram a minha vida académica, com quem tive possibilidade de partilhar momentos dos quais nunca me vou esquecer.

Esta dissertação foi realizada no âmbito dos projetos RDFORMING (PTDC/EME-EME/31243/2017) e EZ-SHEET (PTDC/EME-EME/31216/2017), cofinanciados pelo Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER), através do programa Portugal-2020 (PT2020), no âmbito do Programa Operacional Competitividade e Internacionalização (POCI-01-0145-FEDER-031243, POCI-01-0145-FEDER-031216) e pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através de fundos nacionais (PIDDAC); também foi patrocinada com fundos FEDER através do programa COMPETE - Programa Operacional Factores de Competitividade - e com fundos nacionais através da FCT, no âmbito do projeto UIDB/00285/2020.

Cofinanciado por:





## Resumo

Neste trabalho é realizada uma análise de sensibilidade para avaliar a influência dos parâmetros do material nos resultados do ensaio biaxial em provete cruciforme. Esta análise é feita com auxílio dos índices de Sobol de 1ª ordem, que permitem quantificar a sensibilidade de cada parâmetro do material, e dos índices de Sobol totais, que permitem avaliar a influência das interações entre esses parâmetros. Nesta análise foram estudados os parâmetros  $\sigma_0$ ,  $K$  e  $n$  da lei de encruamento de Swift, e  $F$ ,  $G$  e  $N$  do critério de plasticidade anisotrópico de Hill'48. A influência desses parâmetros é avaliada nos resultados do ensaio biaxial (variáveis de saída), nomeadamente, as forças máximas segundo  $Ox$  e  $Oy$ , as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , a deformação plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}$ , a redução de espessura e a trajetória de deformação. Todos estes resultados do ensaio biaxial foram obtidos numericamente, com recurso ao programa de elementos finitos DD3IMP.

Inicialmente, recorreu-se à análise de sensibilidade para avaliar a influência dos parâmetros do material nos valores máximos das variáveis de saída. Desta análise concluiu-se que: os parâmetros  $K$  e  $n$  da lei de Swift são os mais influentes no valor máximo das forças e da deformação principal  $\varepsilon_1$ ; o valor máximo da deformação plástica equivalente é afetado principalmente pelos parâmetros  $G$  e  $n$ , embora os restantes parâmetros também tenham uma influência relevante; os valores máximos de  $\varepsilon_2$  e da redução de espessura são essencialmente afetados pelo parâmetro  $G$  do critério de Hill'48.

Posteriormente analisou-se os parâmetros que mais influenciam os resultados do ensaio em cada região do provete. Desta análise concluiu-se no geral que:  $G$  é o parâmetro que mais influencia as variáveis de saída no centro do provete e no braço do eixo  $Ox$ ;  $F$  é o parâmetro que mais influencia as variáveis de saída no braço do eixo  $Oy$ ; as variáveis de saída na zona do raio de curvatura do provete são mais sensíveis aos parâmetros  $n$ ,  $N$  e  $G$ . No geral, pode-se afirmar que os parâmetros do critério de plasticidade Hill'48 são os que mais influenciam os resultados ao longo do provete cruciforme.

**Palavras-chave:** Análise de Sensibilidade, Índices de Sobol, Provete Cruciforme, Ensaio de tração biaxial, Simulação numérica.



## Abstract

In this work, a sensitivity analysis is performed to evaluate the influence of the material parameters on the results of the biaxial test on a cruciform specimen. This analysis is done with the help of 1<sup>st</sup> order Sobol indices, which quantify the sensitivity of each material parameter, and total Sobol indices, which allow to evaluate the influence of the interactions between these parameters. In this analysis, the parameters  $\sigma_0$ ,  $K$  and  $n$  of the Swift hardening law, and the parameters  $F$ ,  $G$  and  $N$  of the Hill'48 anisotropic yield criterion were studied. The influence of these parameters is evaluated on the results of the biaxial test (output variables, namely, the maximum forces along  $Ox$  and  $Oy$ , the principal strains  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , the equivalent plastic strain  $\varepsilon_{eq}$ , the thickness reduction and the strain paths. All these results of the biaxial test were numerically obtained, resorting to the finite element software DD3IMP.

Initially, the sensitivity analysis was used to assess the influence of the material parameters on the maximum values of the output parameters. From this analysis, it was concluded that: the parameters  $K$  and  $n$  of Swift's law are the most influential in the maximum values of the forces and the principal strain  $\varepsilon_1$ ; the maximum value of the equivalent plastic strain is mainly affected by  $G$  and  $n$ , although the remaining parameters also have a relevant influence; the maximum values of  $\varepsilon_2$  and thickness reduction are essentially affected by the parameter  $G$  of the Hill'48 criterion.

Afterwards, the parameters that most influence the test results in each specimen region were analyzed. From this analysis, it was concluded in general that:  $G$  is the parameter that most influences the output variables in the center of the specimen and in the  $Ox$  arm;  $F$  is the parameter that most influences the output variables in the  $Oy$  arm; the output variables in the radius of curvature of the specimen are more sensitive to the parameters  $n$ ,  $N$  and  $G$ . In general, it can be stated that the parameters of the Hill'48 yield criterion are the ones that most influence the results along the cruciform specimen.

**Keywords** Sensitivity Analysis, Sobol Indices, Cruciform Specimen, Biaxial Tensile Test, Numerical simulation.



---

## Índice

Índice de Figuras .....	ix
Índice de Tabelas .....	xi
Simbologia e Siglas .....	xiii
Simbologia Romana .....	xiii
Simbologia Grega .....	xiv
Siglas .....	xiv
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Introdução à análise de sensibilidade .....	2
1.2. Objetivos e Estrutura da Dissertação .....	4
2. MODELO NUMÉRICO .....	5
2.1. Modelo Constitutivo .....	5
2.2. Ensaio biaxial em provete cruciforme .....	7
3. ÍNDICES DE SOBOL .....	9
3.1. Introdução aos índices de Sobol .....	9
3.2. Variáveis de entrada .....	10
3.3. Variáveis de saída .....	11
3.4. Metodologia para o cálculo dos índices de Sobol .....	12
4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....	15
4.1. Estabilização do cálculo dos Índices de Sobol .....	15
4.2. Resultados .....	18
4.2.1. Força máxima segundo o eixo $0x$ .....	19
4.2.2. Força máxima segundo o eixo $0y$ .....	20
4.2.3. Deformação principal $\epsilon_1$ .....	21
4.2.4. Deformação principal $\epsilon_2$ .....	24
4.2.5. Deformação plástica equivalente .....	27
4.2.6. Redução de espessura .....	30
4.2.7. Trajetória de deformação .....	34
4.3. Discussão da análise de sensibilidade .....	36
5. CONCLUSÃO .....	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	41



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Geometria e dimensões do provete cruciforme (Prates et al., 2013). A cinzento estão representadas as zonas das amarras.....	7
Figura 2.2 - Esquema de carregamento do ensaio de um provete cruciforme sujeito a uma solitação biaxial imposta por forças aplicadas nas extremidades (Pedro Prates, 2014).....	7
Figura 2.3 - Discretização do provete.....	8
Figura 4.1 - Gráficos que mostram a estabilização dos índices de Sobol de 1ª ordem dos parâmetros de entrada para os valores máximos das variáveis de saída, (a) $F_x$ , (b) $F_y$ , (c) $\epsilon_1$ , (d) $\epsilon_2$ , (e) $\epsilon_{eq}$ e (f) redução de espessura, e ainda para o valor da (g) trajetória de deformação num nó localizado no raio de curvatura do provete. ....	18
Figura 4.2 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de $F_x$ .....	19
Figura 4.3 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de $F_y$ .....	20
Figura 4.4 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de $\epsilon_1$ .....	21
Figura 4.5 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a) $F$ , (b) $G$ , (c) $N$ , (d) $K$ , (e) $n$ e (f) $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para $\epsilon_1$ .....	22
Figura 4.6 - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região do provete em relação a $\epsilon_1$ . ....	24
Figura 4.7 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de $\epsilon_2$ .....	24
Figura 4.8 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a) $F$ , (b) $G$ , (c) $N$ , (d) $K$ , (e) $n$ e (f) $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para $\epsilon_2$ .....	25
Figura 4.9 - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação a $\epsilon_2$ . ....	27
Figura 4.10 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de $\epsilon_{eq}$ .....	27
Figura 4.11 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a) $F$ , (b) $G$ , (c) $N$ , (d) $K$ , (e) $n$ e (f) $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para $\epsilon_{eq}$ .....	28
Figura 4.12 - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação a $\epsilon_{eq}$ . ....	29
Figura 4.13 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo da redução de espessura.....	30
Figura 4.14 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a) $F$ , (b) $G$ , (c) $N$ , (d) $K$ , (e) $n$ e (f) $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para a redução de espessura. ....	31
Figura 4.15 - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação à redução de espessura. ....	33
Figura 4.16 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a) $F$ , (b) $G$ , (c) $N$ , (d) $K$ , (e) $n$ e (f) $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para a trajetória de deformação.....	34

Figura 4.17 - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação à trajetória de deformação. .... 35

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 - Análises de sensibilidade.....	3
Tabela 3.1 - Valores médios e limites inferior e superior de cada parâmetro. ....	11
Tabela 4.1 - Parâmetros mais influentes no valor máximo de cada variável de saída .....	36
Tabela 4.2 - Parâmetros com maior sensibilidade para cada zona do provete .....	37



## SIMBOLOGIA E SIGLAS

### Simbologia Romana

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_i$  – Matrizes dos parâmetros de entrada do modelo

$E$  – Módulo de elasticidade

$F, G, H, L, M, N$  – Parâmetros do critério de plasticidade Hill'48

$F_x$  – Força de tração uniaxial na direção do eixo  $Ox$

$F_y$  – Força de tração uniaxial na direção do eixo  $Oy$

$f_0$  - Valor médio das variáveis de saída do modelo

$J$  – Número de simulações base

$K$  – Parâmetro constitutivo da lei de Swift

$k$  – Número de parâmetros de entrada do modelo

$n$  – Coeficiente de encruamento

$r$  – Coeficiente de anisotropia

$r_b$  – Coeficiente de anisotropia biaxial

$r_0, r_{45}, r_{90}$  – Coeficientes de anisotropia do material a  $0^\circ, 45^\circ$  e  $90^\circ$  com a direção de laminagem

$r(\alpha)$  – Evolução do coeficiente de anisotropia no plano da chapa

$S_i$  – Índice de Sobol de primeira ordem

$S_{int}$  – Índice associado às interações entre parâmetros

$S_{Ti}$  – Índice de Sobol total

$t$  – Espessura final da chapa

$t_0$  – Espessura inicial da chapa

$U$  – Resposta de um modelo

$V(U)$  – Variância da resposta  $U$

$V(E(U|X_i))$  - Variância condicional da resposta  $U$  considerando apenas a variabilidade de  $X_i$

$V(E(U|X_{\sim i}))$  – Variância condicional da resposta  $U$  considerando variabilidade em todos os parâmetros de entrada, exceto  $X_i$

$X_i, X_j$  – Parâmetros de entrada de um modelo

$Y$  – Tensão de escoamento

$Y_0$  – Tensão limite de elasticidade inicial

$Y_A, Y_B, Y_{C_i}$  – Respostas do modelo com parâmetros de entrada  $A, B$  e  $C_i$

## Simbologia Grega

$\alpha$  – Orientação do eixo do provete em relação à direção de laminagem

$\varepsilon_{eq}$  – Deformação plástica equivalente

$\varepsilon_0$  – Parâmetro constitutivo da lei de Swift

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – Deformações principais logarítmicas, máxima e mínima, no plano da chapa

$d\varepsilon_{y'}$ ,  $d\varepsilon_{z'}$  – Incrementos infinitesimais de deformação plástica em largura e em espessura, respetivamente

$\mu$  – Coeficiente de atrito

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\sigma_b$  – Tensão limite de elasticidade biaxial

$\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$  – Tensão limite de elasticidade determinada para um ensaio de tração uniaxial realizado a  $0^\circ, 45^\circ$  e  $90^\circ$  em relação à direção de laminagem, respetivamente

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – Componentes do tensor das tensões de Cauchy

## Siglas

DD3IMP – Deep Drawing 3D IMPLICIT

RE – Redução de Espessura

TD – Trajetória de Deformação

## 1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos é uma ferramenta computacional muito usada no estudo dos processos de conformação associados ao setor automóvel e aeronáutico. Neste sentido, a modelação do comportamento plástico de chapas metálicas é um aspeto fundamental a considerar na simulação numérica desses processos. O comportamento mecânico dos materiais metálicos é descrito com o auxílio de modelos matemáticos (leis constitutivas). Para chapas metálicas, geralmente, assume-se que o comportamento plástico do material é descrito por um critério de plasticidade ortotrópico, que representa a superfície de plasticidade do material num espaço de tensões multidimensional, e por leis de encruamento, que expressam a evolução da superfície de plasticidade durante a deformação plástica.

A identificação dos parâmetros dos materiais, usados nas leis constitutivas, são tradicionalmente realizados com recurso a ensaios convencionais, tais como, a tração uniaxial, corte (Pereira et al., 2014; Pereira et al., 2019); e o ensaio hidráulico de expansão biaxial (Pereira et al., 2020). No entanto, os campos de tensão/deformação gerados durante estes ensaios são homogéneos, não representando convenientemente os estados de tensão/deformação mais complexos, que ocorrem durante os processos de conformação. Para ultrapassar este problema vários autores desenvolveram ensaios mecânicos caracterizados por campos de tensão e de deformação não homogéneos, aplicando condições de carregamento complexas ou usando provetes com geometrias não convencionais (Prates et al., 2016). Neste contexto, tem havido um interesse crescente nos ensaios mecânicos não convencionais, nomeadamente ensaios de tração biaxial em provetes cruciformes, porque estes permitem caracterizar simultaneamente o encruamento e a anisotropia do material. (Prates et al., 2015).

Um fator importante a ter em conta nos ensaios mecânicos e nas simulações destes é a variabilidade dos parâmetros mecânicos do material, porque existe sempre alguma dispersão ou variabilidade nos dados recolhidos de diferentes amostras do mesmo material (Callister, 2000). A variação dos valores dos parâmetros do material pode influenciar a qualidade do componente final (Paraianu et al., 2012); logo é importante que na fase de

desenvolvimento de um processo seja considerada a variabilidade das propriedades mecânicas do material, para assim garantir a robustez do processo (Lazarescu and Banabic 2013). Neste contexto, torna-se relevante a realização de análises de sensibilidade que permitam avaliar a influência da variabilidade dos parâmetros do material no processo de conformação.

### **1.1. Introdução à análise de sensibilidade**

Uma possível definição de análise de sensibilidade é a seguinte (Saltelli et al., 2004):“O estudo de como a incerteza no *output* do modelo (numérico ou não) pode ser repartida entre as diferentes fontes de *input* deste”. Ao ter-se o conhecimento de qual a sensibilidade que cada um dos parâmetros de entrada (*inputs*) induz em cada uma das variáveis de saída (*outputs*) do modelo pode-se diminuir a incerteza deste. Existem vários métodos possíveis para efetuar uma análise de sensibilidade. Esta dissertação vai-se focar no método baseado na variância, que usa os índices de Sobol para quantificar a sensibilidade.

Na literatura encontram-se vários estudos onde são efetuadas análise de sensibilidade. No estudo de Prates et al. (2018), foi realizada uma análise de sensibilidade para conhecer a influência das propriedades mecânicas das chapas metálicas no retorno elástico e na redução de espessura do processo de conformação de um perfil em U. Este estudo mostrou que as propriedades mais influentes para estas duas variáveis de saída são o coeficiente de encruamento  $n$  e a constante  $K$  da lei de Swift. Outra análise de sensibilidade (Lazarescu, L. et Banabic, D., 2013) mostra que no ensaio hidráulico de expansão biaxial os parâmetros que mais influenciam a redução de espessura são as tensões limites de elasticidade do material, sendo  $\sigma_{45}$  a que mais se destaca. Nesta análise os autores explicam que não estudaram a influência de  $\sigma_0$  por incapacidade do programa usado. Num outro trabalho (Paraianu, L. et al, 2011) os autores usaram os métodos de Taguchi e de análise da variância para estudar a influência dos parâmetros do aço DC04 na curva limite de conformação. Desta análise concluiu-se que o coeficiente de encruamento da lei de Hollomon,  $n$ , é o parâmetro mais relevante nas regiões de expansão biaxial e deformação plana, enquanto que o coeficiente de anisotropia  $r_0$  é o parâmetro mais relevante nas regiões de tração uniaxial. Outra análise feita pelos mesmo autores (Paraianu et al, 2012), usando o método baseado no modelo de Marciniak-Kuczinsky, estuda a influência dos parâmetros do

critério de Hill'48 e da lei de Swift na curva limite de conformação. Esta análise conclui que o coeficiente de anisotropia  $r_0$  é o parâmetro mais influente nas regiões de expansão biaxial, enquanto que o coeficiente de encruamento  $n$  é o parâmetro mais relevante nas regiões de deformação plana. Este estudo também mostra que nas regiões de tração uniaxial os parâmetros mais influentes são  $r_0$  e  $r_{90}$ . Por fim numa análise de sensibilidade feita no programa AutoForm (De Souza e Rolfe, 2008) de uma estampagem de uma geometria representativa de um capô automóvel, mostra que os parâmetros mais influentes no retorno elástico são a tensão limite de elasticidade  $Y_0$  e o  $n$  da lei de Swift. Na tabela 1.1 é apresentado um resumo das várias análises de sensibilidade. Esta tabela mostra os autores, o material usado como referência, o tipo de ensaio, o tipo de estudo, os parâmetros de entrada, os parâmetros de saída e por fim os parâmetros que os autores concluíram ser os mais influentes.

**Tabela 1.1 - Análises de sensibilidade**

<b>Autores</b>	<b>Material</b>	<b>Tipo de ensaio</b>	<b>Tipo de estudo</b>	<b>Parâmetros de entrada</b>	<b>Variáveis de saída</b>	<b>Parâmetros mais relevantes</b>
(Prates et al., 2018)	Aço macio	Perfil em U	Numérico	- $E$ - $Y_0$ , $K$ e $n$ - $r_0$ , $r_{45}$ e $r_{90}$ - $t_0$	-Retorno elástico -Redução máxima de espessura	$K$ , $n$
(Lazarescu & Banabic, 2013)	DC04	Hidráulico de expansão biaxial	Numérico	- $\sigma_{45}$ , $\sigma_{90}$ , $\sigma_b$ - $r_0$ , $r_{45}$ , $r_{90}$	-Redução de espessura	$\sigma_{45}$
(Paraianu et al., 2011)	DC04	Tração uniaxial, biaxial e deformação plana	Experimental	- $r_0$ , $r_{45}$ e $r_{90}$ - $\sigma_0$ , $\sigma_{45}$ , $\sigma_{90}$ - $n$	-Curva limite de conformação	$n$ , $r_0$
(Paraianu et al., 2012)	DC04	Tração uniaxial, biaxial e deformação plana	Numérico	- $r_0$ , $r_{45}$ e $r_{90}$ - $\sigma_0$ , $n$	-Curva limite de conformação	$r_0$ , $r_{90}$ , $n$
(De Souza & Rolfe, 2008)	Aço	Estampagem	Numérico	- $Y_0$ e $n$ - $E$ - $t_0$ - $\mu$	-Retorno elástico	$Y_0$ , $n$

## 1.2. Objetivos e Estrutura da Dissertação

Esta dissertação tem por finalidade realizar uma análise de sensibilidade para identificar os parâmetros do material que mais influenciam os resultados do ensaio biaxial em provete cruciforme, nomeadamente, as forças segundo  $Ox$  e  $Oy$ , as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , a deformação plástica equivalente, a redução de espessura e a trajetória de deformação. A dissertação está estruturada em cinco capítulos:

- No Capítulo 1 é enquadrado o tema e objetivos da tese e introduzido o conceito de análise de sensibilidade, com uma breve revisão da literatura;
- No Capítulo 2 apresenta-se o modelo constitutivo adotado (critério de Hill e lei de Swift), bem como a geometria do provete cruciforme e o modelo numérico do ensaio biaxial;
- No Capítulo 3 são indicados os parâmetros de entrada e as variáveis de saída a serem estudadas na análise de sensibilidade, e é apresentada uma introdução aos índices de Sobol, bem como a metodologia usada para os calcular;
- O Capítulo 4 contém os resultados obtidos com a análise de sensibilidade, a interpretação destes e as conclusões tiradas;
- O Capítulo 5 apresenta-se as principais conclusões da tese e são propostos trabalhos futuros.

## 2. MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo são apresentadas, inicialmente, as leis constitutivas do material (critério de plasticidade e lei de encruamento), sendo de seguida apresentado o modelo numérico do ensaio de tração biaxial em provete cruciforme utilizado na simulação numérica por elementos finitos.

### 2.1. Modelo Constitutivo

A chapa metálica, em consequência do processo de laminagem, tem uma anisotropia do tipo ortotrópico, contendo três planos de simetria perpendiculares entre si, cuja interseção dois a dois define os designados eixos de ortotropia, ou eixos principais de anisotropia (Hill, 1948). Se os eixos principais de anisotropia forem  $0x$ ,  $0y$  e  $0z$  o critério de Hill escreve-se:

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = Y^2, \quad (2.1)$$

em que  $Y$  é tensão de escoamento,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são parâmetros definidores do estado de anisotropia, e  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são componentes do tensor das tensões de Cauchy. Num estado plano de tensão a equação anterior ganha a seguinte forma:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = Y^2, \quad (2.2)$$

sendo que, normalmente, considera-se a condição  $G + H = 1$ , o que consiste em assumir que a tensão de escoamento  $Y$  é igual a tensão limite de elasticidade em tração segundo a direção de laminagem,  $Y_0$ . Devido à dificuldade da identificação dos parâmetros  $L$  e  $M$  no caso da chapa metálica, considera-se valores idênticos aos isotrópicos (von Mises), ou seja,  $L = M = 1.5$ .

O coeficiente de anisotropia,  $r$ , representa a razão entre a deformação plástica em largura e a deformação plástica em espessura durante o ensaio de tração, e é dado por:

$$r = \frac{d\varepsilon_{y'}}{d\varepsilon_{z'}}, \quad (2.3)$$

onde,  $\varepsilon_{y'}$  e  $\varepsilon_{z'}$  são as deformações segundo os eixos perpendiculares ao eixo de tração. Os coeficientes de anisotropia  $r_0$ ,  $r_{45}$  e  $r_{90}$  são determinados através de ensaios de tração uniaxial cujo eixo de tração faz com a direção de laminagem um ângulo  $\alpha$ , igual a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , respetivamente. Com estes valores podemos determinar os parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$ , com recurso as seguintes equações:

$$F = \frac{r_0}{r_{90}(r_0 + 1)}, \quad G = \frac{1}{r_0 + 1}, \quad H = \frac{r_0}{r_0 + 1} \quad \text{e} \quad (2.4)$$

$$N = \frac{(r_0 + r_{90})(2r_{45} + 1)}{2r_{90}(r_0 + 1)}.$$

Com o conhecimento dos parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$  do critério pode-se calcular o coeficiente de anisotropia para qualquer ângulo  $\alpha$ :

$$r(\alpha) = \frac{H + (2N - F - G - 4H)\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{F\sin^2(\alpha) + G\cos^2(\alpha)}, \quad (2.5)$$

O encruamento é o fenómeno pelo qual um metal se torna mais duro e mais resistente quando este é submetido a uma deformação plástica (Callister, 2000). Uma das leis mais utilizadas para descrever este fenómeno é a lei de Swift que se expressa da seguinte forma:

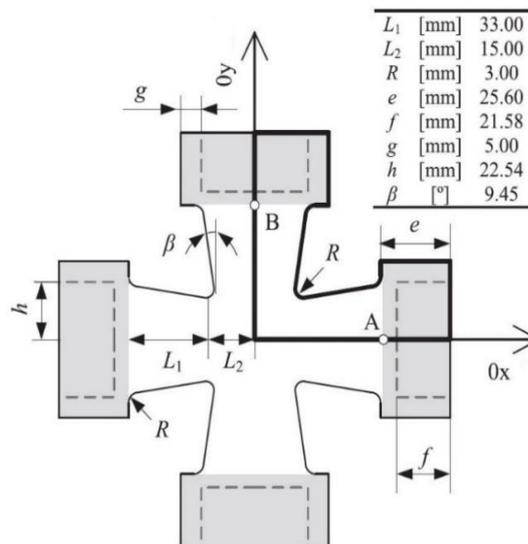
$$Y = K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{eq})^n, \quad (2.6)$$

onde  $K$ ,  $\varepsilon_0$  e  $n$  são constantes do material, sendo que  $n$  é o coeficiente de encruamento, e  $\varepsilon_{eq}$  é a deformação plástica equivalente, respetivamente. A tensão limite de elasticidade inicial  $Y_0$  é dada por:

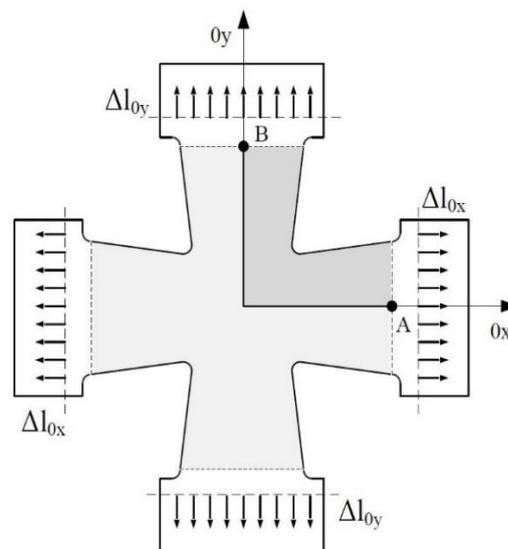
$$Y_0 = K \cdot \varepsilon_0^n. \quad (2.7)$$

## 2.2. Ensaio biaxial em provete cruciforme

O provete usado no ensaio tem uma espessura uniforme de 1mm e a sua geometria é representada na Figura 2.1. A geometria foi otimizada de modo a obter um estado de deformação o mais heterogéneo possível (Prates et al., 2013).

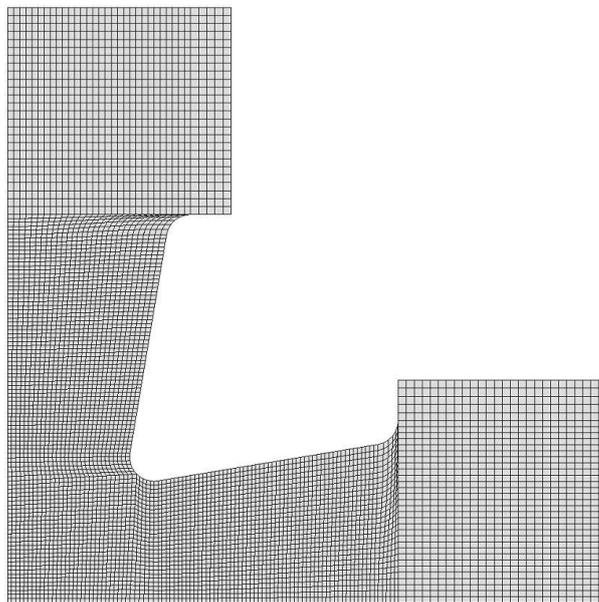


**Figura 2.1** - Geometria e dimensões do provete cruciforme (Prates et al., 2013). A cinzento estão representadas as zonas das amarras.



**Figura 2.2** - Esquema de carregamento do ensaio de um provete cruciforme sujeito a uma solicitação biaxial imposta por forças aplicadas nas extremidades (Pedro Prates, 2014).

Na simulação numérica só é considerado um oitavo do provete devido às condições de simetria do ensaio e de ortotropia da chapa. O esquema de carregamento do ensaio é indicado na Figura 2.2 (Pedro Prates, 2014). O oitavo do provete foi discretizado com 6680 elementos hexaédricos com 8 nós cada, com um elemento em espessura, tal como se pode ver na Figura 2.3. As simulações foram todas feitas no programa de elementos finitos DD3IMP.



**Figura 2.3** - Discretização do provete.

### 3. ÍNDICES DE SOBOL

Este capítulo apresenta inicialmente uma breve introdução aos índices de Sobol. Seguidamente é apresentada a seleção dos parâmetros do material, e a sua distribuição estatística, usados no estudo e a metodologia utilizada para o cálculo dos índices de Sobol, com a finalidade de destacar os parâmetros que mais influenciam os resultados do ensaio biaxial em provete cruciforme.

#### 3.1. Introdução aos índices de Sobol

Os índices de Sobol são uma medida de sensibilidade que estima a influência da variabilidade dos parâmetros de entrada na variabilidade de um dado parâmetro de saída. Os índices de Sobol dividem-se em índices de Sobol de primeira ordem e índices de Sobol totais.

Os índices de Sobol de primeira ordem,  $S_i$ , estimam a influência da variabilidade de um dado parâmetro de entrada,  $X_i$ , na variabilidade de uma dada variável de saída,  $U$ . Este índice é definido por:

$$S_i = \frac{V(E(U|X_i))}{V(U)}, \quad (3.1)$$

onde  $V(U)$  é a variância total da variável de saída  $U$  e  $V(E(U|X_i))$  é a variância da expectativa condicional da variável de saída  $U$  quando se considera apenas a variabilidade do parâmetro de entrada  $X_i$ . Em teoria o índice,  $S_i$ , varia sempre entre 0 e 1, sendo que quanto mais alto o seu valor, maior a influência do parâmetro  $U$  na variável de saída  $X_i$ .

Os índices de Sobol totais estimam a influência individual do parâmetro de entrada (i.e., índice de Sobol de primeira ordem,  $S_i$ ) e ainda a influência das interações desse mesmo parâmetro de entrada com os restantes,  $S_{int}$ . Neste sentido, o índice de Sobol total do parâmetro de entrada  $X_i$  é dado por:

$$S_{Ti} = S_i + S_{int}. \quad (3.2)$$

Em alternativa, e de modo a evitar o cálculo de  $S_{int}$ , é possível calcular o índice de Sobol total do parâmetro de entrada,  $X_i$ , pela seguinte expressão:

$$S_{Ti} = 1 - \frac{V[E(U|X_{\sim i})]}{V(U)}, \quad (3.3)$$

onde  $V(U)$  é a variância total do *output*  $U$  e  $V(E(U|X_{\sim i}))$  é a variância da expectativa condicional do *output*  $U$  quando se considera variabilidade em todos os parâmetros de entrada, exceto no parâmetro  $X_i$ . É importante realçar que conhecidos  $S_i$  (equação 3.1) e  $S_{Ti}$  (equação 3.3), é possível prever a influência das interações  $S_{int}$  através da equação 3.2.

### 3.2. Variáveis de entrada

A primeira etapa num estudo de sensibilidade é escolher os parâmetros de entrada a serem usados e a sua distribuição estatística. Os parâmetros a serem escolhidos devem ser aqueles que mais provavelmente vão influenciar as variáveis de saída em estudo. Nesta dissertação optou-se por escolher os parâmetros de entrada associados ao material:  $F$ ,  $G$  e  $N$  do critério de Hill'48 que dependem dos coeficientes de anisotropia  $r_0$ ,  $r_{45}$  e  $r_{90}$ ; e os parâmetros  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$  da lei de Swift; além disso, assume-se que os parâmetros de entrada seguem uma distribuição uniforme.

O material usado para este estudo foi uma liga de aço macio DC06 que contém os valores médios de 1.79, 1.51 e 2.27 para os coeficientes de anisotropia  $r_0$ ,  $r_{45}$  e  $r_{90}$ , respetivamente, com os quais foram calculados os valores médios de  $F$ ,  $G$  e  $N$  (equações 2.4). A distribuição uniforme nos parâmetros de entrada teve por base os valores médios relativamente ao aço DC06, sendo os limites inferior e superior calculados por  $0.6 * valor\ médio$  e  $1.4 * valor\ médio$ , respetivamente. O módulo de elasticidade,  $E$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , são assumidos constantes e iguais a 206 GPa e 0.3, respetivamente. A tabela 3.1 mostra os valores médios e os limites inferior e superior de todos os parâmetros nos quais este estudo vai incidir.

**Tabela 3.1** - Valores médios e limites inferior e superior de cada parâmetro.

	$K$ [MPa]	$n$	$Y_0$ [MPa]	$F$	$G$	$N$
<b>Limite Superior</b>	791.45	0.363	219.97	0.3957	0.5018	1.8039
<b>Valor médio</b>	562.32	0.259	157.12	0.2826	0.3584	1.2885
<b>Limite Inferior</b>	339.19	0.155	94.27	0.1696	0.2151	0.7731

### 3.3. Variáveis de saída

A presente análise de sensibilidade vai-se focar nas seguintes variáveis de saída do ensaio biaxial em provete cruciforme:

- Força segundo o eixo  $0x$  ( $F_x$ );
- Força segundo o eixo  $0y$  ( $F_y$ );
- Deformações principais ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ );
- Deformação plástica equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ );
- Redução de espessura ( $RE$ );
- Trajetória de deformação ( $TD$ ).

Estas variáveis de saída (com exceção das forças) foram calculadas para todos os nós do modelo numérico, no momento em que os deslocamentos de ambos os braços do provete cruciforme são iguais a 3 mm. As forças e as deformações são avaliadas numericamente pelo programa de elementos finitos DD3IMP, enquanto que a trajetória de deformação ( $TD$ ) e a redução de espessura ( $RE$ ) são respetivamente calculadas a partir das seguintes equações:

$$TD = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (3.4)$$

$$RE = \left( \frac{t - t_0}{t_0} \right) \times (-100), \quad (3.5)$$

sendo  $t$  a espessura final e  $t_0$  a espessura inicial.

### 3.4. Metodologia para o cálculo dos índices de Sobol

O cálculo dos índices de Sobol através das equações 3.1 e 3.3 tem um custo computacional muito elevado. Assim, em alternativa é usado o método proposto por Saltelli et al. (2008):

1. Gerar uma matriz  $(J, 2k)$ , onde  $J$  é o número base de simulações da amostra, que nesta dissertação se assume igual a 1895 simulações (sendo que inicialmente foram realizadas 2000 simulações mas 105 dessas não foram posteriormente consideradas uma vez que a carga máxima ocorre para um deslocamento das amarras inferior a 3 mm) e  $k$  é o numero de parâmetros de entrada em estudo, que neste caso vão ser 6 ( $F, G, N, K, n$  e  $Y_0$ ). As primeiras 6 colunas desta matriz são utilizadas para gerar a matriz **A** (equação 3.6) e as 6 últimas colunas são utilizadas para gerar a matriz **B** (equação 3.7). Os parâmetros indicados nestas matrizes são gerados de forma quase-aleatória dentro dos limites superiores e inferiores definidos na (Tabela 3.2).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F^{(1)} & G^{(1)} & N^{(1)} & K^{(1)} & n^{(1)} & Y_0^{(1)} \\ F^{(2)} & G^{(2)} & N^{(2)} & K^{(2)} & n^{(2)} & Y_0^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{(1894)} & G^{(1894)} & N^{(1894)} & K^{(1894)} & n^{(1894)} & Y_0^{(1894)} \\ F^{(1895)} & G^{(1895)} & N^{(1895)} & K^{(1895)} & n^{(1895)} & Y_0^{(1895)} \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} F'^{(1)} & G'^{(1)} & N'^{(1)} & K'^{(1)} & n'^{(1)} & Y_0'{}^{(1)} \\ F'^{(2)} & G'^{(2)} & N'^{(2)} & K'^{(2)} & n'^{(2)} & Y_0'{}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F'^{(1894)} & G'^{(1894)} & N'^{(1894)} & K'^{(1894)} & n'^{(1894)} & Y_0'{}^{(1894)} \\ F'^{(1895)} & G'^{(1895)} & N'^{(1895)} & K'^{(1895)} & n'^{(1895)} & Y_0'{}^{(1895)} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

2. De seguida são geradas 6 matrizes  $\mathbf{C}_i$ , formadas por todas as colunas de **B** exceto a coluna  $i$  que é preenchida pela coluna  $i$  da matriz **A**, como por exemplo:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} F^{(1)} & G^{(1)} & N^{(1)} & K^{(1)} & n^{(1)} & Y_0'^{(1)} \\ F^{(2)} & G^{(2)} & N^{(2)} & K^{(2)} & n^{(2)} & Y_0'^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{(1894)} & G^{(1894)} & N^{(1894)} & K^{(1894)} & n^{(1894)} & Y_0'^{(1894)} \\ F^{(1895)} & G^{(1895)} & N^{(1895)} & K^{(1895)} & n^{(1895)} & Y_0'^{(1895)} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3. Após as matrizes **A**, **B**, **C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>**, **C<sub>3</sub>**, **C<sub>4</sub>**, **C<sub>5</sub>** e **C<sub>6</sub>** serem geradas, são realizadas simulações numéricas com os parâmetros de entrada indicados em cada uma das linhas das 8 matrizes acima mencionadas. Nesta análise foram realizadas 15160 simulações (8×1895). Para cada uma destas simulações são calculadas as variáveis de saída mencionadas na secção 3.3.
4. Após as simulações numéricas, são construídos 8 vetores, **y<sub>A</sub>**, **y<sub>B</sub>**, **y<sub>C<sub>1</sub></sub>**, **y<sub>C<sub>2</sub></sub>**, **y<sub>C<sub>3</sub></sub>**, **y<sub>C<sub>4</sub></sub>**, **y<sub>C<sub>5</sub></sub>** e **y<sub>C<sub>6</sub></sub>**, constituídos pelos valores de uma dada variável de saída quando utilizados os parâmetros de entrada das matrizes **A**, **B**, **C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>**, **C<sub>3</sub>**, **C<sub>4</sub>**, **C<sub>5</sub>** e **C<sub>6</sub>**, respetivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_A &= f(\mathbf{A}) \\ \mathbf{y}_B &= f(\mathbf{B}) \\ \mathbf{y}_{C_1} &= f(\mathbf{C}_1) \\ \mathbf{y}_{C_2} &= f(\mathbf{C}_2) \\ \mathbf{y}_{C_3} &= f(\mathbf{C}_3) \\ \mathbf{y}_{C_4} &= f(\mathbf{C}_4) \\ \mathbf{y}_{C_5} &= f(\mathbf{C}_5) \\ \mathbf{y}_{C_6} &= f(\mathbf{C}_6) \end{aligned} \quad (3.9)$$

5. Com estes resultados são então calculados os índices de Sobol de primeira ordem ( $S_i$ ) e os índices de Sobol totais ( $S_{T_i}$ ), através das seguintes equações (Janon et al, 2014):

$$S_i = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_A^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N y_A^{(j)} \sum_{j=1}^N y_{C_i}^{(j)}}{\frac{1}{2N} \left( \sum_{j=1}^N \left( y_A^{(j)} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left( y_B^{(j)} \right)^2 \right) - f_0^2}, \quad (3.10)$$

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_B^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N y_B^{(j)} \sum_{j=1}^N y_{C_i}^{(j)}}{\frac{1}{2N} \left( \sum_{j=1}^N \left( y_A^{(j)} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left( y_B^{(j)} \right)^2 \right) - f_0^2}, \quad (3.11)$$

em que  $y_A^{(j)}$ ,  $y_B^{(j)}$  e  $y_{C_i}^{(j)}$  são o elemento  $j$  dos vetores  $\mathbf{y}_A$ ,  $\mathbf{y}_B$  e  $\mathbf{y}_{C_i}$ .  $f_0^2$  é dado por

$$f_0^2 = \left[ \frac{1}{2N} \left( \sum_{j=1}^N y_A^{(j)} + \sum_{j=1}^N y_B^{(j)} \right) \right]^2. \quad (3.12)$$

---

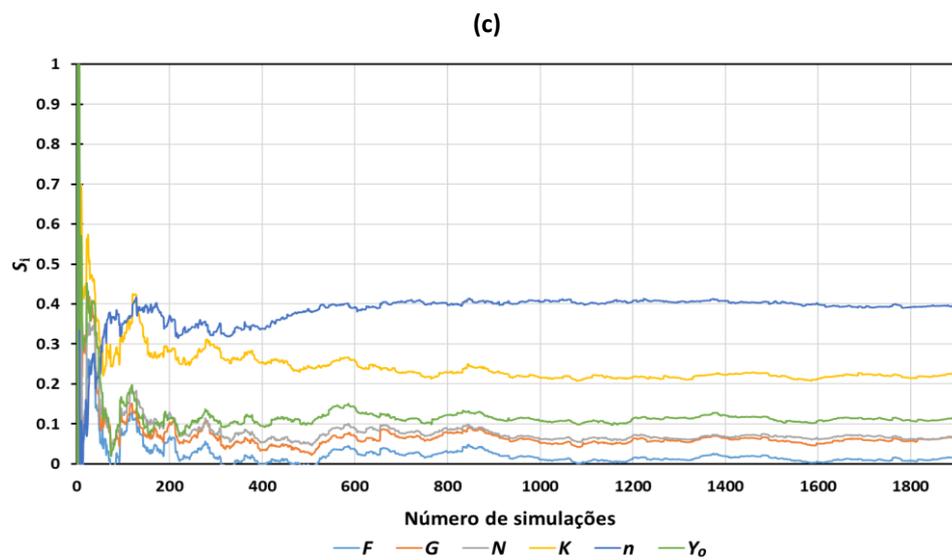
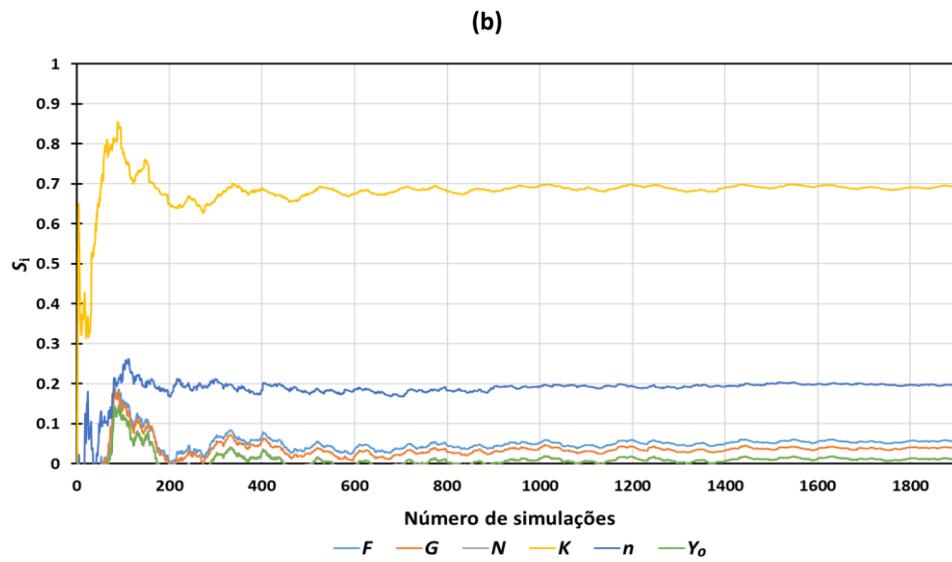
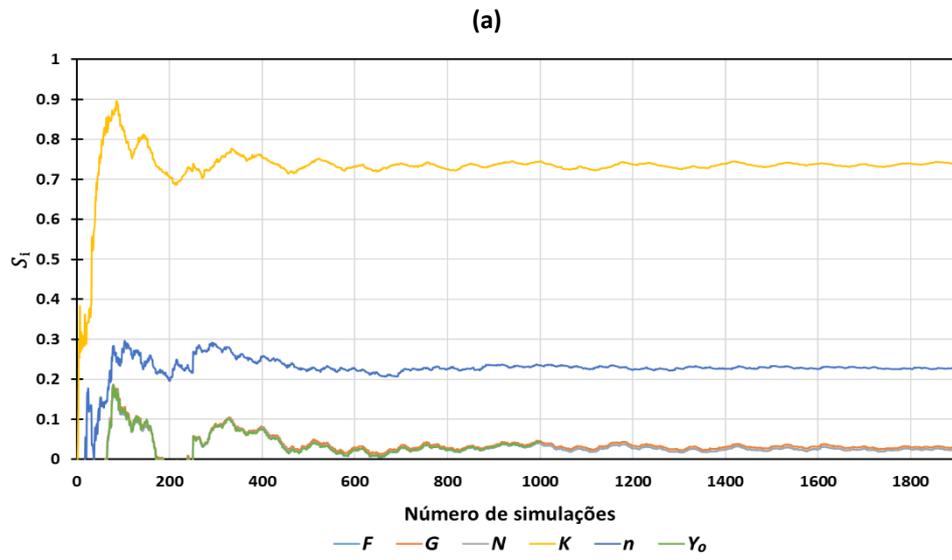
## 4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo vão ser apresentados e discutidos todos os resultados referentes à análise de sensibilidade, tais como:

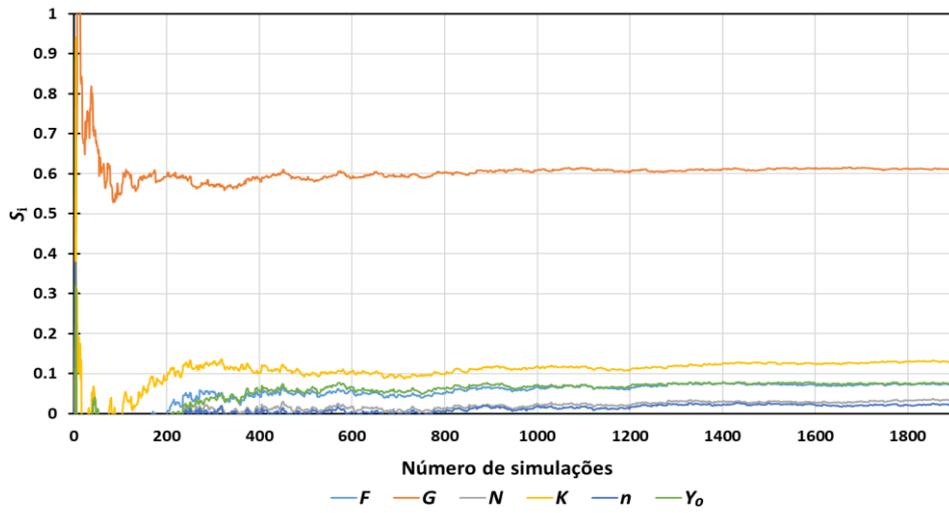
- A estabilização do cálculo dos índices de Sobol de cada parâmetro de entrada para cada uma das variáveis de saída;
- Análise dos índices de Sobol dos parâmetros de entrada  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$  nos valores máximos das forças  $F_x$  e  $F_y$ , das deformações  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_{eq}$ , e da redução de espessura;
- Análise da distribuição do valor dos índices de Sobol ao longo do provete cruciforme.

### 4.1. Estabilização do cálculo dos Índices de Sobol

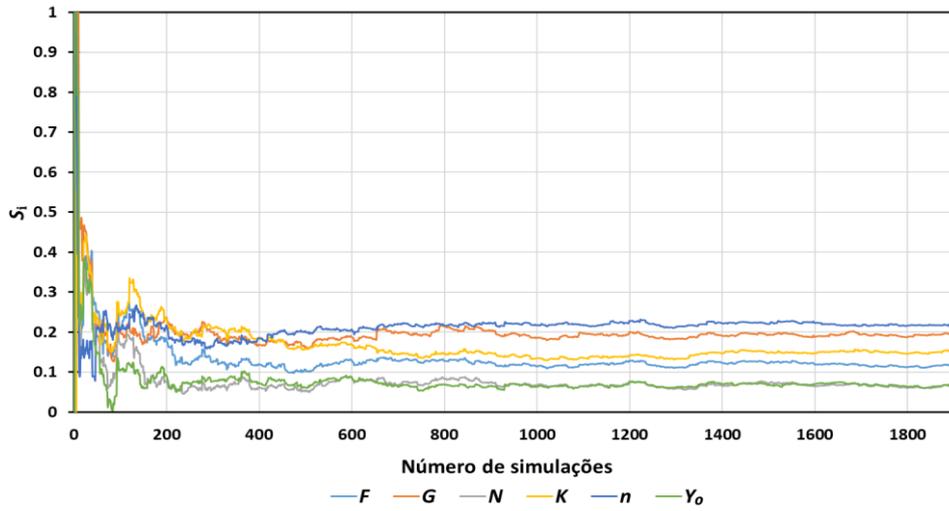
Uma vez que os índices de Sobol são uma medida estatística, é necessário analisar se para um número base de simulações,  $J$ , os valores destes se encontram estabilizados. Na Figura 4.1 mostra-se a evolução do valor dos índices de Sobol com o número base de simulações. Esta análise foi efetuada para os valores máximos das variáveis de saída, com exceção da trajetória de deformação na qual foi usado um nó localizado no raio de curvatura do provete, onde se encontram geralmente os valores de deformação plástica equivalente mais elevados. Podemos observar nesta figura que em qualquer um dos casos, o número base de 1895 simulações (previamente escolhido na secção 3.4) é mais que suficiente para ocorrer a estabilização dos índices de Sobol. De facto, para cerca de 800 simulações já se verifica uma suficiente estabilização.



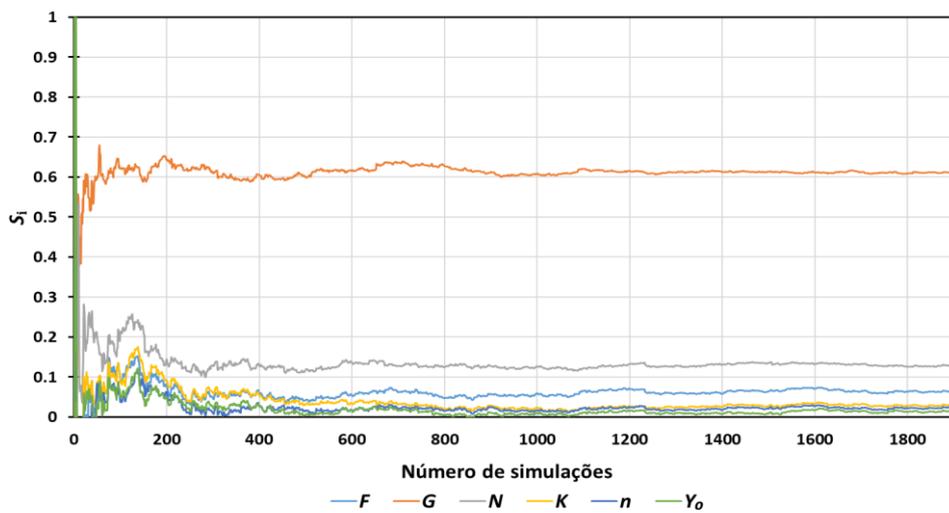
(d)

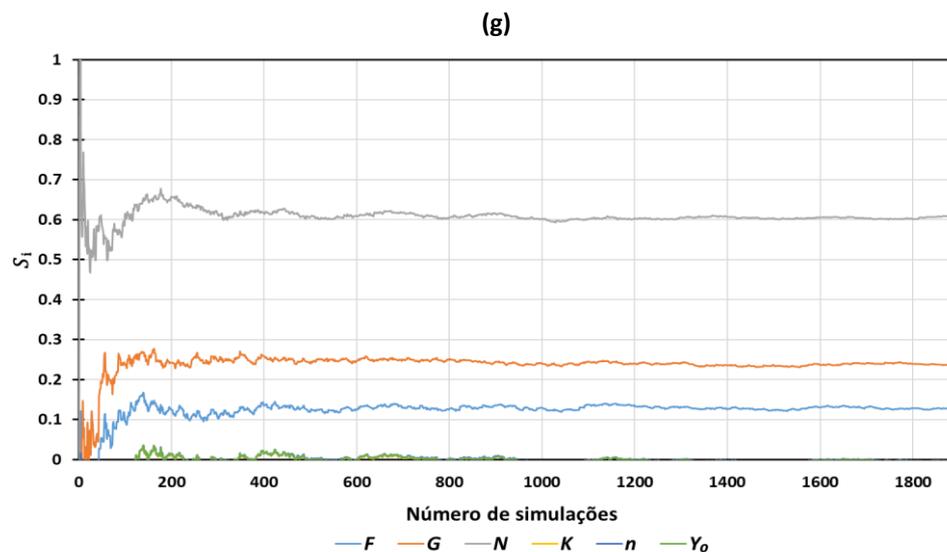


(e)



(f)





**Figura 4.1** - Gráficos que mostram a estabilização dos índices de Sobol de 1ª ordem dos parâmetros de entrada para os valores máximos das variáveis de saída, (a)  $F_x$ , (b)  $F_y$ , (c)  $\epsilon_1$ , (d)  $\epsilon_2$ , (e)  $\epsilon_{eq}$  e (f) redução de espessura, e ainda para o valor da (g) trajetória de deformação num nó localizado no raio de curvatura do provete.

## 4.2. Resultados

Uma vez verificada a estabilização dos índices de Sobol pode-se então passar à avaliação dos mesmos. Cada um dos próximos subcapítulos está dedicado a cada uma das variáveis de saída em estudo, sendo estas  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_{eq}$ , a redução de espessura (RE) e a trajetória de deformação (TD). Inicialmente mostram-se os índices de Sobol (de primeira ordem e totais) para o valor máximo de cada uma das variáveis de saída, com o propósito de concluir quais os parâmetros de entrada que induzem uma maior variação nas respostas. Posteriormente, mostra-se a distribuição dos índices de Sobol ao longo da geometria do provete cruciforme para cada uma das variáveis de saída (excepto as forças), para desta forma observar quais as zonas do provete cruciforme onde os resultados do ensaio são mais influenciados pela variação dos parâmetros de entrada.

### 4.2.1. Força máxima segundo o eixo 0x

A figura 4.2 estão representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$  para o valor máximo de  $F_x$ , que ocorre para um deslocamento imposto de 3mm. A azul estão representados os índices de Sobol de primeira ordem e a laranja os índices de Sobol totais.

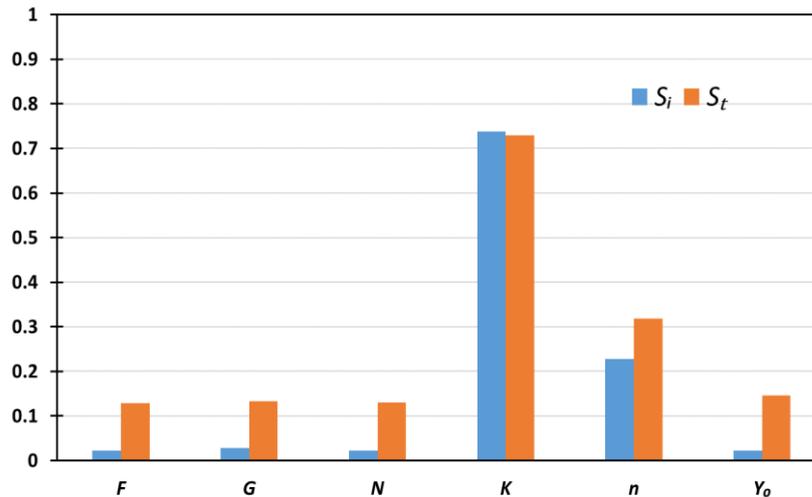


Figura 4.2 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de  $F_x$ .

A partir da análise da figura 4.2 pode-se concluir que os parâmetros  $K$  e  $n$  da lei de Swift são os parâmetros mais influentes na variação do valor máximo de  $F_x$ , com valores aproximados de 0.74 e de 0.23, respetivamente. Verifica-se que para  $K$  o índice de Sobol de primeira ordem é ligeiramente superior ao índice de Sobol total, isto acontece devido ao facto destes valores apresentarem sempre erros, por estarem sempre dependentes do número de simulações feitas. Nestas condições pode-se concluir que este parâmetro não tem qualquer tipo de interações com os outros parâmetros, já que para  $S_i$  e  $S_{Ti}$  serem semelhantes,  $S_{int}$  tem que ser próximo de 0 (ver equação 3.2). Observa-se também que os parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $N$  e  $Y_0$  têm um índice de Sobol total baixo, o que indica que estes parâmetros têm pouca influencia no valor máximo de  $F_x$ .

#### 4.2.2. Força máxima segundo o eixo $Oy$

Na figura 4.3 estão representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada e para o valor máximo de  $F_y$ , que ocorre para um deslocamento imposto de 3mm.

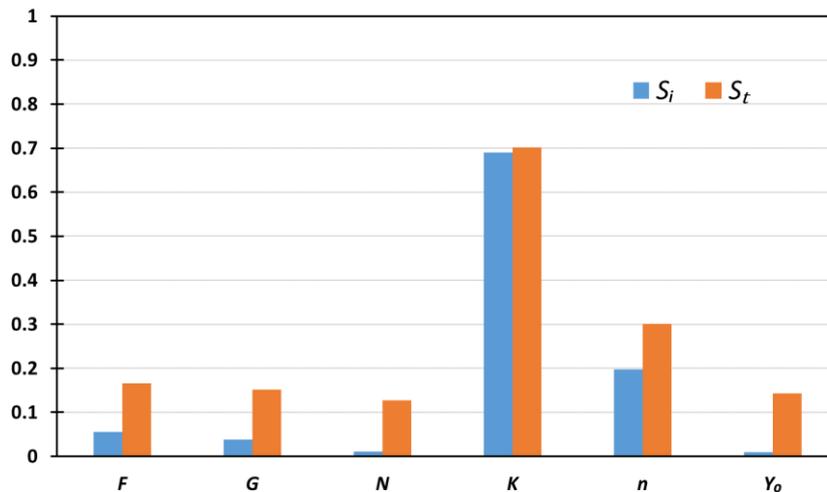


Figura 4.3 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de  $F_y$ .

Da figura 4.3 observa-se uma grande semelhança em relação aos resultados apresentados para  $F_x$  máximo na figura 4.2, com os parâmetros  $K$  e  $n$  da lei de Swift a destacarem-se com altos índices de Sobol de primeira ordem de aproximadamente 0.69 e 0.20, respetivamente. Também se nota que as interações entre os parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $n$  e  $Y_0$  têm alguma influência, apesar de pouca, na variação de  $F_y$  máximo.

### 4.2.3. Deformação principal $\varepsilon_1$

Na figura 4.4 estão representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada e para o valor máximo de  $\varepsilon_1$  obtido no provete.

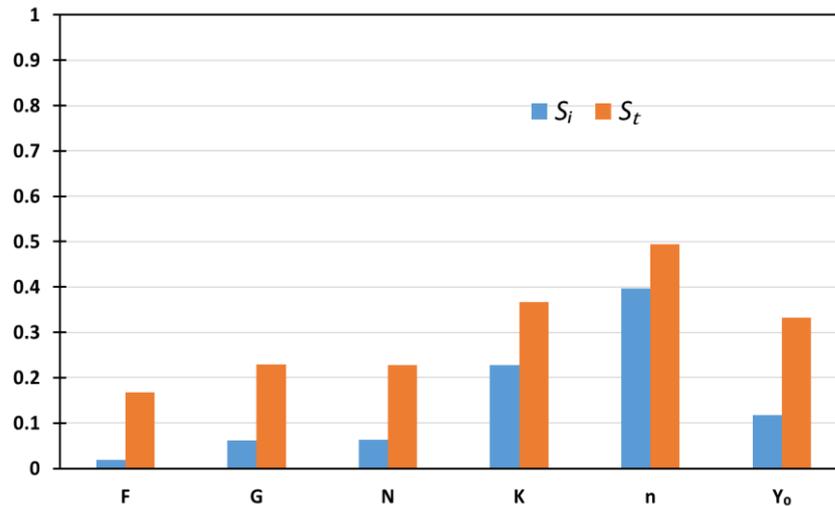


Figura 4.4 - Índices de Sobol em relação em relação ao valor máximo de  $\varepsilon_1$ .

Desta figura conclui-se que os parâmetros  $K$  e  $n$  da lei de Swift são também os que mais induzem variação no valor máximo de  $\varepsilon_1$ , algo também verificado para os valores máximos de  $F_x$  e  $F_y$ . Os valores dos índices de Sobol de primeira ordem de  $K$  e  $n$  são, respetivamente, de aproximadamente 0.23 e 0.40. Observa-se que todos os parâmetros têm alguma diferença entre os índices de Sobol de primeira ordem e os totais, o que mostra que as interações entre parâmetros de entrada têm alguma influência na variação do valor máximo de  $\varepsilon_1$ . De seguida vai ser apresentada a figura 4.5, que mostra a distribuição dos índices de Sobol de primeira ordem dos parâmetros de entrada ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_1$ . A escala varia entre azul, para os valores mais baixos dos índices de Sobol, e vermelho para os valores mais altos.

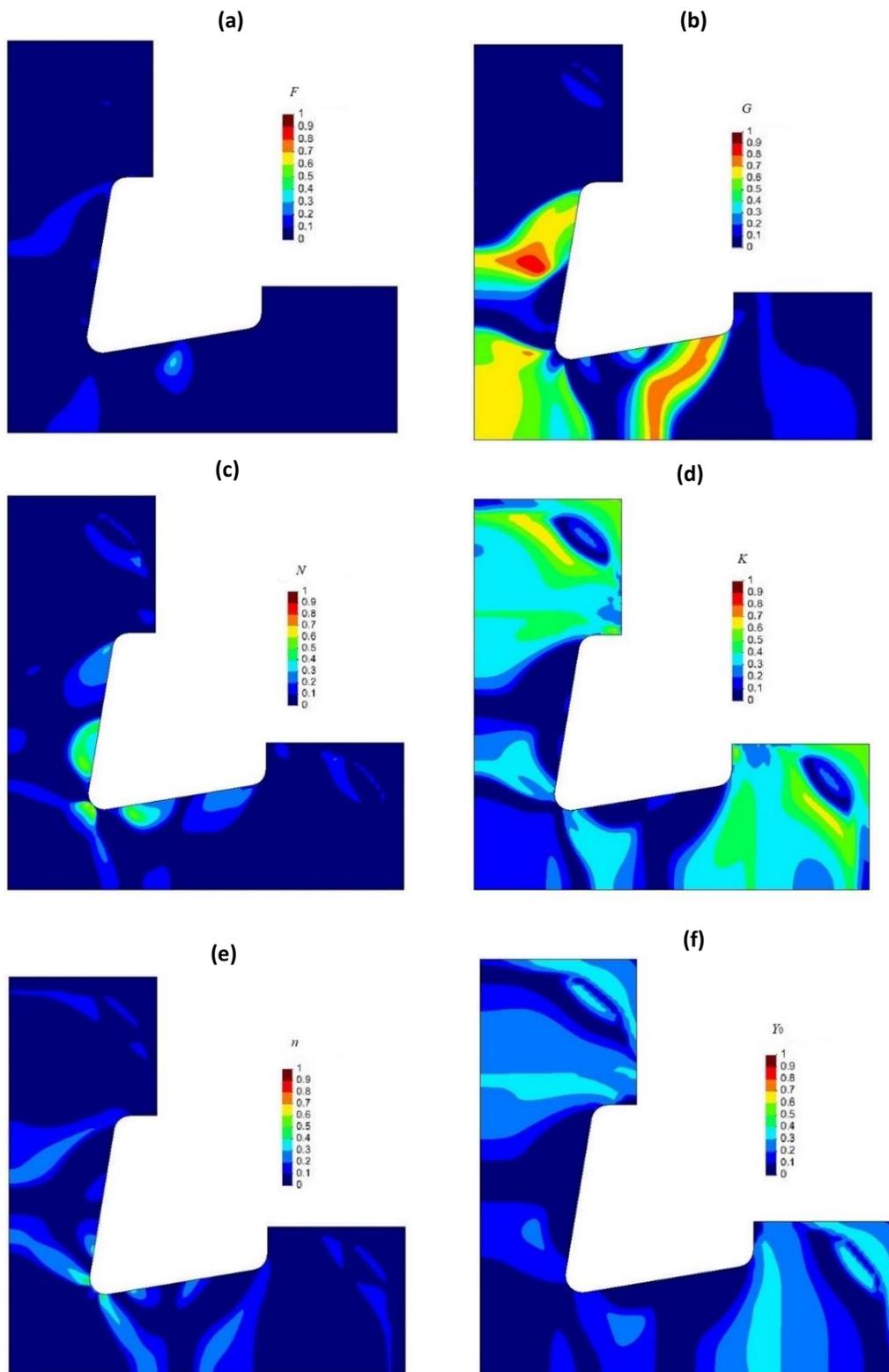


Figura 4.5 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a)  $F$ , (b)  $G$ , (c)  $N$ , (d)  $K$ , (e)  $n$  e (f)  $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_1$ .

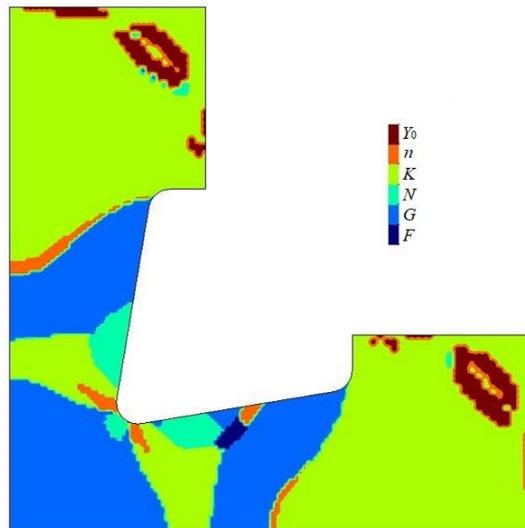
---

A partir da figura 4.5 constata-se:

- o parâmetro  $G$  do critério de Hill'48 é o que mais se destaca, tendo valores máximos entre 0.8 e 0.9 localizados no braço do eixo  $Oy$  do provete, e valores entre 0.7 e 0.8 no braço do eixo  $Ox$ , sendo que também é bastante influente na zona central do provete;
- $F$  é um parâmetro com índices de Sobol de primeira ordem baixos na maior parte da geometria tendo um valor pontual entre 0.3 e 0.4;
- $N$  tem influência na zona do raio de curvatura e em zonas dos dois braços perto do centro com valores entre 0.5 e 0.6, sendo que na restante geometria tem índices de Sobol baixos;
- $K$  tem influência principalmente nas zonas das amarras com valores que chegam a estar entre 0.6 e 0.7;  $n$  tem valores entre 0.3 e 0.4 junto ao raio de curvatura, porém no resto da geometria tem valores abaixo de 0.1;
- $Y_0$  tem índices entre 0.3 e 0.4 na zona das amarras sendo que na restante geometria tem valores abaixo de 0.1;
- $N$ ,  $n$ ,  $K$  e  $Y_0$  apresentam uma simetria nas distribuições dos índices de Sobol entre os dois braços do provete.

A partir das observações anteriores conclui-se que  $G$  é o parâmetro que mais influencia a variação de  $\varepsilon_1$ , tanto na zona central do provete como nos braços. Na zona das amarras, o parâmetro mais influente é o  $K$ ; e na zona do raio de curvatura, o parâmetro mais influente é o  $N$ . Denota-se também uma diferença de resultados entre os parâmetros mais influentes na variação do valor máximo de  $\varepsilon_1$  (ver Figura 4.4) e os parâmetros mais influentes nos valores de  $\varepsilon_1$  ao longo do provete cruciforme (ver Figura 4.5).

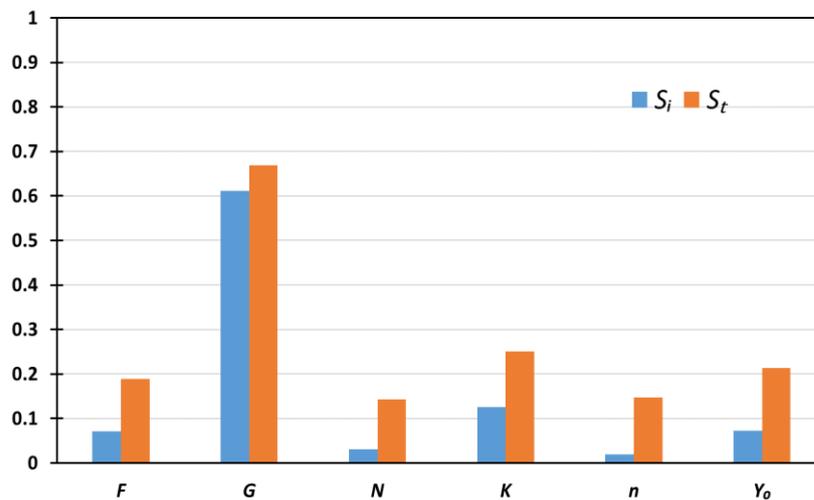
Na Figura 4.6 mostra-se o parâmetro mais influente em cada zona do provete cruciforme. Pode-se concluir desta figura que os parâmetros que mais se destacam são o  $G$  e o  $K$ , sendo que  $G$  tem mais influência na zona central e nos braços enquanto que  $K$  tem mais influência na zona das amarras e na transição entre a zona central e os braços.



**Figura 4.6** - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região do provete em relação a  $\varepsilon_1$ .

#### 4.2.4. Deformação principal $\varepsilon_2$

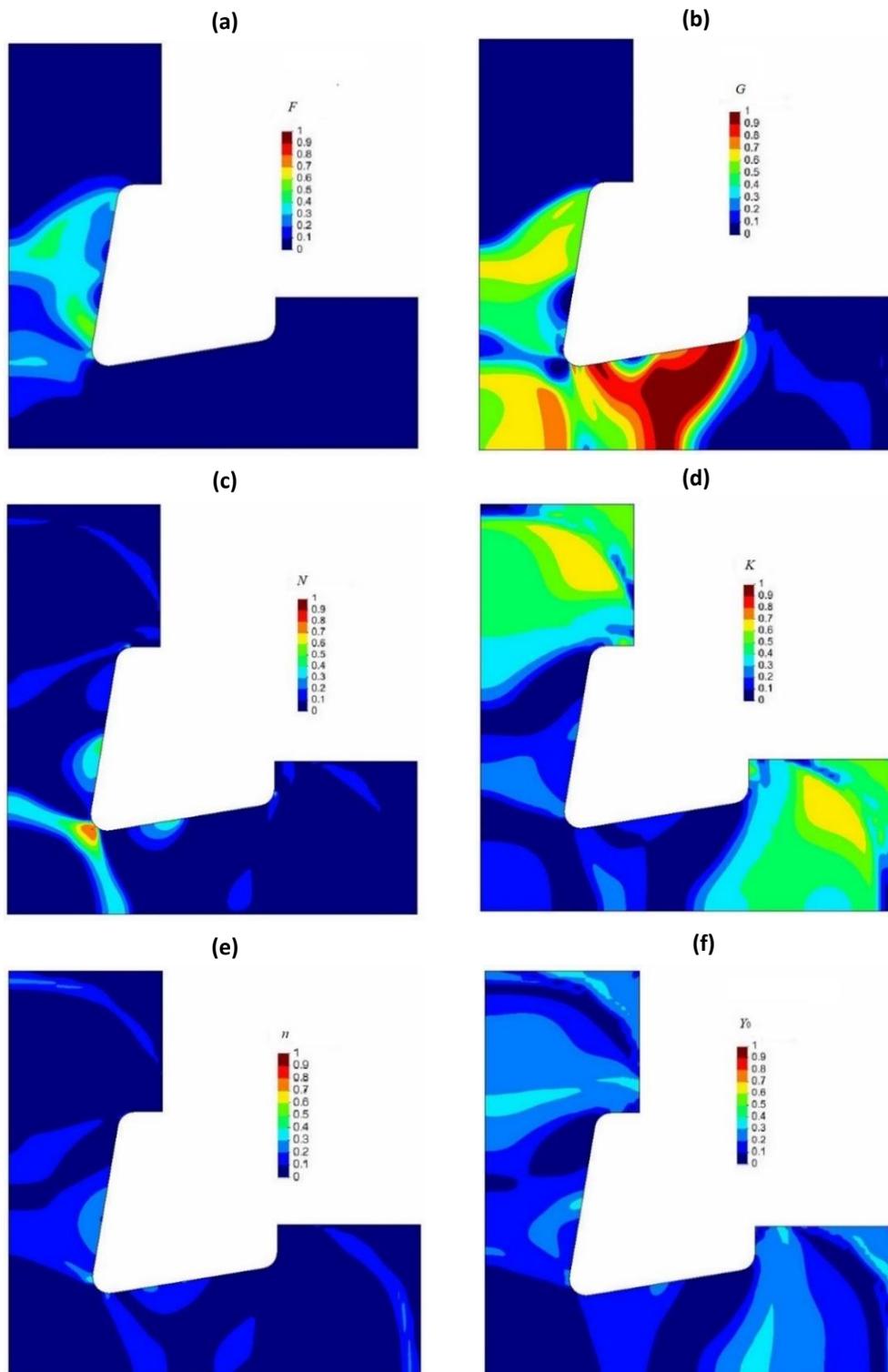
Na figura 4.7 encontram-se representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada e para o valor de  $\varepsilon_2$  máximo obtido no provete.



**Figura 4.7** - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de  $\varepsilon_2$ .

Observa-se nesta figura que  $G$  é acentuadamente o parâmetro que mais influencia o valor de  $\varepsilon_2$  máximo, com um índice de Sobol de primeira ordem de aproximadamente 0.61. Constata-se também que em todos os parâmetros de entrada existe alguma diferença entre os índices de Sobol de primeira ordem e totais. Deduz-se assim, que as interações entre parâmetros têm alguma influência no valor de  $\varepsilon_2$  máximo.

Na Figura 4.8 representa-se a distribuição dos índices de Sobol de primeira ordem dos parâmetros de entrada ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_2$ .

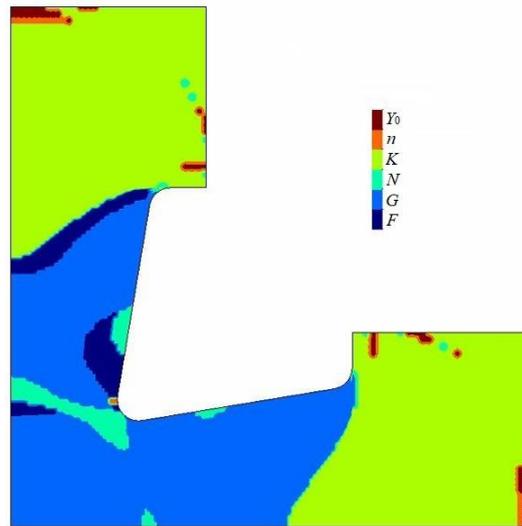


**Figura 4.8** - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a)  $F$ , (b)  $G$ , (c)  $N$ , (d)  $K$ , (e)  $n$  e (f)  $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_2$ .

Da figura 4.8 observa-se:

- Tal como em relação a  $\varepsilon_1$ ,  $G$  é o parâmetro que atinge valores de índices de Sobol mais elevados, estando estes entre 0.9 e 1, sendo que neste caso esses valores encontram-se no braço do eixo  $Ox$ .  $G$  também tem valores elevados no centro (entre 0.7 e 0.8) e no braço do eixo  $Oy$  (entre 0.6 e 0.7);
- $F$  tem na maior parte do braço do eixo  $Oy$  valores superiores a 0.1, sendo que em algumas zonas desse mesmo braço atinge valores entre 0.5 e 0.6;
- $N$  tem um valor pontual bastante elevado na zona da ligação dos braços, entre 0.8 e 0.9;
- $K$  é o parâmetro com valores mais elevados dos índices nas zonas das amarras, com valores máximos entre 0.6 e 0.7;
- $n$  tem índices de Sobol com valores insignificantes ao longo do provete, tendo valores pontuais entre 0.3 e 0.4 na zona de ligação dos braços;
- $Y_0$ , tal como  $n$ , também tem índices de Sobol com valores baixos ao longo do provete, tendo valores um pouco mais elevados na zona das amarras e em zonas pontuais nos dois braços, entre 0.3 e 0.4
- observa-se uma simetria nas distribuições dos índices de Sobol entre os braços do provete, no caso dos parâmetros  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$ .

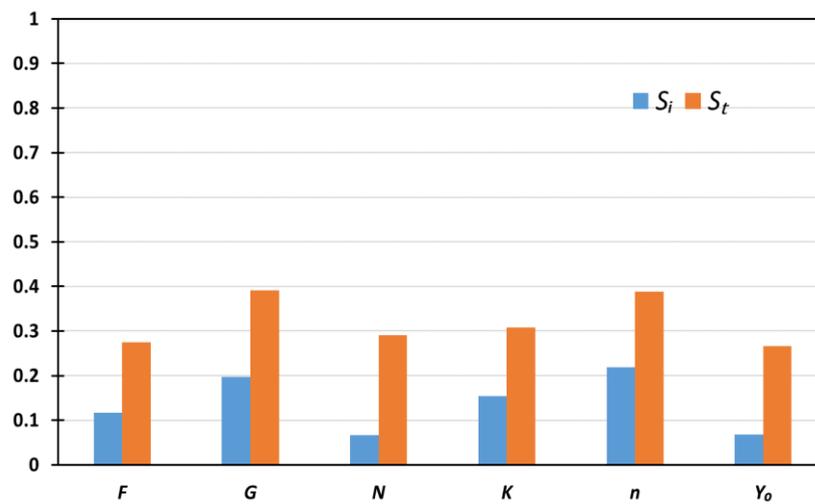
Na Figura 4.9 são apresentados os parâmetros mais influentes em relação a  $\varepsilon_2$  para cada zona do provete cruciforme. Desta figura conclui-se que  $G$  e  $K$  são os parâmetros que mais se destacam, sendo  $G$  o mais influente na zona do centro e dos braços, e  $K$  o mais influente na zona das amarras.



**Figura 4.9** - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação a  $\varepsilon_2$ .

#### 4.2.5. Deformação plástica equivalente

Na Figura 4.10 encontram-se representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada e para a  $\varepsilon_{eq}$  máxima observada no provete.



**Figura 4.10** - Índices de Sobol em relação ao valor máximo de  $\varepsilon_{eq}$ .

Desta figura conclui-se que nenhum dos parâmetros de entrada se destaca, sendo que todos eles têm índices de Sobol totais entre 0.26 e 0.3. Observa-se ainda que as interações entre os parâmetros têm uma influência significativa no valor de  $\varepsilon_{eq}$ .

Na figura 4.11 mostra-se a distribuição dos índices de Sobol de primeira ordem dos parâmetros de entrada ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_{eq}$ .

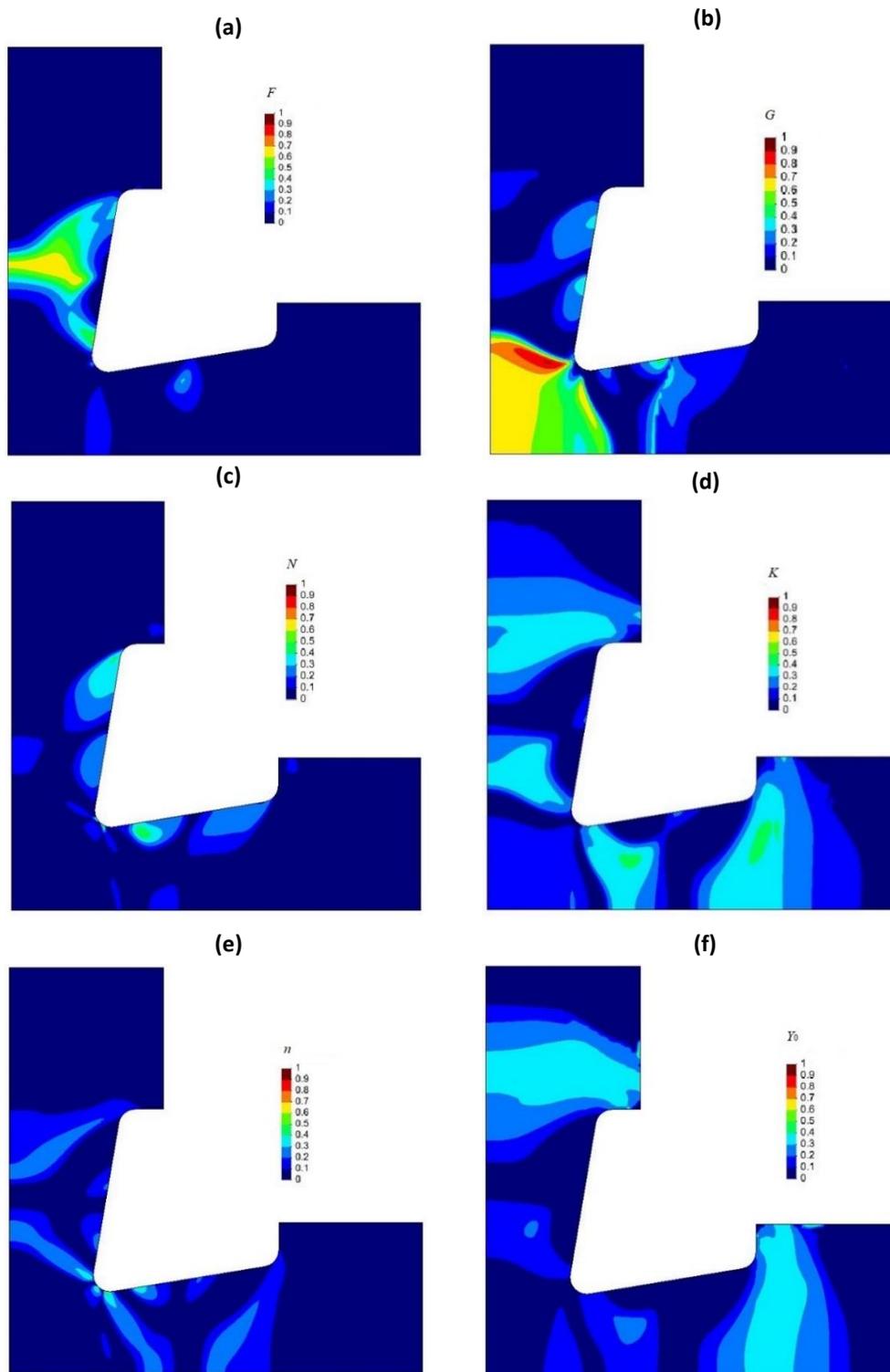
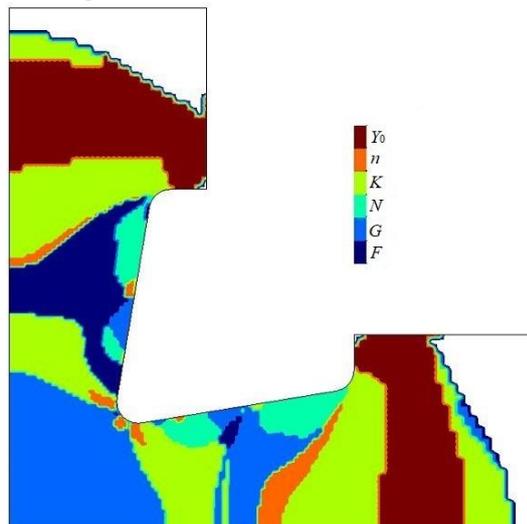


Figura 4.11 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a)  $F$ , (b)  $G$ , (c)  $N$ , (d)  $K$ , (e)  $n$  e (f)  $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para  $\varepsilon_{eq}$ .

Conclui-se desta figura:

- $G$  é o parâmetro com maiores valores de índices de Sobol de primeira ordem, com máximos entre 0.9 e 1, sendo que estes se encontram na transição entre a zona central e o braço do eixo  $Oy$ . Na zona central este parâmetro também tem índices elevados, entre 0.6 e 0.7;
- $F$  tem índices com valores elevados, entre 0.6 e 0.7, no braço do eixo  $Oy$ , sendo que, no restante provete, os índices possuem valores muito baixos;
- $N$  tem índices com valores entre 0.5 e 0.6 em regiões pontuais dos braços;
- $K$  tem valores entre 0.5 e 0.6 no braço do eixo  $Ox$  e na zona de ligação entre este braço e a amarra;
- $n$  tem valores entre 0.4 e 0.5 na zona de ligação dos dois braços;  $Y_0$  tem valores entre 0.3 e 0.4 na zona das amarras;
- tal como para  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , também existe uma simetria nas distribuições dos índices de Sobol entre os braços do provete, no caso dos parâmetros  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$ .

Na Figura 4.12 mostra-se os parâmetros mais influentes em cada região do provete cruciforme, no valor de  $\varepsilon_{eq}$ . Desta figura verifica-se que na zona central, o valor de  $\varepsilon_{eq}$  é principalmente afetado pelo parâmetro  $G$ . Já nos braços, quase todos os parâmetros afetam de forma significativa o valor de  $\varepsilon_{eq}$ . Além disso, existe uma região na zona das amarras (a cor branca) onde os parâmetros não têm qualquer influência, uma vez que não existe deformação plástica nessa região.



**Figura 4.12** - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação a  $\varepsilon_{eq}$ .

#### 4.2.6. Redução de espessura

Na figura 4.13 estão representados os índices de Sobol de primeira ordem e totais, por parâmetro de entrada e para a redução de espessura máxima obtida no provete.

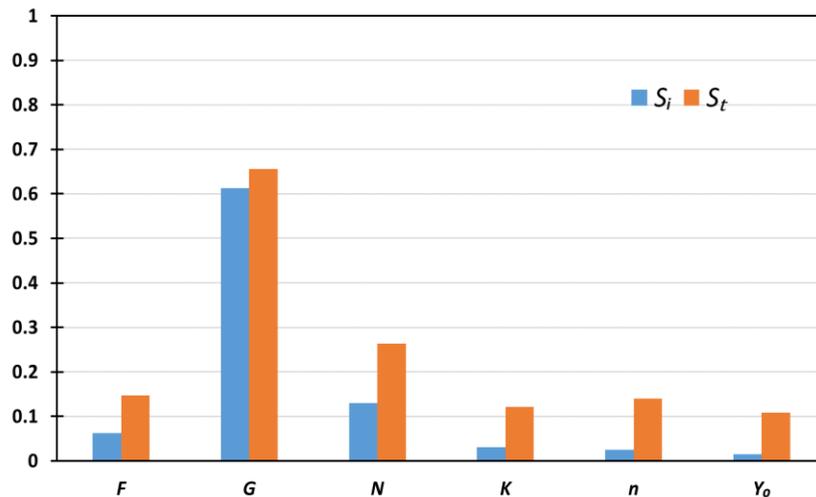
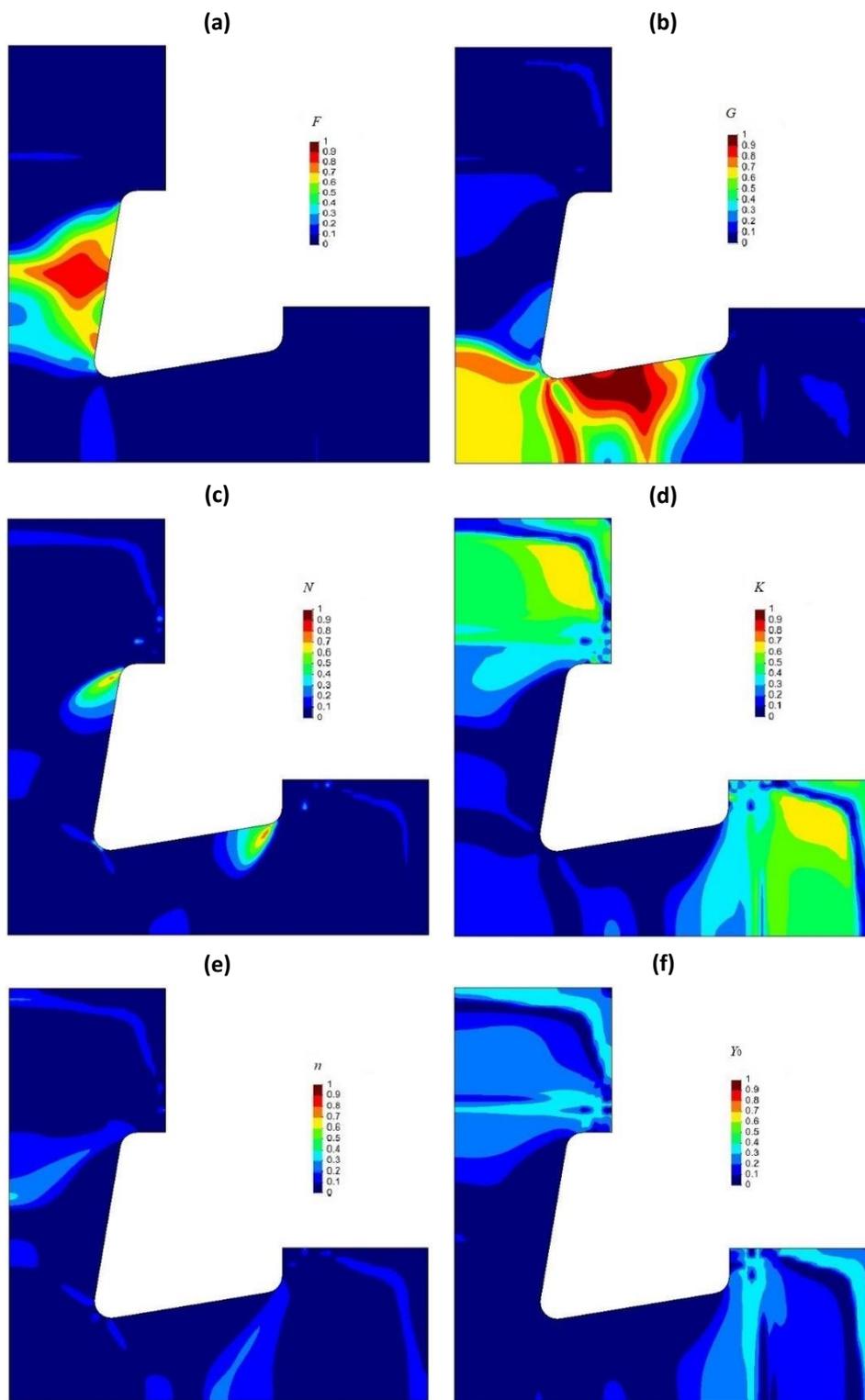


Figura 4.13 - Índices de Sobol em relação ao valor máximo da redução de espessura

Conclui-se desta figura que o valor máximo da redução de espessura é significativamente influenciado pela variação do parâmetro  $G$ , com um índice de Sobol de primeira ordem de aproximadamente 0.6. Pode-se ainda verificar que o valor máximo da redução de espessura tem alguma sensibilidade às interações entre os parâmetros de entrada. Na Figura 4.14 são representadas as distribuições dos índices de Sobol de primeira ordem dos parâmetros de entrada ao longo do provete cruciforme, para a redução de espessura

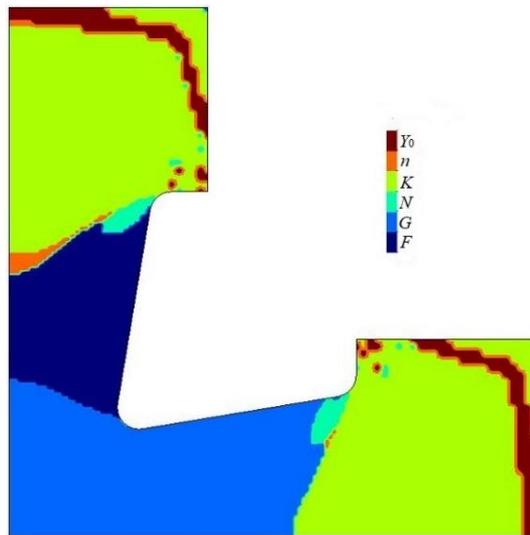


**Figura 4.14** - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a)  $F$ , (b)  $G$ , (c)  $N$ , (d)  $K$ , (e)  $n$  e (f)  $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para a redução de espessura.

Desta figura constata-se que:

- $G$  é o parâmetro de entrada que mais influencia a variabilidade na redução de espessura, com índices de Sobol de primeira ordem que atingem valores entre 0.9 e 1 em certas zonas do braço do eixo  $0x$ ;
- $F$  tem índices com valores bastante elevados, entre 0.8 e 0.9, no braço do eixo  $0y$ ;
- $N$  tem índices com valores elevados, entre 0.7 e 0.8, em regiões muito específicas de cada um dos braços;
- $K$  tem índices que atingem valores significativos, até 0.7, na zona das amarras;
- $n$  e  $Y_0$  apresentam uma influência muito pequena no valor da redução de espessura ao longo do provete;
- existe uma simetria nas distribuições dos índices de Sobol entre os dois braços do provete, no caso dos parâmetros  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$ .

Na Figura 4.15 mostra-se os parâmetros mais influentes em cada região do provete cruciforme, no valor da redução de espessura. Desta figura conclui-se que a redução de espessura é mais sensível, no centro e nos braços do provete, aos parâmetros do critério de Hill. Sendo mais sensível a  $G$  no centro e no braço do eixo  $0x$ , e a  $F$  no braço do eixo  $0y$ . Verifica-se também que nas zonas das amarras a redução de espessura é mais sensível aos parâmetros da lei de Swift, nomeadamente ao parâmetro  $K$ ; ainda que pouco visível, observa-se uma vez mais a existência de uma simetria entre os dois braços para os parâmetros  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$ .



**Figura 4.15** - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação à redução de espessura.

### 4.2.7. Trajetória de deformação

Na Figura 4.16 são representadas as distribuições dos índices de Sobol de primeira ordem ao longo do provete cruciforme, para a trajetória de deformação.

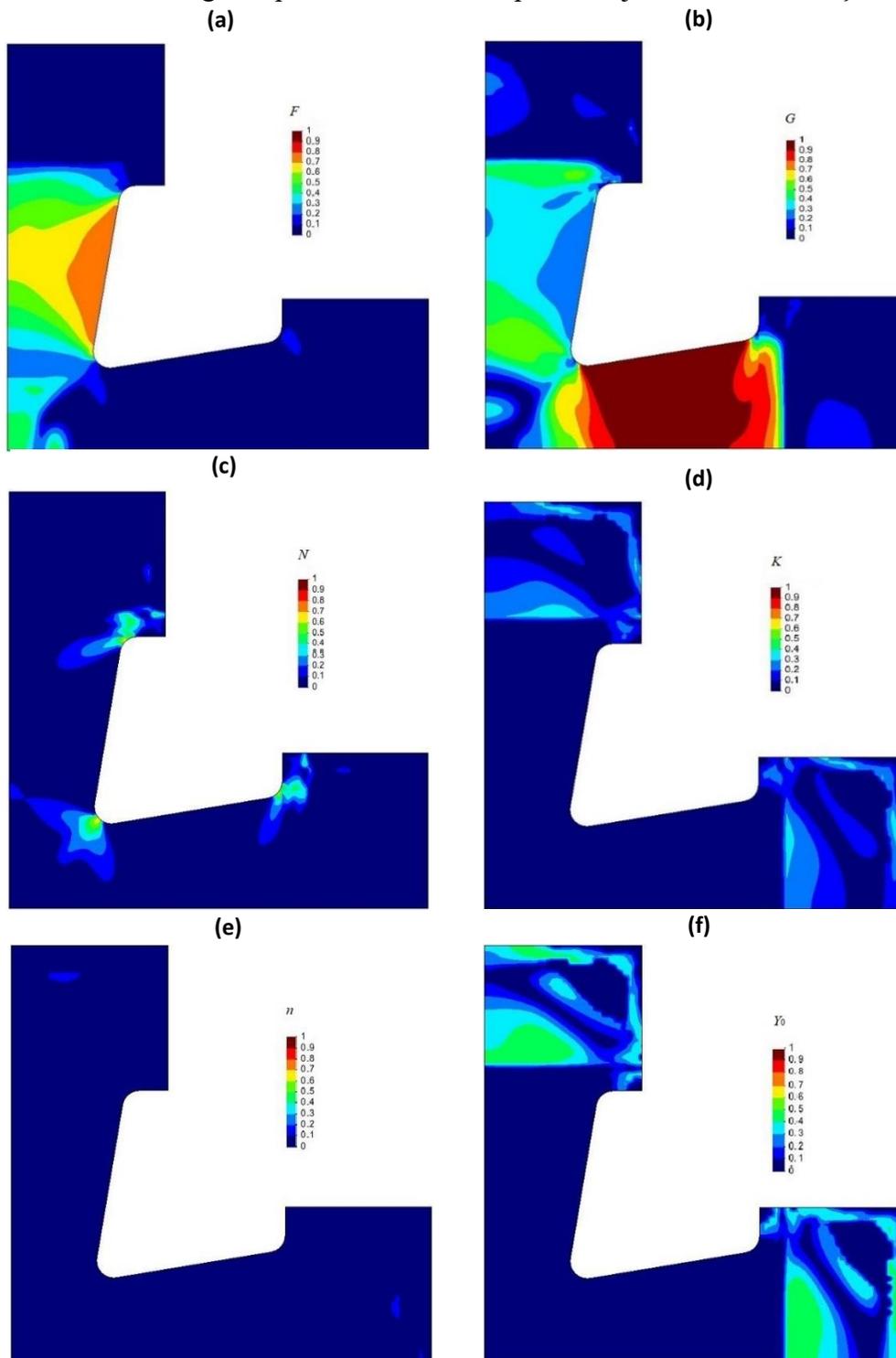
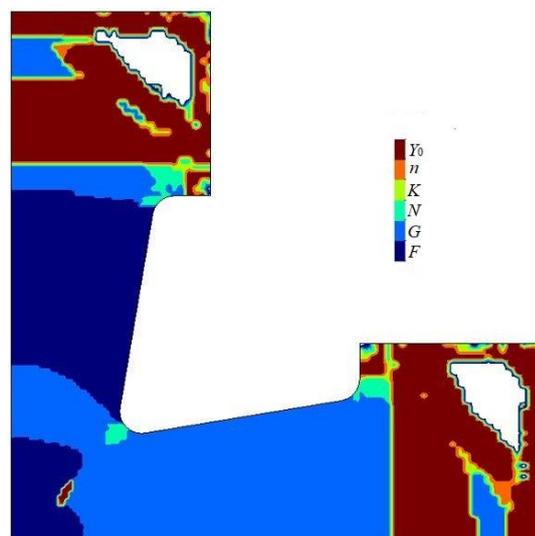


Figura 4.16 - Índices de Sobol de 1ª ordem de (a)  $F$ , (b)  $G$ , (c)  $N$ , (d)  $K$ , (e)  $n$  e (f)  $Y_0$ , ao longo do provete cruciforme, para a trajetória de deformação.

Da Figura 4.16 conclui-se que:

- $G$  é o parâmetro de entrada que mais influencia a variabilidade nas trajetórias de deformação no braço do eixo  $Ox$ , com índices de Sobol que atingem valores próximos de 1;
- $F$  tem índices com valores elevados no braço do eixo  $Oy$  e na zona central;
- $N$  tem índices com valores entre 0.6 e 0.7, mas apenas em regiões próximas aos entalhes;
- os parâmetros da lei de Swift têm índices com valores muito baixos nos braços e na zona central, sendo que  $K$  e  $Y_0$  só têm uma pequena influência na zona das amarras.

Na Figura 4.17 representa-se os parâmetros com o maior índice de Sobol para cada zona do provete em relação à trajetória de deformação. Desta figura constata-se que a trajetória de deformação é mais sensível, no centro e nos braços do provete aos parâmetros  $G$  e  $F$ , e nas zonas dos entalhes é mais sensível a  $N$ . Observa-se uma pequena região na zona central do provete em que  $Y_0$  apresenta a maior influência, apesar dos valores dos índices serem pouco expressivos; de facto, nessa região nenhum parâmetro apresenta índices com valores superiores a 0.1 (ver Figura 4.16).



**Figura 4.17** - Parâmetros com maiores índices de sensibilidade em cada região da geometria do provete em relação à trajetória de deformação.

### 4.3. Discussão da análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade foi realizada com o objetivo de conhecer quais os parâmetros de entrada ( $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $n$  e  $Y_0$ ) com maior influência nos resultados do ensaio biaxial em provete cruciforme, nomeadamente, nas forças segundo  $Ox$  e  $Oy$ , nas deformações principais ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ), na deformação plástica equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ ), na redução de espessura ( $RE$ ) e na trajetória de deformação ( $TD$ ). Os resultados desta análise resumem-se nas Tabelas 4.1 e 4.2. A Tabela 4.1 indica os parâmetros com mais e menos influência (com índices de Sobol de primeira ordem inferiores a 0.1) nos valores máximos de cada variável de saída e a Tabela 4.2 indica os parâmetros mais influentes em cada zona do provete.

**Tabela 4.1** - Parâmetros mais influentes no valor máximo de cada variável de saída

	Parâmetros mais influentes	Parâmetros menos influentes
$F_x$	$K$ e $n$	$F$ , $N$ e $G$
$F_y$	$K$ e $n$	$Y_0$ , $N$ , $G$ e $F$
$\varepsilon_1$	$n$ e $K$	$F$ , $G$ e $N$
$\varepsilon_2$	$G$	$n$ , $N$ , $F$ e $Y_0$
$\varepsilon_{eq}$	$n$ e $G$	$N$ e $Y_0$
$RE$	$G$	$Y_0$ , $n$ , $K$ e $F$

Quando analisada a Tabela 4.1 percebe-se que:  $F_x$ ,  $F_y$  são mais sensíveis aos parâmetros  $K$  e  $n$  da lei de Swift, o que representa um resultado expectável visto que estes parâmetros estão fortemente relacionados com o encruamento (equação 2.7). Enquanto que  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{eq}$  e a redução de espessura são mais sensíveis ao parâmetro  $G$ , o que também justifica-se pelo facto deste parâmetro estar relacionado com o parâmetro  $H$  através da relação  $G +$

$H = 1$ , estando então os dois parâmetros simultaneamente relacionados com as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  (equação 2.2); verifica-se também que  $\varepsilon_{eq}$  é bastante sensível a  $n$ . Observa-se ainda que  $N$  é no global um parâmetro com pouca sensibilidade nos resultados, o que pode ser explicado pelo facto deste parâmetro estar ligado às tensões de corte, que são pouco significativas no ensaio biaxial, com exceção de sítios muito específicos do provete como o raio de curvatura. Adicionalmente,  $F_x$ ,  $F_y$  e  $\varepsilon_1$  são pouco sensíveis aos parâmetros do critério de Hill'48, e a redução de espessura é pouco sensível aos parâmetros da lei de Swift.

Na tabela 4.2 são indicados os parâmetros que induzem uma maior sensibilidade em cada uma das variáveis de saída para cada zona do provete. O provete é dividido em quatro zonas distintas: o centro do provete, o braço do eixo  $0x$ , o braço do eixo  $0y$  e a zona do raio de curvatura. Desta tabela constata-se que para o centro do provete e para o braço do eixo  $0x$  o parâmetro que induz maior sensibilidade, no geral, é o parâmetro  $G$ , pela mesma razão explicada anteriormente. No braço do eixo  $0y$  é o parâmetro  $F$  que mais influencia esta zona, o que faz sentido por este parâmetro estar relacionado com  $\sigma_{yy}$  (equação 2.2). Enquanto que na zona do raio de curvatura os parâmetros  $N$  e  $n$  são os que mais se destacam, porque nesta zona verificam tensões de corte e tensões equivalentes elevadas.

**Tabela 4.2** - Parâmetros com maior sensibilidade para cada zona do provete

	Centro	Braço do eixo $0x$	Braço do eixo $0y$	Raio de curvatura
$\varepsilon_1$	$G$	$K$ e $G$	$K$ e $G$	$N$ e $n$
$\varepsilon_2$	$G$	$G$	$G$ e $F$	$N$
$\varepsilon_{eq}$	$G$	$G$ , $N$ e $K$	$F$ , $N$ e $K$	$n$
$RE$	$G$	$G$	$F$	$G$
$TD$	$G$ , $F$ e $Y_0$	$G$	$F$	$N$



## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, pretendeu-se identificar quais os parâmetros do material, (critério de plasticidade e lei de encruamento), que têm maior influência nos resultados do ensaio biaxial em provete cruciforme, recorrendo a uma análise de sensibilidade baseada nos índices de Sobol. Nesta análise de sensibilidade, avaliou-se a influência dos parâmetros de entrada  $F$ ,  $G$  e  $N$  do critério de Hill'48, e  $Y_0$ ,  $K$  e  $n$  da lei de Swift, nos resultados (variáveis de saída) das forças segundo  $Ox$  e  $Oy$ , deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , deformação plástica equivalente, redução de espessura e trajetória de deformação.

Inicialmente, estudou-se a sensibilidade dos parâmetros de entrada nos valores máximos das variáveis de saída. Desta análise, concluiu-se que os valores máximos das forças segundo  $Ox$  e  $Oy$ , e da deformação principal  $\varepsilon_1$ , são principalmente influenciados pelos parâmetros  $K$  e  $n$ . O valor máximo da deformação plástica equivalente é influenciado por quase todos os parâmetros de entrada, ainda que de forma mais significativa pelos parâmetros  $G$  e  $n$ . Já os valores máximos de  $\varepsilon_2$  e da redução de espessura são essencialmente afetados pelo parâmetro  $G$ . Em todos os resultados do ensaio cruciforme (parâmetros de saída), verificou-se que todos os parâmetros de entrada possuem índices de Sobol totais acima de 0.1, o que indica que todos os parâmetros de entrada são de certa forma relevantes, quando se tem em conta as interações entre eles.

Posteriormente, estudou-se a sensibilidade dos parâmetros de entrada nos valores dos parâmetros de saída, ao longo do provete cruciforme. Nesta análise concluiu-se que  $G$  é o parâmetro que, no geral, mais influencia os resultados no centro do provete e no braço do eixo  $Ox$ , enquanto que  $F$  é o parâmetro que mais influencia os resultados no braço do eixo  $Oy$ . Os resultados na zona do raio de curvatura são influenciados por uma grande variedade de parâmetros, nomeadamente,  $n$ ,  $N$  e  $G$ . Duma forma geral, os parâmetros de entrada que mais influenciam os resultados, ao longo do provete, são os parâmetros do critério de Hill'48.

O cálculo dos índices de Sobol exigiu um grande número de simulações. Com o objetivo de reduzir significativamente este custo computacional, pretende-se no futuro usar metamodelos em alternativa ao uso de simulações numéricas (Marques et al., 2020). Para

além disso, seria ainda interessante explorar a utilização de outros índices de sensibilidade e compará-los com os índices de Sobol, de modo a perceber se os parâmetros mais influentes são os mesmos. Por último, em trabalhos futuros, espera-se utilizar as conclusões desta análise de sensibilidade para desenvolver uma estratégia de identificação eficiente, utilizando o ensaio biaxial em provete cruciforme.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adaixo, A., (2017), “Numerical study on the effect of mechanical properties variability in sheet metal forming processes”, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Callister, W. (2000), “Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução”, 5ª Ed., LTC
- De Souza, T. e Rolfe, B. (2008), “Multivariate modelling of variability in sheet metal forming”, *Journal of Materials Processing Technology*, 203, 1-12. doi:10.1016/j.jmatprotec.2007.09.075
- Hill, R. (1948), “A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals”, *Proceedings of the Royal Society of London*, 193<sup>a</sup>, 281-297. doi:10.1098/rspa.1948.0045
- Janon, A., Klein, T., Lagnoux, A., Nodet e Prieur, C. (2014), “Asymptotic normality and efficiency of two sobol index estimators”, *ESAIM: Probability and Statistics*, 18, 342-364. doi:10.1051/ps/2013040
- Lazarescu, L. e Banabic, D. (2013), “Influence of material property variability on the thickness in sheet metal subjected to the hydraulic bulging”, *Advanced Engineering Forum*, Vols. 8-9, pp251-258. doi:10.4028/www.scientific.net/AEF.8-9.251
- Marques, A., Prates, P., Pereira, A.F.G., Oliveira, M., Fernandes, J. e Ribeiro, B., (2020), “Performance Comparison of Parametric and Non-Parametric Regression Models for Uncertainty Analysis of Sheet Metal Forming Processes”, *Metals* 2020, 10, 457. doi:10.3390/met10040457
- Paraianu, L., Comsa, S. e Banabic, D. (2011), “Influence of the mechanical parameters on the forming limit curve”, *CERTETA-Research center in sheet metal forming*, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca.
- Paraianu, L., Comsa, S. e Banabic, D. (2012), “Sensitivity analysis of the mechanical parameters of sheet metals influencing the forming limit curves”, 3<sup>rd</sup> International conference on engineering optimization, Rio de Janeiro, 01-05 July 2012.
- Pereira, A.F.G., Prates, P., Oliveira, M. e Fernandes, J. (2020), “Inverse identification of the work hardening law from circular and elliptical bulge tests”, *Journal of Materials Processing Tech.*, 279 (2020) 116573. doi:10.1016/j.jmatprotec.2019.116573
- Pereira, A.F.G., Prates, P., Sakharova, N., Oliveira, M. e Fernandes, J. (2014), “On the identification of kinematic hardening with reverse shear test”, *Engineering with Computers* 31, 681–690. doi:10.1007/s00366-014-0369-7
- Pereira A.F.G., Prates P., Oliveira M., Fernandes V. (2019), “Normal stress components during shear tests of metal sheets”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 164, 2019, 105169. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105169.

- Prates, P. (2010), “Metodologia de Análise Inversa para Determinação Simultânea dos Parâmetros de Leis Constitutivas, com Recurso a um Provete Cruciforme”, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Prates, P. (2014), “Inverse Methodologies for Identifying Constitutive Parameters of Metal Sheets”, Tesde de Doutoramento em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Prates, P., Oliveira, M. e Fernandes, V., (2014), “A new strategy for the simultaneous identification of constitutive laws parameters of metal sheets using a single test”, *Computational Materials Science*, 85, 102-120. doi:10.1016/j.commatsci.2013.12.043
- Prates, P., Oliveira, M. e Fernandes, V., (2015), “Identification of material parameters for thin sheets from single biaxial tensile test using a sequential inverse identification strategy”, *International Journal of Material Forming*, 9, 547–571 (2016). doi:10.1007/s12289-015-1241-z
- Prates, P., Pereira, A.F.G., Sakharova, N., Oliveira, M. e Fernandes, J., (2016), “Inverse Strategies for Identifying the Parameters of Constitutive Laws of Metal Sheets”, *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016. doi:10.1155/2016/4152963
- Prates, P., Adaixo, A., Oliveira e Fernandes, J. (2018), “Numerical Study on the Effect of mechanical properties variability in sheet metal forming processes”, *The International Journal of Avanced Manufacturing Techonology*, 96:561-580. doi:10.1007/s00170-018-1604-y
- Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F. e Ratto, M. (2004), “Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models”, John Wiley & Sons, Ltd.
- Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gateli, D. e Saisana, M., Trantola, S. (2008), “Global Sensivity Analysis: The Primer”, John Wiley & Sons, Ltd.