Ricardo Nuno Fonseca de Campos Pereira Mamede

Permutações de Sequências de Littlewood-Richardson e Suas Realizações Matriciais

Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

2000

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de Mestrado em Matemática, área de especialização em Matemática Pura, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Índice

Introdução iii

1 Permutações de sequências de Littlewood-Richardson 1

1.1 Combinatória de diagramas, diagramas enviezados e quadros de Young . . 2

1.2 Quadros de LR, LR duais e opostos 7

1.3 Permutações de sequências de LR 14

1.4 Uma bijecção entre quadros de LR conjugados 29

2 Realizações matriciais de permutações de sequências de LR 31

2.1 Generalidades sobre matrizes sobre $\mathcal{R}_p$ 31

2.1.1 Matrizes unimodulares sobre $\mathcal{R}_p$ 33

2.2 Realização matricial de um quadro de Young 45

2.3 Caracterização de algumas realizações matriciais $mod(B^{\varepsilon})$ 54

2.3.1 O caso $\varepsilon \in \mathcal{S}_2$ 54

2.3.2 Condições necessárias para uma realização matricial $mod(B^{\varepsilon})$, para algumas permutações ε 64

2.3.3 Condições suficientes para uma realização matricial $mod(B^{\varepsilon})$, para $\varepsilon = (k\, k+1)$ e $\varepsilon = (t\, t-1 ... k+1\, k)$ 73

Bibliografia 92

Introdução

Nesta dissertação pretende-se caracterizar quadros de Young que satisfazem a certas condições que generalizam a regra de Littlewood-Richardson, através de duas abordagens diferentes. A primeira destas abordagens é baseada em argumentos de natureza combinatória e será explorada no primeiro capítulo. O segundo capítulo pretende ser uma interpretação matricial do primeiro, onde utilizamos matrizes com entradas num domínio local para obter matricialmente os resultados descritos no primeiro capítulo. O conceito chave é o de *realização matricial de um quadro de Young* introduzido em [3].

O conceito de quadro de Littlewood-Richardson (LR) envolve quadros do tipo $(a, (m_1, ..., m_t), c)$ onde $m_1 \geq ... \geq m_t$. A definição de quadro de LR adoptada neste trabalho é a introduzida em [3], que caracteriza um quadro de LR em termos dos seus conjuntos indexantes: se $J_1, ..., J_t$ são os conjuntos indexantes de um quadro de Young do tipo descrito acima, dizemos que este é de LR se $J_1 \geq ... \geq J_t$. De notar que esta definição é uma formulação equivalente à introduzida em [12]. Em [4, 6], é introduzido o conceito de quadro de LR_{op}, ou seja, quadros de Young que satisfazem a regra de Littlewood-Richardson oposta. Os quadros de Young que satisfazem esta regra são do tipo $(a, (m_t, ..., m_1), c)$, onde $m_1 \geq ... \geq m_t$. Uma generalização natural de quadro de LR é considerar quadros de Young do tipo $(a, (m_{\varepsilon(1)}, ..., m_{\varepsilon(t)}), c)$ onde ε é uma permutação no grupo simétrico de ordem t, a que chamaremos permutações de sequências de LR. Neste trabalho analisamos os conjuntos indexantes dos quadros deste tipo para algumas permutações ε.

A estrutura do presente trabalho é a seguinte. No capítulo 1, introduzimos a noção de quadro de LR_ε, para ε uma permutação do grupo simétrico de ordem t, e caracterizamos estes quadros para algumas destas permutações, nomeadamente para quando ε é uma transposição de inteiros consecutivos ou um produto de transposições de inteiros consecutivos obedecendo a certas condições. Como aplicação do conceito de quadro de LR_ε, construímos uma bijecção entre quadros de LR conjugados.

Na secção 1.1, apresentamos algumas definições básicas e resultados elementares sobre a combinatória de diagramas que serão utilizados ao longo desta dissertação: dual e conjugado de um diagrama de Young e diagramas enviezados; e dual e conjugado de um quadro. Na secção 1.2 apresentamos as noções de quadro de LR e de LR_{op}. Mostramos que a noção de quadro de LR_{op} se encontra de modo natural associada à noção de quadro dual de um quadro de LR: um quadro é de LR se e só se o seu dual é de LR_{op} [6]. Seguindo [7], apresentamos condições necessárias e suficientes para um quadro ser de LR em termos de tiras horizontais, e a partir deste resultado deduzimos a existência de uma bijecção entre o conjunto dos quadros de LR do tipo $(a, (m_1, ..., m_t), c)$ e o conjunto dos quadros de LR_{op} do tipo $(a^*, (b^*)_{op}, c^*)$, onde op denota a permutação inversão e a^*, b^* e c^* são os conjugados das partições a, b e c, respectivamente. Na secção 1.3 apresentamos um algoritmo que permite transformar quadros de LR do tipo $(a, (m_1, m_2), c)$ em quadros de LR_{op} do tipo $(a, (m_2, m_1), c)$, onde $op = (1\ 2)$. Este algoritmo define uma aplicação bijectiva entre os quadros considerados. Será através desta aplicação que definimos quadro de LR_ε, para ε uma permutação do grupo simétrico de ordem t. No caso em que ε é uma transposição de inteiros consecutivos ou um produto de transposições de inteiros consecutivos obedecendo a certas condições, caracterizamos os conjuntos indexantes dos quadros de LR_ε. Como aplicação do conceito de permutação de um quadro de LR, construímos uma bijecção entre quadros de LR conjugados [7]. Em [11] é também apresentada uma bijecção entre quadros de LR conjugados usando uma outra abordagem. A definição de quadro de LR adoptada em [11] é a definida em [8, 13, 15], e é usado o algoritmo de inserção de Schensted [17, 18] para construir uma aplicação bijectiva que transforma um quadro de LR num quadro de LR conjugado.

No segundo capítulo, seguindo [3, 5], introduzimos o conceito de realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$, onde $\mathcal{B}^\varepsilon$ é o quadro de Young $(0, (m_{\varepsilon(1)}, ..., m_{\varepsilon(t)}), (m_1, ..., m_t)^*)$ e ε é uma permutação no grupo simétrico de ordem t. Para certos valores de ε, nomeadamente para transposições de inteiros consecutivos e ciclos $(t\, t-1 \ldots k+1\, k)$, $1 \leq k \leq t$, mostramos que um quadro admite uma realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$ se e só se é de LR_ε.

Seguindo [2, 4, 9], as matrizes consideradas neste capítulo têm entradas num domínio local, *i.e.*, um domínio $\mathcal{R}_p$ que contém apenas o primo p a menos de associados. Na secção 2.1.1 apresentamos uma série de resultados envolvendo matrizes unimodulares com entradas em $\mathcal{R}_p$, que serão usados ao longo do capítulo. Na secção 2.2 introduzimos a noção de realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$, para ε uma permutação no grupo simétrico de grau t. A definição utilizada é a que é seguida em [3, 5]: dado um quadro $\mathcal{T} = (a^0, a^1, ..., a^t)$ do tipo $(a, (m_{\varepsilon(1)}, ..., m_{\varepsilon(t)}), c)$, dizemos que uma sequência $A_0, B_1, ..., B_t$ de matrizes $n \times n$

não singulares é uma realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$ de $\mathcal{T}$ se: (I) a^r é a partição invariante de $A_0B_1...B_r$, para $r = 0, 1, ..., t$; (II) cada B_r tem partição invariante $(1^{m_{\varepsilon(r)}}, 0^{n-m_{\varepsilon(r)}})$, para $r = 1, ..., t$; e (III) a sequência $I_n, B_1, ..., B_t$ satisfaz as condições (I) e (II) para o quadro $\mathcal{B}^\varepsilon := (0, (m_{\varepsilon(1)}, ..., m_{\varepsilon(t)}), (m_1, ..., m_t)^*)$. Há, em geral, muitas formas de decompor o produto $B_1...B_t$ como um produto de t matrizes que satisfazem $(I), (II)$ e (III). Mostramos que a realização matricial não depende da forma como o produto $B_1...B_t$ é decomposto. Na secção 2.3 mostramos que a seguinte proposição é verdadeira para certas permutações ε: *"dada uma permutação ε no grupo simétrico de ordem t, um quadro admite uma realização matricial* mod$(\mathcal{B}^\varepsilon)$ *se e só se é de LR_ε."* Quando $\varepsilon = id$, obtemos o teorema de Green-Klein [10, 12]. Em [3, 4], encontra-se um algoritmo que permite obter explicitamente uma realização matricial para o quadro em questão. Recentemente em [1] é também apresentado um algoritmo baseado na noção de LR segundo [14]. Tal como no primeiro capítulo, a análise do caso $\varepsilon \in S_2$, a que chamamos de *caso base*, é o suporte para o estudo dos restantes casos. Na secção 2.3.2, quando ε é uma transposição de inteiros consecutivos, o ciclo $(t\; t-1...k)$, ou o produto de ciclos $(t\; t-1...1)(t\; t-1...2)...(t\; t-1...k)$, $1 \leq k \leq t$, deduzimos condições necessárias para os conjuntos indexantes de um quadro de Young que admite uma realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$. Na secção 2.3.3, mostramos que as condições obtidas atrás são também suficientes para que um quadro admita uma realização matricial $mod(\mathcal{B}^\varepsilon)$, quando ε é uma transposição de inteiros consecutivos ou o ciclo $(t\, t-1...k+1\, k)$, $1 \leq k \leq t$, obtendo assim a demonstração da proposição acima para estas permutações. Pensamos que o teorema 2.3.25 é original e que a abordagem ao teorema 2.3.24 [5] também.

Bibliografia

[1] Appleby, G., A Simple Approach to Matrix Realizations for Littlewood-Richardson Sequences, *Linear Algebra and its Aplications*, 291 (1999), 1-14.

[2] Azenhas, O., *Técnicas de Localização para Factores Invariantes de Módulos e Matrizes*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 1985.

[3] Azenhas, O. and Marques de Sá, E., Matrix Realizations of Littlewood-Richardson Sequences, *Linear and Multilinear Algebra*, 27 (1990), 229-242.

[4] Azenhas, O., *Realizações Matriciais de Quadros de Young e Suas Formas Canónicas*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1991.

[5] Azenhas, O., A Regra de Littlewood-Richardson: Generalizações e Realizações Matriciais, *Actas do 3o Encontro dos Algebristas Portugueses*, Coimbra, pp. 9-32, 1993.

[6] Azenhas, O., Opposite Litlewood-Richardson Sequences and their Matrix Realizations, *Linear Algebra Appl.*, 225 (1995), 91-116.

[7] Azenhas, O., The Admissible Interval for the Invariant Factors of a Product of Matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 46 (1999), 51-99.

[8] Fulton, W., *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge, University Press, 1997.

[9] Gerstein, L., A Local Approach to Matrix Equivalence, *Linear and Multilinear Algebra*, 16 (1977), 221-232.

[10] Green, J., *Symmetric Funtions and p-Modules*, Lecture Notes, University of Warwick, Warwick.

[11] Hanlon, O. and Sundaram, S., On a Bijection Between Littlewood-Richardson Fillings of Conjugate Shape, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 60 (1992), 1-18.

[12] Klein, T., The Multiplication of Schur Funtions and Extensions of p-Modules, *Journal of London Mathematical Society*, 43 (1968), 280-282.

[13] Littlewood, D., *The Theory of Group Characteres*, Oxford University Press, Oxford, 1940.

[14] Littlewood, D. and Richardson, A., Group Characteres and Algebra, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Series A 233 (1934), 99-141.

[15] MacDonald, I.G., *Symmetric Funtions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 1979.

[16] Newman, M., *Integral Matrices*, Academic Press, New York, 1972.

[17] Schensted, C., Longest Increasing and Decreasing Subsequences, *Canadian Journal of Mathematics*, 13 (1961), 179-487.

[18] Whithe, D., Some Connections Between the Littlewood-Richardson Rule and the Construction of Schensted, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 30 (1981), 237-247.

[19] Zaballa, I., Increasing and Decreasing Littlewood-Richardson Sequences and Duality, preprint, Universidad del Pais Basco.