



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Utilização de Leis Constitutivas Não-Lineares na Determinação da Forma de Cascas Reticuladas

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil
na Especialidade de Mecânica Estrutural

Autor

Nuno Gonçalo Dias Gaspar

Orientador

Prof. Doutor Vítor Dias da Silva

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada.

Coimbra, Julho, 2012

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Doutor Vítor Dias da Silva, um agradecimento muito sentido pelos ensinamentos que me facultou no âmbito da realização deste trabalho propriamente dito, como também pelos ensinamentos transmitidos no domínio genérico da Informática. Pelo incansável empenho, pela exigência, e principalmente pela inqualificável disponibilidade para me ajudar ao longo da realização deste trabalho.

Ao meu Pai, Diamantino da Silva Gaspar, por todo o esforço, sacrifício e apoio ao longo destes cinco anos.

À minha Mãe, Fernanda Maria Gonçalves Dias, não só pelo apoio, mas principalmente por toda a força que me transmitiu para chegar até aqui.

Aos todos meus familiares, com especial dedicatória para os meus Avós e para o meu Irmão, cujo apoio incondicional fez a diferença.

Aos meus Amigos de Coimbra por toda a ajuda, direta ou indireta, pelo convívio, por aquilo que me ensinaram nestes cinco anos e por me terem tornado em mais uma pessoa que afirma que os amigos de Faculdade são para toda a vida.

Por último mas não menos importante, sem particularizar com medo de me esquecer de alguém, aos meus Amigos de Alburitel. Não só pelo apoio ao longo do percurso académico mas por tudo aquilo que representam.

RESUMO

Na presente dissertação é testada a determinação da forma de equilíbrio de cascas reticuladas através da utilização de leis constitutivas não-lineares (fictícias) no cálculo da deformação de uma malha de elementos sem rigidez de flexão, cuja forma corresponde à configuração geométrica de equilíbrio de uma estrutura de casca reticulada com as mesmas condições de apoio, de modo a que as cargas exteriores possam ser equilibradas apenas com esforços axiais. Este trabalho foi efetuado com o objetivo de auscultar o potencial das leis não-lineares na uniformização da distribuição de esforços internos nestas cascas, bem como melhorias no seu comportamento relativamente a fenómenos de instabilidade.

Assim, neste estudo foi determinada a forma de estruturas geradas através de 11 leis constitutivas distintas (uma lei linear e 10 leis constitutivas não-lineares) para cada uma de três alturas máximas definidas *a priori*, a partir de duas configurações geométricas iniciais diferentes.

Após a determinação de um total de 66 formas geométricas de equilíbrio diferentes, foi feita a sua análise estrutural em termos de tensões máximas e do multiplicador de carga associado ao primeiro modo de instabilidade (carga crítica), estabelecendo comparações com as soluções obtidas por via de leis constitutivas lineares.

Paralelamente a este estudo é também apresentada uma breve resenha histórica, na qual se contempla a evolução (ao longo do tempo) deste tipo de estruturas bem como dos métodos de determinação da forma das mesmas.

ABSTRACT

This thesis tests the form-finding of grid shells through the use of (fictitious) non-linear constitutive laws on the calculations of a mesh composed by elements with no bending stiffness, whose shape corresponds to the geometric configuration of balance of a grid shell with the same boundary conditions, so that the external loads may be balanced with axial stress exclusively. This study was made in order to test the ability to reduce the differences in their internal stress distribution, as well as their behaviour in what concerns the instability phenomena.

Therefore, this study gathers the form-finding of structures generated through the use of 11 distinct constitutive laws (one linear constitutive law and 10 non-linear) for each one of the three maximum heights defined *a priori*, from two different initial geometric conditions.

After the determination of a total of 66 different geometric shapes of equilibrium, their structural analysis in terms of maximum tensions and critical multiplier, corresponding to their first instability mode, took place, establishing comparisons between the results obtained through the use of linear and non-linear constitutive laws.

Together with the mentioned study is also presented a brief historical evolution (over time) about this kind of structure, as well as their form-finding methods.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Enquadramento e Objetivos.....	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Enquadramento Histórico	4
2.2	Métodos de Determinação da Forma Geométrica de Cascas Reticuladas	9
2.2.1	Método das Densidades de Forças.....	10
2.2.2	Método da Relaxação Dinâmica.....	11
2.2.3	Método dos Deslocamentos	12
2.2.4	Eficiência dos Métodos de Determinação da Forma	18
3	ESTUDOS REALIZADOS	19
3.1	Algoritmo de Cálculo	19
3.2	Casos de Estudo	22
3.2.1	Malha A.....	23
3.2.2	Malha B.....	24
3.2.3	Leis Constitutivas	25
4	DETERMINAÇÃO DA FORMA E ANÁLISE ESTRUTURAL	31
4.1	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 25m.....	31
4.1.1	Lei Constitutiva Linear	31
4.1.2	Lei Constitutiva Não-Linear nº1.....	38
4.1.3	Lei Constitutiva Não-Linear nº2.....	42
4.1.4	Lei Constitutiva Não-Linear nº3.....	46
4.1.5	Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares.....	48
4.2	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 20m.....	49
4.2.1	Lei Constitutiva Linear	50
4.2.2	Leis Constitutivas Não-Lineares	51
4.3	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 15m.....	53
4.4	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 25m.....	53

4.5	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 20m.....	57
4.6	Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 15m.....	60
4.7	Instabilidade - Coeficiente de Carga Crítica.....	60
5	ANÁLISE DE RESULTADOS	63
5.1	Malha A - Casca 25m.....	63
5.2	Malha A - Casca 20m.....	66
5.3	Malha A - Casca 15m.....	68
5.4	Malha B - Casca 25m.....	69
5.5	Malha B - Casca 20m.....	71
5.6	Malha B - Casca 15m.....	73
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
6.1	Conclusões.....	75
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	76
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Vista exterior de um auditório projetado pelo arquiteto Eero Saarinen (MIT - Boston) (Sullivan, 1999)	1
Figura 2.1a – Exemplo de tipologia de construção com malha ortogonal (Berger, 2007)	5
Figura 2.1b – Exemplo de tipologia de construção com forma radial (Berger, 2007)	5
Figura 2.2 – Vista interior do <i>Multihalle</i> (Annular, 2002).....	6
Figura 2.3 – Modelo físico utilizado na determinação da forma geométrica do <i>Multihalle</i> (Wendland, 2000)	7
Figura 2.4a - Vista interior do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanover (Shigeru Ban Architects, 2010).....	8
Figura 2.4b - Alçado lateral do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanover (Shigeru Ban Architects, 2010).....	8
Figura 2.5 – Configurações indeformada e deformada de uma barra biarticulada sujeita a deformação finita (Dias da Silva, 2002)	12
Figura 2.6 – Barra com quatro graus de liberdade (Dias da Silva, 2002)	16
Figura 2.7 – Coordenadas da barra no caso tridimensional (Dias da Silva, 2002).....	17
Figura 3.1 - Fluxograma do algoritmo de cálculo utilizado para determinação da forma de estruturas de casca reticulada	21
Figura 3.1 - Planta da Malha A.....	24
Figura 3.2 - Planta da Malha B.....	25
Figura 3.3 - Exemplos de leis constitutivas.....	26
Figura 4.1 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear	32
Figura 4.2a - Malha A - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear (Vista 1).....	33
Figura 4.2b - Malha A - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear (Vista 2).....	33
Figura 4.3 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma.....	34
Figura 4.4 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Distribuição de esforços axiais na fase de análise estrutural.....	35

Figura 4.5 - Convenção das componentes do momento fletor	36
Figura 4.5 - Convenção de direções e sentido positivo do momento torsor (M_x)	37
Figura 4.6 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1	39
Figura 4.7 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma	40
Figura 4.8 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Distribuição de esforços axiais na fase de análise estrutural	41
Figura 4.9 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2.....	43
Figura 4.10 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma	44
Figura 4.11 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Distribuição de esforços na fase de determinação da forma	45
Figura 4.12 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3	47
Figura 4.13 - Malha A - Casca 20m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear.....	50
Figura 4.14 - Malha A - Casca 15m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear.....	53
Figura 4.15 - Malha B - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear.....	54
Figura 4.16 - Malha B - Casca 20m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear.....	57
Figura 4.17 - Malha B - Casca 15m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear.....	60
Figura 5.1 - Tensão Máxima Equivalente - Malha A - Casca 25 metros.....	64
Figura 5.2 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros.....	65
Figura 5.3 - Extensão Máxima na fase de Determinação da Forma - Malha A - Casca 25 metros.....	65
Figura 5.4 - Momento Fletor no elemento sujeito a Tensão Máxima - Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros	65
Figura 5.5 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros	66
Figura 5.6 - Tensão Máxima Equivalente - Malha A - Casca 20 metros.....	67

Figura 5.7 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha A - Casca 20 metros.....	67
Figura 5.8 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 20 metros.....	68
Figura 5.9 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 15 metros.....	69
Figura 5.10 - Tensão Máxima Equivalente - Malha B - Casca 25 metros.....	70
Figura 5.11 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha B - Casca 25 metros.....	70
Figura 5.9 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha B - Casca 25 metros.....	71
Figura 5.13 - Tensão Máxima Equivalente - Malha B - Casca 20 metros.....	72
Figura 5.14 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha B - Casca 20 metros.....	72
Figura 5.15 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha B - Casca 20 metros.....	73
Figura 5.15 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha B - Casca 15 metros.....	74

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 - Secção transversal dos elementos	22
Quadro 3.2 - Propriedades do material considerado na análise estrutural	23
Quadro 3.2a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 25 m.....	27
Quadro 3.2b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 25 m.....	28
Quadro 3.3a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 20 m.....	28
Quadro 3.3b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 20 m.....	28
Quadro 3.4a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 15 m.....	28
Quadro 3.4b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 15 m.....	29
Quadro 3.5a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 25 m.....	29
Quadro 3.5b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 25 m.....	29
Quadro 3.6a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 20 m.....	30
Quadro 3.6b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 20 m.....	30
Quadro 3.7a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 15 m.....	30
Quadro 3.7b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 15 m.....	30
Quadro 4.1 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensão e Extensão Máximas	32
Quadro 4.2 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma.....	34
Quadro 4.3 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural	37
Quadro 4.4 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Equivalentes Máximas na fase de Análise Estrutural	38
Quadro 4.5 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Tensão e Extensão Máximas	39
Quadro 4.6 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Esforços e Tensões Máximas na fase de determinação da forma	40
Quadro 4.7 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural.....	42

Quadro 4.8 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 -Tensão e Extensão Máximas	43
Quadro 4.9 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Esforços e Tensões máximos na fase de determinação da forma	44
Quadro 4.10 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural.....	46
Quadro 4.11 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Tensão e Extensão Máximas	46
Quadro 4.12 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma	47
Quadro 4.13 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural.....	48
Quadro 4.14 - Malha A - Casca 25m - Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da forma - Resumo dos Resultados	48
Quadro 4.15 - Malha A - Casca 25m - Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Resumo dos Resultados	49
Quadro 4.15 - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma.....	50
Quadro 4.16 - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural	51
Quadro 4.17 - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados	51
Quadro 4.18a - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Tensão Equivalente Máxima de Compressão.....	52
Quadro 4.18b - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Tensão Equivalente Máxima de Tração.....	52
Quadro 4.19 - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma.....	54
Quadro 4.20 - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados	55
Quadro 4.21 - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural	55
Quadro 4.22a - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Tensão Equivalente Máxima de Compressão.....	56

Quadro 4.22b - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Tensão Equivalente Máxima de Tração.....	56
Quadro 4.23 - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma.....	57
Quadro 4.24 - Malha B - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados	58
Quadro 4.25 - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas de Compressão na fase de Análise Estrutural	58
Quadro 4.26a - Malha B - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Tensão Equivalente Máxima de Compressão.....	59
Quadro 4.27a - Coeficiente Carga Crítica - Malha A - Análise Estrutural	62
Quadro 4.27b - Coeficiente Carga Crítica - Malha B - Análise Estrutural	62

SIMBOLOGIA

- A – Área da secção transversal
 E – Módulo de elasticidade
 E_t – Módulo de elasticidade tangente
 F – Vetor de forças de fixação
 G – Módulo de distorção
 I – Momento de inércia
 J – Momento polar de inércia
 K – Matriz de rigidez
 K_g – Componente geométrica da matriz de rigidez
 K_m – Componente material da matriz de rigidez
 M – Resultante do momento fletor segundo as direções Y e Z
 M_x – Momento torsor
 M_y – Momento fletor segundo a direção Y
 M_z – Momento fletor segundo a direção Z
 l – Comprimento deformado da barra
 l_0 – Comprimento inicial da barra
 l_x – Dimensão da barra segundo a dimensão x
 l_y – Dimensão da barra segundo a dimensão y
 l_z – Dimensão da barra segundo a dimensão z
 N – Esforço axial na barra
 u_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo x
 u_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo x
 v_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo y
 v_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo y
 w_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo z
 w_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo z
 x_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo x
 x_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo x

y_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo y

y_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo y

z_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo z

z_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo z

α_{crit} – Multiplicador crítico da estrutura relativo ao primeiro modo de instabilidade

\mathcal{E}_E – Extensão de engenharia

\mathcal{E}_G – Extensão de Green

σ – Tensão normal

$\sigma_{eq.}$ – Tensão equivalente de Von Mises

τ – Tensão tangencial

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento e Objetivos

No dimensionamento de estruturas de casca, o projetista na maior parte dos casos dispõe de dois métodos para encontrar possíveis formas: desenvolvimento de "formas livres" e desenvolvimento de "formas de equilíbrio".

O conceito básico de forma livre consiste em usar elementos geométricos simples tais como linhas rectas, círculos, elipses, parábolas, hipérbolas, etc. Até finais da década de 60, as formas de estruturas de casca eram apenas imaginadas como sendo parte de esferas e outras superfícies facilmente descritíveis a partir de formulações matemáticas. A famosa estrutura de casca projetada pelo arquiteto Eero Saarinen para a cobertura de um auditório no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) em Boston, nos Estados Unidos da América, é um exemplo de formas deste tipo, constituindo uma calote retirada de uma esfera (Figura 1.1).



Figura 1.1 - Vista exterior de um auditório projetado pelo arquiteto Eero Saarinen (MIT - Boston) (Sullivan, 1999)

As formas livres partilham da propriedade de serem definidas independentemente do fluxo de forças que atuam nas mesmas. Este facto conduz a uma eficiência estrutural deficiente, gerando prováveis necessidades de reforços e assim um mau aproveitamento do material, uma vez que a estrutura precisa de se "acomodar" aos esforços a que está sujeita.

Por outro lado, se na determinação de uma forma for tida em conta a configuração de forças a que esta estará sujeita, em conjunto com esta forma obtém-se também um comportamento

estrutural de excelência. Normalmente, a estas "formas de equilíbrio" é associada a analogia com uma malha de cabos. Uma malha de cabos - cuja rigidez de flexão é naturalmente desprezável - sujeita a condições de apoio definidas *ab initio* e uma determinada configuração de cargas, adapta-se à mesma, experimentando uma deformação que faz com que esta fique sujeita a tensões causadas exclusivamente por esforço axial de tração. Considerando agora a inversão dessa malha deformada, composta desta vez por barras ao invés de cabos, ou seja, conferindo-lhe suscetibilidade a esforços de compressão e consequentemente de flexão, uma vez sujeita rigorosamente à mesma configuração de cargas que a malha de cabos, esta apresenta-se sujeita a tensões causadas maioritariamente por esforço axial de compressão, contando apenas com uma pequena parcela derivada de esforços de flexão. Estes momentos fletores residuais aparecem a partir do momento em que se confere rigidez de flexão aos elementos. Ao aplicar-se uma determinada carga sobre uma estrutura, mesmo que a forma desta esteja em teoria preparada para resistir apenas com esforço axial, geram-se sempre deformações que, por mais pequenas que sejam, fazem com que esta compatibilização de deslocamentos seja respondida por esforços de flexão. Deste modo, o valor dos momentos fletores ditos residuais está naturalmente condicionado pela relação entre as rigidezes de flexão e axial dos elementos.

Uma vez que a determinação da forma de equilíbrio das estruturas de casca reticulada está diretamente associada à deformação de uma determinada malha de elementos sem rigidez de flexão, à medida que os modelos físicos para este efeito foram sendo substituídos por cálculo numérico computacional, a limitação ao material com o qual o ensaio seria realizado deixou de existir, obtendo-se total controlo sobre os parâmetros de cálculo. Entre estes parâmetros de cálculo está a lei constitutiva do material, parte integrante do cálculo da deformação da malha. A manipulação da mesma permite a obtenção de diversas configurações geométricas, cada uma naturalmente conduzindo a uma distribuição de tensões diferente.

A presente dissertação está portanto relacionada com a manipulação da lei constitutiva do material dos elementos da malha, cuja deformada determinará a forma geométrica de uma estrutura de casca reticulada, com vista a uniformizar a distribuição de tensões ao longo da mesma. O aligeiramento deste contraste de tensões ao longo da estrutura traz grandes vantagens do ponto de vista do projeto e da sustentabilidade da estrutura, sendo que à uniformização de tensões ao longo da estrutura está naturalmente associado um melhor aproveitamento do material.

Através da análise estrutural de cada uma das formas foi medida a sua eficiência através da avaliação da distribuição de tensões ao longo da mesma e do seu coeficiente de carga crítica relativo ao primeiro modo de instabilidade. A fase de determinação da forma das estruturas e

a sua análise estrutural representam dois processos distintos, resolvidos através de cálculo numérico computacional utilizando a linguagem de programação Fortran.

Antecedendo a exposição do foco principal desta dissertação é apresentada uma breve introdução histórica sobre a evolução deste tipo de estruturas e sobre os métodos de determinação da forma das mesmas ao longo do tempo, bem como a apresentação dos fundamentos teóricos do método utilizado no presente estudo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Enquadramento Histórico

A construção é umas das ocupações mais antigas da espécie Humana. A existência das mais diversas adversidades - quer climatéricas, quer no que diz respeito ao confronto com outros seres vivos - obrigou o Homem a preocupar-se com a sua segurança desde a sua mais remota existência. Estudos revelam que a mais antiga evidência de uma construção levada a cabo pela mão Humana ronda neste momento os 400,000 anos de idade.

Segundo Berger (2007), em 1966, no Sul de França, mais propriamente numa praia nos arredores de Nice, foram encontrados vestígios de abrigos com algumas centenas de anos de idade. O processo de construção dos mesmos passava pela cravação de ramos de árvore diretamente no solo, relativamente perto uns dos outros, de forma a formar um plano oval ao nível do solo. Esses mesmos ramos eram então fletidos para o interior do circuito formado pelos próprios, de forma a coincidirem com uma viga rígida central - suportada por pilares previamente colocados - à qual seriam posteriormente ligados.

O estudo de algumas comunidades sobreviventes dos nossos antepassados mostra que a tipologia de construção previamente apresentada sofrera alterações de acordo com a parte do mundo onde esta se situara, e com a geração que a construía. Em algumas das comunidades, para além de se seguir em grande parte o procedimento previamente descrito, havia também a preocupação de fazer com que a malha formada pela estrutura fosse tanto ortogonal quanto o permitido pela geometria e pela flexibilidade do material, tal como esquematizado na Figura 2.1a. Noutras, ao invés de se formar um plano oval ao nível do solo, optara-se pela adoção de uma forma radial, fazendo consequentemente com que os ramos da estrutura concorressem num só ponto, onde seriam amarrados uns aos outros. A Figura 2.1b mostra um exemplo dessa tipologia.

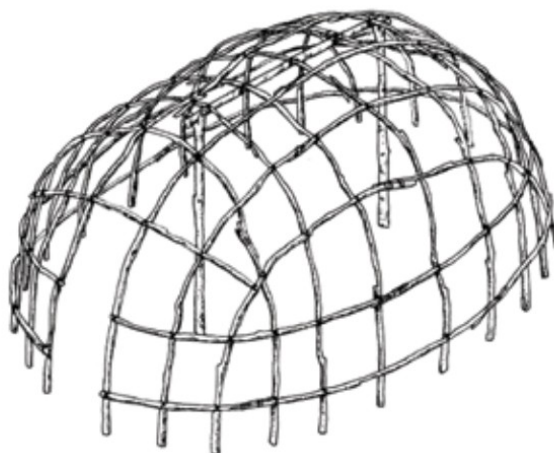


Figura 2.1a – Exemplo de tipologia de construção com malha ortogonal (Berger, 2007)



Figura 2.1b – Exemplo de tipologia de construção com forma radial (Berger, 2007)

A constituição deste tipo de estruturas derivou de um processo evolutivo de tentativa-erro, não só no que diz respeito à forma da estrutura, mas também no que diz respeito aos materiais que o Homem tinha ao seu dispor. Ainda assim, esta geometria constituída pela intersecção de arcos resultou num sistema estrutural engenhoso muito eficiente. Se a sua eficiência for medida através do rácio do peso próprio da estrutura pela resistência a cargas exteriores, estamos perante umas das estruturas mais eficientes alguma vez construídas, uma vez que conseguem suportar cargas várias vezes superiores ao seu peso próprio.

Como é sabido, estruturas com uma determinada curvatura, como por exemplo arcos ou cabos suspensos, são muito mais eficientes no que toca à transmissão de cargas do que o tradicional sistema estrutural utilizado hoje em dia, composto por vigas e pilares. A forma mais eficiente do ponto de vista estrutural é a forma funicular que esteja em equilíbrio com a carga que lhe é

aplicada. Isto é, a forma geométrica de equilíbrio para uma estrutura com determinadas condições de fronteira, sujeita a uma determinada configuração de cargas, não é mais que a deformada que seria impressa numa malha de elementos sem rigidez de flexão, com as mesmas condições de fronteira, ao ser-lhe aplicada essa determinada configuração de cargas.

Em 1975, aquando da *Federal Garden Exhibition* em Mannheim, na Alemanha, foi concebida uma estrutura em casca reticulada precisamente para acolher o referido evento. A essa estrutura construída em madeira foi dado o nome de *Multihalle* e a determinação da sua forma foi feita de acordo com a teoria apresentada no parágrafo anterior. Com sensivelmente 72 metros de comprimento, 35 metros de largura, 15.5 metros de altura e uma área total de aproximadamente 3600 m², esta estrutura de madeira havia sido construída com carácter provisório, e como tal não foi concebida tendo em conta todos os requisitos mínimos de segurança e de capacidade de carga, que seriam exigíveis numa estrutura permanente. No entanto, uma vez que o seu comportamento foi excepcionalmente bom, a estrutura ainda hoje se encontra em plenas condições, tendo-lhe até sido recentemente atribuída a categoria de edifício monumental. O *design* engenhoso daquela que é considerada por muitos autores "a mãe das estruturas de casca reticulada" foi concebido por um dos grandes arquitetos alemães da época, Frei Otto, em conjunto com um engenheiro britânico, de seu nome Ted Happold. A Figura 2.2 apresenta uma vista interior do *Multihalle*.



Figura 2.2 – Vista interior do *Multihalle* (Annular, 2002)

A ausência de poderosas ferramentas de cálculo fez com que a teoria anteriormente mencionada fosse posta em prática por intermédio de um modelo físico. Este foi construído à escala 1:100, constituído por cabos – cuja rigidez de flexão é desprezável – sujeitos a determinados casos de carga, reproduzindo as respectivas deformadas e conseqüentemente cada uma das configurações geométricas de equilíbrio. No final foi escolhida a configuração geométrica que desse melhor resposta aos diversos casos de carga experimentados. A Figura 2.3 mostra o modelo físico utilizado na determinação da forma geométrica do *Multihalle*.

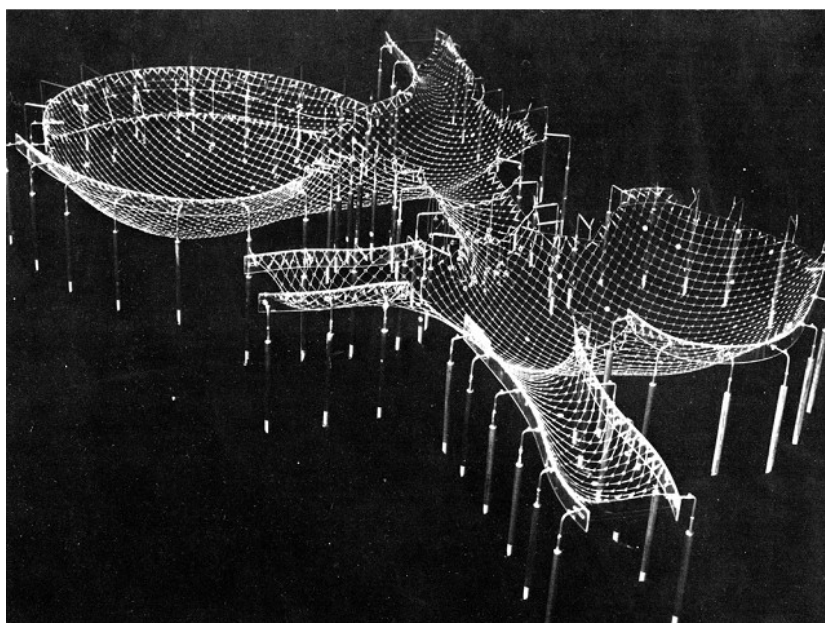


Figura 2.3 – Modelo físico utilizado na determinação da forma geométrica do *Multihalle*
(Wendland, 2000)

Mais recentemente, naturalmente com menos protagonismo que o *Multihalle* mas ainda assim realizado no mesmo país, o Pavilhão do Japão, construído no âmbito da "Expo 2000" em Hannover, foi talvez a demonstração mais flagrante da possibilidade de cobrir grandes vãos com pouca quantidade e com diversos tipos de material por parte deste tipo de estruturas.

O tema da exposição albergada na cidade alemã no ano 2000 foi "Humanidade, Natureza e Tecnologia". Contrariamente às exposições deste cariz realizadas no início do século XIX, ao invés de expor toda tecnologia de ponta da presente época, o objetivo desta exposição era mostrar como as pessoas e a tecnologia podem interagir de forma a melhorar o meio ambiente. Este espírito levou a organização desta exposição por parte do Japão a escolher um *design* aberto, livre de colunas e completamente constituído por materiais reciclados e recicláveis. O referido tema da exposição levou a que este projeto com sensivelmente 72

metros de comprimento, 25 metros de largura e 16 metros de altura fosse coberto por uma estrutura de casca reticulada constituída por tubos de cartão. O facto de as leis alemãs não contemplarem o projeto de estruturas com este tipo de materiais levou a que a esta tivesse sido adicionada uma estrutura de suporte secundária, em madeira. Liderado pelos arquitetos Shigeru Ban e Frei Otto, este projeto foi concluído em três semanas tendo-se mantido íntegro durante toda a exposição e sido desmantelado *a posteriori*. Após o desmantelamento, as fundações de aço e os tubos de cartão foram comprados e reciclados por uma empresa alemã. O interior e o alçado lateral desta obra são representados pelas Figuras 2.4a e 2.5b respetivamente.



Figura 2.4a - Vista interior do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanover (Shigeru Ban Architects, 2010)



Figura 2.4b - Alçado lateral do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanover (Shigeru Ban Architects, 2010)

2.2 Métodos de Determinação da Forma Geométrica de Cascas Reticuladas

Na secção anterior, aquando da apresentação do *Multihalle*, foi também referenciado o método levado a cabo na determinação da sua forma. Esse método é experimental, e como é sabido, dos maiores problemas de qualquer método experimental, para além da dificuldade de execução em condições ideais, são o seu elevado preço e a dificuldade em fazer variar certos parâmetros. O facto de nestes serem utilizados materiais reais implica que este esteja naturalmente restringido ao uso das características reais dos próprios materiais, como é o caso da sua lei constitutiva, característica esta que assume maior foco neste trabalho.

Hoje em dia, graças ao poder de cálculo trazido pelo computador, este tipo de problemas de determinação da forma deixou de ser resolvido por intermédio de modelos físicos para começar a ser resolvido através de métodos numéricos computacionais, tornando todo este processo mais cómodo, preciso, rápido e flexível do ponto de vista da simulação de características relevantes ao cálculo.

Para além do método experimental apresentado, segundo Veenendaal e Block (2011), hoje em dia, os métodos de determinação da forma geométrica de estruturas de casca reticulada podem ser divididos em três principais famílias: Método das Densidades de Forças, Método da Relaxação Dinâmica e “Métodos da Matriz de Rigidez”.

O Método das Densidades de Forças é um método que usa o conceito do rácio da força pelo comprimento de cada barra como a principal unidade de cálculo.

Método de Relaxação Dinâmica chama-se àquele que envolve analogia com movimento, onde forças desequilibradas e a massa dos nós determinam a aceleração.

Neste trabalho a determinação da forma foi feita com recurso a um método que se enquadra no atrás referido "Método da Matriz de Rigidez". Esta categoria é certamente a menos bem definida até ao momento. O seu nome não é perfeitamente consensual entre autores, e por vezes também lhe são associados nomes como: "Computação de Malha Não-Linear", "Análise de Deslocamentos Não-Lineares" e "Rigidez Transiente". Em suma, a qualquer um destes nomes estão associados métodos cujo cálculo se baseia numa formulação do método dos deslocamentos que utiliza uma matriz de rigidez.

As secções seguintes introduzem brevemente o funcionamento destes três métodos distintos, conferindo maior pormenorização ao Método dos Deslocamentos, o qual foi utilizado neste trabalho, por ser genericamente o que mais se adequa à análise não-linear de estruturas.

2.2.1 Método das Densidades de Forças

O Método das Densidades de Forças foi inicialmente apresentado por Linkwitz e Schek em 1971. Baseado fundamentalmente no rácio da força pelo comprimento de cada elemento da estrutura, este método cuja aplicação é feita através da resolução de um sistema de equações lineares, mostrou grandes avanços não só em relação ao método mais simples de determinação da forma proposto até à data por Siev e Eidelman em 1964 (Hernandez-Montes *et al.*, 2006), mas também relativamente ao método defendido por Barnes, resultante de uma adaptação do Método da Relaxação Dinâmica baseado numa análise não-linear, envolvendo portanto um maior esforço computacional, que se revelara precioso nesta época devido à escassa potência das ferramentas de cálculo (Maurin & Motro, 1998).

Partindo do princípio que o rácio entre a força no elemento e o seu comprimento é descrito por uma constante, as componentes da força num hipotético elemento i podem ser expressas por (2.1), (2.2) e (2.3). Nestas expressões, T_i representa a força interna do elemento i , l_i representa o seu comprimento, enquanto os índices 0 e 1 representam as extremidades do mesmo.

$$T_{ix} = \frac{T_i}{l_i} (x_1 - x_0) \quad (2.1)$$

$$T_{iy} = \frac{T_i}{l_i} (y_1 - y_0) \quad (2.2)$$

$$T_{iz} = \frac{T_i}{l_i} (z_1 - z_0) \quad (2.3)$$

Quando o primeiro termo das equações (a "densidade da força", T_i/l_i) é constante as forças de equilíbrio tornam-se linearmente dependentes das posições dos elementos. Ao juntarem-se estas expressões relativas ao equilíbrio de todos os nós, resulta um conjunto de equações lineares cuja resolução é relativamente rápida e simples. Contudo, ao utilizar-se este método em projeto propriamente dito, devem ser tidas em conta algumas condições geométricas adicionais relativas à forma da estrutura. A consideração das mesmas resulta num problema não-linear. O mesmo pode ser acelerado ignorando estas considerações adicionais em primeira-mão, considerando-as num processo iterativo a partir da configuração de equilíbrio obtida através do sistema de equações lineares.

Este método permite uma grande flexibilidade na determinação de formas de equilíbrio. Por outro lado, a sua maior desvantagem é o facto de o comprimento final dos elementos, que é

necessário para determinar a densidade de força, não ser sempre sabido *a priori*. Deste modo, por vezes seria mais conveniente especificar a força no elemento ao invés da dita densidade de força. Este método é bastante popular e tem sido desenvolvido por vários investigadores desta área, tais como: Mollaert, Gründig, Bahndorf, Leon, Veron e Trompette (Topping, 2007).

2.2.2 Método da Relaxação Dinâmica

O método da relaxação dinâmica foi proposto por A. Day (Day, 1965 *apud* Douthe *et al.*, 2005). A base deste método é a descrição passo-a-passo, para pequenos incrementos de tempo, do movimento de cada um dos nós de uma estrutura, até que devido ao amortecimento artificial, esta repouse em equilíbrio estático (Barnes, 1994 *apud* Adriaenssens e Barnes, 1999). Segundo Papadrakakis (1981), a versão original do Método da Relaxação Dinâmica usa um parâmetro de amortecimento viscoso proporcional à velocidade e à massa dos nós. No entanto, por forma a garantir a convergência do processo é necessário introduzir controlos e ajustes a esses parâmetros.

Oliveira e Barbato (2005) afirmam que apesar de apresentado em primeira mão por A. Day, M.R. Barnes é o investigador que possui mais publicações neste área. Este, em conjunto com Wakefield, descreveram no ano de 1988 uma metodologia com base no método da relaxação dinâmica com amortecimento cinético para a determinação da configuração inicial de equilíbrio. Estes justificam tal abordagem com o facto de o amortecimento cinético garantir a estabilidade da estrutura. Graças a este, quaisquer grandes modificações locais (tais como a geometria do seu contorno) são rapidamente dissipadas para toda a superfície da estrutura, evitando assim possíveis problemas de convergência (Barnes e Wakefield, 1988 *apud* Oliveira e Barbato, 2005).

Apesar das operações associadas à resolução de um problema através deste método serem simples, o número de iterações necessário é normalmente grande. No entanto, ao ser arbitrada uma configuração inicial cuja forma esteja perto de uma solução admissível, esta quantidade de operações reduz-se significativamente.

O facto de este método ser baseado numa análise dinâmica faz com que neste não seja necessário utilizar a matriz de rigidez de cada elemento. Este tipo de análise conduz a um aligeiramento do esforço de cálculo fazendo com que este método se torne mais eficiente para problemas com muitos graus de liberdade, altamente não-lineares.

2.2.3 Método dos Deslocamentos

No seguimento das ideias expostas neste capítulo ficou estabelecido que a forma geométrica de equilíbrio para uma estrutura de casca reticulada sujeita a determinadas ações está diretamente relacionada com a configuração deformada de uma malha de elementos sem rigidez de flexão, ou seja, sujeitos a esforço axial puro. Desta feita, nesta secção são apresentadas as bases teóricas fundamentais ao cálculo da deformação de elementos sujeitos a esforço axial puro, sendo o algoritmo ao qual estas servem de base introduzido no capítulo seguinte em conjunto com a apresentação dos estudos efetuados.

Considere-se a barra representada na Figura 2.5, cuja posição na situação indeformada é definida pelas coordenadas x_0 e y_0 na extremidade A e x_1 e y_1 na extremidade B.

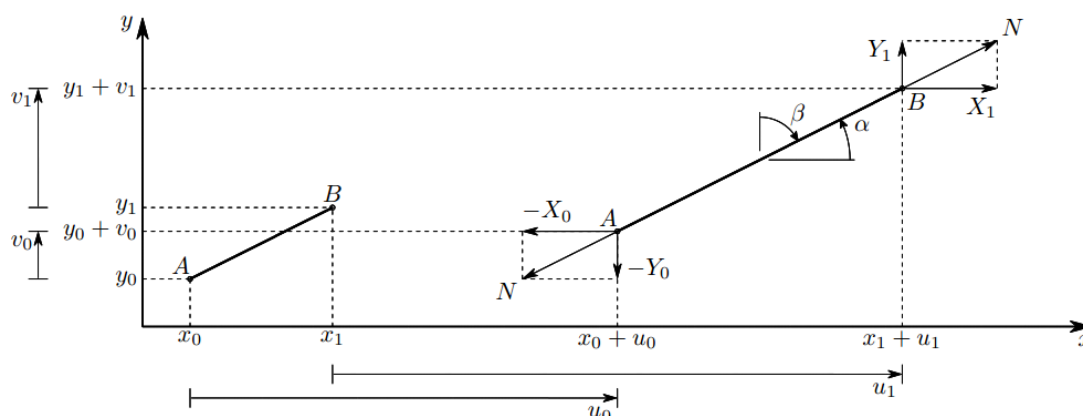


Figura 2.5 – Configurações indeformada e deformada de uma barra biarticulada sujeita a deformação finita (Dias da Silva, 2002)

Na situação deformada as coordenadas das extremidades desta barra são definidas por:

$$A: \begin{cases} x_0 + u_0 \\ y_0 + v_0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x_1 + u_1 \\ y_1 + v_1 \end{cases}$$

O cálculo de uma estrutura constituída por peças sujeitas a esforço axial puro através do método dos deslocamentos implica o desenvolvimento das expressões relativas ao cálculo das forças de fixação e da matriz de rigidez de uma barra biarticulada numa dada situação

deformada. Partindo da convenção assumida na Figura 2.5, os comprimentos inicial e deformado da barra são definidos pelas seguintes expressões, respetivamente:

$$l_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (2.4)$$

$$l = \sqrt{(x_1 + u_1 - x_0 - u_0)^2 + (y_1 + v_1 - y_0 - v_0)^2} \quad (2.5)$$

O cálculo da extensão, a partir do momento em que se use uma formulação lagrangeana, é normalmente feito através da extensão de Green ao invés da habitual extensão de engenharia. Isto deve-se ao facto de esta conduzir a expressões matematicamente mais simples – originando portanto um menor esforço de formulação e cálculo - ao se substituírem as expressões (2.4) e (2.5) em termos de x , y , u e v . A diferença de cálculo entre as definições das extensões de engenharia e de Green é evidenciada nas expressões (2.6) e (2.7).

$$\mathcal{E}_E = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{E}_G = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (2.7)$$

A expressão de cálculo da extensão de Green em função das coordenadas e deslocamentos das extremidades da barra é apresentada na expressão (2.8). É obvio que (2.6) levaria a uma forma mais complexa da expressão da extensão.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{(u_1 - u_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(u_1 - u_0) + (v_1 - v_0)^2 + 2(y_1 - y_0)(v_1 - v_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (2.8)$$

Ainda seguindo a convenção anterior, os cossenos dos ângulos α e β são dados por:

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{l} \quad (2.9)$$

$$\cos \beta = \frac{l_y}{l} \quad (2.10)$$

Com:

$$\begin{cases} l_x = x_1 + u_1 - x_0 - u_0 \\ l_y = y_1 + v_1 - y_0 - v_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Considerando positivo um esforço axial N de tração, as forças de extremidade da barra são dadas por:

$$\begin{cases} X_0 = -N \cos \alpha = -N \frac{l_x}{l} \\ Y_0 = -N \cos \beta = -N \frac{l_y}{l} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} X_1 = N \cos \alpha = N \frac{l_x}{l} \\ Y_1 = N \cos \beta = N \frac{l_y}{l} \end{cases} \quad (2.13)$$

O esforço axial N é determinado através do produto da tensão pela área da secção transversal da barra na situação indeformada, de acordo com a seguinte expressão:

$$N = \sigma \times A \quad (2.14)$$

A matriz de rigidez da barra, ainda na mesma situação bidimensional, pode ser obtida por derivação das forças X e Y em relação aos deslocamentos u e v . Para evitar repetições nesta demonstração, consideram-se aqui apenas as forças atuantes nas duas coordenadas da extremidade B. Deste modo obtém-se o seguinte:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial u_1} \cos \alpha + N \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \alpha) & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} = \frac{\partial N}{\partial v_1} \cos \alpha + N \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \alpha) \\ \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial u_1} \cos \beta + N \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \beta) & \frac{\partial Y_1}{\partial v_1} = \frac{\partial N}{\partial v_1} \cos \beta + N \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \beta) \end{array} \right] \quad (2.15)$$

Assumindo que E_t corresponde ao módulo de elasticidade tangente, as derivadas de N em ordem a u e v são dadas pelas expressões (2.16) e (2.17).

$$\frac{\partial N}{\partial u_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial u_1} = AE_t \frac{\partial \epsilon}{\partial u_1} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v_1} = AE_t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} \quad (2.17)$$

Deste modo, utilizando as expressões (2.9),(2.10) e (2.11) obtém-se:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_1} = \frac{x_1 + u_1 - x_0 - u_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{l_x}{l_0^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = \frac{l_y}{l_0^2} \quad (2.19)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \alpha) = \frac{l - l_x \frac{\partial l}{\partial u_1}}{l^2} & \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \alpha) = \frac{-l_x \frac{\partial l}{\partial v_1}}{l^2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \beta) = \frac{-l_y \frac{\partial l}{\partial u_1}}{l^2} & \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \beta) = \frac{l - l_y \frac{\partial l}{\partial v_1}}{l^2} \end{array} \right] \quad (2.20)$$

As derivadas do comprimento l em ordem a u e v são dadas pelas expressões

$$\frac{\partial l}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{l^2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial u_1} (l^2) = \frac{l_x}{l} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial l}{\partial v_1} = \frac{l_y}{l} \quad (2.22)$$

Substituindo estas expressões nas expressões (2.22) obtém-se a matriz de rigidez para a extremidade B da barra em função de A , E_t , l_0 , l , l_x e l_y .

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = AE_t \frac{l_x l_x}{l_0^2 l} + N \frac{l^2 - l_x^2}{l^3} & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} = AE_t \frac{l_y l_x}{l_0^2 l} - N \frac{l_x l_y}{l^3} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} = AE_t \frac{l_y l_x}{l_0^2 l} - N \frac{l_x l_y}{l^3} & \frac{\partial Y_1}{\partial v_1} = AE_t \frac{l_y l_y}{l_0^2 l} + N \frac{l^2 - l_y^2}{l^3} \end{array} \right] \quad (2.23)$$

No entanto, como mencionado anteriormente, esta matriz de rigidez corresponde apenas a uma das extremidades da barra. A generalização desta matriz às duas extremidades da barra

(quatro coordenadas) pode ser feita por analogia, obtendo-se a matriz \mathbf{K} (2.24). A título ilustrativo, o sistema de quatro coordenadas está representado na Figura 2.6.

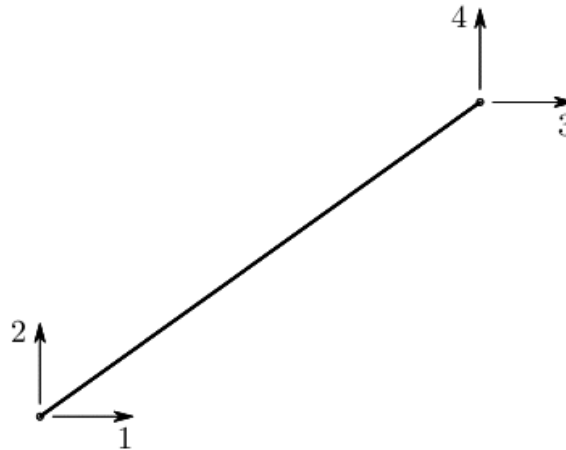


Figura 2.6 – Barra com quatro graus de liberdade (Dias da Silva, 2002)

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] = & \frac{AE_t}{l_0^2 l} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & -l_x^2 & -l_x l_y \\ l_x l_y & l_y^2 & -l_x l_y & -l_y^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & l_x^2 & l_x l_y \\ -l_x l_y & -l_y^2 & l_x l_y & l_y^2 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{N}{l^3} \begin{bmatrix} l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l^2 + l_x^2 & l_x l_y \\ -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & l_x l_y & -l^2 + l_y^2 \\ -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l^2 - l_x^2 & -l_x l_y \\ l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & -l_x l_y & l^2 - l_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Ainda no campo das generalizações, a extensão da matriz de rigidez ao espaço tridimensional é feito através da consideração das parcelas que dizem respeito às coordenadas z_0 e z_1 e aos deslocamentos w_0 e w_1 na direção z . O resultado final é apresentado na matriz \mathbf{K} (2.25). Também a título ilustrativo, o sistema de seis coordenadas está representado na Figura 2.7.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] &= \frac{AE_t}{l_0^2 l} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z & l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 & l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix} \\
 + \frac{N}{l^3} &\begin{bmatrix} l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z & -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & l_y l_z \\ -l_x l_z & -l_y l_z & l^2 - l_z^2 & l_x l_z & l_y l_z & -l^2 + l_z^2 \\ -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & -l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & -l^2 + l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & l^2 - l_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Com:

$$l_z = z_1 + w_1 - z_0 - w_0 \quad (2.26)$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} \quad (2.27)$$

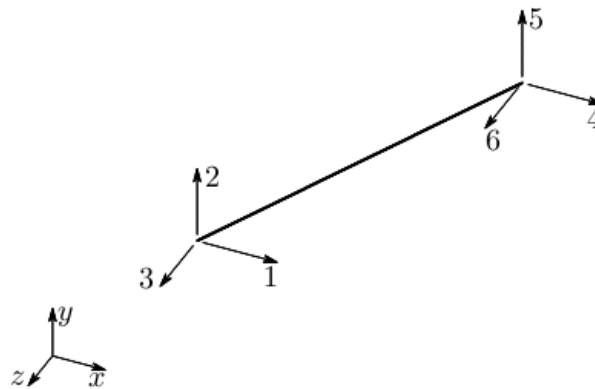


Figura 2.7 – Coordenadas da barra no caso tridimensional (Dias da Silva, 2002)

Finalmente, as forças de fixação, no caso tridimensional são definidas pelas expressões (2.28) e (2.29).

$$\begin{cases} X_0 = -N \frac{l_x}{l} \\ Y_0 = -N \frac{l_y}{l} \\ Z_0 = -N \frac{l_z}{l} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} X_1 = N \frac{l_x}{l} \\ Y_1 = N \frac{l_y}{l} \\ Z_1 = N \frac{l_z}{l} \end{cases} \quad (2.29)$$

2.2.4 Eficiência dos Métodos de Determinação da Forma

Apesar de presentemente contarmos já com sensivelmente meio século de literatura sobre métodos de determinação da forma geométrica de cascas reticuladas, existem muito poucos relatos de comparações entre os diferentes métodos. Além disso, essas comparações, para além de qualitativas são já bastante antigas. Barnes (1977) comparou os requisitos de armazenamento, por iteração, entre um Método da Matriz de Rigidez e um Método da Relaxação Dinâmica, concluindo que o segundo é o mais favorável. Lewis (1989) comparou o custo computacional dos mesmos dois métodos perante várias configurações de malha distintas. Este concluiu que o Método da Matriz de Rigidez apresenta problemas de convergência para alguns dos casos e que o Método da Relaxação Dinâmica apresenta um menor custo computacional que o Método da Matriz de Rigidez perante problemas com muitos graus de liberdade.

Como foi dito no parágrafo anterior, existem muito poucas comparações entre os diversos métodos. O facto de essas comparações serem maioritariamente qualitativas torna a análise inconclusiva na medida em que não é possível concluir até que ponto cada um dos métodos é mais adequado que outro para cada uma das várias situações possíveis.

3 ESTUDOS REALIZADOS

Uma vez apresentados os fundamentos teóricos relevantes, o presente capítulo dedica-se à apresentação do foco principal desta dissertação - o cálculo da forma de uma estrutura de casca reticulada utilizando leis constitutivas não-lineares. Neste é feita uma breve introdução ao funcionamento do algoritmo de cálculo utilizado, seguida da apresentação dos casos de estudo.

3.1 Algoritmo de Cálculo

O funcionamento dos programas de cálculo da forma geométrica de cascas reticuladas é relativamente simples. Nesta secção é apresentado o seu funcionamento de uma forma resumida, ilustrando-o com um fluxograma.

Este começa por ter uma fase em que é feita a entrada de dados. Toda a informação relativa ao número de elementos, número de nós, as suas coordenadas, secções transversais, lei constitutiva e forças aplicadas é feita nesta fase.

Seguidamente é dado início a um ciclo de iterações, que se repetirá tantas vezes quanto necessário até ser atingida convergência e consequentemente a sua solução. Imediatamente após o início deste ciclo são inicializados – ou reinicializados no caso de não ser a primeira vez que este esteja a ser corrido – a matriz de rigidez \mathbf{K} e o vetor das forças de fixação \mathbf{F} . Ainda dentro do mesmo ciclo de iterações, após a (re)inicialização da matriz \mathbf{K} e do vetor \mathbf{F} , é dado início a um ciclo, desta vez convenientemente chamado “Ciclo das Barras”, pois é neste que são efetuados os cálculos de todos os comprimentos, extensões, rigidezes e forças de fixação para cada barra, seguindo a teoria enunciada no capítulo anterior. Por cada iteração, esse ciclo é corrido tantas vezes consoante o número de elementos da estrutura. Chegando ao fim desse ciclo, ou seja, tendo sido calculadas todas as rigidezes e forças de fixação para cada uma das barras, estas são "assembladas" numa só matriz \mathbf{K} e \mathbf{F} (respetivamente). Finalmente são calculados os deslocamentos através da expressão de Newton-Raphson (3.1) e efetuado o respetivo teste de convergência. Se a convergência se confirmar, então foi atingida a solução, caso contrário o processo é integralmente repetido admitindo desta vez os deslocamentos obtidos no final da iteração anterior como deslocamentos iniciais.

$$\mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_i + [\mathbf{K}]^{-1} \times (\mathbf{P} - \mathbf{F}) \quad (3.1)$$

Uma vez que a matriz de rigidez de uma malha plana, com capacidade de deformação para fora do plano, é singular, este processo carece da consideração de um deslocamento inicial para dar início ao processo. Dada a dificuldade de considerar um deslocamento aproximado da configuração de equilíbrio, foi considerado um esforço axial inicial, que por sua vez provoca uma rigidez geométrica fictícia inicial que permite dar início ao processo iterativo.

A utilização de leis constitutivas não-lineares com determinadas configurações de parâmetros podem fazer com que este algoritmo experimente problemas de convergência. Em certos casos pode ser necessário restringir o incremento de deslocamento utilizado na iteração seguinte e/ou dividir a carga atuante num determinado número de intervalos (incrementos), fazendo-a incrementar progressivamente sempre que é atingido equilíbrio, até se obter uma configuração final em que os esforços internos equilibram a totalidade da carga aplicada. Em casos de convergência mais difícil pode também ser necessária a utilização do método de Newton-Raphson modificado. Este consiste na não atualização da matriz de rigidez da estrutura a partir de determinada iteração. Esta modificação acarreta naturalmente um custo adicional no que diz respeito ao número de iterações necessárias, conferindo no entanto significativas melhoras no que concerne à convergência do processo.

Foi ainda necessário converter o programa de cálculo para precisão dupla, de modo a conseguir-se convergência aos casos em que se entrou mais profundamente no patamar de cedência.

De modo a facilitar a compreensão deste tipo de programas, a Figura 3.1 esquematiza o seu funcionamento.

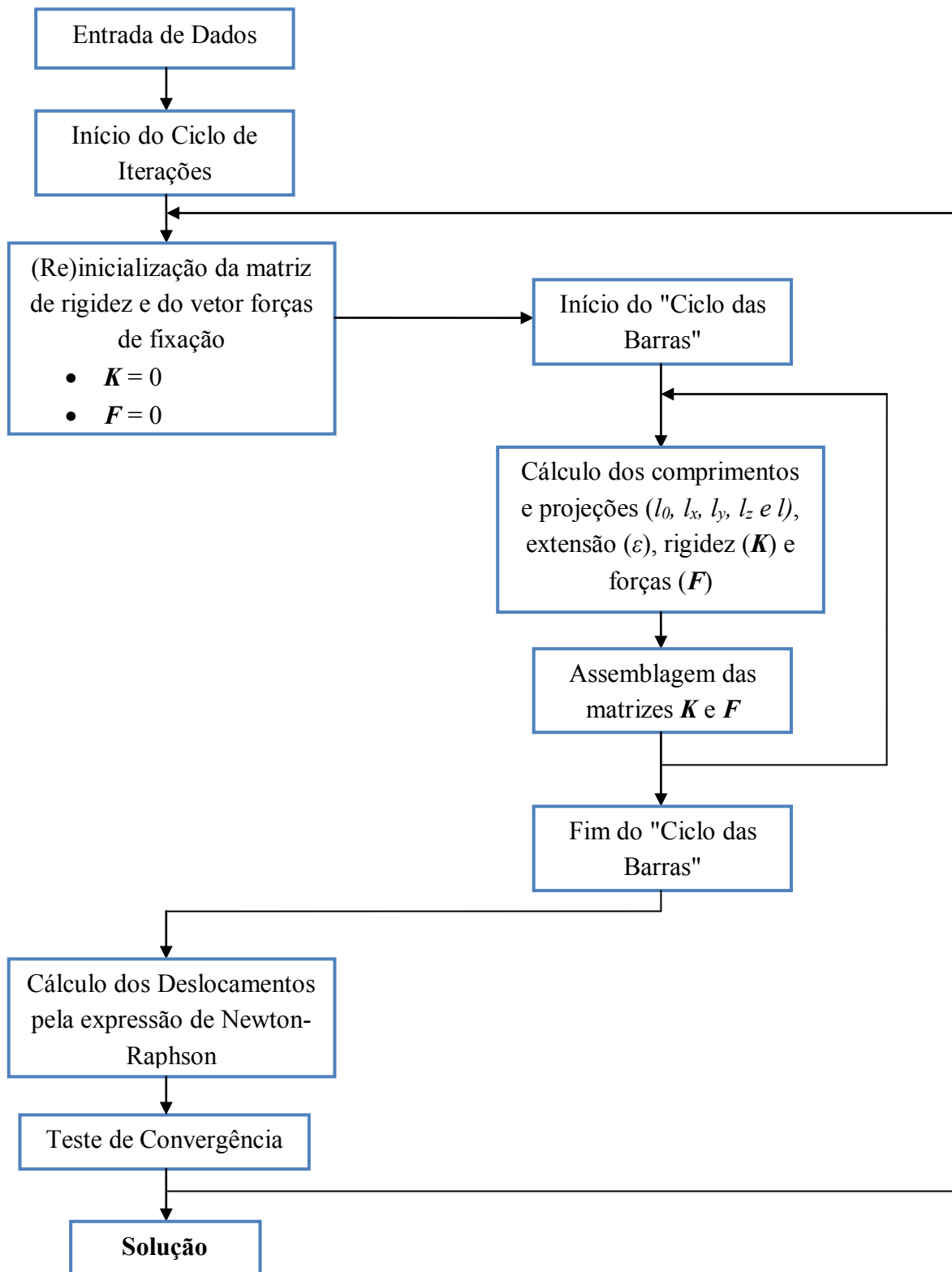


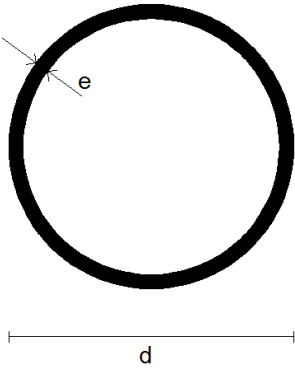
Figura 3.1 - Fluxograma do algoritmo de cálculo utilizado para determinação da forma de estruturas de casca reticulada

3.2 Casos de Estudo

Neste trabalho foram estudadas duas malhas cujas configurações geométricas diferem principalmente na regularidade da geometria do seu contorno. Cada uma destas foi utilizada para determinar a forma de estruturas com três alturas máximas distintas. Daqui em diante, estas são referenciadas como "Malha A" e "Malha B". As próximas duas subsecções dedicam-se à apresentação destas.

Neste estudo foi utilizada a mesma secção transversal em todos os elementos, em ambas as fases de determinação da forma e de análise estrutural. Apesar de na fase de determinação da forma a área da secção transversal ser a única característica relevante (por esta estar sujeita a esforço axial puro), tal não se repete na análise estrutural da casca reticulada propriamente dita, sendo esta análise influenciada pela forma geométrica da secção transversal dos elementos que a constituem. A estes elementos foi atribuída uma secção transversal circular oca com as dimensões apresentadas pelo Quadro 3.1.

Quadro 3.1 - Secção transversal dos elementos

Secção Transversal		
		
d	10,0	cm
e	0,50	cm
A	14,923	cm ²
I	168,812	cm ⁴
J	337,623	cm ⁴

Assim como das secções transversais, a fase de determinação da forma e a análise estrutural partilham da mesma carga atuante. Nestas foi exclusivamente considerada a atuação de uma

carga uniformemente distribuída com o valor de 1 kN/m^2 ao longo de toda a superfície da malha ou da estrutura, respetivamente tratando-se da fase de determinação da forma ou da sua análise estrutural.

A análise estrutural foi feita assumindo elementos constituídos por aço, em regime elástico linear, cujos valores do módulo de elasticidade E e do módulo de distorção G utilizados no cálculo são apresentadas no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Propriedades do material considerado na análise estrutural

Análise Estrutural - Aço - Propriedades		
E	206,000	MPa
G	79,200	MPa

3.2.1 Malha A

A malha utilizada neste trabalho à qual foi atribuído o nome "Malha A" tem uma geometria irregular cujas maiores dimensões segundo os eixos ortogonais X e Y são 84 e 119,85 metros, respetivamente. A esta malha foi atribuído um contorno curvo para evitar que as estruturas provenientes desta tenham zonas de curvatura simples em certas zonas, nomeadamente junto aos apoios, e assim tirem partido dos benefícios associados à utilização de dupla curvatura.

Com as translações restringidas em todos os 80 nós do seu contorno exterior e constituída por um total de 973 nós, aos quais se ligam 2756 elementos, esta malha foi utilizada para determinar a forma de estruturas com três alturas máximas distintas: 25, 20 e 15 metros. Para cada uma destas alturas máximas foram experimentadas 11 leis constitutivas diferentes - uma lei constitutiva linear e dez leis constitutivas não-lineares. A geometria em planta desta malha é apresentada pela Figura 3.1.

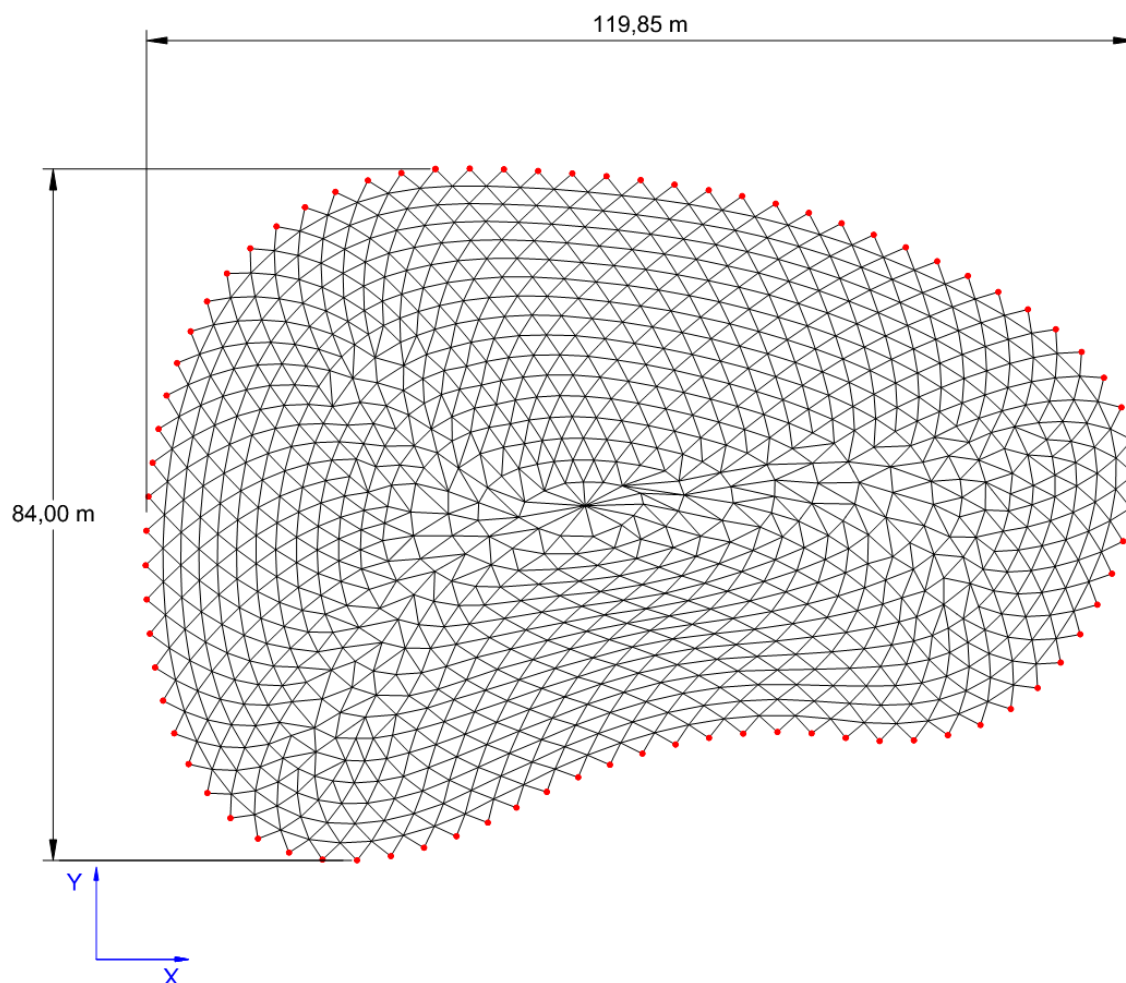


Figura 3.1 - Planta da Malha A

3.2.2 Malha B

À semelhança da Malha A, a Malha B conta com 80 nós no seu contorno exterior, todos eles com as translações restringidas segundo as três direções ortogonais. Esta também foi utilizada para determinar a forma de estruturas com as alturas de 25,20 e 15 metros através de 11 leis constitutivas distintas. Desta vez contando com um total de 1096 nós aos quais se ligam 3125 elementos, a geometria desta difere da Malha A na zona onde esta apresenta uma ligeira reentrância. Esta geometria de malha foi adotada para verificar a influência de concavidades no contorno, no que diz respeito ao comportamento estrutural das formas geradas a partir desta. Na Figura 3.2 são apresentados a planta da Malha B bem como o contorno exterior da Malha A (a tracejado de cor azul) com o intuito de evidenciar essa diferença.

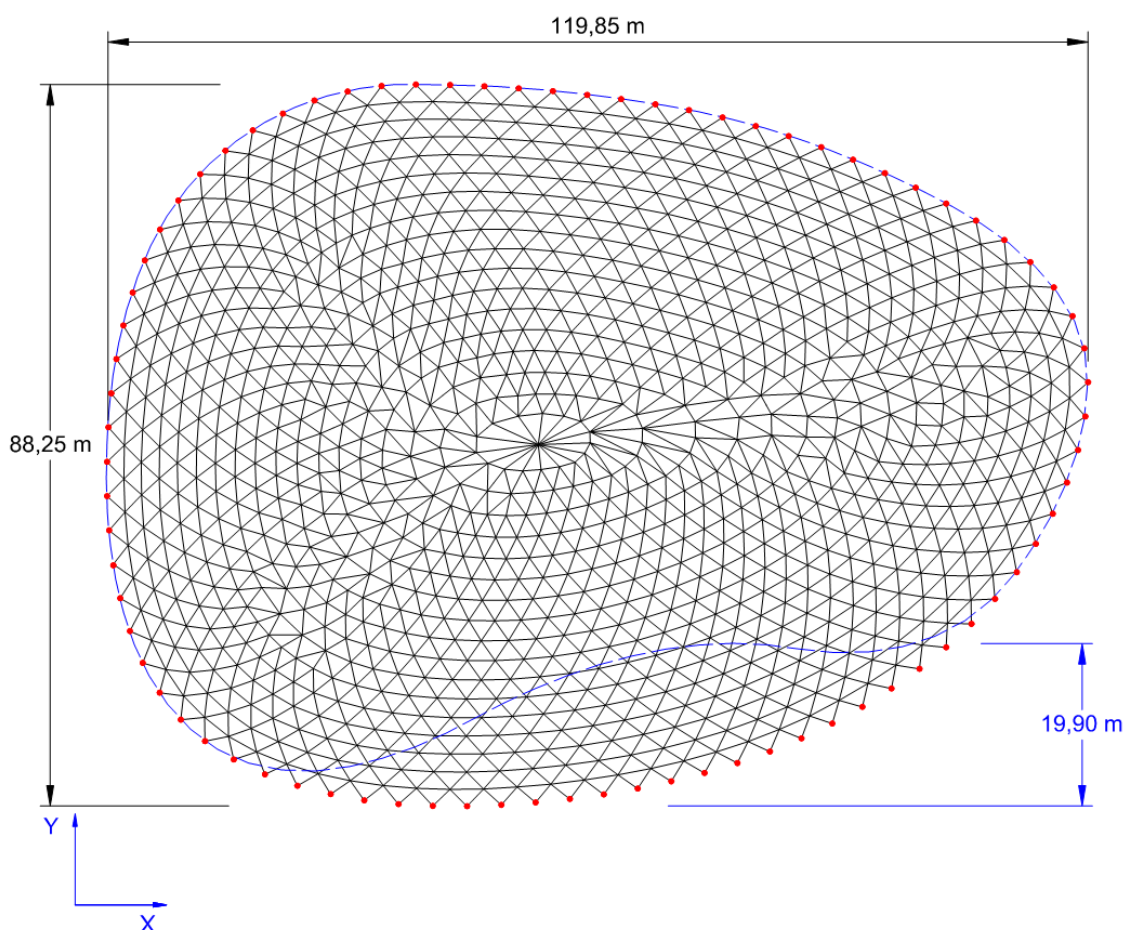


Figura 3.2 - Planta da Malha B

3.2.3 Leis Constitutivas

Tal como mencionado nas secções anteriores, foram calculadas formas para estruturas com três alturas máximas distintas. De entre as 11 leis constitutivas experimentadas para cada uma das três configurações, uma é lei linear, para poder ser estabelecida a comparação entre os resultados a partir desta e das restantes dez leis constitutivas não-lineares.

As leis constitutivas lineares utilizadas neste estudo seguem naturalmente a expressão de Hooke, onde à tensão σ está associado o produto entre o módulo de elasticidade E e a extensão \mathcal{E} (3.2).

$$\sigma = E \times \mathcal{E} \quad (3.2)$$

O tipo de lei constitutiva não-linear é expresso por (3.3). Os parâmetros a , b e σ_0 são arbitrários, estando naturalmente relacionados com o desenvolvimento da lei.

$$\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon}) \quad (3.3)$$

A influência destes parâmetros é ilustrada através do exemplo da Figura 3.3. Nesta estão representadas três leis constitutivas:

- Lei Constitutiva Linear (representada a azul): $\sigma = E \times \varepsilon$; $E = 2 \text{ GPa}$
- Lei Constitutiva Não-Linear 1 (representada a verde):
 $\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon})$; $a = 100 \text{ MPa}$; $b = 30$; $\sigma_0 = 700 \text{ MPa}$
- Lei Constitutiva Não-Linear 2 (representada a vermelho):
 $\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon})$; $a = 0$; $b = 5$; $\sigma_0 = 500 \text{ MPa}$

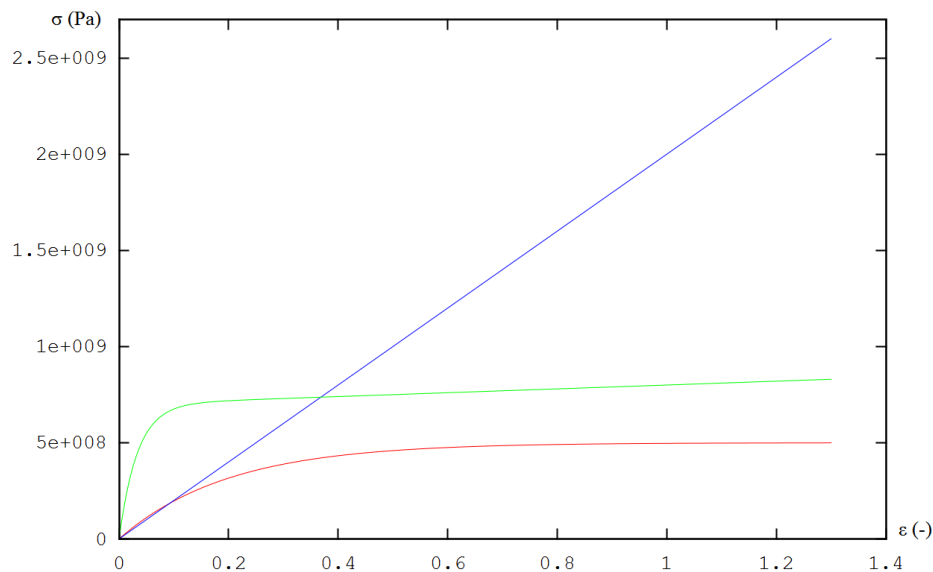


Figura 3.3 - Exemplos de leis constitutivas

Analisando a figura anterior e as expressões das referidas leis constitutivas, o significado dos parâmetros das leis constitutivas não-lineares torna-se evidente. O valor de σ_0 representa o valor da tensão a partir do qual esta apresenta uma tendência assintótica.

Ao parâmetro a está diretamente associada a inclinação do patamar descrito pela curva após atingir a tensão σ_0 . Assim, tomando a Lei Constitutiva Não-Linear 2 como exemplo, ao ser

assumido o valor nulo para o seu parâmetro a , esta descreve uma curva que tende assintoticamente para uma reta sem inclinação à ordenada σ_0 .

Ao parâmetro b está por sua vez associado o desenvolvimento da parcela exponencial. Quanto maior for o valor deste parâmetro, mais rapidamente a curva se aproxima da assíntota. Esta diferença é mais uma vez evidenciada pelas leis constitutivas não-lineares apresentadas na figura anterior.

Considerando que o cálculo da extensão é feito para cada um dos elementos de uma malha, neste trabalho foi adotado este tipo de lei constitutiva não-linear partindo do princípio que estes, à medida que a tensão a que estão sujeitos aumenta, ao reduzirem a sua rigidez gradualmente, e portanto a sua capacidade para “absorver” esforços, conduzi-los-iam para os elementos que lhe são adjacentes, uniformizando assim os níveis de tensão ao longo de toda a estrutura. Deste modo, à luz da mesma suspeita, a inclinação diretamente relacionada com o parâmetro a não traria nenhum benefício. O uso da mesma foi equacionado em primeira mão como forma de contornar os possíveis problemas de convergência inerentes a uma assíntota horizontal, a que corresponde um valor nulo para o módulo de elasticidade tangente. Uma vez que os problemas de convergência foram resolvidos através da limitação do incremento de deslocamento e/ou da divisão da carga em incrementos - tal como mencionado no na Secção 3.1 - adotou-se valor nulo para o mesmo parâmetro a em todas as leis constitutivas consideradas.

Considerando o valor nulo para a , restam então as duas incógnitas b e σ_0 . Estabelecendo *a priori* um valor para a altura máxima da estrutura suprime-se então uma das incógnitas. As leis constitutivas não-lineares utilizadas neste estudo foram determinadas fixando um valor para o parâmetro b e testando valores de σ_0 até se obter um valor correspondente à altura máxima pretendida (neste caso 25, 20 ou 15 metros). As leis constitutivas utilizadas para a determinação da forma de estruturas com cada uma das alturas máximas previamente especificadas são apresentadas nos seguintes quadros.

- Malha A:

Quadro 3.2a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 25 m

Lei Constitutiva Linear - Malha A - Casca 25m		
E	261,338	MPa

Quadro 3.2b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 25 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 25m			
n°	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (MPa)
1	0	0,5	542,820
2	0	7	61,859
3	0	14	48,739
4	0	17	47,384
5	0	20	46,560
6	0	25	45,743
7	0	30	45,268
8	0	35	44,966
9	0	40	44,773
10	0	45	44,633

Quadro 3.3a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 20 m

Lei Constitutiva Linear - Malha A - Casca 20m		
<i>E</i>	493,838	MPa

Quadro 3.3b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 20 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 20m			
n°	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (MPa)
1	0	0,5	1011,730
2	0	7	97,754
3	0	14	66,324
4	0	17	61,779
5	0	20	59,093
6	0	25	56,682
7	0	30	55,382
8	0	35	54,545
9	0	40	53,973
10	0	45	53,557

Quadro 3.4a - Lei Constitutiva Linear - Malha A - Altura máxima de 15 m

Lei Constitutiva Linear - Malha A - Casca 15m		
<i>E</i>	989,900	MPa

Quadro 3.4b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Altura máxima de 15 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 15m			
n°	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (MPa)
1	0	0,5	2326,200
2	0	7	197,450
3	0	14	118,164
4	0	17	104,922
5	0	20	96,092
6	0	25	86,789
7	0	30	81,200
8	0	35	77,663
9	0	40	75,367
10	0	45	73,800

- Malha B:

Quadro 3.5a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 25 m

Lei Constitutiva Linear - Malha B - Casca 25m		
<i>E</i>	287,486	MPa

Quadro 3.5b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 25 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 25m			
n°	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (Pa)
1	0	0,5	597,484
2	0	7	69,092
3	0	14	54,998
4	0	17	53,465
5	0	20	67,014
6	0	25	51,494
7	0	30	50,915
8	0	35	50,562
9	0	40	50,289
10	0	45	50,112

Quadro 3.6a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 20 m

Lei Constitutiva Linear - Malha B - Casca 20m		
<i>E</i>	536,600	MPa

Quadro 3.6b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 20 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 20m			
nº	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (MPa)
1	0	0,5	1100,304
2	0	7	107,774
3	0	14	74,654
4	0	17	69,865
5	0	20	67,014
6	0	25	64,370
7	0	30	62,841
8	0	35	61,796
9	0	40	61,042
10	0	45	60,504

Quadro 3.7a - Lei Constitutiva Linear - Malha B - Altura máxima de 15 m

Lei Constitutiva Linear - Malha B - Casca 15m		
<i>E</i>	1225,400	MPa

Quadro 3.7b - Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Altura máxima de 15 m

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 15m			
nº	<i>a</i>	<i>b</i>	σ_0 (MPa)
1	0	0,5	2486,004
2	0	7	212,944
3	0	14	129,464
4	0	17	116,010
5	0	20	107,070
6	0	25	973,500
7	0	30	91,690
8	0	35	87,944
9	0	40	85,479
10	0	45	83,788

4 DETERMINAÇÃO DA FORMA E ANÁLISE ESTRUTURAL

No capítulo anterior foram apresentadas as 11 leis constitutivas utilizadas na determinação da forma de estruturas com três alturas máximas diferentes, partindo de duas configurações iniciais distintas (Malha A e Malha B). No presente capítulo descreve-se a determinação da forma e avaliação da eficiência estrutural de todas as formas obtidas. Uma vez que os resultados da fase de determinação da forma são também comparados com os resultados da fase de análise estrutural, estes são apresentados ao longo das primeiras seis secções deste capítulo, sendo o fenómeno da instabilidade tratado na Secção 4.7.

4.1 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 25m

Esta secção está dividida em várias subsecções, correspondentes às leis constitutivas utilizadas na obtenção da forma de estruturas com uma altura máxima de 25 metros a partir das condições iniciais da Malha A. Nestas são apresentadas as formas obtidas, bem como os esforços e tensões, tanto na fase de determinação da forma (estrutura sujeita a esforço axial puro), como na análise das estruturas oriundas das respetivas formas.

4.1.1 Lei Constitutiva Linear

- Determinação da Forma

Tal como apresentado no final do capítulo anterior, as leis constitutivas lineares utilizadas neste estudo seguem a expressão de Hooke, na qual, para uma estrutura com altura máxima de 25 metros procedente da Malha A, o valor do módulo de elasticidade E assume o valor de 261,338 MPa (4.1).

$$\sigma = E \times \mathcal{E} = 261,338 \times \mathcal{E} \quad (4.1)$$

A determinação da forma através desta lei constitutiva linear resultou numa extensão máxima, e conseqüente tensão, cujos valores são apresentados no Quadro 4.1. A Figura 4.1 situa esses valores máximos no desenvolvimento da lei constitutiva com o intuito de facilitar a comparação com as leis constitutivas não-lineares apresentadas *a posteriori* desta.

Quadro 4.1 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensão e Extensão Máximas

Lei Constitutiva Linear - Malha A - Casca 25m		
E	261,338	MPa
σ_{max}	76,742	MPa
ϵ_{max}	0,294	-

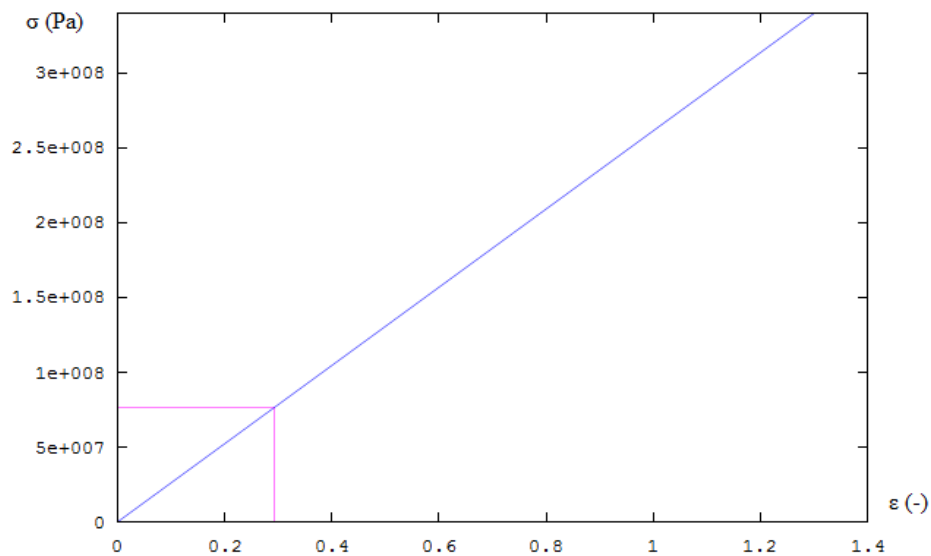


Figura 4.1 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear

Passando finalmente à forma da estrutura propriamente dita, o cálculo da deformação dos elementos sujeitos a esforço axial puro levado a cabo através do algoritmo anteriormente apresentado tendo em conta os parâmetros da presente lei constitutiva, deu origem a uma estrutura cujo aspeto é apresentado nas Figuras 4.2a e 4.2b.

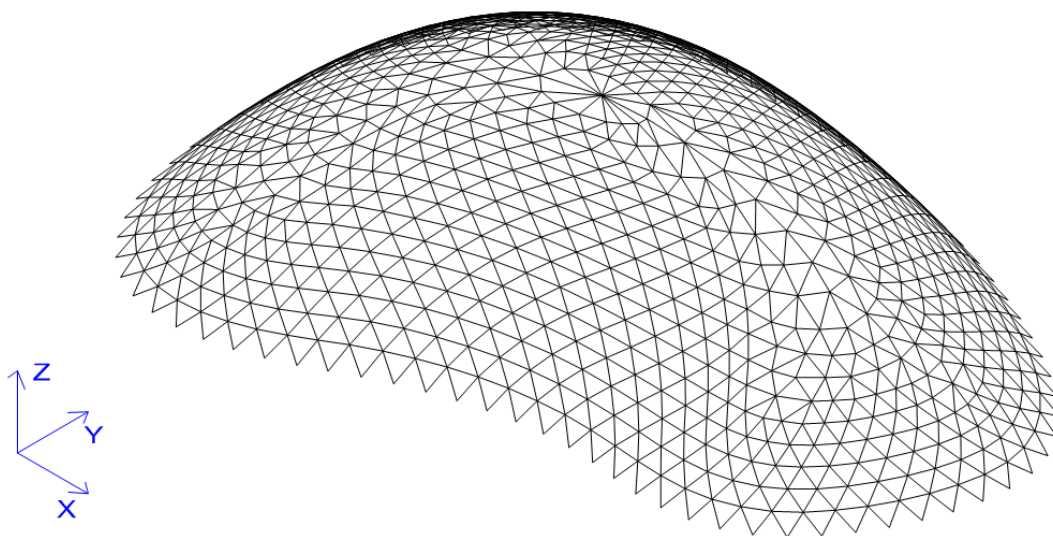


Figura 4.2a - Malha A - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear (Vista 1)

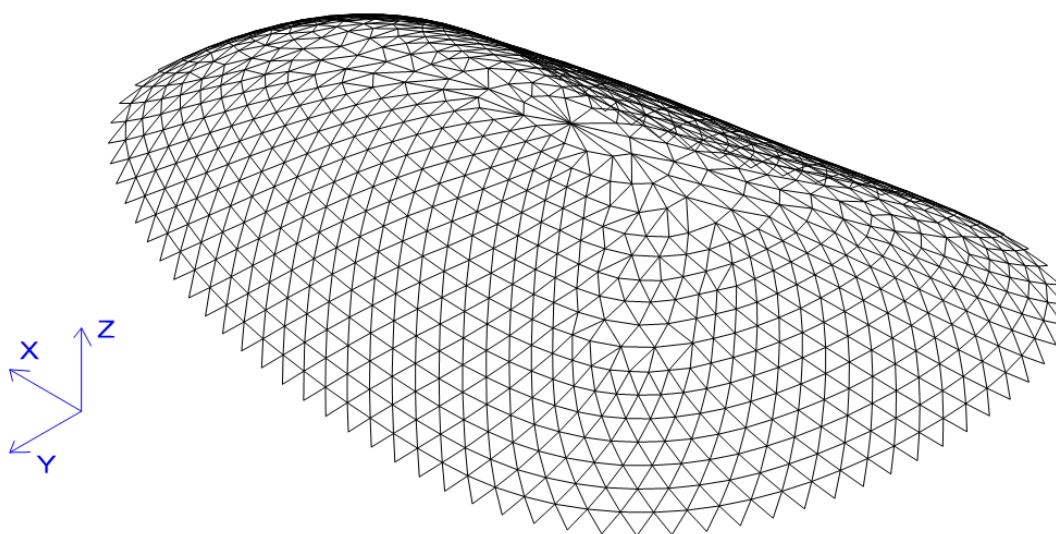


Figura 4.2b - Malha A - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear (Vista 2)

A Figura 4.3 representa a distribuição de esforços axiais ainda na fase de determinação da forma. Uma vez que a determinação da forma e a análise estrutural foram efetuadas considerando as estruturas (sem e com rigidez de flexão, respetivamente) sujeitas à mesma carga, esta figura pretende evidenciar a proximidade entre os valores do esforço axial nas

fases de determinação da forma e de análise estrutural (apresentada posteriormente). Tendo em conta que nesta fase os elementos se encontram exclusivamente sujeitos a esforço axial, a sua tensão é naturalmente dada pelo quociente entre o seu esforço axial N e a área da sua secção transversal A (4.2). O Quadro 4.2 apresenta um resumo dos esforços axiais e tensões máximos verificados nesta fase.

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.2)$$

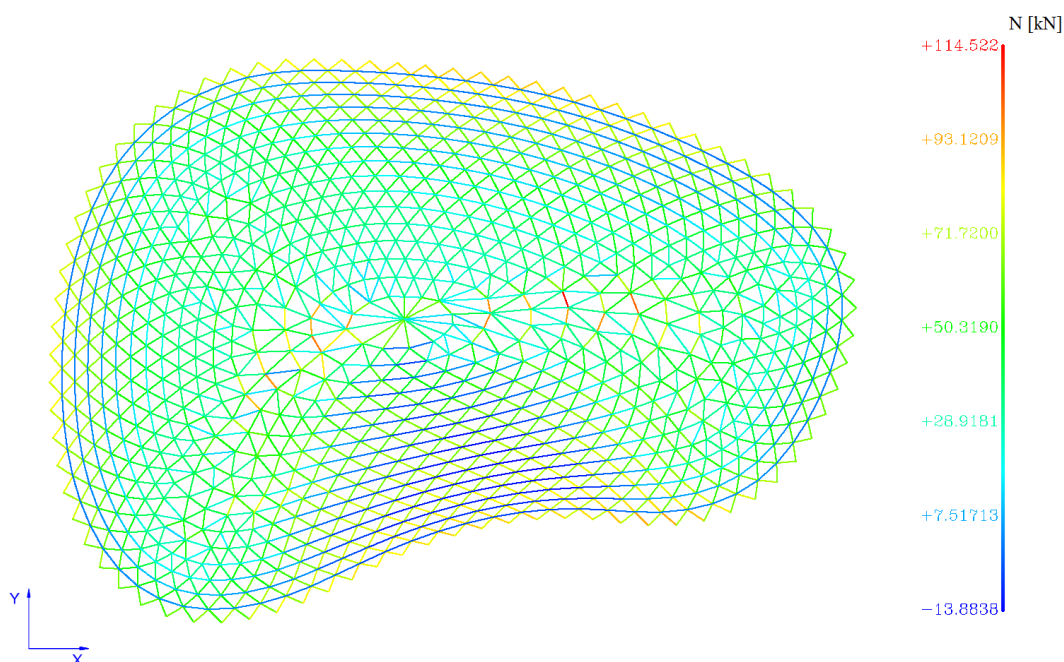


Figura 4.3 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma

Quadro 4.2 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma

Esforços na fase de determinação da forma - Malha A - Casca 25m		
$N_{max, tracção}$	114,522	kN
$N_{max, compressão}$	-13,884	kN
$\sigma_{max, tracção}$	76,742	MPa
$\sigma_{max, compressão}$	-9,304	MPa

- Análise Estrutural

Concluída a fase de determinação da forma da estrutura tendo em consideração uma lei constitutiva linear com os parâmetros anteriormente descritos, foi efetuada a sua análise estrutural. À forma anteriormente determinada foi aplicado o mesmo caso de carga (1 kN/m^2 , em projeção horizontal, ao longo de toda a superfície da estrutura). Em resposta a esta carga exterior foi obtida a distribuição de esforços nos elementos apresentada na Figura 4.4. Os valores dos esforços de tração na fase de determinação da forma e de compressão na análise estrutural são naturalmente muito próximos. O mesmo se verifica entre os valores dos esforços de compressão e tração nas mesmas fases, respetivamente. Com o intuito de evidenciar essa proximidade em toda a superfície da estrutura, o código de cores associado ao sentido dos esforços apresentados na Figura 4.4 foi invertido em relação à anterior (Figura 4.3). Note-se que a referida figura serve também para apresentar os valores máximos de esforço axial verificados nesta fase. Deste modo, não foi adotada a mesma escala de cores correspondente a cada valor do esforço axial. No entanto, as diferenças entre estes valores são muito pequenas, praticamente inotórias no que diz respeito ao código de cores, evitando que a comparação se torne ilegítima.

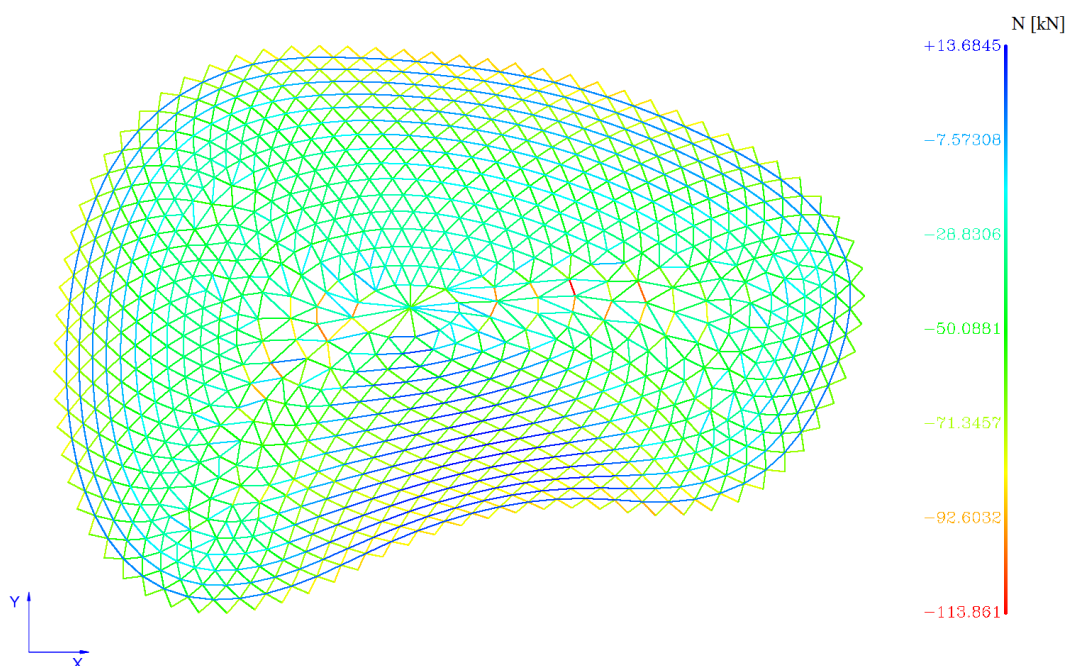


Figura 4.4 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Distribuição de esforços axiais na fase de análise estrutural

Relembrando que nesta fase, ao contrário de na fase de determinação da forma, os elementos apresentam rigidez de flexão não desprezável, o cálculo das tensões nos elementos naturalmente não depende apenas do seu esforço axial, estando estes também sujeitos a esforços de flexão, devidos à pela compatibilização de deformações. Estes esforços são normalmente de baixo valor e geram conseqüentemente tensões muito baixas quando comparadas com a parcela correspondente ao esforço axial. Ainda assim, por forma a legitimar as comparações posteriormente apresentadas, estes esforços foram contabilizados no cálculo das tensões.

Tratando-se de secções transversais circulares, o cálculo das tensões pode ser relativamente simplificado. Devido à sua geometria, os eixos principais de inércia podem assumir qualquer direção, o que conduz à possibilidade de analisar as tensões por meio de um momento fletor resultante, evitando assim a abordagem de flexão desviada tradicional associada a secções retangulares ou com outras formas geométricas. Deste modo, a resultante de momentos fletores foi calculada através da expressão (4.3), seguindo a convenção apresentada na Figura 4.5.

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (4.3)$$

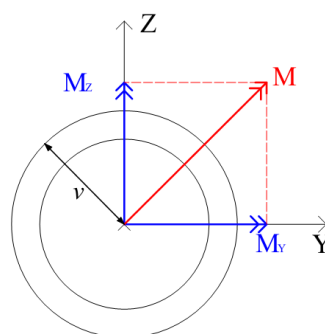


Figura 4.5 - Convenção das componentes do momento fletor

Desta feita, as tensões máximas foram calculadas de acordo com (4.4), em que v , ao representar a distância à fibra mais esforçada, assume o valor do raio exterior r da secção transversal.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} \times v = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} \times r \quad (4.4)$$

O Quadro 4.3 apresenta um resumo dos esforços dos elementos onde se verificam tensões máximas de compressão e tração, bem como o resultado do cálculo das próprias.

Quadro 4.3 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensão Máxima Compressão - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
N	-113,861	kN
M_y	0,031	kN.m
M_z	0,003	kN.m
M	0,031	kN.m
$\sigma_{média}$	-76,299	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-77,214	MPa

Tensão Máxima Tração - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
N	13,684	kN
M_y	-0,017	kN.m
M_z	-0,020	kN.m
M	0,027	kN.m
$\sigma_{média}$	9,170	MPa
$\sigma_{max,tração}$	9,959	MPa

No que diz respeito aos esforços de torção, embora também de baixo valor, foram também contabilizados. As tensões tangenciais máximas τ_{max} provocadas por estes, tratando-se de uma secção circular foram calculadas de acordo com a expressão (4.5), onde M_x representa o momento torsor, J o momento polar de inércia e r o raio exterior da secção transversal. Completando a convenção de direcções e sentidos proposta anteriormente, aos valores positivos de momento torsor atribui-se o sentido apresentado na Figura 4.6.

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J} \times r \quad (4.5)$$

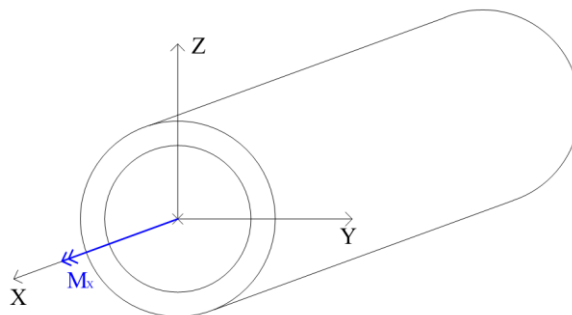


Figura 4.5 - Convenção de direcções e sentido positivo do momento torsor (M_x)

As tensões tangenciais oriundas destes esforços de torção foram tidas em conta no cálculo da tensão equivalente σ_{eq} seguindo o critério de Von Mises (4.6).

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (4.6)$$

Finalmente, os esforços de torção, conseqüentes tensões tangenciais e tensões equivalentes máximas de compressão e tração, são apresentados pelo Quadro 4.4.

Quadro 4.4 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Equivalentes Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensão Eq. Máxima de Compressão - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
Mx	0,004	kN.m
τ_{max}	0,057	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-77,214	MPa
$\sigma_{eq.}$	-77,214	MPa

Tensão Eq. Máxima de Tração - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
Mx	-0,011	kN.m
τ_{max}	-0,156	MPa
$\sigma_{max,tração}$	9,959	MPa
$\sigma_{eq.}$	9,963	MPa

4.1.2 Lei Constitutiva Não-Linear nº1

- Determinação da Forma

Segundo o resumo das leis constitutivas utilizadas neste estudo, apresentados no final do capítulo anterior, aos parâmetros b e σ_0 que definem o desenvolvimento desta lei constitutiva não-linear foram atribuídos os valores de 0,5 e 542,820 MPa respetivamente. Ao parâmetro a , assim como em todas as restantes leis não-lineares, foi atribuído valor nulo (4.7).

$$\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon}) = 542,820 \times (1 - e^{-0,5\varepsilon}) \quad (4.7)$$

O facto de ter sido assumido um valor muito baixo para o parâmetro b fez com que o desenvolvimento desta lei constitutiva não-linear se assemelhasse em muito ao desenvolvimento da lei constitutiva linear apresentada anteriormente. Deste modo, os valores máximos da tensão σ e correspondente extensão máxima ε na fase de determinação da forma são relativamente semelhantes aos apresentados anteriormente. Estes são apresentados no Quadro 4.5 que em conjunto com a Figura 4.6 ajudam a quantificar essa proximidade. Note-se que neste figura, à cor azul corresponde o desenvolvimento da lei constitutiva linear, enquanto à cor vermelha está associado o desenvolvimento da presente lei constitutiva não-linear.

Quadro 4.5 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Tensão e Extensão Máximas

Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Malha A - Casca 25m		
σ_{max}	76,138	MPa
ϵ_{max}	0,302	-

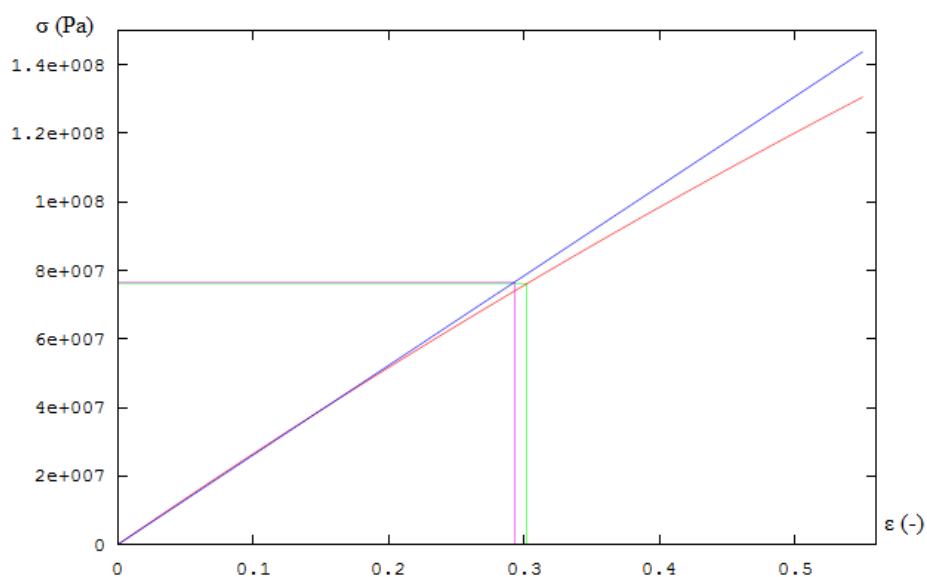


Figura 4.6 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1

Deste modo, como seria de esperar, tanto os esforços nesta fase como a própria forma obtida são bastante semelhantes aos obtidos considerando uma lei constitutiva linear. Tratando-se de uma estrutura de grandes dimensões, as diferenças globais entre as formas geométricas originárias de cada uma das leis constitutivas passam despercebidas em figuras de baixa escala e portanto não são apresentadas no presente documento.

A distribuição de esforços axiais ao longo da estrutura na fase de determinação da forma é apresentada pela Figura 4.7, sendo as tensões máximas apresentadas pelo Quadro 4.6.

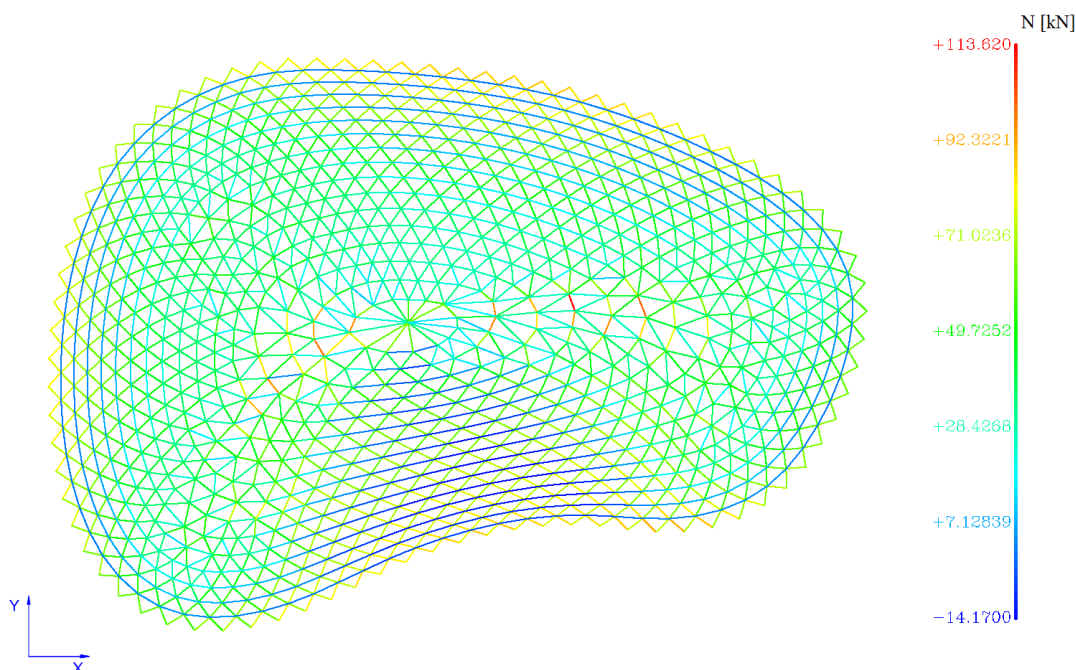


Figura 4.7 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma

Quadro 4.6 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Esforços e Tensões Máximas na fase de determinação da forma

Esforços na fase de determinação da forma - Malha A - Casca 25m		
$N_{max,tração}$	113,620	kN
$N_{max,compressão}$	-14,170	kN
$\sigma_{max,tração}$	76,138	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-9,495	MPa

- Análise Estrutural

Seguindo um procedimento análogo ao exposto na análise da estrutura determinada através da lei constitutiva linear, foram calculadas as tensões equivalentes de Von Mises tendo em conta a influência dos esforços de flexão e torção. A distribuição de esforços axiais obtida nesta fase, à semelhança do caso anterior, é semelhante à que se havia obtido na fase de determinação da forma de equilíbrio. Esta é apresentada na Figura 4.8 com o código de cores invertido em relação ao sentido do esforço axial, de forma a facilitar a visualização das semelhanças.

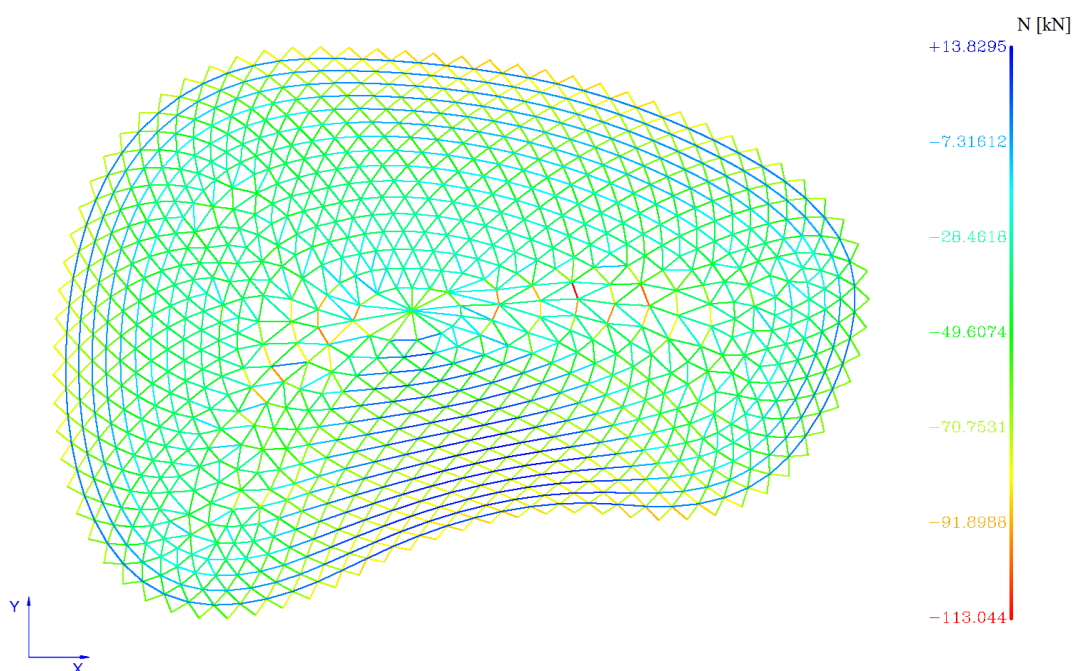


Figura 4.8 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Distribuição de esforços axiais na fase de análise estrutural

Relativamente às tensões, com esta configuração foram obtidos resultados sensivelmente com a mesma ordem de grandeza dos valores da solução anterior, tendo-se até verificado que os elementos sujeitos às maiores tensões de tração e compressão são exatamente os mesmos que no caso da lei constitutiva linear.

Apesar de se verificar um ligeiro aumento do valor máximo da tensão média de tração relativamente à solução anterior, uma vez que os esforços de flexão nos elementos mais esforçados são ainda menores que na solução linear, verifica-se até um ligeiro decréscimo em termos de tensões equivalentes máximas. No valor máximo da tensão equivalente de compressão obteve-se um decréscimo de cerca de 0,56%, enquanto a diferença entre valores máximos da tensão equivalente de tração ronda os 1,64%. O cálculo destas tensões é apresentado pelo Quadro 4.7.

Quadro 4.7 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1			Tensões Máximas Tração - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1		
N	-113,044	kN	N	13,830	kN
M_y	-0,006	kN.m	M_y	-0,013	kN.m
M_z	0,034	kN.m	M_z	-0,013	kN.m
M	0,035	kN.m	M	0,018	kN.m
M_x	0,003	kN.m	M_x	-0,001	kN.m
$\sigma_{média}$	-75,752	MPa	$\sigma_{média}$	9,267	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-76,783	MPa	$\sigma_{max,tração}$	9,800	MPa
τ_{max}	0,042	MPa	τ_{max}	-0,016	MPa
$\sigma_{eq.}$	-76,783	MPa	$\sigma_{eq.}$	9,800	MPa

4.1.3 Lei Constitutiva Não-Linear nº2

- Determinação da Forma

Ao contrário da lei constitutiva não-linear apresentada anteriormente, a Lei Constitutiva Não-Linear nº2 apresenta resultados significativamente diferentes. Desta vez, os valores considerados para os parâmetros b e σ_0 foram 7,0 e 61,859 MPa, respetivamente, tal como demonstrado na expressão (4.8).

$$\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon}) = 61,859 \times (1 - e^{-7 \times \varepsilon}) \quad (4.8)$$

Na determinação da forma a partir desta lei constitutiva chegou-se aos valores máximos de tensão e extensão apresentados no Quadro 4.8. Desta vez, as diferenças associadas à utilização de uma lei constitutiva não-linear neste processo foram muito mais flagrantes, tendo-se obtido uma extensão máxima cujo valor é sensivelmente maior que o dobro das anteriormente apresentadas. Relativamente à Lei Constitutiva Linear, a Figura 4.9 evidencia as diferenças.

Quadro 4.8 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Tensão e Extensão Máximas

Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Malha A - Casca 25m		
σ_{max}	61,220	MPa
ϵ_{max}	0,653	-

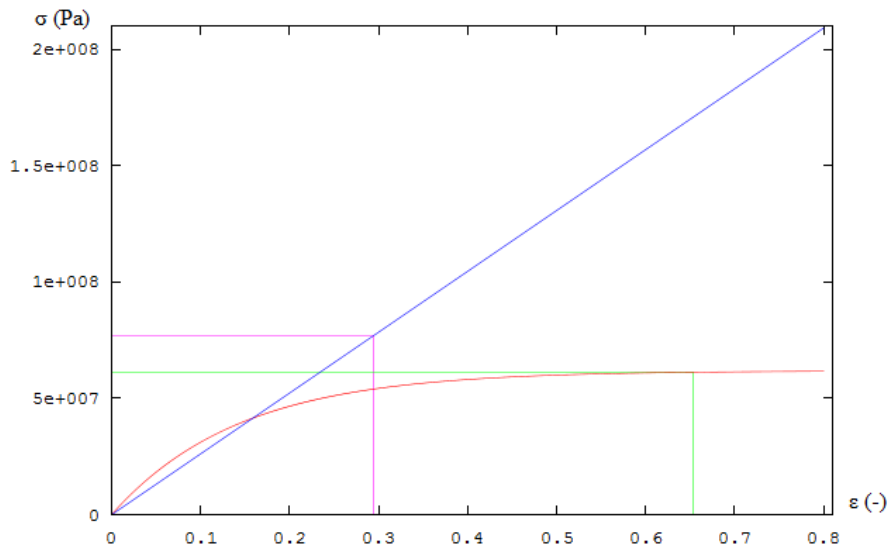


Figura 4.9 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2

À luz dos procedimentos apresentados para as soluções anteriormente apresentadas, foi efetuado o cálculo das tensões máximas de compressão e tração com base nos esforços axiais máximos. A Figura 4.10 retrata a distribuição de esforços nesta fase, enquanto os valores das tensões máximas são apresentados pelo Quadro 4.9.

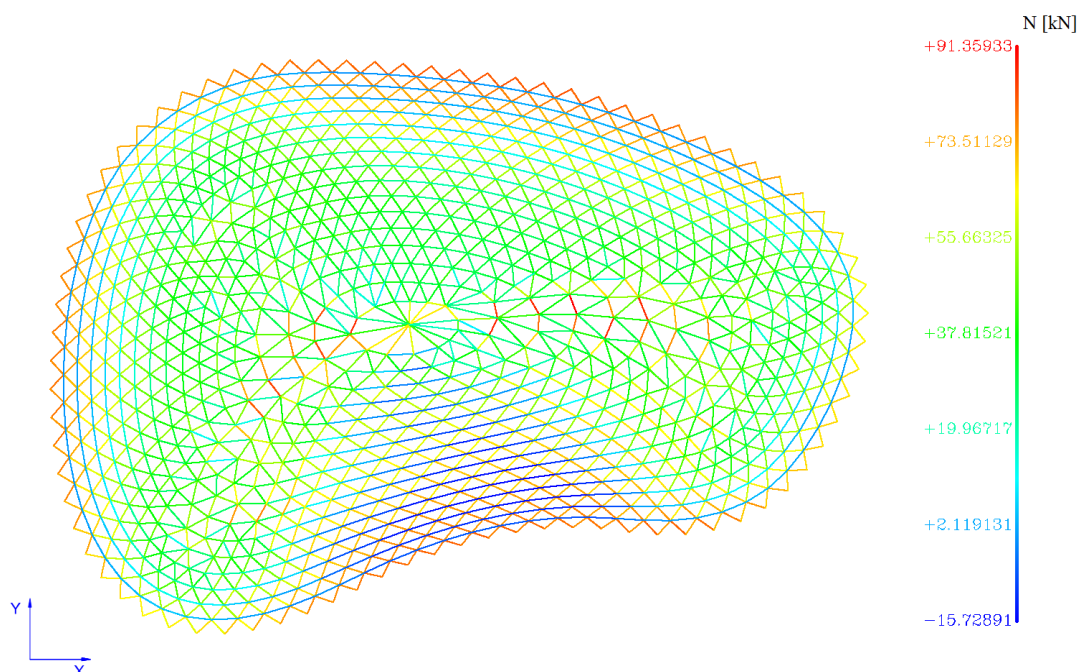


Figura 4.10 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Distribuição de esforços axiais na fase de determinação da forma

Quadro 4.9 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Esforços e Tensões máximos na fase de determinação da forma

Esforços na fase de determinação da forma - Malha A - Casca 25m		
$N_{max,tração}$	91,359	kN
$N_{max,compressão}$	-15,729	kN
$\sigma_{max,tração}$	61,220	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-10,540	MPa

- Análise Estrutural

Apesar das diferenças entre os esforços máximos na fase de determinação da forma utilizando a presente lei constitutiva e a lei linear serem já notórios, permanece a semelhança entre estes durante as duas fases de análise (determinação da forma e análise estrutural). Assim, tal como nos casos anteriores, com o intuito de mostrar os esforços axiais máximos bem como a distribuição de esforços axiais ao longo de toda a superfície, o código de cores da Figura 4.11, associado ao sentido do esforço axial nos elementos, foi invertido.

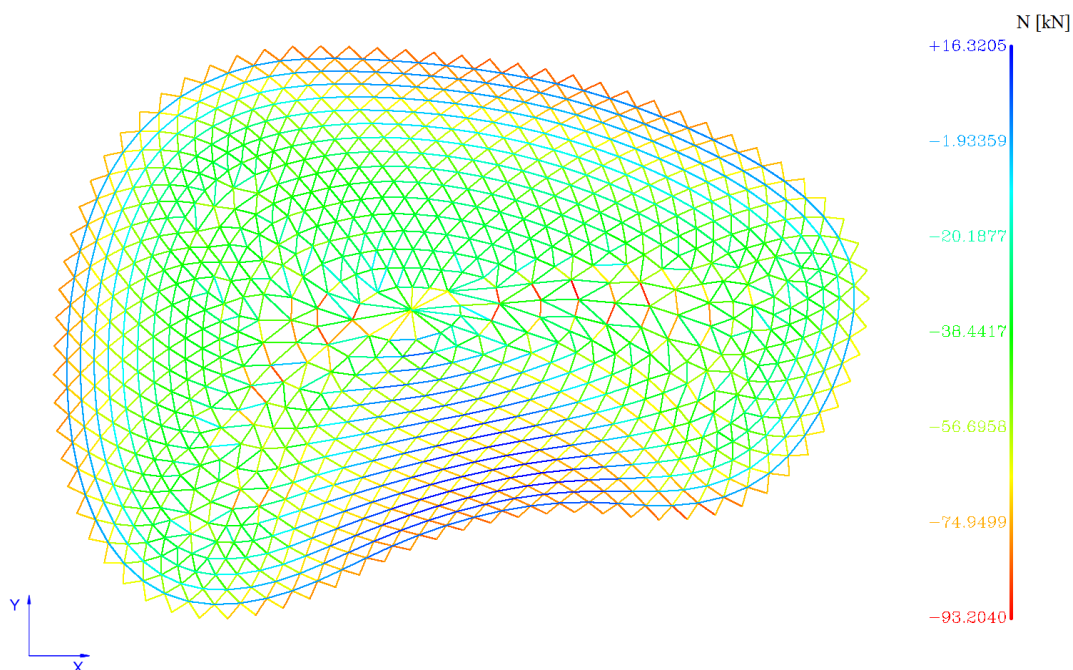


Figura 4.11 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Distribuição de esforços na fase de determinação da forma

Na lei constitutiva não-linear apresentada anteriormente tinha-se verificado que os elementos nos quais se verificaram as tensões máximas coincidem com os da lei constitutiva linear. Neste caso, aliado ao facto de as tensões serem substancialmente diferentes, essa semelhança não se verificou.

Relativamente às tensões máximas, verificou-se um decréscimo considerável na tensão máxima equivalente de compressão, em comparação com os resultados obtidos através da lei constitutiva linear. Comparativamente a esse valor anterior obteve-se uma redução de cerca de 12,374 MPa, correspondendo a uma parcela de aproximadamente 16% deste.

Em contrapartida, o resultado obtido para o valor da tensão máxima equivalente de tração não foi tão positivo. Este, relativamente ao obtido através da lei constitutiva linear, sofreu um aumento de cerca de 1,188 MPa, ou seja, 10,65%. Apesar de se ter verificado este aumento, esta solução não deixa de ser melhor que as anteriores do ponto de vista da sua eficiência estrutural. Uma vez que a resistência do aço é semelhante caso este esteja solicitado a esforços de tração ou de compressão, o aumento das tensões de tração não é prejudicial desde que a este não esteja também associado um aumento do valor máximo absoluto das tensões. Os esforços originários das tensões máximas de compressão e tração, bem como o cálculo das mesmas são apresentados no Quadro 4.10.

Quadro 4.10 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº2 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1			Tensões Máximas Tração - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1		
N	-87,700	kN	N	16,238	kN
M_y	0,071	kN.m	M_y	0,009	kN.m
M_z	0,192	kN.m	M_z	-0,003	kN.m
M	0,205	kN.m	M	0,009	kN.m
M_x	0,011	kN.m	M_x	-0,002	kN.m
$\sigma_{média}$	-58,768	MPa	$\sigma_{média}$	10,881	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-64,839	MPa	$\sigma_{max,tração}$	11,151	MPa
τ_{max}	0,164	MPa	τ_{max}	-0,023	MPa
$\sigma_{eq.}$	-64,840	MPa	$\sigma_{eq.}$	11,151	MPa

4.1.4 Lei Constitutiva Não-Linear nº3

Seguindo o procedimento adotado na exposição das leis constitutivas anteriores, a Lei Constitutiva Não-Linear nº3, descrita pela expressão (4.9), foi utilizada na determinação da forma da estrutura cujas tensões e extensões máximas são apresentadas no Quadro 4.11. O desenvolvimento desta, em comparação com a Lei Constitutiva Linear, é ilustrado pela Figura 4.12.

$$\sigma = a\varepsilon + \sigma_0(1 - e^{-b\varepsilon}) = 48,739 \times (1 - e^{-14 \times \varepsilon}) \quad (4.9)$$

Quadro 4.11 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Tensão e Extensão Máximas

Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Malha A - Casca 25m		
σ_{max}	48,739	MPa
ε_{max}	1,107	-

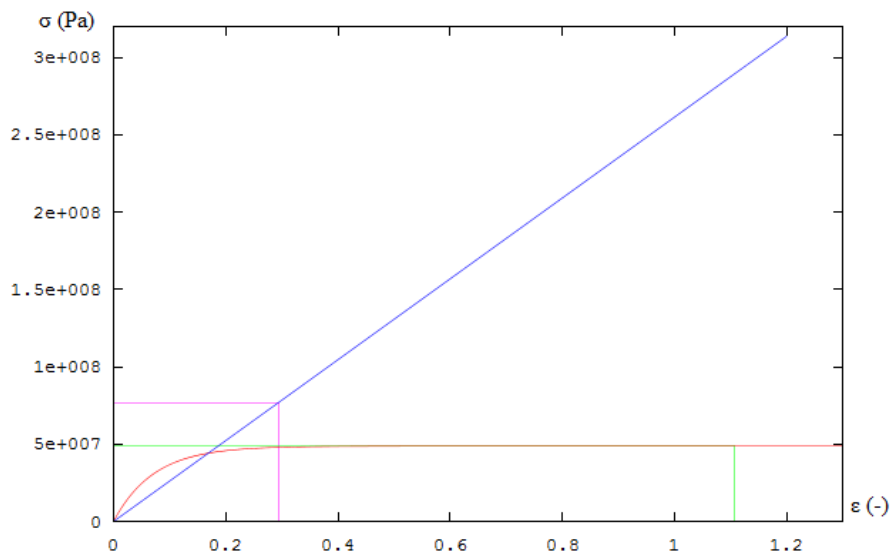


Figura 4.12 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3

O cálculo das tensões máximas na fase de determinação da forma foi mais uma vez feito tendo em conta os valores dos esforços axiais máximos, bem como a área da secção transversal do elemento. Os resultados são apresentados no Quadro 4.12.

Quadro 4.12 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma

Esforços na fase de determinação da forma - Malha A - Casca 25m		
$N_{max,tração}$	72,733	kN
$N_{max,compressão}$	-15,608	kN
$\sigma_{max,tração}$	48,739	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-10,459	MPa

- Análise Estrutural

Ao contrário do que se havia verificado, desta vez, ao aumento do parâmetro b da lei constitutiva está associado não só um aumento do valor da tensão máxima equivalente de tração, como também da de compressão. Este facto torna a solução oriunda desta lei constitutiva menos efetiva que a anterior. Os valores das tensões máximas equivalentes de compressão e de tração são apresentados pelo Quadro 4.13.

Quadro 4.13 - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº3 - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1			Tensões Máximas Tração - Malha A - Casca 25m - Lei Constitutiva Não-Linear nº1		
N	-75,368	kN	N	17,307	kN
M_y	0,053	kN.m	M_y	0,017	kN.m
M_z	0,567	kN.m	M_z	0,010	kN.m
M	0,569	kN.m	M	0,020	kN.m
M_x	-0,025	kN.m	M_x	0,011	kN.m
$\sigma_{média}$	-50,505	MPa	$\sigma_{média}$	11,598	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-67,367	MPa	$\sigma_{max,tração}$	12,182	MPa
τ_{max}	-0,374	MPa	τ_{max}	0,167	MPa
$\sigma_{eq.}$	-67,371	MPa	$\sigma_{eq.}$	12,185	MPa

4.1.5 Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares

Dando seguimento ao processo apresentado anteriormente foram efetuados os cálculos para as restantes leis constitutivas não-lineares. O Quadro 4.14 apresenta um resumo dos resultados obtidos na fase de determinação da forma, enquanto o Quadro 4.15 sumariza os resultados da fase de análise estrutural.

Quadro 4.14 - Malha A - Casca 25m - Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da forma - Resumo dos Resultados

Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 25m - Determinação da Forma							
Lei Não-linear nº	4	5	6	7	8	9	10
b	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	47,384	46,560	45,743	45,268	44,966	44,773	44,633
ϵ_{max} (-)	1,140	1,160	1,344	1,534	1,624	1,690	1,810
$N_{max,tração}$ (kN)	70,711	69,481	68,262	67,556	67,103	66,815	66,606
$N_{max,compressão}$ (kN)	-16,391	-22,682	-32,497	-42,641	-49,788	-49,896	-51,114
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	47,384	46,560	45,742	45,270	44,966	44,773	44,633
$\sigma_{max,compressão}$ (MPa)	-10,983	-15,199	-21,777	-28,574	-33,364	-33,435	-34,252

Quadro 4.15 - Malha A - Casca 25m - Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural - Resumo dos Resultados

Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 25m - Análise Estrutural							
Tensão Equivalente Máxima de Compressão							
Lei Não-Linear nº	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	47,384	46,560	45,743	45,268	44,966	44,773	44,633
<i>N</i> (kN)	-95,800	-91,771	-88,765	-87,063	-86,082	-85,201	-84,650
<i>My</i> (kN.m)	0,050	0,080	0,116	0,145	0,163	-0,165	-0,181
<i>Mz</i> (kN.m)	0,910	1,101	1,342	1,549	1,665	-1,788	-1,910
<i>M</i> (kN.m)	0,912	1,104	1,347	1,555	1,673	1,795	1,919
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,043	-0,047	-0,056	-0,058	-0,065	-0,069	-0,072
$\sigma_{média}$ (MPa)	-64,196	-61,496	-59,482	-58,341	-57,684	-57,094	-56,724
$\sigma_{max,compressão}$ (MPa)	-91,200	-94,188	-99,368	-104,408	-107,251	-110,269	-113,557
τ_{max} (MPa)	-0,633	-0,703	-0,824	-0,863	-0,963	-1,027	-1,062
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	-91,206	-94,196	-99,379	-104,419	-107,264	-110,283	-113,572
Tensão Equivalente Máxima de Tração							
Lei Não-Linear nº	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	47,384	46,560	45,743	45,268	44,966	44,773	44,633
<i>N</i> (kN)	25,051	24,987	27,647	29,452	38,232	42,827	49,504
<i>My</i> (kN.m)	0,024	0,028	0,016	-0,005	-0,011	-0,032	-0,061
<i>Mz</i> (kN.m)	0,011	0,034	-0,003	-0,020	-0,026	-0,045	-0,067
<i>M</i> (kN.m)	0,027	0,044	0,016	0,021	0,028	0,055	0,091
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,006	0,015	-0,010	-0,014	-0,026	-0,036	-0,048
$\sigma_{média}$ (MPa)	16,787	16,744	18,526	19,736	25,620	28,699	33,173
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	17,581	18,049	19,008	20,347	26,441	30,342	35,860
τ_{max} (MPa)	-0,095	0,216	-0,153	-0,203	-0,386	-0,528	-0,714
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	17,581	18,053	19,009	20,350	26,449	30,356	35,881

4.2 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 20m

O *benchmark* apresentado na secção anterior foi realizado também para estruturas com uma altura máxima de 20 metros. O procedimento levado a cabo dispensa apresentações, como tal, a forma e os resultados obtidos utilizando uma lei constitutiva linear são brevemente apresentados na subsecção seguinte, sendo os resultados obtidos através das leis não-lineares apresentados através de um quadro resumo na subsecção 4.2.2.

4.2.1 Lei Constitutiva Linear

A par da lei constitutiva utilizada na estrutura com altura máxima de 25 metros, esta segue a expressão de Hooke, na qual, ao módulo de elasticidade E foi desta vez dado o valor de 493,838 MPa. A partir desta foi gerada a forma cujo aspeto é apresentado pela Figura 4.13.

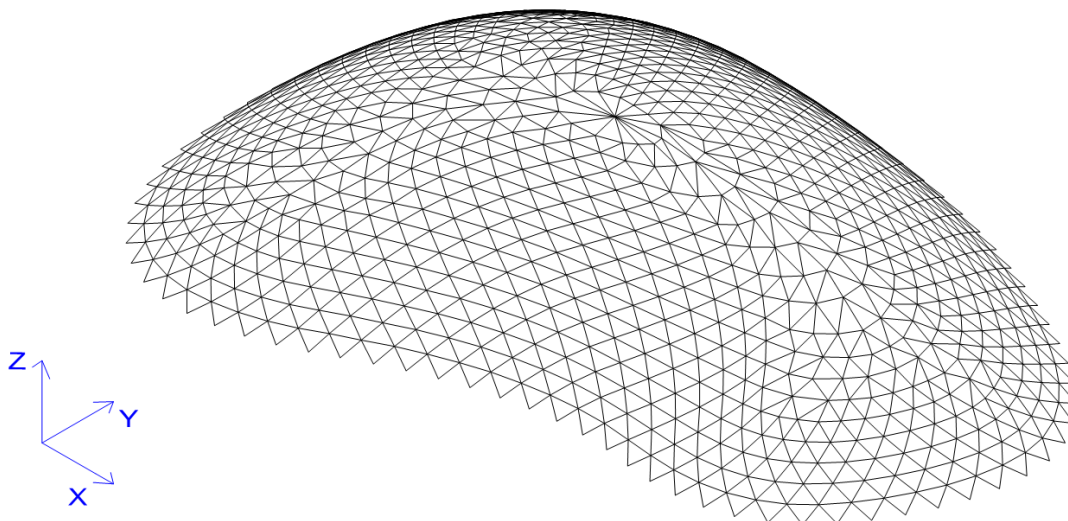


Figura 4.13 - Malha A - Casca 20m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear

A extensão máxima bem como as tensões máximas de tração e compressão obtidas na fase de determinação da forma são sumarizados pelo Quadro 4.15.

Quadro 4.15 - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma

Lei Constitutiva Linear - Malha A - Casca 20m		
E	493,838	MPa
ϵ_{max}	0,154	-
$N_{max,tração}$	148,943	kN
$N_{max,compressão}$	-20,114	kN
$\sigma_{max,tração}$	99,808	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-13,479	MPa

Na fase de análise estrutural foram obtidos os valores máximos das tensões equivalentes de compressão e tração apresentados no Quadro 4.16.

Quadro 4.16 - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear		
N	-148,206	kN
My	0,057	kN.m
Mz	0,010	kN.m
M	0,058	kN.m
Mx	0,006	kN.m
$\sigma_{\text{média}}$	-99,314	MPa
$\sigma_{\text{max,compressão}}$	-101,023	MPa
τ_{max}	0,082	MPa
$\sigma_{\text{eq.}}$	-101,023	MPa

Tensões Máximas Tração - Malha A - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear		
N	20,985	kN
My	0,027	kN.m
Mz	0,056	kN.m
M	0,063	kN.m
Mx	-0,083	kN.m
$\sigma_{\text{média}}$	14,062	MPa
$\sigma_{\text{max,tração}}$	15,914	MPa
τ_{max}	-1,231	MPa
$\sigma_{\text{eq.}}$	16,057	MPa

4.2.2 Leis Constitutivas Não-Lineares

As formas derivadas da utilização das leis constitutivas não-lineares, seguindo o procedimento habitual, conduziram aos resultados presentes no Quadro 4.17 no que diz respeito à fase de determinação da forma. As tensões verificadas na análise estrutural de cada uma destas, são por sua vez apresentadas pelos Quadros 4.18a e 4.18b.

Quadro 4.17 - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados

Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 20m - Determinação da Forma										
Lei Não-linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1011,73	97,754	66,324	61,779	59,093	56,6823	55,382	54,550	53,973	53,557
ϵ_{max} (-)	0,207	0,337	0,838	0,993	1,090	1,181	1,235	1,276	1,310	1,339
$N_{\text{max,tração}}$ (kN)	148,157	132,136	98,975	92,193	88,184	84,587	82,647	81,405	80,543	79,923
$N_{\text{max,compressão}}$ (kN)	-20,388	-22,745	-22,854	-22,746	-23,074	-23,925	-26,419	-30,410	-35,384	-43,263
$\sigma_{\text{max,tração}}$ (MPa)	99,281	88,545	66,323	61,779	59,093	56,682	55,382	54,550	53,972	53,557
$\sigma_{\text{max,compressão}}$ (MPa)	-13,662	-15,241	-15,314	-15,242	-15,462	-16,032	-17,704	-20,378	-23,711	-28,991

Quadro 4.18a - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Compressão

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 20m - Análise Estrutural										
Tensão Equivalente Máxima de Compressão										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1011,73	97,754	66,324	61,779	59,093	56,6823	55,382	54,550	53,973	53,557
<i>N</i> (kN)	-147,494	-133,513	-101,496	-95,800	-91,771	-88,765	-87,063	-86,082	-85,201	-84,650
<i>My</i> (kN.m)	0,062	0,044	0,010	0,050	0,080	0,116	0,145	0,163	-0,165	-0,181
<i>Mz</i> (kN.m)	0,055	0,072	0,651	0,910	1,101	1,342	1,549	1,665	-1,788	-1,910
<i>M</i> (kN.m)	0,082	0,084	0,651	0,912	1,104	1,347	1,555	1,673	1,795	1,919
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,008	-0,018	0,007	-0,043	-0,047	-0,056	-0,058	-0,065	-0,069	-0,072
$\sigma_{média}$ (MPa)	-98,837	-89,468	-68,013	-64,196	-61,496	-59,482	-58,341	-57,684	-57,094	-56,724
$\sigma_{max,com}$ (MPa)	-101,279	-91,961	-87,283	-91,200	-94,188	-99,368	-104,408	-107,251	-110,269	-113,557
τ_{max} (MPa)	-0,112	-0,260	0,100	-0,633	-0,703	-0,824	-0,863	-0,963	-1,027	-1,062
σ_{eq} (MPa)	-101,280	-91,962	-87,284	-91,206	-94,196	-99,379	-104,419	-107,264	-110,283	-113,572

Quadro 4.18b - Malha A - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Tração

Restantes Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha A - Casca 20m - Determinação da Forma										
Tensão Equivalente Máxima de Tração										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1011,73	97,754	66,324	61,779	59,093	56,6823	55,382	54,550	53,973	53,557
<i>N</i> (kN)	18,939	23,418	24,802	25,051	24,987	27,647	29,452	38,232	42,827	49,504
<i>My</i> (kN.m)	-0,014	-0,008	0,026	0,024	0,028	0,016	-0,005	-0,011	-0,032	-0,061
<i>Mz</i> (kN.m)	-0,019	-0,014	0,031	0,011	0,034	-0,003	-0,020	-0,026	-0,045	-0,067
<i>M</i> (kN.m)	0,024	0,015	0,040	0,027	0,044	0,016	0,021	0,028	0,055	0,091
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,002	0,001	0,008	-0,006	0,015	-0,010	-0,014	-0,026	-0,036	-0,048
$\sigma_{média}$ (MPa)	12,691	15,692	16,620	16,787	16,744	18,526	19,736	25,620	28,699	33,173
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	13,404	16,151	17,813	17,581	18,049	19,008	20,347	26,441	30,342	35,860
τ_{max} (MPa)	-0,024	0,012	0,116	-0,095	0,216	-0,153	-0,203	-0,386	-0,528	-0,714
σ_{eq} (MPa)	13,404	16,151	17,814	17,581	18,053	19,009	20,350	26,449	30,356	35,881

4.3 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha A - Casca 15m

O mesmo procedimento foi levado a cabo para a determinação de estruturas com altura máxima de 15 metros erguidas a partir da Malha A. Ao contrário dos casos anteriores, apesar de ter sido possível determinar a forma destas, a sua análise estrutural seguindo o mesmo procedimento não foi possível. O facto de estas estruturas partilharem de um coeficiente de carga crítica α_{crit} cujo valor é menor que a unidade, significa que estas estão sujeitas a uma carga exterior maior que aquela que lhes provocaria instabilidade. Este facto impede o cálculo dos respetivos esforços contabilizando a sua rigidez geométrica. Este assunto é retratado com mais pormenor na Secção 4.7, cujo foco principal é o fenómeno da instabilidade nas estruturas estudadas.

A título ilustrativo, a Figura 4.14 apresenta o aspeto da estrutura com uma altura máxima de 15 metros, determinada a partir da Malha A utilizando uma lei constitutiva linear.

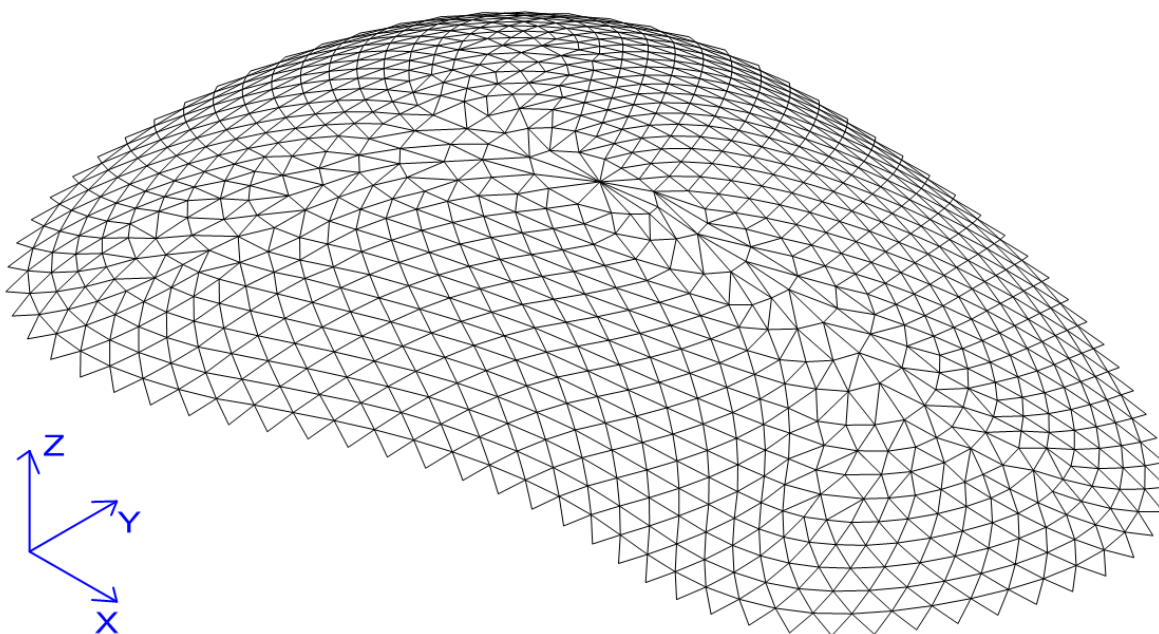


Figura 4.14 - Malha A - Casca 15m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear

4.4 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 25m

Este processo de determinação da forma e análise de estruturas com três alturas distintas geradas a partir da Malha A foi repetido para as mesmas três alturas máximas, desta vez a

partir da Malha B. Uma vez que o procedimento já foi devidamente descrito, daqui em diante são resumidamente apresentados os aspetos das formas determinadas através do uso de leis constitutivas lineares, bem como o cálculo das tensões destas e das formas oriundas das leis não-lineares estudadas.

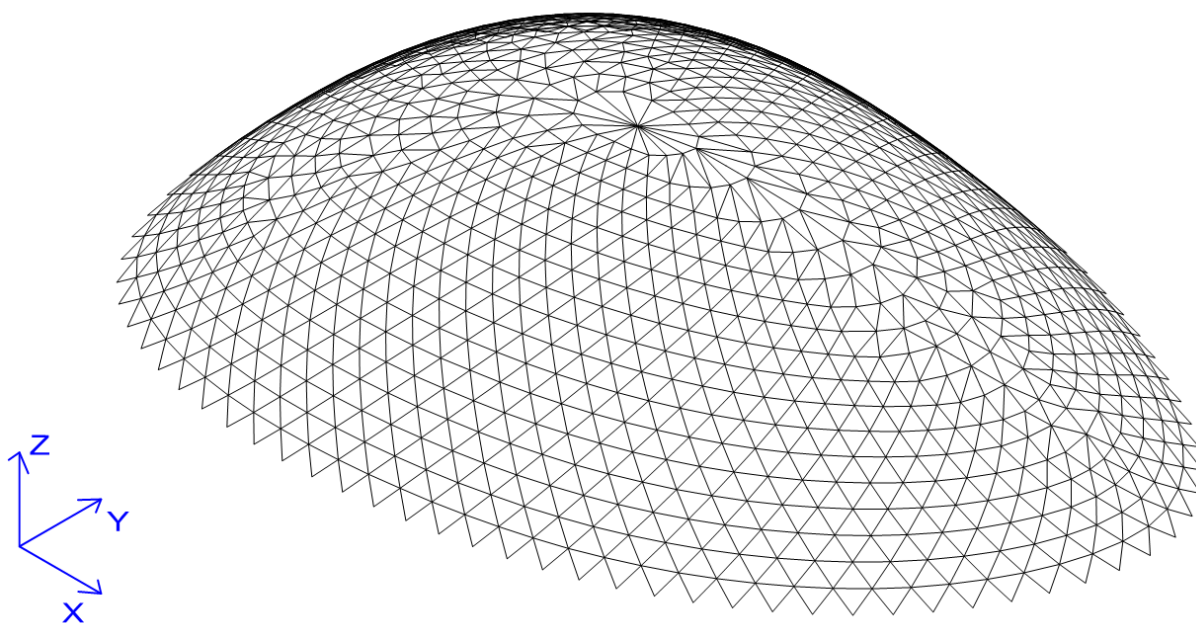


Figura 4.15 - Malha B - Casca 25m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear

Quadro 4.19 - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma

Lei Constitutiva Linear - Malha B - Casca 25m		
E	287,486	MPa
ε_{max}	0,319	-
$N_{max, tracção}$	136,983	kN
$N_{max, compressão}$	-0,307	kN
$\sigma_{max, tracção}$	91,793	MPa
$\sigma_{max, compressão}$	-0,206	MPa

Quadro 4.20 - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 25m - Determinação da Forma										
Lei Não-linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_{θ} (MPa)	597,484	69,092	54,998	53,465	52,494	51,494	50,915	50,562	50,289	50,112
ϵ_{max} (-)	0,331	1,00	1,850	2,024	2,166	2,346	2,463	2,54	2,602	2,638
$N_{max,tração}$ (kN)	136,069	103,012	82,074	79,786	78,337	76,845	75,980	75,454	75,046	74,778
$N_{max,compressão}$ (kN)	-0,341	-1,699	-9,248	-16,218	-24,365	-36,901	-47,283	-50,087	-56,736	-64,912
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	91,180	69,029	54,998	53,465	52,494	51,494	50,915	50,562	50,289	50,109
$\sigma_{max,compressão}$ (MPa)	-0,228	-1,138	-6,197	-10,868	-16,327	-24,728	-31,685	-33,564	-38,019	-43,498

Quadro 4.21 - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
N	-135,305	kN
My	0,149	kN.m
Mz	-0,109	kN.m
M	0,185	kN.m
Mx	0,005	kN.m
$\sigma_{média}$	-90,669	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-96,135	MPa
τ_{max}	0,080	MPa
$\sigma_{eq.}$	-96,135	MPa

Tensões Máximas Tração - Malha B - Casca 25m - Lei Constitutiva Linear		
N	-0,792	kN
My	0,014	kN.m
Mz	0,012	kN.m
M	0,018	kN.m
Mx	-0,003	kN.m
$\sigma_{média}$	-0,530	MPa
$\sigma_{max,tração}$	0,015	MPa
τ_{max}	-0,037	MPa
$\sigma_{eq.}$	0,066	MPa

Quadro 4.22a - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Compressão

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 25m - Análise Estrutural										
Tensão Equivalente Máxima de Compressão										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	597,484	69,092	54,998	53,465	52,494	51,494	50,915	50,562	50,289	50,112
<i>N</i> (kN)	-134,664	-107,077	-86,804	-86,137	-85,370	-83,903	-75,828	-75,107	-74,556	-74,347
<i>My</i> (kN.m)	0,148	-0,068	-0,070	-0,081	-0,082	-0,083	-0,117	-0,130	-0,141	-0,153
<i>Mz</i> (kN.m)	-0,075	-0,319	0,915	1,042	1,035	1,019	-1,341	-1,488	-1,622	-1,753
<i>M</i> (kN.m)	0,166	0,326	0,918	1,045	1,038	1,022	1,346	1,493	1,628	1,760
<i>Mx</i> (kN.m)	0,000	-0,043	-0,046	0,034	0,037	-0,001	-0,020	-0,017	-0,015	-0,029
$\sigma_{média}$ (MPa)	-90,239	-71,753	-58,168	-57,721	-57,207	-56,224	-50,813	-50,330	-49,960	-49,821
$\sigma_{max,com.}$ (MPa)	-95,148	-81,398	-85,354	-88,675	-87,960	-86,492	-90,670	-94,559	-98,182	-101,949
τ_{max} (MPa)	-0,007	-0,631	-0,676	0,510	0,541	-0,021	-0,299	-0,256	-0,228	-0,428
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	-95,148	-81,406	-85,362	-88,679	-87,965	-86,492	-90,671	-94,561	-98,183	-101,952

Quadro 4.22b - Malha B - Casca 25m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Tração

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 25m - Análise Estrutural										
Tensão Equivalente Máxima de Tração										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	597,484	69,092	54,998	53,465	52,494	51,494	50,915	50,562	50,289	50,112
<i>N</i> (kN)	-0,238	4,030	14,741	23,757	31,965	42,632	50,815	53,298	58,714	63,626
<i>My</i> (kN.m)	0,013	-0,006	-0,015	-0,023	-0,027	0,028	0,026	-0,078	-0,088	0,110
<i>Mz</i> (kN.m)	0,014	-0,011	-0,018	-0,017	-0,021	0,013	0,027	-0,075	-0,087	0,144
<i>M</i> (kN.m)	0,019	0,012	0,023	0,029	0,034	0,031	0,038	0,108	0,124	0,182
<i>Mx</i> (kN.m)	0,000	-0,007	-0,013	-0,012	-0,016	-0,021	-0,006	-0,070	-0,080	0,002
$\sigma_{média}$ (MPa)	-0,160	2,700	9,878	15,920	21,420	28,568	34,051	35,715	39,345	42,636
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	0,406	3,059	10,562	16,772	22,422	29,473	35,170	38,917	43,008	48,018
τ_{max} (MPa)	-0,001	-0,107	-0,187	-0,183	-0,240	-0,306	-0,089	-1,033	-1,187	0,027
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	0,407	3,064	10,567	16,775	22,426	29,478	35,170	38,958	43,057	48,018

4.5 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 20m

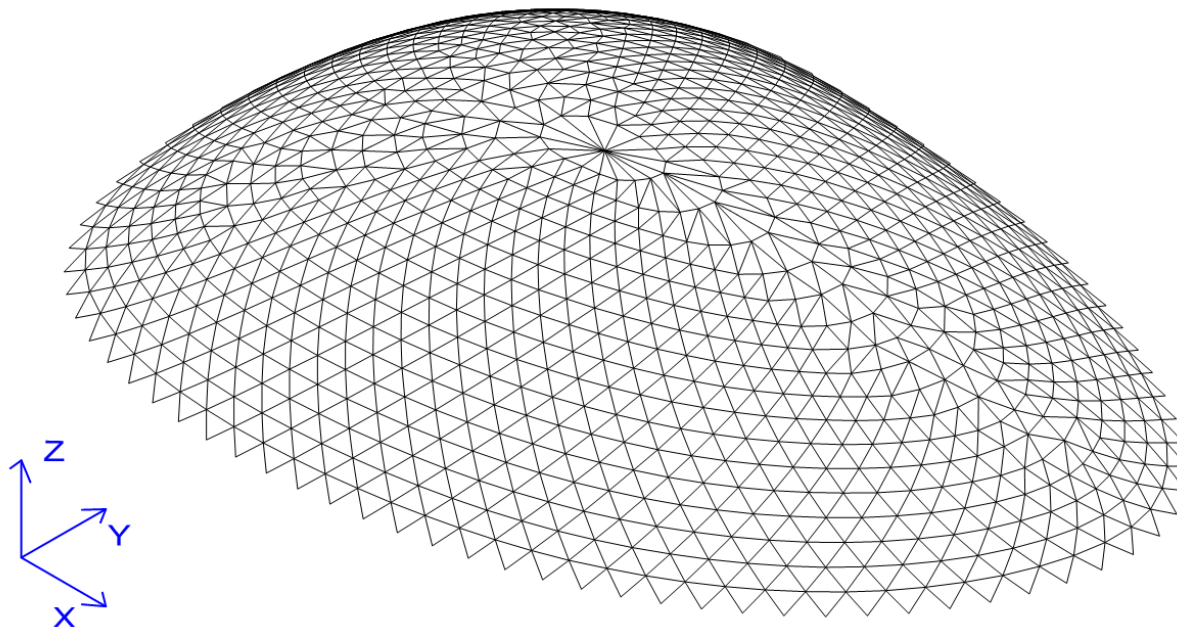


Figura 4.16 - Malha B - Casca 20m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear

Quadro 4.23 - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Esforços e Tensões Máximos na fase de determinação da forma

Lei Constitutiva Linear - Malha B - Casca 20m		
E	536,6	MPa
ϵ_{max}	0,218	-
$N_{max, tração}$	174,517	kN
$N_{max, compressão}$	-0,329	kN
$\sigma_{max, tração}$	116,945	MPa
$\sigma_{max, compressão}$	-0,220	MPa

Quadro 4.24 - Malha B - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Determinação da Forma - Resumo dos Resultados

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 20m - Determinação da Forma										
Lei Não-linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1100,304	107,774	74,654	69,865	67,014	64,37	62,841	61,796	61,042	60,504
ϵ_{max} (-)	0,224	0,42	1,154	1,42	1,63	1,88	2,053	2,183	2,286	2,36
$N_{max,tração}$ (kN)	173,773	152,357	111,406	104,260	100,005	96,059	93,778	92,218	91,093	90,290
$N_{max,compressão}$ (kN)	-0,355	-1,077	-3,250	-5,206	-8,173	-15,154	-25,097	-35,638	-44,573	-55,437
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	116,446	102,095	74,654	69,865	67,014	64,370	62,841	61,796	61,042	60,504
$\sigma_{max,compressão}$ (MPa)	-0,238	-0,721	-2,178	-3,489	-5,477	-10,155	-16,818	-23,881	-29,869	-37,149

Quadro 4.25 - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear - Tensões Máximas de Compressão na fase de Análise Estrutural

Tensões Máximas Compressão - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear		
N	-172,097	kN
My	0,219	kN.m
Mz	-0,093	kN.m
M	0,238	kN.m
Mx	-0,003	kN.m
$\sigma_{média}$	-115,323	MPa
$\sigma_{max,compressão}$	-122,369	MPa
τ_{max}	-0,042	MPa
$\sigma_{eq.}$	-122,369	MPa

Tensões Máximas Tração - Malha B - Casca 20m - Lei Constitutiva Linear		
N	-0,792	kN
My	0,014	kN.m
Mz	0,012	kN.m
M	0,018	kN.m
Mx	-0,003	kN.m
$\sigma_{média}$	-0,530	MPa
$\sigma_{max,tração}$	0,015	MPa
τ_{max}	-0,037	MPa
$\sigma_{eq.}$	0,066	MPa

Quadro 4.26a - Malha B - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Compressão

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 20m - Análise Estrutural										
Tensão Equivalente Máxima de Compressão										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1100,304	107,774	74,654	69,865	67,014	64,37	62,841	61,796	61,042	60,504
<i>N</i> (kN)	-171,889	-154,230	-118,326	-116,991	-114,289	-111,205	-108,771	-107,222	-104,999	-104,284
<i>My</i> (kN.m)	0,223	-0,158	0,056	-0,119	-0,126	-0,135	-0,135	-0,142	-0,133	-0,135
<i>Mz</i> (kN.m)	-0,002	-0,190	1,821	2,060	2,098	2,184	2,121	2,217	2,044	2,083
<i>M</i> (kN.m)	0,223	0,247	1,822	2,064	2,102	2,188	2,126	2,222	2,049	2,088
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,005	-0,039	-0,024	-0,029	0,054	0,082	0,087	0,102	0,066	0,024
$\sigma_{média}$ (MPa)	-115,184	-103,351	-79,291	-78,397	-76,586	-74,519	-72,888	-71,850	-70,361	-69,881
$\sigma_{max,com.}$ (MPa)	-121,777	-110,659	-133,246	-139,524	-138,834	-139,327	-135,849	-137,659	-131,044	-131,718
τ_{max} (MPa)	-0,080	-0,580	-0,360	-0,435	0,804	1,209	1,291	1,505	0,973	0,358
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	-121,778	-110,664	-133,248	-139,526	-138,841	-139,342	-135,867	-137,684	-131,054	-131,720

Quadro 4.26b - Malha B - Casca 20m - Leis Constitutivas Não-Lineares - Análise Estrutural -
Tensão Equivalente Máxima de Tração

Leis Constitutivas Não-Lineares - Malha B - Casca 20m - Análise Estrutural										
Tensão Equivalente Máxima de Tração										
Lei Não-Linear nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>b</i>	0,5	7	14	17	20	25	30	35	40	45
σ_0 (MPa)	1100,304	107,774	74,654	69,865	67,014	64,37	62,841	61,796	61,042	60,504
<i>N</i> (kN)	-0,664	2,383	-6,176	-4,844	19,364	27,579	39,557	51,303	58,320	65,521
<i>My</i> (kN.m)	0,016	-0,011	0,064	0,067	-0,020	-0,012	-0,011	-0,008	-0,027	-0,043
<i>Mz</i> (kN.m)	0,021	-0,009	0,410	0,499	-0,028	-0,032	-0,025	-0,032	0,002	-0,027
<i>M</i> (kN.m)	0,026	0,014	0,415	0,504	0,034	0,034	0,028	0,033	0,027	0,051
<i>Mx</i> (kN.m)	-0,004	0,005	0,137	0,145	0,007	-0,023	-0,028	-0,029	-0,032	-0,056
$\sigma_{média}$ (MPa)	-0,445	1,597	-4,139	-3,246	12,976	18,481	26,507	34,379	39,081	43,906
$\sigma_{max,tração}$ (MPa)	0,336	2,021	8,143	11,683	13,986	19,487	27,326	35,356	39,872	45,403
τ_{max} (MPa)	-0,056	0,070	2,029	2,141	0,105	-0,342	-0,417	-0,432	-0,475	-0,823
$\sigma_{eq.}$ (MPa)	0,349	2,025	8,869	12,257	13,987	19,496	27,336	35,364	39,880	45,425

4.6 Determinação da Forma e Análise de Tensões - Malha B - Casca 15m

Assim como no caso da Malha A, para uma altura máxima de 15 metros, o cálculo dos esforços tendo em conta a sua rigidez geométrica não foi possível devido a problemas de instabilidade. Ainda assim, a determinação da sua forma de equilíbrio foi naturalmente possível, sendo retratada pela Figura 4.17.

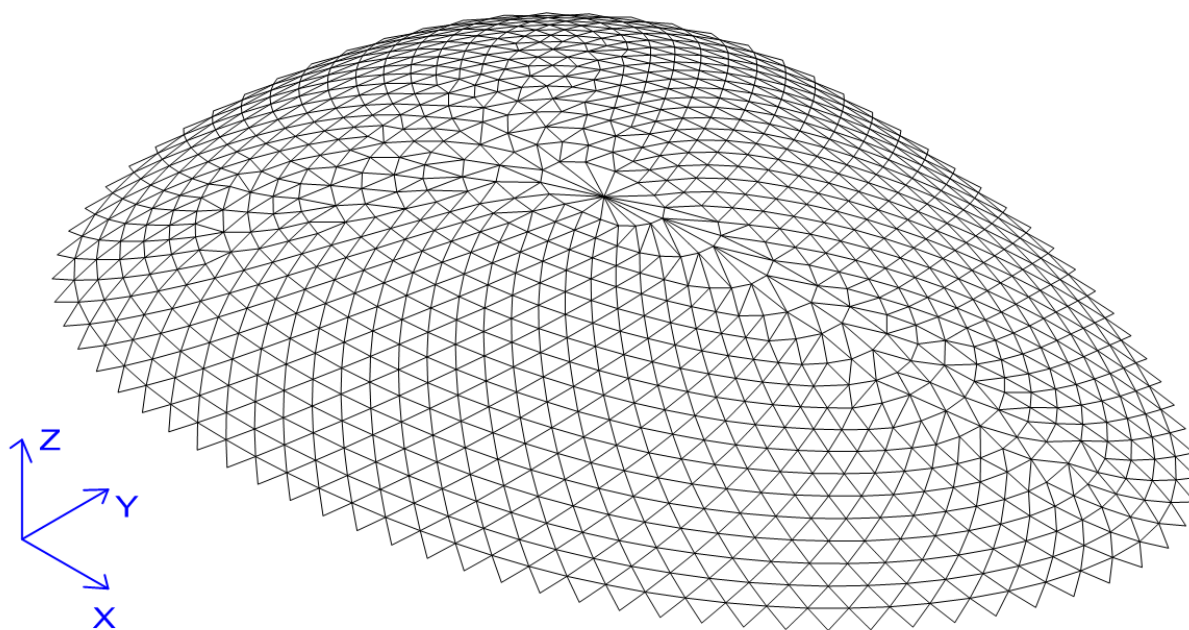


Figura 4.17 - Malha B - Casca 15m - Perspetiva da estrutura gerada através da lei constitutiva linear

4.7 Instabilidade - Coeficiente de Carga Crítica

Em estruturas com muitos graus de indeterminação cinemática, o cálculo da carga crítica global é normalmente levado a cabo através da resolução do problema de valores próprios simétrico generalizado.

De uma maneira geral pretende-se calcular o fator λ pelo qual é necessário multiplicar a carga atuante, para que o determinante da matriz de rigidez se anule. Partindo do princípio que a rigidez material é a componente da matriz que depende da rigidez dos elementos deformáveis da estrutura e que a rigidez geométrica traduz a influência que a alteração da geometria da estrutura e consequente alteração nas direções de atuação dos esforços instalados, ao tratar-se de um material com comportamento elástico linear, se os deslocamentos forem infinitesimais

e se o deslocamento de um ponto qualquer da estrutura for função linear dos deslocamentos nas coordenadas cinemáticas, a rigidez material é constante e a geométrica é proporcional à carga (Dias da Silva, 2004). Deste modo, o problema da instabilidade pode ser formulado através da expressão (4.10), na qual, $[dD]$ é o vetor que contém as n incógnitas cinemáticas, e $[0]$ é um vetor com n elementos nulos.

$$\begin{aligned} [K][dD] = [0] &\rightarrow ([K_m] + \lambda[K_g])[dD] = [0] \\ &\rightarrow [K_m][dD] = -\lambda[K_g][dD] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esta expressão pode ser colocada na forma correspondente ao problema algébrico de valores próprios simétrico generalizado de acordo com (4.11), em que $[A]$ e $[B]$ são simétricas e $[B]$ é positiva definida.

$$[A][z] = \lambda'[B][z] \quad (4.11)$$

Deste modo, associando $[A]$ à matriz de rigidez geométrica $[K_g]$ e $[B]$ à matriz de rigidez material $[K_m]$, ao substituírem-se na expressão anterior dão finalmente origem à expressão (4.12) em que os vetores próprios representam os modos de instabilidade (Dias da Silva, 2004).

$$\left\{ \begin{array}{l} [A] = [K_g] \\ [B] = [K_m] \\ [z] = [dD] \\ \lambda' = -\frac{1}{\lambda} \end{array} \right.$$

$$[K_g][dD] = \lambda'[K_m][dD] \quad (4.12)$$

Através deste método foram calculados os coeficientes de carga crítica relativos ao primeiro modo de instabilidade (daqui e diante chamado α_{crit}) para todas as estruturas geradas através das 11 leis constitutivas estudadas, para cada uma das três alturas máximas (25, 20 e 15 metros) a partir da Malha A e da Malha B. Os resultados obtidos são apresentados pelos Quadros 4.27a e 4.27b.

A ferramenta computacional utilizada é descrita na referência (Dias da Silva, 2007).

Quadro 4.27a - Coeficiente Carga Crítica - Malha A - Análise Estrutural

1º Modo de Instabilidade - Coeficiente Carga Crítica - Malha A - Análise Estrutural											
Malha A - Altura Máxima	Lei C. Linear	Lei C. N.L. nº1	Lei C. N.L. nº2	Lei C. N.L. nº3	Lei C. N.L. nº4	Lei C. N.L. nº5	Lei C. N.L. nº6	Lei C. N.L. nº7	Lei C. N.L. nº8	Lei C. N.L. nº9	Lei C. N.L. nº10
25m	1,239	1,249	1,377	1,458	1,461	1,455	1,440	1,428	1,410	1,409	1,399
20m	1,007	1,015	1,105	1,199	1,232	1,258	1,287	1,306	1,318	1,328	1,334
15m	0,708	0,712	0,752	0,797	0,817	0,837	0,869	0,895	0,915	0,928	0,939

Quadro 4.27b - Coeficiente Carga Crítica - Malha B - Análise Estrutural

1º Modo de Instabilidade - Coeficiente Carga Crítica - Malha B - Análise Estrutural											
Malha B - Altura Máxima	Lei C. Linear	Lei C. N.L. nº1	Lei C. N.L. nº2	Lei C. N.L. nº3	Lei C. N.L. nº4	Lei C. N.L. nº5	Lei C. N.L. nº6	Lei C. N.L. nº7	Lei C. N.L. nº8	Lei C. N.L. nº9	Lei C. N.L. nº10
25m	1,289	1,292	1,347	1,375	1,37	1,365	1,357	1,347	1,337	1,333	1,332
20m	1,1	1,102	1,139	1,181	1,197	1,21	1,225	1,237	1,249	1,258	1,267
15m	0,811	0,813	0,83	0,849	0,858	0,867	0,879	0,89	0,9	0,91	0,918

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Após a determinação da forma e da análise estrutural de um total de 66 estruturas foram analisados os resultados e apuradas as soluções mais eficientes do ponto de vista da uniformização de tensões e do seu coeficiente de carga crítica correspondente ao primeiro modo de instabilidade.

Este capítulo está dividido em seis secções, cada uma destas correspondente às estruturas determinadas para as três alturas máximas (25, 20 e 15 metros), provenientes das duas diferentes malhas iniciais (Malha A e Malha B).

5.1 Malha A - Casca 25m

- Tensões Máximas

A Figura 5.1 compara os resultados da análise de estruturas com uma altura máxima de 25 metros cuja forma foi determinada a partir da Malha A. Nesta estão representados os valores máximos da tensão equivalente de Von Mises correspondentes a cada uma das 11 estruturas geradas através da utilização das leis constitutivas estudadas. Às abcissas correspondem os valores do parâmetro b utilizado em cada uma das leis constitutivas não-lineares, enquanto as ordenadas representam os valores máximos da tensão equivalente, considerando a convenção habitual, valores positivos para tensões de tração e consequentemente valores negativos para tensões de compressão. A fim de facilitar a comparação com os resultados da lei constitutiva linear, os valores máximos das tensões equivalentes verificados na análise da estrutura proveniente desta são representados pelas linhas horizontais de cor vermelha.

Através da análise da referida figura facilmente se conclui que nem todas as leis constitutivas estudadas apresentam melhoras no que diz respeito às tensões máximas. Tal como se havia verificado no Capítulo 4, utilizando uma lei constitutiva não-linear assumindo um valor de 0,5 para o parâmetro b obtêm-se resultados muito semelhantes aos obtidos através da lei constitutiva linear. Aumentando o valor do mesmo parâmetro b , obtêm-se significativas melhoras de resultados no que diz respeito ao valor máximo absoluto da tensão equivalente, obtendo-se o valor mínimo desta na solução correspondente à Lei Constitutiva Não-Linear nº2 ($b=7$). Essas melhoras vão-se dissipando progressivamente à medida que se aumente o valor de b , passando a apresentar piores (relativamente à lei constitutiva linear) a partir da Lei Constitutiva nº 7 ($b=30$).

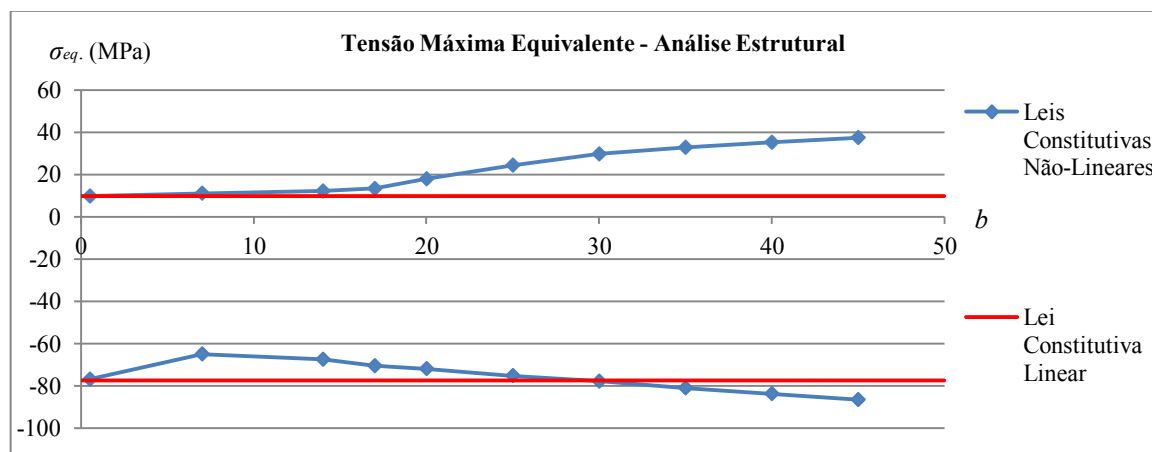


Figura 5.1 - Tensão Máxima Equivalente - Malha A - Casca 25 metros

Deste modo conclui-se que relativamente ao valor absoluto máximo da tensão equivalente obtido através da lei constitutiva linear consegue-se uma redução significativa de sensivelmente 12,374 MPa, ou seja, 16,026%.

A Figura 5.2 apresenta a comparação entre os valores das tensões máximas nas fases de determinação da forma e análise estrutural, invertendo a convenção de sinais nas tensões correspondentes à fase de determinação da forma em virtude de facilitar a comparação. Nesta constata-se que os valores da tensão de compressão, apesar de apresentarem valores muito próximos para a Lei Constitutiva nº1 ($b=0,5$), à medida que o valor do mesmo parâmetro b evolui, estas divergem progressivamente. Esta divergência é justificada pelo facto de o valor dos esforços de flexão aumentar em conjunto com b . Isto é, ao parâmetro b está diretamente associado o desenvolvimento da parcela exponencial das leis constitutivas não lineares. Quanto menor for este valor, mais repentino (em termos de extensões) é o desenvolvimento desta e menor é o valor da tensão de cedência σ_0 (para o mesmo valor de altura máxima da estrutura). Desta forma, associando um aumento da extensão máxima na fase de determinação da forma ao aumento do valor do parâmetro b das leis constitutivas não-lineares, o aumento do valor dos esforços de flexão é justificado pelo conceito básico do aparecimento de esforços de flexão residuais em formas de equilíbrio. Ou seja, seguindo a justificação previamente apresentada no âmbito do manifestação de esforços de flexão nestas estruturas, uma vez que o valor destes é condicionado pela relação entre as rigidezes axial e de flexão dos elementos, ao serem atingidas grandes extensões na fase de determinação da forma, e portanto formas de estruturas com elementos de grande comprimento, os momentos flectores provenientes da compatibilização de deslocamentos assumem maiores valores. As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam os valores máximos da extensão na fase de determinação da forma e os valores dos momentos flectores no elemento sujeito ao valor máximo da tensão equivalente na fase de análise estrutural, respetivamente.

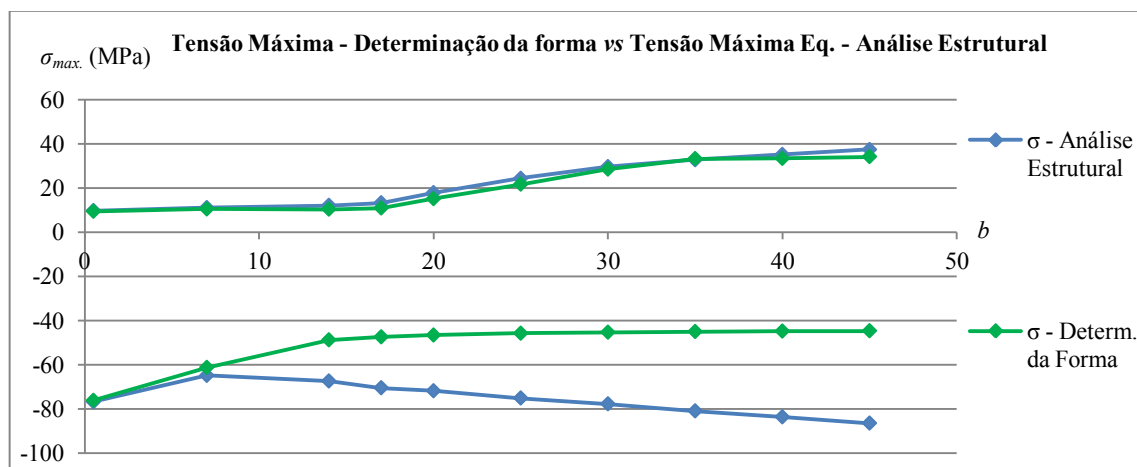


Figura 5.2 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros

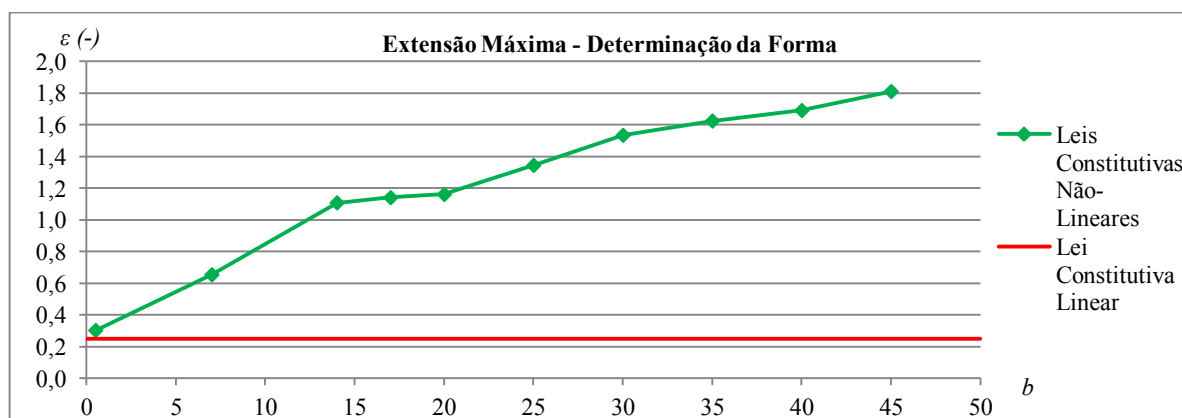


Figura 5.3 - Extensão Máxima na fase de Determinação da Forma - Malha A - Casca 25 metros

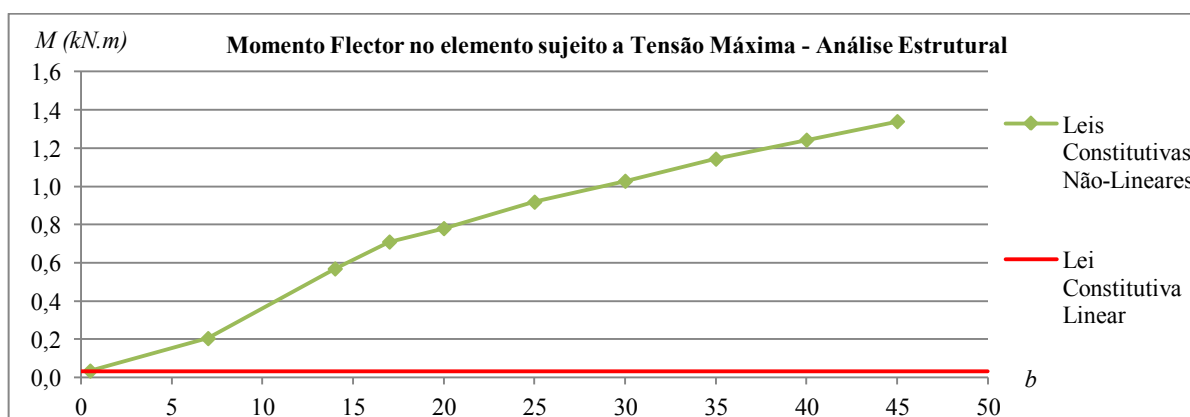


Figura 5.4 - Momento Flector no elemento sujeito a Tensão Máxima - Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros

- Coeficiente de Carga Crítica

Relativamente ao 1º Modo de Instabilidade, ao contrário da análise das tensões máximas, as leis constitutivas não-lineares estudadas trazem sempre benefícios em relação à lei constitutiva linear. Como se havia verificado, as soluções provenientes da utilização de leis constitutivas não-lineares perdem performance em termos de tensões máximas à medida que os valores dos esforços de flexão aumentam. No caso da instabilidade, uma vez que esta está sobretudo relacionada com a distribuição de esforços axiais nos elementos, a solução associada à lei constitutiva linear é a que peca mais nesse aspeto, sendo por isso a menos efetiva. Neste aspeto a solução que se mostrou mais efetiva foi a solução associada à Lei Constitutiva Não-Linear nº4 ($b=17$). Nesta solução obteve-se um coeficiente α_{crit} com o valor de 1,461, enquanto a solução gerada através da lei constitutiva linear apresenta um valor de 1,239, ou seja, através da utilização de leis não-lineares conseguiu-se um aumento de sensivelmente 15,22% do coeficiente de carga critica, relativamente à solução associada à lei constitutiva linear. Estes resultados são apresentados pela Figura 5.5.

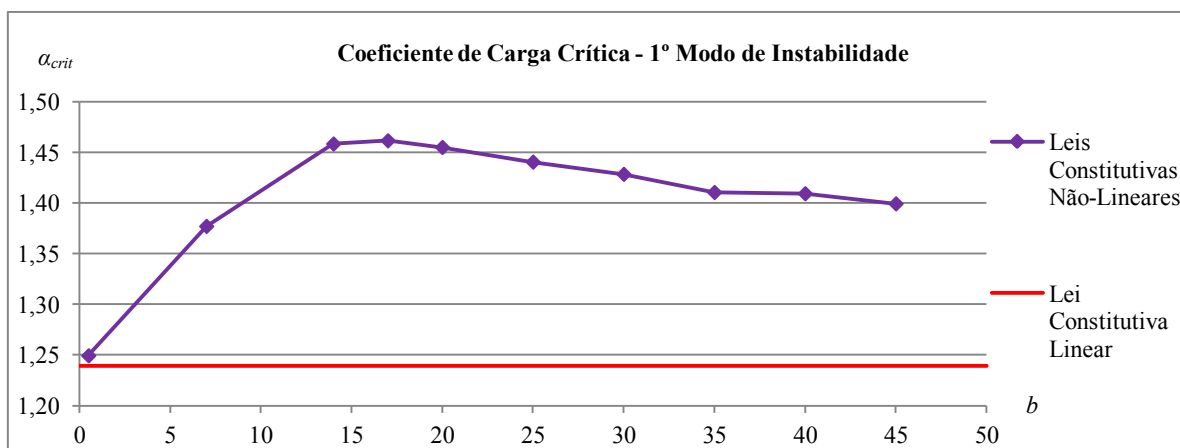


Figura 5.5 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 25 metros

5.2 Malha A - Casca 20m

- Tensões Máximas

Os valores máximos da tensão equivalente nas estruturas com altura máxima de 20 metros seguem a mesma tendência do caso anterior na medida em que são mais efetivos que os valores correspondentes à solução determinada a partir da lei constitutiva linear, apenas para determinados parâmetros das leis constitutivas não-lineares. Desta vez, provando que estes parâmetros não são estacionários, a solução mais competente no que diz respeito às tensões

máximas trata-se da estrutura gerada a partir da Lei Constitutiva Não-Linear nº3 ($b=14$). Comparativamente à solução oriunda da lei linear, em termos de valor máximo absoluto da tensão máxima equivalente, esta solução apresenta uma redução de sensivelmente 13,740 MPa, correspondentes a uma parcela de 13,60%. Os valores máximos das tensões equivalentes são sumarizados pela Figura 5.6.

Relativamente à comparação com as tensões na fase de determinação da forma, assim como no caso anterior, as tensões de compressão começam a divergir à medida que o parâmetro b da lei não-linear aumenta, devido ao conseqüente aumento dos esforços de flexão. Esta comparação é exposta pela Figura 5.7.

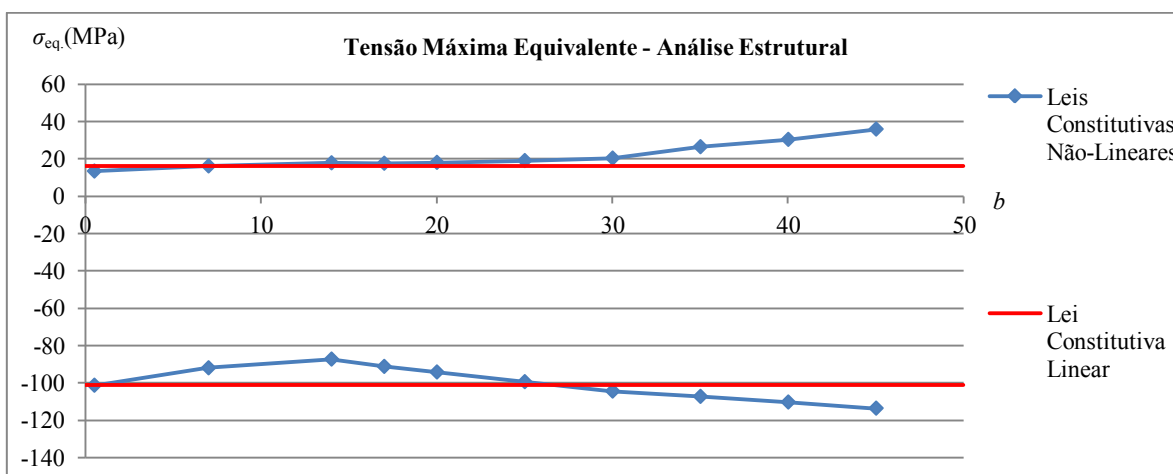


Figura 5.6 - Tensão Máxima Equivalente - Malha A - Casca 20 metros

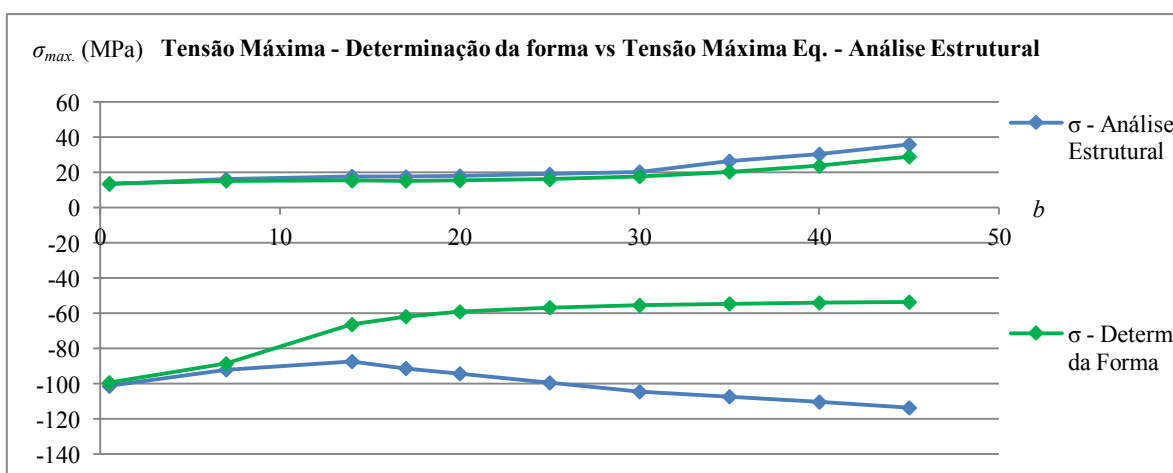


Figura 5.7 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha A - Casca 20 metros

- Coeficiente de Carga Crítica

Nas estruturas com altura máxima de 20 metros geradas a partir da Malha A, ao contrário das estruturas com altura máxima de 25 metros (apresentadas anteriormente), o coeficiente de carga crítica apresenta melhoras à medida que o valor do parâmetro b das leis constitutivas não-lineares aumenta. O facto de a evolução destes valores tenderem a estabilizar leva a crer que esta apresenta uma tendência semelhante à das estruturas de 25 metros, em que é atingido um valor máximo seguido de um decréscimo relativamente suave. No entanto, uma vez que não foram estudadas leis constitutivas com valores do parâmetro b além de 45, essa suspeita não se pôde confirmar. Estes valores, apresentados pela Figura 5.8, são no geral mais baixos que aqueles obtidos na análise das estruturas de 25 metros geradas a partir da mesma malha, pelo facto de a sua altura máxima ser menor. Este facto para além de implicar que estas estejam sujeitas a maiores níveis de tensão, também faz com que a curvatura destas não seja tão acentuada, resultando naturalmente num menor aproveitamento dos benefícios associados à própria utilização de dupla curvatura.

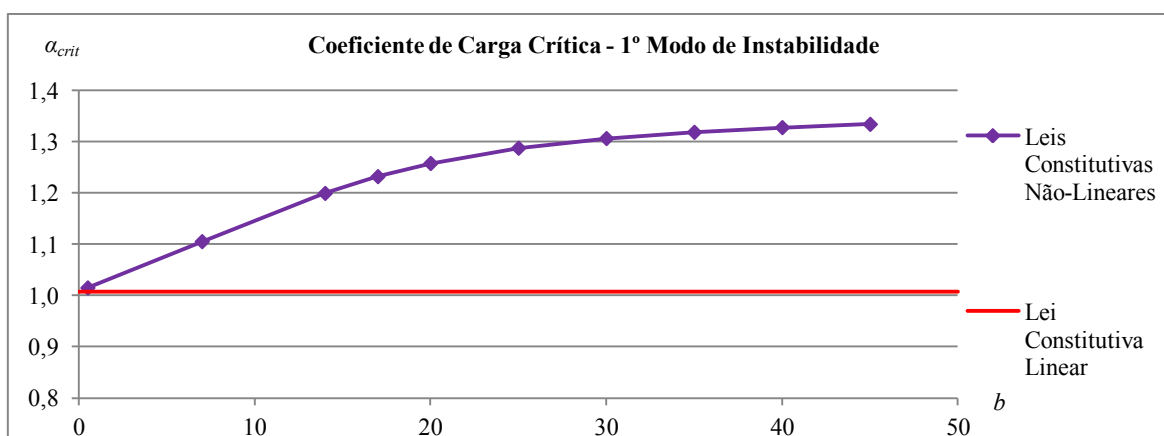


Figura 5.8 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 20 metros

5.3 Malha A - Casca 15m

Tal como havia sido descrito anteriormente, o cálculo das tensões (contabilizando a rigidez geométrica) das estruturas com altura máxima de 15 metros geradas a partir da Malha A não foi possível devido ao facto de estas apresentarem coeficientes de carga crítica com valores inferiores à unidade. A falta de efetividade relativamente aos benefícios da dupla curvatura mencionados na secção anterior assumem neste caso consequências ainda mais flagrantes uma vez que a altura máxima das estruturas é ainda menor (sensivelmente um décimo do comprimento do maior vão da estrutura). A tendência dos resultados obtidos apresentada pela

Figura 5.9 é semelhante ao caso anterior na medida em que se verificam melhoras associadas a um aumento do parâmetro b das leis não-lineares, com a particularidade de esta evolução, ao contrário do caso anterior, ser aproximadamente constante.

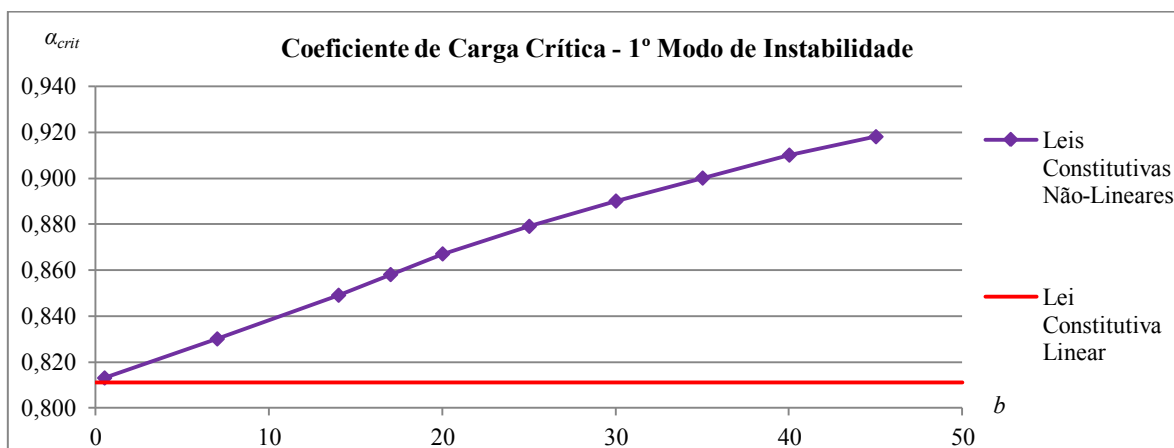


Figura 5.9 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha A - Casca 15 metros

5.4 Malha B - Casca 25m

- Tensões Máximas

Os valores da tensão máxima equivalente obtidos na análise de estruturas com altura máxima de 25 metros determinadas a partir da Malha B, apresentam uma tendência semelhante aos valores obtidos para estruturas determinadas a partir da Malha A. Em termos do valor máximo absoluto da tensão volta-se a constatar que a utilização de leis constitutivas não-lineares apresenta melhorias quando comparada com a utilização da lei linear, desde que nestas se utilizem parâmetros dentro de um determinado intervalo. A solução cujos valores de tensões máximas se revelaram mais efetivos voltou a ser a solução determinada através da Lei Constitutiva Não-Linear 2 ($b=7$). Nesta solução obteve-se uma tensão máxima cujo valor absoluto é de 81,406 MPa. Quando comparado com o valor obtido na solução determinada a partir de lei constitutiva linear (96,135 MPa), esta apresenta um ganho de sensivelmente 15,32%. Os valores máximos da tensão equivalente de cada uma das soluções para uma altura máxima de 25 metros determinada a partir da Malha B são apresentados na Figura 5.10.

No que diz respeito à comparação das tensões máximas nas fases de determinação da forma e de análise estrutural, verificaram-se semelhanças na divergência entre as tensões de compressão verificadas nas duas fases. A justificação para este facto é a mesma, uma vez que

se verificou que ao aumento desta diferença está diretamente associado um aumento do valor máximo do momento fletor. Esta comparação é exposta pela Figura 5.11.

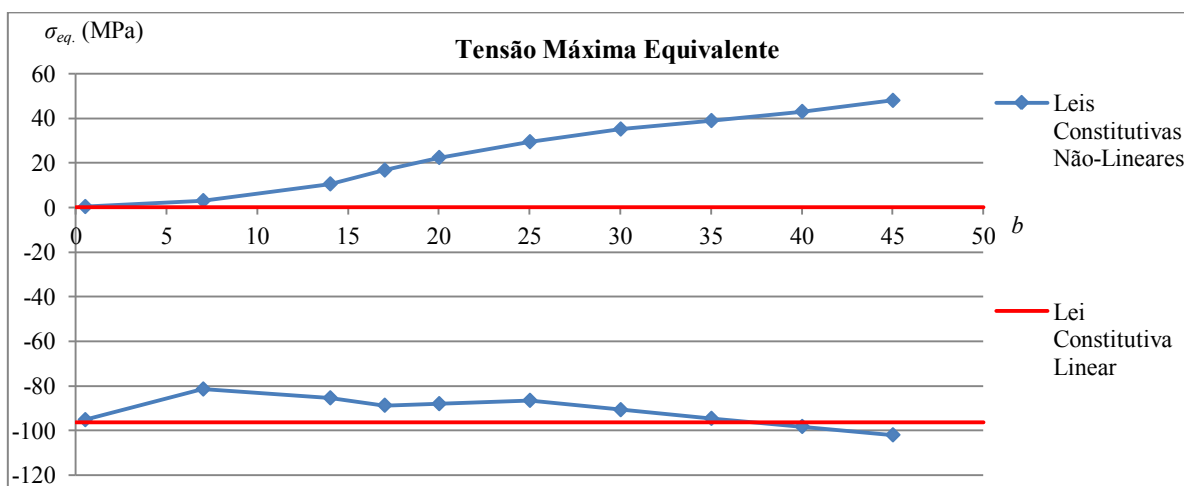


Figura 5.10 - Tensão Máxima Equivalente - Malha B - Casca 25 metros

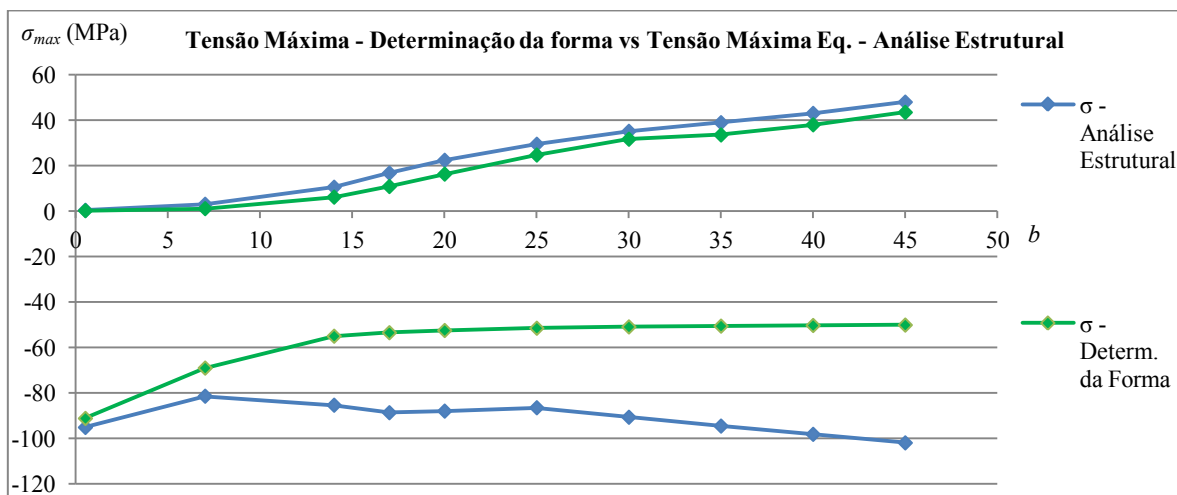


Figura 5.11 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha B - Casca 25 metros

- Coeficiente de Carga Crítica

A geometria da Malha B foi concebida em função dos resultados obtidos relativamente ao primeiro modo de instabilidade das estruturas geradas a partir da Malha A. Uma vez que este modo de instabilidade (independentemente da altura máxima da estrutura gerada pela Malha A) se verifica sempre na zona onde esta apresenta uma ligeira reentrância, pensou-se que a

Malha B, ao apresentar um contorno mais regular nomeadamente nessa mesma zona, traria benefícios consideráveis no que diz respeito à carga de instabilidade. No entanto, a configuração geométrica da Malha B, apesar de apresentar uma geometria mais regular em relação à Malha A, apresenta consequentemente maiores dimensões segundo uma das direções. Ao aumentar o seu vão, as estruturas oriundas desta malha estão naturalmente sujeitas a maiores esforços, facto que torna ilegítima a comparação com as estruturas geradas pela Malha A. Através da análise estrutural das estruturas geradas pela Malha B, viria a confirmar-se que o primeiro modo de instabilidade não se verifica na zona identificada como problemática nas estruturas geradas pela Malha A, mas sim do lado oposto, na direção cuja dimensão foi aumentada. Os resultados obtidos são apresentados pela Figura 5.9. A tendência destes é semelhante à obtida para as estruturas com altura máxima de 25 metros geradas a partir da Malha A, apresentando algumas diferenças, justificadas naturalmente pela geometria do contorno inicial.

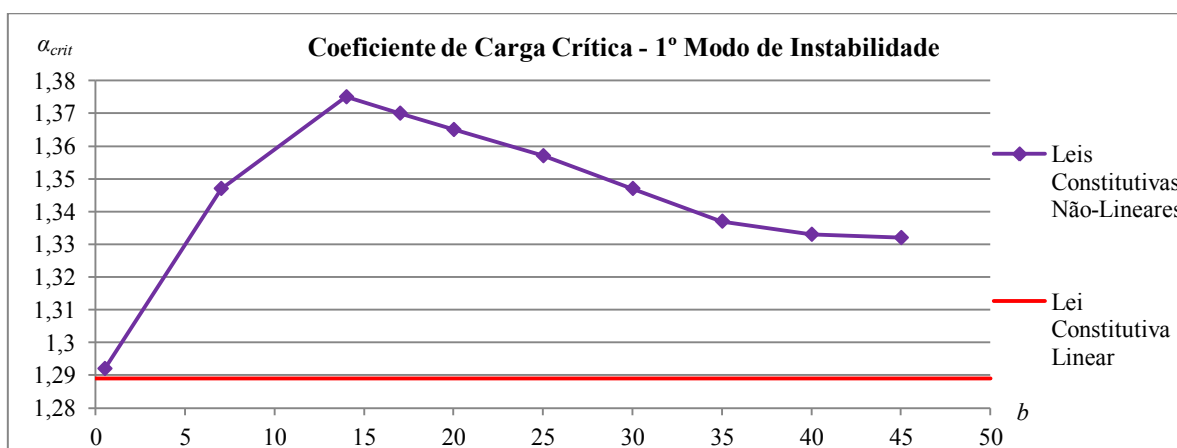


Figura 5.9 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha B - Casca 25 metros

5.5 Malha B - Casca 20m

- Tensões Máximas

As tensões máximas verificadas nas estruturas com altura máxima de 20 metros geradas a partir da Malha B apresentam uma particularidade em relação aos casos anteriormente expostos. Entre as Leis Constitutivas Não-Lineares nº2 e nº3 verifica-se um aumento brusco dos valores máximos dos esforços de flexão, fazendo com que desta em diante (Lei Constitutiva Linear nº3) se verifiquem valores máximos absolutos de tensão maiores que os verificados na solução gerada pela Lei Constitutiva Linear. No entanto este facto não implica

que não se tenham obtido melhoras em relação à Lei Constitutiva Linear. A Lei Constitutiva Não-Linear nº2 foi mais uma vez aquela cuja solução apresenta valores mais favoráveis do ponto de vista do valor máximo absoluto de tensões. Apresentando uma tensão máxima absoluta de 110,664 MPa, esta consegue uma redução de sensivelmente 9,57% em relação à solução gerada pela Lei Constitutiva Linear (122,370 MPa). Estes valores são apresentados pela Figura 5.13.

A Figura 5.14 compara as tensões nas fases de determinação da forma e de análise estrutural. Esta evidencia a diferença brusca entre valores máximos a partir da Lei Constitutiva Não-Linear nº3 ($b=14$), causada pelo aumento dos esforços de flexão mencionado no parágrafo anterior.

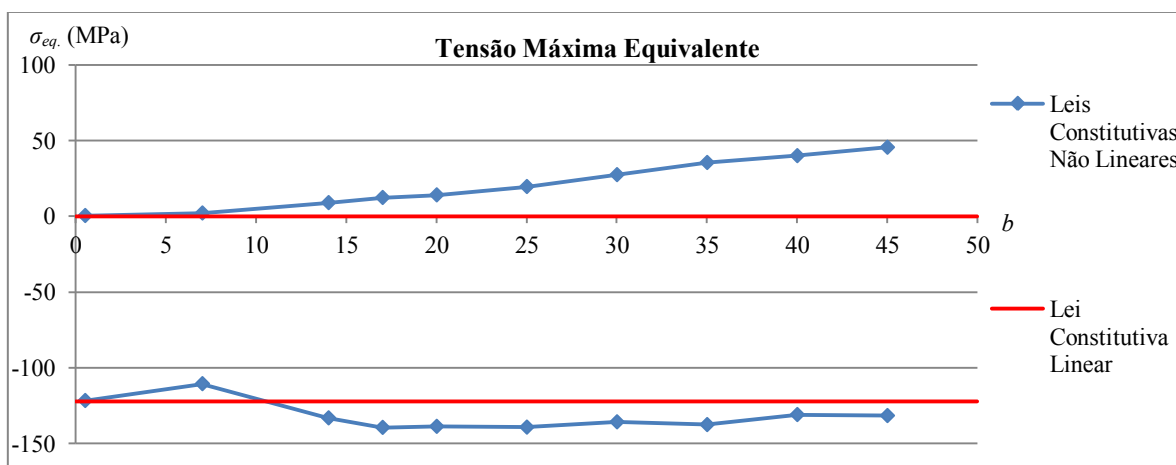


Figura 5.13 - Tensão Máxima Equivalente - Malha B - Casca 20 metros

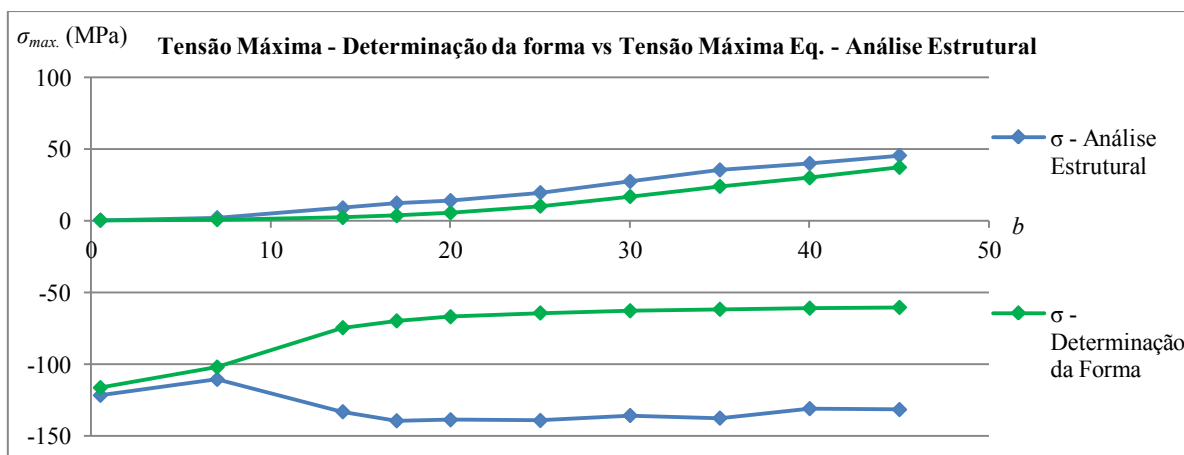


Figura 5.14 - Tensão Máxima na fase de Determinação da Forma vs Tensão Equivalente Máxima na fase de Análise Estrutural - Malha B - Casca 20 metros

- Coeficiente de Carga Crítica

Relativamente aos resultados obtidos, o coeficiente de carga crítica das estruturas com altura máxima de 20 metros geradas a partir da Malha B não se verificam grandes diferenças em relação aos resultados obtidos para estruturas com a mesma altura máxima geradas a partir da Malha A. Verificam-se no geral melhorias com o aumento do parâmetro b , mais uma vez atenuadas a partir de determinado valor deste parâmetro. A Figura 5.15 sumariza os resultados obtidos.

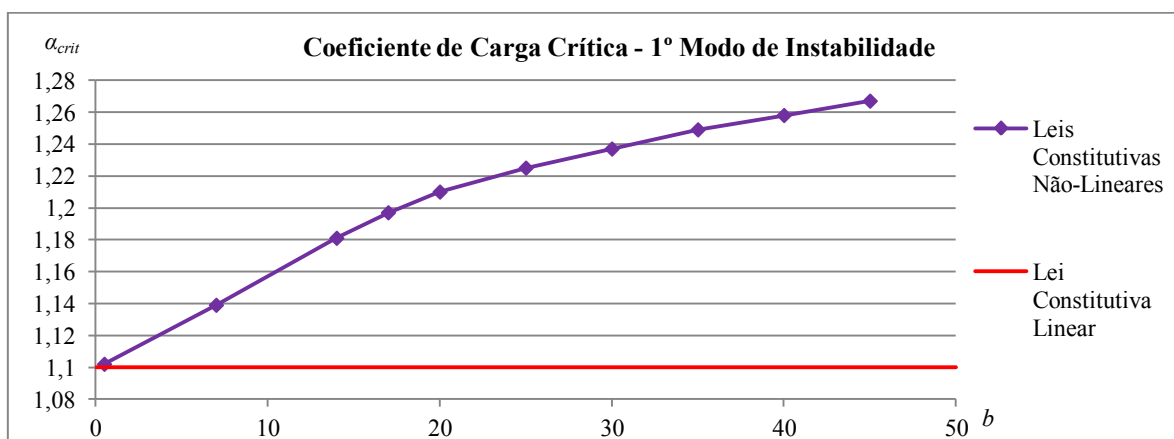


Figura 5.15 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural - Malha B - Casca 20 metros

5.6 Malha B - Casca 15m

Neste caso também não são apresentadas novidades relevantes em comparação com as estruturas com altura máxima de 15 metros geradas a partir da Malha A. Mais uma vez verificou-se que para além de serem inferiores à unidade, os resultados obtidos para os coeficientes de carga crítica evoluem de forma sensivelmente constante à medida que se aumenta o valor do parâmetro b das leis constitutivas não-lineares. Os resultados dos coeficientes de carga crítica correspondentes às estruturas com altura máxima de 15 metros geradas a partir da Malha B são apresentados pela Figura 5.16.

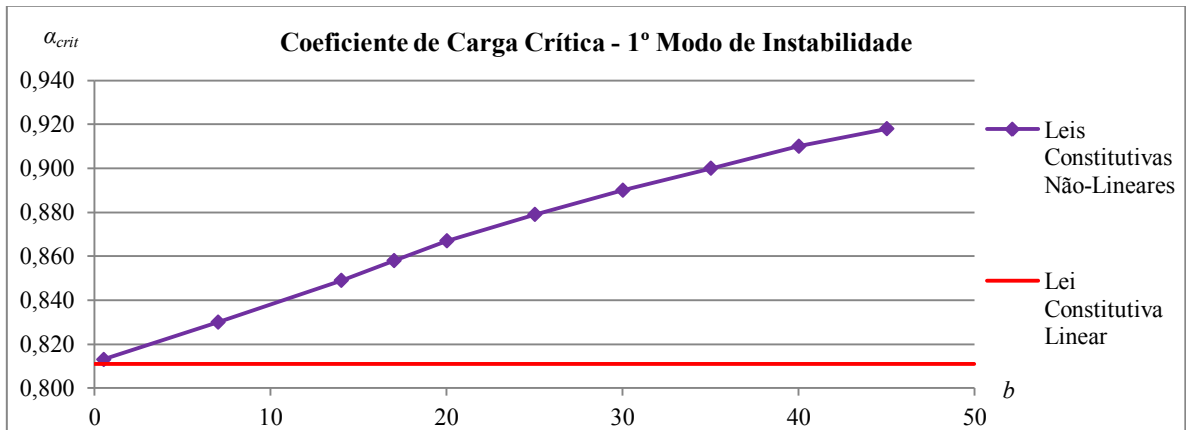


Figura 5.15 - Coeficiente de Carga Crítica - 1º Modo de Instabilidade - Análise Estrutural -
Malha B - Casca 15 metros

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

De um modo geral conclui-se que a utilização de leis constitutivas não-lineares na determinação da forma de estruturas de casca reticulada traz benefícios em vários aspetos.

O facto de ser difícil prever qual a lei constitutiva que gera a forma de equilíbrio mais eficiente em termos de tensões e/ou com melhor performance em termos de instabilidade leva a que deva ser feita uma análise exaustiva, considerando vários parâmetros diferentes para as leis constitutivas não-lineares. Por outro lado, esta análise exaustiva é altamente compensatória na medida em que conduz a resultados que se podem revelar significativamente melhores que aqueles que se conseguem através de leis constitutivas lineares.

Tal como é difícil prever os parâmetros da lei constitutiva que conduzem à forma de equilíbrio mais eficiente, também é difícil estimar *a priori* até que ponto se conseguem obter melhoras em relação à solução gerada através da utilização de uma lei constitutiva linear. Relativamente ao valor absoluto máximo da tensão, nos casos que este estudo contempla, obteve-se uma redução máxima na ordem dos 16%. Para além de ser uma parcela considerável, uma análise mais exaustiva utilizando parâmetros com valores na vizinhança dos daquela que se revelou mais efetiva poderia apresentar resultados ainda mais aprimorados. Por outro lado, esta otimização também depende fortemente da geometria do contorno inicial. Assim, nada impede que para diferentes configurações geométricas se consigam obter maiores melhoras em relação ao caso gerado através de uma lei constitutiva linear.

No que diz respeito ao comportamento das referidas estruturas perante fenómenos de instabilidade, nos casos testados a partir de leis constitutivas não-lineares obtiveram-se sempre melhorias, nalguns casos bastante significativas, quando comparadas com as soluções provenientes da utilização de leis constitutivas lineares.

Uma vez que as formas derivadas de cada uma das leis constitutivas são diferentes, a título de curiosidade, foi elaborado um pequeno estudo acerca da quantidade de material utilizada nas estruturas com altura máxima de 25 metros geradas a partir da Malha A. Apesar da diferença ser pequena verificou-se que a solução que utiliza uma menor quantidade de material é

precisamente a solução na qual se verificou uma melhor eficiência em termos de tensões. A solução gerada através da lei constitutiva linear, segundo este estudo utilizaria um total de 9654,612 metros lineares de aço, enquanto à solução otimizada em termos de tensões corresponde um valor de 9626,858 metros. Apesar de a diferença ser pouco notória quando comparada com a quantidade total, não deixa de ser um indicador positivo. Tal como no caso das tensões máximas esta discrepância entre soluções é sensível ao caso a que correspondem, podendo verificar-se ainda mais flagrante em certos casos.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Ao longo do desenvolvimento deste estudo foram surgindo ideias acerca de potenciais trabalhos a serem realizados como continuação/complemento deste. Como sugestões para trabalhos futuros propõe-se fundamentalmente dois temas:

- Determinação da forma de cascas reticuladas através do cálculo da deformada de uma malha de elementos sujeitos a esforço axial puro com a particularidade de se estabelecerem *a priori* comprimentos *standard* para os elementos da estrutura. Desta forma provavelmente não se conseguiria obter propriamente uma configuração de equilíbrio como feito neste trabalho, ainda assim, verificar até que ponto este tipo de solução perderia performance seria um estudo conveniente.
- Determinação da forma otimizada de cascas reticuladas tendo em conta vários casos de carga de projeto. Isto é, determinar a forma mais eficiente a resistir quer por exemplo a uma hipotética sobrecarga da neve, mas também eficiente para resistir a ações do vento segundo uma determinada direção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adriaenssens, S.M.L e Barnes, M.R. (2001). "Tensegrity spline beam and grid shell structures". *Engineering Structures*, Vol. 23, pp. 29-36.

Annular - Timberbuild for the 21st century (2002). *The Savill Gardens Gridshell, Glen Howells Architects*. Acedido em 12 de Junho de 2012, em : http://www.fourthdoor.org/annular/?page_id=453

Barnes, M.R. (1977). "Form-finding and Analysis of tension space structures by Dynamic Relaxation". Ph.D. thesis, City University. London.

Berger, H. (2007). "Structural Form in Architecture". *STRUCTURE magazine*, November 2007, pp. 37-41.

Day, A.S. (1965). "An introduction to dynamic relaxation". *The engineer*, Vol. 219, pp. 218-221.

Deifeld, T.E.C. (2005). "Sobre a Análise e os Processos Construtivos das Estruturas Tensegrity", Tese de Doutoramento em Engenharia de Estruturas. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. 96 pp.

Dias da Silva, V. (2002). "Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas", Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

Dias da Silva, V. (2004). "Mecânica e Resistência dos Materiais". 3ª edição, ZUARI. Coimbra.

Dias da Silva, V. (2007). "Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas", rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Edição de Julho, pp. 21-35.

Douthe, C., Baverel, O. e Caron, J.-F. (2006). "Form-Finding of a Grid Shell in Composite Materials". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 47, nº 150.

Fortran 77 4.0 Reference Manual (1995). SunSoft - A Sun Microsystems, Inc. Business, USA

GNU - Octave Reference Manual (2011). High-level interactive language for numerical computations Edition 3 for Octave version 3.6.1. Acedido em Março de 2012 em : <http://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>

Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R. e Bayo, E. (2006). "Topological Mapping for Tension Structures". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 132, nº 6, pp. 970-977.

LAPACK (2011). Linear Algebra PACKage, versão 3.4.0. Acedido em Março de 2012 em : <http://www.netlib.org/lapack/>

Lewis, W.J. (1989). "The efficiency of Numerical Methods for the Analysis of Prestressed Nets and Pin-Jointed Frame Structures", *Computers & Structures*, Vol. 33(3), pp. 791-800.

Linkwitz, K. (1999). "About formfinding of double-curved structures". *Engineering Structures*, Vol.21, pp. 709-718.

Maurin, B. e Motro, R. (1999). "The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes". *Engineering Structures*, Vol. 20, pp. 712-719.

Oliveira, M.B. e Barbato, R.L.A (2005). "Estudo das Estruturas de Membrana: Uma Abordagem Integrada do Sistema Construtivo, do Processo de Projetar e dos Métodos de Análise". *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, Vol.7, nº22, pp. 107-122.

Paoli, C. (2007). "Past and Future of Grid Shell Structures". Master Thesis in Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology. 63 pp.

Pauletti, R.M.O. e Pimenta, P.M. (2008). "The natural force density method for the shape finding of taut structures". *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 197, pp. 4419-4428.

PGPLOT User's Manual (1997). PGPLOT Graphics Subroutine Library. California Institute of Technology, USA. Acedido em Março de 2012 em: <http://www.astro.caltech.edu/~tjp/pgplot/contents.html>

Shigeru Ban Architects (2010). "Japan Pavilion, Expo 2000 Hanover - Germany, 2000". Acedido em 15 de Junho de 2012, em: http://www.shigerubanarchitects.com/SBA_WORKS/SBA_PAPER/SBA_PAPER_10/SBA_paper_10.html

Sullivan, M.A. (1999). "Kresge Auditorium, MIT campus". Acedido em 20 de Junho de 2012, em : <http://www.bluffton.edu/~sullivanm/kresgea/kresgea.html>

Topping, B.H.V e Iványi, P. (2007). "Computer Aided Design of Cable membrane Structures", *Saxe-Coburg Publications*, Edinburgh, Scotland.

Veenendaal, D. e Block, P. (2011). "A Framework for Comparing Form Finding Methods". *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium 2011*, London.

Wakefield, D.S. (1999). "Engineering analysis of tension structures: theory and practice", *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 680-690.

Wendland, D. (2000). "Model-Based Formfinding Processes: Free Forms in Structural and Architectural Design", *International Seminar*, Politecnico di Torino, Turin.